

ストーカーとその利点

佐藤 憲太郎*

独立行政法人産業技術総合研究所
システム検証研究センター
ken-satou@aist.go.jp

神戸大学自然科学研究科
博士後期課程
sato@kurt.scitec.kobe-u.ac.jp

本稿は、平成 16 年 2 月に兵庫県城崎郡城崎町で開催された集会「モジュライ理論と不変量」での筆者の講演原稿を基に、筆者の関連研究のその後の進展を反映して若干の修正を加え、筆者の修士論文 [0] の一部の解説を試みたものである。

概要

トポスとは、層全体のなす圏の一般化であり、次の二つの側面がある。第一は、空間はその上の連続関数全体により規定される、或はその上の層全体により規定されるという観点に基づく空間の抽象化としての側面である。第二は、全数学を展開する枠組としての集合の宇宙が、空間に沿って連続的に変化しているという見方による、必ずしも固定されてはいないものも考えるという意味での、集合の宇宙の抽象化の側面である。Cohen が連続体仮説の独立性証明の為に導入した、無矛盾性の数学における最も基本的な手法の一つである強制法は、この意味でトポスと見なせることが知られている。

本稿では、空間における点の概念が対応する抽象化を考える。無矛盾性の数学の文脈では、既存の点の概念が使えない。特に、二つの代表的な既存の点の概念、位相空間上の点及びトポスの点（幾何学的点）では、前者は抽象度が低すぎ、後者は抽象度が高すぎる。そこで、茎を定義するものとして点の概念を素朴に抽象化し、ストーカーと名付ける。そしてこのストーカーの概念が、上記の二つの概念の中間的な抽象度を持つこと、そして Grothendieck-トポスにおけるトポスの点の特徴付けに照らすと自然なクラスをなしていること、などから、素朴な定義であるにも拘らず、非常に抽象的に定義されるトポスの点の抽象度の比較的低い設定での対応物として妥当であることを説明する。そしてこの概念を用いると、トポス理論の非常に抽象的な設定を用いずに、位相空間上での話とほぼ並行に、素朴な設定で茎などを扱うことが出来ることを示す。最後に、無矛盾性の数学への、ストーカーの概念の幾つかの応用を挙げたい。

0 本稿の構成

まず第 1 節で、本稿の主題であるストーカー理論 (stalker theory) とは何でないかを説明する。

次いで第 2 節では、無矛盾性の数学 (mathematics of consistency) について、その主題、基本的な考え方などを説明する。ストーカー理論は、元々、この分野への応用を意図したものであった。

第 3 節では、現代の抽象数学を記述する汎用性の高い大きな二つの方法、集合論と圏論について、筆者の私見から比較する。この比較が、以降のストーカー理論の理解に資すると思われる。

第 4 節では、トポス理論の基本的な定義、諸性質を説明する。特に、空間、連続写像、点と言った概念のトポス理論における対応物について、どのような視点に基づく一般化なのかを解説する。

第 5 節では、これらのトポス理論の既存の概念が無矛盾性の数学の文脈では不都合を生じるということを説明し、新たに点の一般化としてストーカーの概念を導入して、不都合の解決を図る。更にこの概念は、一見すると非常に安直であるが、ある意味で点の概念として非常に適切なものとなっていることを、様々な既存の点の概念との比較を通じて明らかにする。

最後に第 6 節で、この理論の幾つかの応用を挙げたい。ここで挙げる応用は、無矛盾性の数学への応用可能性を更に利用したものである。

*城崎セミナー開催時には、博士前期課程に在籍しておりましたが、平成 16 年 4 月に博士後期課程に進学致しました。同時に、独立行政法人産業技術総合研究所システム検証研究センターで非常勤の研究員として採用されました。

1 ストーカー理論は何でないか

近年「ストーカー」という語は、社会の多くの場面で用いられるようになってきた。そこでこの言葉が、広く社会に浸透する契機となったであろう出来事を、年表の形で纏めてみた。

年・月	主な出来事
昭和 56 年	タルコフスキー監督「ストーカー」日本公開
昭和 58 年	ストルガツキー「ストーカー」出版
平成 09 年 01-03 月	TBS 系「ストーカー・誘う女」放映 日テレ系「ストーカー・逃げ切れぬ愛」放映
平成 11 年 10 月	桶川女子大生ストーカー殺人事件
平成 12 年 04 月	沼津女子高生ストーカー殺人事件
平成 12 年 05 月	ストーカー規制法成立・公布
平成 12 年 11 月	ストーカー規制法施行

ここで、昭和の映画や小説の題名として用いられた「ストーカー」は、「密猟者」という邦訳が与えられている。このことから分かるように、日本社会における「ストーカー」の語は、昭和と平成ではかなり異なった意味を持っていると考えられる。そしてこの言葉が、今日ほどまでに社会の多くの場面で用いられるようになったのは、テレビドラマのテーマになったり、殺人事件に発展するなどして、社会問題化した平成になって以降のことであろう。そしてこの段階で「密猟者」の意味がほぼ駆逐されてしまい、今日ではストーカー規制法（ストーカー行為等の規制等に関する法律）に定める「ストーカー行為」を行う者の意味に限定されてしまったと言える。尚、ストーカー規制法では、「ストーカー行為」とは「同一の者に対し、つきまとい等を反復してすること」¹と規定されている。但し、この法律においては、つきまとい等の定義として「特定の者に対する恋愛感情その他の好意の感情又はそれが満たされなかったことに対する怨恨の感情を充足する目的」がある、という条件が付けられており、この条件が社会一般で広く浸透している「ストーカー」の言葉の意味に合致しているかは、議論の余地がある。

いずれにせよ、このように「ストーカー」という語は、既に社会的に定着した一つの意味を有してしまっているが、本稿で解説する「ストーカー理論」の「ストーカー」にはそのような意味はない。従って、この理論は次に挙げる目的には何らの有用性も持たない。

- ・「つきまとい行為」や「ストーカー行為」を行う者の傾向を知り、これらの行為の予防に役立てたい、或は現に行われているこれら行為をやめさせたい。
- ・現に「つきまとい行為」や「ストーカー行為」を行っているか、或は将来にそれら行為を行う予定があり、これら行為の技能を高めたい。
- ・現に密猟を行っているか、或は将来に密猟を行う予定があり、密猟の技能を高めたい。
- ・密漁を行う者の傾向を知り、これらの行為の予防に役立てたい、或は現に行われているこれら行為をやめさせたい。

ここに挙げた目的には、犯罪心理学等、より適切な理論がある筈であり、それら理論の適当な文献を参照されたい。

¹一部の「つきまとい」行為については、「身体 of 安全、住居等の平穩若しくは名譽が害され、又は行動の自由が著しく害される不安を覚えさせるような方法により行われる場合に限る」と言う制約がある。

2 無矛盾性の数学

無矛盾性の数学 (mathematics of consistency) ²とは、数学に現れる種々の言明の無矛盾性について、研究する数学の一分野である。起源は、選択公理 (axiom of choice) や連続体仮説 (continuum hypothesis) の無矛盾性 (consistency)、独立性 (independency) などの研究にあると言えよう。現在では、無矛盾性の強さ (consistency strength) の比較が主な研究対象となっている。

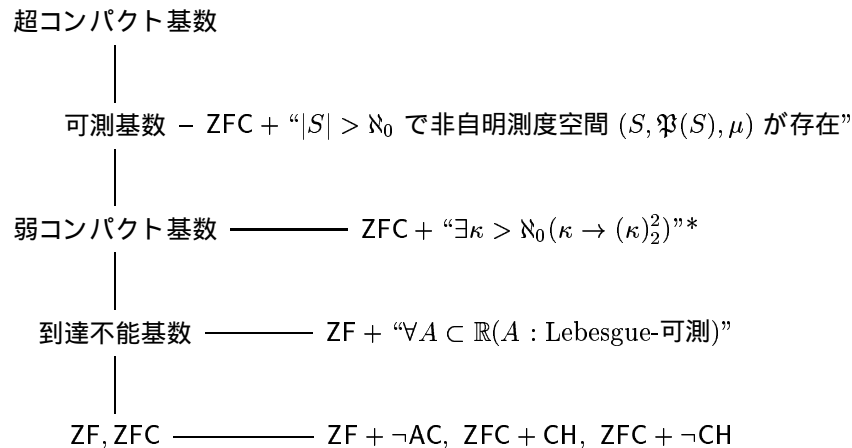
ZFC は通常の数学 (選択公理を認める) を表すものと考えよう³。連続体仮説 (CH) の無矛盾性とは、 $ZFC + CH$ から矛盾 $\perp$ が証明出来ないことであり、これを $ZFC + CH \not\vdash \perp$ 或は $\text{Con}(ZFC + CH)$ と表す。因にこれは $ZFC \not\vdash \neg CH$ と同値である。

ここで独立性は無矛盾性の特殊な場合であることに注意しよう。例えば、連続体仮説 CH が独立であるとは、連続体仮説もその否定も通常の数学で証明できない、つまり $ZFC \not\vdash CH$ かつ $ZFC \not\vdash \neg CH$ である。それぞれ $ZFC + \neg CH \not\vdash \perp$ 及び $ZFC + CH \not\vdash \perp$ と同値であり、従って連続体仮説 CH の独立性は、 $\text{Con}(ZFC + \neg CH)$ かつ $\text{Con}(ZFC + CH)$ と同値なのである。

よく知られているように、連続体仮説が独立であることは P.Cohen によって 1963 年に示された。このように、数学の命題は必ずしも真偽が定まるものではなく、現在、未解決の問題の中にも実は独立であるような命題もあるかも知れない。それ故、数学の研究においては、「正しいか否か」「一般に成立するか反例が見つかるか」といった観点からのアプローチだけでなく、「独立かも知れない」という観点からのアプローチも必要であると、筆者は考えている。

2.1 無矛盾性の強さの比較

P.Cohen による連続体仮説の独立性証明以降、様々な無矛盾・独立命題が発見されて来たが、その一方で無矛盾性の強さには階層があることが分かってきた。そしてその階層は、巨大基数 (large cardinal) と呼ばれる特殊な基数 (cardinal) ⁴を尺度として表現できる。より正確に言えば、各言明はその無矛盾性が、何らかの巨大基数の存在の無矛盾性と同値になっており、巨大基数の存在の無矛盾性の強弱は、その巨大基数の大小とほぼ一致しているのである。主な巨大基数と、無矛盾性の強さがその基数に対応する主な命題を表として纏めると次のようになる。



²従来、この分野は公理的集合論 (axiomatic set theory)、或は単に集合論 (set theory) と呼ばれている。しかし本稿では、数学を記述する非常に汎用性のある主要な二つの枠組みの一つとして「集合論」の語を用いる。そこで、この分野を表す呼称として「無矛盾性の数学」という名称を用いる。

³実際には「通常の数学」で認められる原理よりも強いと言われている。

⁴濃度 (potency) と同一視しても差し支えないが、正確には濃度の目盛に当る。

$$\kappa \rightarrow (\kappa)_2^2 : |A| = \kappa \text{ で } A \times A = P_1 \amalg P_2 \text{ ならば、} B \subset A \text{ で } |B| = \kappa \text{ かつ}$$

$$B \times B \subset P_1 \text{ か } B \times B \subset P_2 \text{ なるものがある。}$$

但し、ここで上下は無矛盾性の強さに真の強弱があること、左右は無矛盾性の強さが等しいことを示している。

P.Cohen の連続体仮説の独立性証明は、正確には通常の数学が無矛盾である ($\text{Con}(\text{ZFC})$) という前提が必要である。従って連続体仮説の独立性と呼んでいるものは、実は $\text{Con}(\text{ZFC}) \vdash \text{Con}(\text{ZFC} + \text{CH})$ ⁵ かつ $\text{Con}(\text{ZFC}) \vdash \text{Con}(\text{ZFC} + \neg \text{CH})$ ということである。逆の $\text{Con}(\text{ZFC} + \text{CH}) \vdash \text{Con}(\text{ZFC})$ や $\text{Con}(\text{ZFC} + \neg \text{CH}) \vdash \text{Con}(\text{ZFC})$ は自明であるから、連続体仮説の独立性は

$$\text{Con}(\text{ZFC}) \leftrightarrow \text{Con}(\text{ZFC} + \text{CH}) \text{ かつ } \text{Con}(\text{ZFC}) \leftrightarrow \text{Con}(\text{ZFC} + \neg \text{CH})$$

と言い換えられる。これが表の一番下の横線の意味である。

無矛盾性の強さが等しいことを無矛盾等価 (equiconsistent) と言うが、これを論理的な同値と混同してはならない。例えば今述べたように、連続体仮説の独立性は ZFC , $\text{ZFC} + \text{CH}$, $\text{ZFC} + \neg \text{CH}$ がいずれも無矛盾等価であることを意味するが、しかしこれらが論理的同値 ($\text{ZFC} \leftrightarrow \text{ZFC} + \text{CH} \leftrightarrow \text{ZFC} + \neg \text{CH}$) であることを意味しない。あくまで $\text{Con}(-)$ を付けてからの同値であることに注意されたい。

選択公理の下では、 $\mathbb{R}$ の部分集合で Lebesgue-非可測なもの存在が示されているが、選択公理を仮定しない場合にすべての $\mathbb{R}$ の部分集合が Lebesgue-可測であるという命題は到達不可能基数 (inaccessible cardinal) と呼ばれる基数の存在と無矛盾等価となる。また、もしすべての $\mathbb{R}$ の部分集合が Lebesgue-可測であるならば、 $(\mathbb{R}, \wp(\mathbb{R}), \mu)$ (但し μ は Lebesgue-測度) は σ -加法族が冪集合全体となる非自明な測度空間となる。今は選択公理を仮定しない話であったが、選択公理の下でも σ -加法族が冪集合全体となる非自明な測度空間が存在するという命題は、遥かに無矛盾性の強さの強い可測基数 (measurable cardinal) の存在と無矛盾等価となる。ここに自明な測度空間とは、 δ -測度のことである。

2.2 無矛盾性と証明不可能性

冒頭でも述べたように、ある命題の無矛盾性はその命題の否定の証明不可能性を意味する。例えば連続体仮説の否定の無矛盾性 $\text{Con}(\text{ZFC} + \neg \text{CH})$ は連続体仮説の証明不可能性 $\text{ZFC} \not\vdash \text{CH}$ を意味する。 $\text{Con}(\text{ZFC}) \vdash \text{Con}(\text{ZFC} + \neg \text{CH})$ であったから、つまり

「連続体仮説は証明できない」ことは証明出来る。(P.Cohen, 1963)

さて、ここで選択公理を仮定しない場合に「Lebesgue-非可測な $\mathbb{R}$ の部分集合が存在する」という命題の証明不可能性を考えてみよう。この命題を $\exists A \subset \mathbb{R} \text{ s.t. } \neg \text{LM}(A)$ と表そう。この命題の (選択公理なしでの) 証明不可能性は、即ち $\text{Con}(\text{ZF} + \neg \text{LM}(\mathbb{R}))$ と同じである。しかし上述の表から、 $\text{ZF} + \neg \text{LM}(\mathbb{R})$ という命題の無矛盾性の強さは、通常の数学よりも真に強い、つまり $\text{Con}(\text{ZF} + \neg \text{LM}(\mathbb{R})) \vdash \text{Con}(\text{ZFC})$ であるが $\text{Con}(\text{ZFC}) \not\vdash \text{Con}(\text{ZF} + \neg \text{LM}(\mathbb{R}))$ なのである。言い換えれば「Lebesgue-非可測な $\mathbb{R}$ の部分集合が存在する」という命題の証明不可能性は証明出来ないのである。つまり

「選択公理なしで Lebesgue-非可測な $\mathbb{R}$ の部分集合の存在は証明できない」ことは証明できない。(S.Shelah [6], 1984)

⁵これは K.Gödel による結果である。

2.3 ストーカー理論の背景

これまで述べてきたことから分かるように、無矛盾性の数学においては、数学の種々の命題の無矛盾性の等価性、及びその強弱を調べるのが重要なテーマとなっている。この際に用いられる道具としては、無矛盾性の等価性を示す際には generic-拡大 (generic extension) と呼ばれる方法が中心的な役割を果たし、他方、無矛盾性の強弱を示す際には超冪 (ultrapower)⁶やエクステンダー (extender) と呼ばれる手法が多く用いられる⁷。また、これらの手法の異なる二つを連続して使用することも多い。

そこで、generic-拡大、超冪、エクステンダーなどの方法を統一的に扱える枠組みはないだろうかと考えるのは自然なことである。この問題に対して鍵となる考察は、いずれの方法も何らかの層 (sheaf) から茎 (stalk) を取る操作のように見えるということである。従ってもしこれらの操作が、何らかの層から茎を取ることで定式化されたならば、統一的な扱いに近づくのではないかと考えられる訳である。

更には、無矛盾性の数学においては、こうした操作に関する命題の無矛盾性の強さが、考察の対象として扱いやすいものなので、従ってもし上記の定式化がなされれば、層、茎と言ったある意味でより抽象的な概念に関わる命題が無矛盾性の数学の対象となる可能性がある。上掲の表の通り、現在の所、無矛盾性についての結果が得られている命題は具体的な無限組合せ論 (infinitary combinatorics) 的命題ばかりなのであるが、これを広げることが出来るのではないかと期待できるのである。

さて、これらの操作、特に generic-拡大が茎を取る操作に対応していることは、恐らく generic-拡大を知っている者は誰でも感じる所である。しかしながら、筆者の知る限り、そのような定式化は成功していなかった。問題となる点に関しては後述するが、点や茎を表現する為の既存の枠組みではいずれにも不都合が生じてしまうのである。

筆者の修士論文では、この定式化の問題を解決することを試みた。その為には、より細かい論点として次のものが挙げられる。

1. 上記定式化を可能とする、点や茎を表現する概念を考案し、それら概念が点や茎を表現するものとしてその場かぎりのものではなく、妥当なものであるという一般論からの根拠を示すこと
2. 上記定式化において現れる層や茎を定義する際に基礎となる圏として適切なものを考案し、その圏の諸性質、及びその圏で定義される前層 (presheaf)、層、茎の関係を調べること
3. 全数学を展開する基盤としての集合の世界が満すべきであると要請されているが、他の数学的構造とはなじみのない諸性質、つまり外延性 (extensionality)、集合性 (set-hood)、整礎性 (well-foundedness) と、前層、層、茎などの概念との関係を調べること

修士論文では、これら 3 つの論点を論じることを通して、generic-拡大などの操作を何らかの層の茎として定式化することにある意味で成功した。

しかし、ここに挙げた論点 2 について論じるには、論理的な構造のなす層や前層を扱う為に数理論理学 (mathematical logic) の知識が、論点 3 については更に公理的集合論・無矛盾性の数学の知識を前提とするので、本稿では論点 1 のみを取り扱う。他の論点を含めた全貌を知りたい読者は、筆者の修士論文 [0] に直接当たりたい。

⁶超準解析 (non-standard analysis) の正当化や、モデル論的代数幾何学で用いられる超冪と本質的に同じものであるが、全く同じものではない。

⁷これらの手法を用いて、最終的には「自分自身の無矛盾性を示す論理式を証明できない」というかの有名な Gödel 第二不完全性定理に帰着させる。現在知られている無矛盾性の真の強弱を示す方法は、須くこの第二不完全性に帰着させる。

2.4 無矛盾性の数学の考え方

ここでは、無矛盾性の数学における典型的な議論の仕方について解説したい。⁸

ここでは具体例として、連続体仮説の独立性証明を取り上げる。つまり $ZFC \not\vdash CH$ と $ZFC \not\vdash \neg CH$ を示すことである。まず連続体仮説とは如何なる言明であったかを確認しよう。

定義 2.1 連続体仮説 CH とは次のような言明である。

$$\aleph_0 < |A| < 2^{\aleph_0} = |\mathbb{R}| \text{ となる集合 } A \text{ が存在しない}$$

このような証明不可能性の証明は、どのような方法で示せば良いだろうか。例えば、環の公理から単位元の存在も不存在も証明できないつまり (環の公理) $\not\vdash$ (単位元の存在) かつ (環の公理) $\not\vdash \neg$ (単位元の存在) であるが、それを示すにはどうするだろうか？ 反例、つまり単位元を持たない環と単位元を持つ環を具体的に作って見せるのが通常の証明方法であろう。

同様に、反例を作って見せれば、独立性証明は出来るだろう。つまり $\aleph_0 < |A| < 2^{\aleph_0} = |\mathbb{R}|$ となる集合 A が存在する「何か」と、そのような集合が存在しない「何か」を構成して見せれば良い。

しかしその「何か」とは何であろうか？ そもそも $\aleph_0 < |A| < 2^{\aleph_0} = |\mathbb{R}|$ となる集合 A がどこに存在するとかしないとか言っているのであろうか？ それは、数学で考える限りの世界である。これを (集合論の) 宇宙 (universe) という。

注意 2.2 数学で考える限りのものの領域を宇宙 (universe) と呼ぶ。

つまり $\aleph_0 < |A| < 2^{\aleph_0} = |\mathbb{R}|$ となる集合 A が存在する宇宙と、存在しない宇宙がある訳である。宇宙は、複数存在するということに注意されたい。

注意 2.3 異なる複数の宇宙が存在する。

宇宙の概念は、非常に掴み所のないように見えるが、「代数的な関係がある限りのものの領域」としての代数閉体と基本にあるアイディアは同じである。

但し「代数的な関係のある」が「数学で考える」に代ると本質的に異なることがある。それはこうした議論そのものも数学であるということであり、このような話をする際はどこのレベルで議論をしているかを常に意識しなければ混乱が生じる。例えば、ここで考えた連続体仮説の成立しない宇宙も数学で考える対象であるから、宇宙の要素であり、その中にある $\aleph_0 < |A| < 2^{\aleph_0} = |\mathbb{R}|$ となる集合 A も数学で考える対象ではないのか、そうならば如何なる宇宙にも $\aleph_0 < |A| < 2^{\aleph_0} = |\mathbb{R}|$ となる集合 A が存在するのではないか、という疑念である。

宇宙を扱う立場は、数学を超えた立場から数学そのものを考察の対象とするという意味から「超数学」(meta-mathematics) と呼ばれるものであり、その宇宙が「数学で考える限りのものの領域」となっていると言う場合の (つまりその宇宙の中で展開される) 数学ではない。しかし超数学も数学に变りはなく、この超数学的議論で考える限りのものの領域を宇宙と考えることも出来る。これを「超宇宙」とでも呼ぶのだろうか、そしてそれを扱う立場を「超超数学」とでも呼べば良いだろうか？ 或は逆に、最初の宇宙の中で展開される数学として、超数学的議論を行うことも勿論可能である。要は、どのレベルで考えているかということの区別こそが重要なのである。⁹

⁸数理論理学や無矛盾性の数学についての基本的な知識のない読者を想定しているので、直観的で厳密でない言い回しを多用する。厳密な理解を目的とする場合は、[4]などを参照されたい。

⁹こうしたある種の柔軟性が、「連続体仮説は証明できない」という単なる超数学的命題のみならず、「選択公理なしで Lebesgue-非可測集合の存在が証明できないことは証明できない」というある意味で超超数学的命題が証明できることの要因と見ることも出来よう。原理的には、任意有限回「超」を繰り返した数学を考えることは可能である。

さて、宇宙は「数学で考える限りのものの領域」であるが、我々人間が式で指し示すことが出来るのは所詮、可算個である。従って宇宙は、その濃度が $\aleph_0$ で十分だということが分かる¹⁰。

注意 2.4 宇宙は可算濃度のもので十分である。¹¹

しかしそうすると、実数はすべて数学で考える限りのものであり、実数全体も自然数の冪集合は可算集合である宇宙の部分集合に過ぎない、つまり実数全体、自然数の冪集合も可算ということになるのではないだろうか。では、学部一回生で学ぶ「自然数の冪集合の濃度は可算ではない」というのは嘘なのだろうか？

「自然数の冪集合の濃度は可算ではない」という証明を振り返ってみよう。

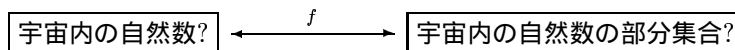
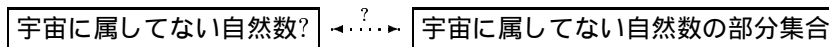
仮に自然数の冪集合 $\mathfrak{P}(\mathbb{N})$ が可算であるとしよう。すると全単射 $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathfrak{P}(\mathbb{N})$ が存在する。ここで $A = \{n \in \mathbb{N} | n \notin f(n)\}$ とすれば、 $A \in \mathfrak{P}(\mathbb{N})$ であるから $A = f(n_0)$ となる $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在する。

$$n_0 \in A \iff n_0 \notin f(n_0) \iff n_0 \in \{n \in \mathbb{N} | n \notin f(n)\} \iff n_0 \notin A$$

いまの場合、「我々人間が式で指し示す」とか「宇宙の濃度」などと言っているのは、当然、超数学のレベルでの話である。

注意 2.5 宇宙の濃度が可算となるのは、あくまでその宇宙の外側から見ての話である。

従って可算であることを担保する全単射 $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathfrak{P}(\mathbb{N})$ は、超数学のレベルにあるものであり、最初の数学のレベルのものではない、つまり宇宙の元である保証はない。そしてその f から $A = \{n \in \mathbb{N} | n \in f(n)\}$ という「数学的」操作を施して作った集合 A も宇宙の元である保証はない。(代数閉体 $\overline{F}$ に属さない超越元 a から、何らかの「代数的」操作を施して作ったものが $\overline{F}$ に属す保証がないことと同じである。) f によって一対一対応が付くのは、宇宙の中の自然数と宇宙の中の自然数の部分集合であり、宇宙の中にはない A については $A = f(n_0)$ という形で対応する n_0 が存在する保証は何もない訳である。



ここで取り上げた一見矛盾に思えるものは、Skolem-逆理 (Skolem paradox) と呼ばれている。上述の通り、これは決して正真正銘の矛盾ではなく、一見すると矛盾かと思わせるという程度のものである。しかしこの現象は、複数の宇宙を同時に扱うという無矛盾性の数学で広く行われている手法を理解する上で非常に有用な例であると思われる。

そしてこの複数の宇宙を同時に扱う必要があるということが、前小節で触れた、generic-拡大を基として定式化する際の、既存の点や茎の概念が使えない要因なのである。

¹⁰ 多少の数理論理学の知識のある読者には、この意味する内容が、Gödel の完全性定理「可算言語は可算モデルを持つ」のことなのか、或は反映原理 (reflection principle) 「ZFC の任意有限部分集合は可算推移モデルを持つ」なのかが曖昧であることに気付かれよう。本稿では「宇宙」という語は、推移的な類 (class) 上の標準 (standard) な構造を指し、従ってここで筆者が意図しているものは後者である。従って正確には、ここでいう宇宙は集合論の公理の任意有限個しか充足しないことになる。

¹¹ 英語で言えば “We may assume that the universe is of size $\aleph_0$ ” であって “It suffices to consider only countable universes” ではない。

3 圏論と集合論

数学全般を記述する枠組みとしては、現在の所、集合論と圏論が知られている。数学全般を記述する基本的な枠組みたるには、次の二つ¹²が最低限必要であると思われるが、この両者はともにこの二条件を満している。

- 論理との関係が明瞭であること
- 数学全般を記述する汎用性があること

集合論については、「かつ」や「又は」という論理的な演算が集合の共通部分、和集合と言った集合演算に対応するだけでなく、一般に論理式 $\varphi(x)$ に対してその内包 (comprehension) $\{a \in A \mid \varphi(a)\}$ という集合が定義出来¹³、その意味で論理との関係は明瞭であるし、他方、全数学は集合論の基盤の上に成り立っていると言われるようにほぼすべての数学の概念・議論は集合の言葉を使って記述し得る。圏論に関して、対応関係は集合論の場合と異なるが論理との関係はやはり明瞭であり¹⁴、また数学の至るところで圏論的な記述が見られるように汎用性も非常に高い。

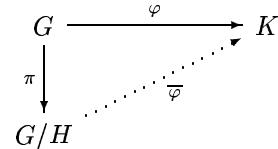
両者の長所と短所について考えてみよう。集合論的な記述は、個々の対象の「物理的な材質」を通した記述であって、ある意味で粗野な、素朴な記述の方法である。そうした素朴さ故に統一的な扱いには、総じて不便であるといえよう。他方、圏論的な記述は、全体の中での役割を軸にした、言ってみれば他者との関係を中心にした記述の仕方であり、統一的扱いが容易で洗練された記述法であると言えよう。具体例として、剰余群の、集合論的な定義と圏論的な定義を比べてみよう。

集合論的記述 剰余群の「作り方」を定義にしよう。

$$G/H = \{gH \mid g \in G\} \quad gH = \{g \cdot h \mid h \in H\}$$

圏論的記述 剰余群として最低限、満すべき性質を記述する。

任意の群準同型 $\varphi : G \rightarrow K$ が $H \subset \ker(\varphi)$ を満すなら、
 $\varphi = \bar{\varphi} \circ \pi$ を満す群準同型 $\bar{\varphi} : G/H \rightarrow K$ が一意に存在する。



ここで、集合論的な剰余群の定義において、その物理的な材質としては、 gH たちの集合という性質を持っているが、これは剰余群が剰余群であることには非本質的な情報である。剰余群が剰余群たるには、剰余群の機能を果たせば良いのである。

¹²ここでは敢えて、基礎づけの能力を挙げないことにする。実際には、圏論特にトポス論を数学の基礎として用いることが可能であると言われている ([2]VI.10 など参照)。確かに、圏論・トポス論を数学の基礎として採用することは技術的には可能なのであるが、圏論・トポス論の無矛盾性が集合論によるモデルの存在を通して理解されているのに対して、集合論はそれ自身の尤もらしさから無矛盾性が「信頼」されている。そうした観点から考えると、圏論・トポス論が集合論に代る数学の基礎であるとは、筆者には思えないのである。

他方、自然数論や二階自然数論と呼ばれるその簡単な拡張は、集合論以上にそれ自身の尤もらしさから無矛盾性が「信頼」されている。そして、現代の抽象数学の多くの部分は記述できないものの、古典的な数学の殆んどを記述できる。この意味でこれら自然数論や二階自然数論は、数学の基礎づけ能力があると言えるのかも知れない。しかし、筆者は抽象数学こそが数学の精神的自由さという最も重要な思想の核心であると考えており、従って抽象数学を込めた意味での数学を取り扱いたいのである。

尚、圏論・トポス論による数学の記述能力は、実は集合論によるそれよりも弱く、自然数論と集合論の中間にあることが知られている。しかし集合論は「通常の数学」よりかなり強いと言われており、圏論・トポス論が集合論より弱いことはそれほど問題ではないであろう。

¹³注意深い読者は気付かれているように、全体集合 A の存在を前提としている。

¹⁴しかし直観主義論理 (intuitionistic logic) に対応する。

こう見てくると、圏論的記述の方が優れているように見えるが、しかし無矛盾性の数学の文脈のように、複数の宇宙を同時に扱う場合には、話はそう単純ではない。この文脈では、宇宙、つまり数学で考えるもの「全体」が、時によって変わってしまうのだが、全体が動いてしまうと、同じものでもその中での役割は変化してしまう可能性があり、まず全体があってその中での役割を軸に記述する圏論的な記述法は、不都合を生じやすいのである。物理的な材質を軸にした集合論的な記述では、こうした文脈でも何とか使うことができる訳である¹⁵。

	集合論的記述	(中間的記述?)	圏論的記述
	材質重視	材質と機能?	機能重視
統一的取扱の容易さ	×	○?	○
複数の宇宙がある文脈	○	○?	×

では、圏論的記述の持つ洗練され統一的な扱いが容易であるという長所と、集合論的記述の持つ複数の宇宙のある文脈での利用可能性という長所を併せ持つ記述法はないだろうか考えるのが自然であろう。本稿では「空間」と「点」の概念の記述として、そうした両者の長所を持ち合わせた記述法を、圏論的な記述法と集合論的な記述法の中間的な記述法として見つけていくことになる。¹⁶

「空間」の概念を考える以上、その間の射、つまり「連続写像」の概念の記述についても同時に考えることは有益であろう。これら 3 つの概念の、集合論的な記述の仕方は、よく知られている、位相空間、連続写像、(位相空間上の)点というものである。対極の圏論的な記述としては、様々なものが提案されているが、ここでは恐らく最も一般的で妥当であろう初等トポス (elementary topos)、幾何学的射 (geometric morphism)、幾何学的点 (geometric point) の概念を用いよう。これらの詳しい定義は、次節で説明する。これらは上述の長所と短所を持っている訳だが、中間的な記述としては、「空間」については既に Grothendieck が提案した景 (site) の概念をそのまま、「写像」についてもやはり Grothendieck 一派が提案した景の射 (morphism of sites) の概念を多少修正して用い、「点」としてはストーカー (stalker) という概念を新たに導入する。

	集合論的記述		圏論的記述
“空間”	位相空間	景	初等トポス
“写像”	連続写像	景の射	幾何学的射
“点”	点	ストーカー	幾何学的点

尚、これら 3 通りの記述法のすべてにおいて、ある“空間”における“点”は、一点の“空間”からの“写像”と一対一に対応する。

以下この節では、集合論及び圏論で用いられる基本的な概念の定義を幾つかのみ述べる。本節の解説は言葉遣いを固定する以上のものではなく、より詳しい解説は他の文献に当たりたい。特に圏論的な概念の詳細は [1] などを参照されたい。

¹⁵ 公理的集合論の知識のある読者には、一般に集合論と呼ばれる分野で用いられる記述の中にも、 ω 、冪集合、 $\aleph_1$ 等々、全体の中での役割を軸にした記述が数多くあり、それを複数の宇宙のある文脈で用いる際には、それらの概念の絶対性 (absoluteness) を確認しなければならないのであって、集合論的記述だからと言って使いやすい訳ではないことは気付かれよう。このような記述は、集合論と呼ばれる分野で用いられるものであっても筆者の用いる意味での「集合論的記述」には該当しない。こうした紛らわしさが、本稿で「集合論」と「無矛盾性の数学」という二つの名称を使い分ける所以である。とはいえ、以降の章で見るように、圏論で用いられる圏論的記述は、いま述べた記述方法に比べても、より本質的な意味で複数の宇宙のある文脈で扱いにくいものなのである。

¹⁶ これとは別に、集合論と圏論の関係について議論したものとしては、[7] が有名である。数学の様々な場面における、集合論と圏論の相互作用の在り方を論じている。

3.1 集合論の基礎概念

定義 3.1 $(P, \leq)$ は半順序集合とする。 $F \subset P$ がフィルタ (filter) であるとは、 $\emptyset \neq F \subseteq P$ であり、 $p \in F, p \leq q$ ならば $q \in F$ であり、かつ $p, q \in F$ ならば $r \leq p, q$ なる $r \in F$ が存在することである。極大なフィルタを超フィルタ (ultrafilter) という。

集合 I に対し、順序集合 $(\mathfrak{P}(I), \subset)$ のフィルタ、超フィルタを、 I 上のフィルタ、超フィルタという。典型的な超フィルタは、 $i \in I$ に対する $(i) = \{A \subset I \mid i \in A\}$ であり、これを単項超フィルタ (principal ultrafilter) という。この意味で I 上の超フィルタは、 I の要素の一般化といえる¹⁷。特に U が超フィルタならば $I \setminus A \in U$ と $A \notin U$ が同値になる。

3.2 圏論の基礎概念

定義 3.2 $\mathcal{I}$ を固定した圏とする。 $A \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ について、函手 $\Delta_A : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{C}$ は $\Delta_A(I) = A$ とする。

函手 $F : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{C}$ に対し、 F の極限 (limit) $\varprojlim F$ とは $A \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ と自然変換 $s : \Delta_A \rightarrow F$ の対 (A, s) で終的 (final) なものである。 F の余極限 (colimit) $\varinjlim F$ とは $B \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ と自然変換 $t : F \rightarrow \Delta_B$ の対 (B, t) で始的 (initial) なものである。

言い換えると、 $\varprojlim F \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ と $\langle u_I : \varprojlim F \rightarrow F(I) \mid I \in \text{Ob}(\mathcal{I}) \rangle$ の族で $f : I \rightarrow J$ について $u_I = u_J \circ F(f)$ を満し、かつ任意の $A \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ と任意の $u_I = u_J \circ F(f)$ を満す族 $\langle s_I : A \rightarrow F(I) \mid I \in \text{Ob}(\mathcal{I}) \rangle$ に対して、一意的に $s : A \rightarrow \varprojlim F$ が存在し、 $u_I \circ s = s_I$ を満すことである。

$$\begin{array}{ccc} \varprojlim F & \xrightarrow{u_I} & F(I) \\ \uparrow \exists! s & \searrow u_J & \nearrow s_I \\ A & \xrightarrow{s_J} & F(J) \end{array} \quad \begin{array}{c} \uparrow F(f) \\ F(I) \end{array}$$

ここで数学的な「極限」に即しているのは余極限の方であることに注意せよ。順極限 (direct limit)、帰納的極限 (inductive limit) は余極限の一例であり、逆極限 (inverse limit) が極限の一例である。

$\text{Ob}(\mathcal{I}), \text{Arr}(\mathcal{I})$ が共に有限のとき、それぞれ有限極限、有限余極限という。 $\mathcal{I} = \emptyset$ で、極限は終対象 (terminal object) となり、 $\mathcal{I} = \{*, *\}$ で、直積 (product) になる。つまり終対象や直積は有限極限の一種である。同様に、始対象 (initial object)、余積 (coproduct) は有限余極限の一種である。

定義 3.3 函手 $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ と $U : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ の対 (F, U) が $\mathcal{D}$ から $\mathcal{C}$ への随伴対 (adjunction pair) をなすとは、自然変換 $\eta : \text{Id}_{\mathcal{C}} \rightarrow UF$ が存在し、任意の $f \in \mathcal{C}(C, U(D))$ に対して $U(f^*) \circ \eta(C) = f$ となる $f^* \in \mathcal{D}(F(C), U)$ が一意に存在することである¹⁸。このとき $F \dashv U$ と表す。

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{f} & U(D) \\ \eta(C) \downarrow & \nearrow U(f^*) & \\ UF(C) & & F(C) \end{array} \quad \begin{array}{c} \nearrow f^* \\ D \end{array}$$

つまり $f \mapsto f^*, f^* \mapsto U(f^*) \circ \eta(C)$ が一対一となる。故に、随伴対をなすことと、自然な同型 $\mathcal{D}(F(C), D) \cong \mathcal{C}(C, U(D))$ の成立は同値である。¹⁹

簡単な図式の追っ掛けでも、左随伴 F は余極限を、右随伴 U は極限を保存することが分かる。

例えば、自由群函手 $\text{FreeGrp} : \text{Sets} \rightarrow \text{Grps}$ は包含函手或は忘却函手 (forgetful functor) $U : \text{Grps} \rightarrow \text{Sets}$ の左随伴となる。一般の代数構造について、生成集合から自由代数を作る函手は、忘却函手の左随伴である。また位相空間での閉包と開核は開集合から閉集合へ随伴対である。

¹⁷ I 上の超フィルタ U が $\{A_i \mid i \in I\} \subset U$ かつ $|I| < \kappa$ ならば $\bigcap_{i \in I} A_i \in U$ となるとき、 κ -完備 (κ -complete) という。このように単項超フィルタを更に近似していく方法もある。

¹⁸ここで F は対象間の写像、 η は自然性なしの族 $\langle \eta_C \rangle_{C \in \text{Ob}(\mathcal{C})}$ に緩めても、実は同値になることが知られている。

¹⁹さらに、 $(U\varepsilon) \circ (\eta U) = 1_U, (\varepsilon F) \circ (F\eta) = 1_F$ なる自然変換 $\eta : \text{Id}_{\mathcal{C}} \rightarrow UF, \varepsilon : FU \rightarrow \text{Id}_{\mathcal{D}}$ の存在とも同値である。

4 トポス理論

トポスとは何であるか、この問に一言で答えるのは難しい。幾つもの異なる、しかしどれも正しい答えがあるからである。この難しさを、トポス理論の巨人 P.T.Johnstone (Cambridge Univ.) が、2002 年に出版された著書 [3] “Sketches of an Elephant - A Topos Theory Compendium” の前文の冒頭で次のように表現している²⁰。

生まれつき目の見えない四人の男が、象はどんなものであるかを知りたいと思い、そこで彼らは象の御者に情報を求めた。彼は彼らを象のところへ連れて行き、確かめるように奨めた。そこで一人は象の脚に触れた、もう一人は象の胴に、もう一人は象の尾に、そして四人目は象の耳に触れた。そして彼らは、他のもう一人に象を言い表そうとした。最初の男は「象は木のようなものだ」と言った。「違う、象は蛇のようなものだ」と二人目の男が言った。「ばかな、象は幕のようなものだ」と三人目の男が言った。「それは間違いだ、象は扇のようなものだ」と四人目の男が言った。そして彼らは互いに口論し合い、それを象はじっと見つめていた。

トポスの概念は象によく似ている。というのは、どの方向からこれにアプローチするかによって、トポス理論が対象とするものの異なる記述が可能となるからである。André Joyal が、圏論の 1981 年の Cambridge Summer Meeting で行った講義の中で、初めてその並列を指摘した。それが本書の題名の基礎として用いられることになったのであり、著者は彼に感謝している。「トポスとはどんなものであるか」について 7 つの異なる記述を彼は挙げていた。

- (i) 「トポスとは、景 (site) 上の層 (sheaf) のなす圏である」
- (ii) 「トポスとは、有限極限と冪対象 (power-object) を持つ圏である」
- (iii) 「トポスとは、直観主義 (intuitionistic) 高階 (higher-order) 理論 (の具体化) である」
- (iv) 「トポスとは、一階 (first-order) (無限) 幾何学理論 (geometric theory) (の外延的本質) である」
- (v) 「トポスとは、デカルト圏 (cartesian category) の超-2-圏 (meta-2-category) における全余完備 (totally cocomplete) な対象である」
- (vi) 「トポスとは、一般化された空間である」
- (vii) 「トポスとは、直観主義 (intuitionistic) 形式体系 (formal system) の意味論 (semantics) である」

その講義から 20 年で、圏論のコミュニティは更に幾つかの記述をこのリストに加えたのであった (理論計算機科学者は今なおまた他のものを加えている)。例えば、

- (viii) 「トポスとは、連続亜群 (groupoid) の森田同値類である」
- (ix) 「トポスとは、冪アレゴリ (power allegory) の写像の圏である」
- (x) 「トポスとは、自分自身上の標準的な (standard) 添字づけ (indexing) が完備 (complete) かつ整冪 (well-powered) な圏である」
- (xi) 「トポスとは、Giraud-枠 (-frame) の空間的な実現 (spatial manifestation) である」

²⁰ 訳は筆者による。専門用語については、全く未知のものについては、機械的な語の置き換えによるものであり、従って誤訳の可能性が非常に高い。

(xii) 「トポスとは、統一微分幾何 (synthetic differential geometry) ²¹の土台 (setting) である」

(xiii) 「トポスとは、統一領域理論 (synthetic domain theory) ²²の土台である」

などなど。しかし象について重要な点は「どのようにアプローチしたも、それは全く同じ動物である」ということであり、本書は同じことがトポス理論についても真であるということを示す試みである。

(Peter. T. Johnstone “Sketches of an Elephant - A Topos Theory Compendium” 前文の冒頭、筆者訳)

筆者は、P.T.Johnstone ほどの見識はなく、これらすべての側面について論じることは出来ない。本稿の議論で必要となる側面に絞って解説していくことにしたい。

これらの側面に共通して言えることは、「初等トポス (elementary topos) とは、或る空間 (或は景) の上の層全体からなる圏」(i) を、圏論の言葉のみを用いて抽象化したものであり、その抽象化の結果が「有限極限と冪対象 (power-object) を持つ圏」(ii) なのである。

そして、空間の本質が「その上に連続的に変化する構造の族 (層) を定義すること」にあるのならば、そうした構造全体、つまり層全体の圏が、その空間を規定することになる。その意味で「(層全体の圏の一般化である所の) 初等トポスは、空間の一般化である」(vi) と言える。

他方、層とは空間に連続的に変化する集合の族であるといえる。すると通常の集合は、変化の止った、層の特殊なものと言い得る。そして層全体とは、連続的に変化する集合であり、その意味で層全体とは一般化された集合論の宇宙であると見なせる。集合論は、集合の集合、集合の集合の集合、...、というように幾らでも階層の高い対象を考えることが出来る訳で、ある種の高階理論と見なせる。その意味で「トポスとは、(直観主義) 高階理論の具体化である」(iii) であると言えるのである。

無矛盾性の数学で用いられる、generic-拡大、超冪などの手法は、連続的に変化する集合の世界から、変化の一瞬を取り出したもの、と見ることができる。特に、変化の一瞬を取り出す前のもの²³は、この (iii) の意味でトポスと見なせることは知られている。

さて、トポスが空間の概念の一般化であるのならば、それに対応する点の概念を考えるのは自然であろう。そしてそれを (iii) の側面に適用すれば、変化の一瞬を取り出す操作がそうした点の上で定義された茎となるだろう。しかし、次の節で述べるように、宇宙を変化させる操作である為に、無矛盾性の数学の文脈では既存の点の概念では扱えない。

本節では、こうしたトポス理論における既存の概念を概説し、これら概念では扱えないという次節での説明に繋げたい。

尚、最後の節で景とストーリーによる中間的記述法の応用例として選択公理なしの Zariski-幾何を挙げる関係上、基本的には選択公理を暗黙の内には仮定しない。しかし比較の対象となる初等トポスと幾何学的点による圏論的記述法では、暗黙の内に選択公理が仮定されている。この記述法の説明や、この記述法との比較を議論する場合には、選択公理を前提とすることとする。選択公理を前提としている場合には、その都度断ることとする。

²¹(訳者註) 代数幾何学がトポス理論発祥の場となった訳だが、代数幾何と同様に微分幾何も圏論という抽象的な枠組みの中で展開しようという試みのようである。

²²(訳者註) 領域 (domain) という語は、整域や連結開集合など、各分野で「通常の議論をするのに適当な条件を満たしているもの」を指すように思うが、ここで言う領域とは主に計算現象のモデルとして用いられる領域を指している。計算現象は、他の数学の分野ではあまり見かけない「循環」が内在しており、そのモデルには循環のような非常に奇妙な性質が要求される。最も有名なものとしては、集合論者の D.Scott が型無し λ -計算のモデルとして導入した Scott-領域であり、 $D \cong (D \rightarrow D)$ (D から D への連続写像の空間と D が同型) や $D \cong D \times D$ と言った領域方程式 (domain equation) を解くことが出来る。

²³所謂、Bool-値モデルである。Bool-値モデルの層としての表現については [5] を参照されたい。

4.1 諸概念の全体像

各論に入る前に、全体像を述べておく。本節では、トポス理論で扱われる“空間”、“点”そして“写像”の一般化である所の概念を紹介し、どのような観点からの一般化になっているかを説明する。そして幾つかのこうした概念の間関係についても知られている結果を述べていく。まずここで表を挙げるが、これら表を参照しながら、本節の以降の小節の各概念の解説を読みたい。

まず“空間”の一般化としての位相空間、ロケイル、景、初等トポスの各概念の抽象度の比較と、それらに対応する“点”及び“写像”の一般化としての概念は、以下の表の通りとなる。

	← 具体			抽象 →
“空間”	位相空間	ロケイル	景	初等トポス
“写像”	連続写像	ロケイルの射	景の射	幾何学的射
“点”	点	ロケイルの点	??	幾何学的点

表 1: 各概念の対応関係

さて例えば、ロケイルの射はロケイルに対して定義されるのだから、特に位相空間にも定義される。これと連続写像とはどういう関係にあるかが問題になる。これら“写像”の一般化としての各概念の関係は次の表の通りである。

初等トポス	(未定義)		(未定義)		(未定義)		幾何学的射
景・Grothendieck-トポス	(未定義)		(未定義)		景の射	$\subset$ 注	幾何学的射
ロケイル	(未定義)		ロケイルの射	=	景の射	=	幾何学的射
位相空間	連続写像	$\subset$	ロケイルの射	=	景の射	=	幾何学的射
Hausdorff-(sober-) 空間	連続写像	=	ロケイルの射	=	景の射	=	幾何学的射

注：正確には包含関係ではない。つまり異なる景の射から同じ幾何学的射が誘導されることもある。

表 2: 写像の各概念の関係

同様に、“点”の一般化である各概念の関係も問題となる。それが下表の通りである。

初等トポス	(未定義)		(未定義)		幾何学的点
景・Grothendieck-トポス	(未定義)		(未定義)		幾何学的点
ロケイル	(未定義)		ロケイルの点	=	幾何学的点
位相空間	点	$\subset$	ロケイルの点	=	幾何学的点
Hausdorff-(sober-) 空間	点	=	ロケイルの点	=	幾何学的点

表 3: 点の各概念の関係

これらの表は所々空白があったり、不十分な観のある箇所があったりするが、後の節でこうした表をより整った形にしていくことになる。

本節の順序は、まず 4.2 で“空間”を表す概念として位相空間を抽象化して景を導入し、更に 4.3 でその抽象化である初等トポスを紹介する。その上で、4.4 及び 4.5 では景や初等トポスに対応した“点”及び“連続写像”の概念を紹介し、上記の表のような関係について解説する。最後に 4.6 で、新たな“空間”の概念としてロケイルを導入し、これに対応する“点”や“連続写像”も見て行く。

4.2 景と層

層 (sheaf) とは、空間に沿って連続的に変化する構造の形式化である。最初に、層の概念を振り返ろう。

位相空間 $(X, \mathcal{O})$ に対して、開集合に添字づけられた集合 (構造) の族と包含関係にある二つの開集合によって添字づけられた写像の族の対 $(\langle F(U) \rangle_{U \in \mathcal{O}}, \langle r_{U,V} \rangle_{U \subset V})$ が $(X, \mathcal{O})$ 上の前層 (presheaf) であるとは、次の条件 1 を満たすことであり、 $(X, \mathcal{O})$ 上の層 (sheaf) であるとは、次の条件 1 と 2 を満たすことである。

1. 写像 $r_{U,V} : F(V) \rightarrow F(U)$ であって、任意の包含関係にある三つの開集合 $U \subset V \subset W$ について $r_{U,V} \circ r_{V,W} = r_{U,W}$, $r_{U,U} = \text{id}_U$ となる。
2. (張り合わせ原理) U の開被覆 $\{W_i \mid i \in I\}$ と $\langle a_i \rangle_{i \in I} \in \prod_{i \in I} F(W_i)$ について、もし $r_{W_i \cap W_j, W_i}(a_i) = r_{W_i \cap W_j, W_j}(a_j)$ がすべての $i, j \in I$ に対して成立するならば、 $r_{W_i, U}(a) = a_i$ が任意の $i \in I$ について成立するような $a \in F(U)$ が一意的に存在する。

多くの場合には、 $F(U)$ は何らかの構造 (例えば、群、環など) を持っており、 $r_{U,V}$ はその構造を保つようなものを考える。

直観的には張り合わせ原理は、もし各 W_i 上の局所的な情報達 a_i が与えられ、しかも共通の領域で互いに矛盾しない、つまり $r_{W_i \cap W_j, W_i}(a_i) = r_{W_i \cap W_j, W_j}(a_j)$ が成立するならば、それらを繋ぎ合わせて大域的な U 上の情報 a を得ることができる、というものである。層のスローガンは「局所性と大域性を繋ぐ」ということにある。

最も典型的な例は、 $\mathbb{C}$ -値関数のなす層である。

例 4.1 $(X, \mathcal{O})$ を位相空間とし、開集合 $U \subset V$ について $C(U), r_{U,V}$ を次で定める。

$$C(U) = \{f : U \rightarrow \mathbb{C} \mid f : \text{連続写像}\} \quad r_{U,V}(f) = f|_U$$

このとき $(\langle C(U) \rangle_{U \in \mathcal{O}}, \langle r_{U,V} \rangle_{U \subset V})$ は層をなす。

実際、条件 1 は明らかであるし、局所的に連続な関数関数を繋ぎ合わせてもやはり連続である。

この例では、 $C(U)$ は単なる集合ではなく、環と見ることができ、 $r_{U,V}$ は環準同型である。

位相空間は、その空間そのものよりも、その上で変化する構造を背負っているという機能が重要だという見方に立てば、層とは正にその位相空間の概念の本来の機能を発現するための概念であると言える。

さて、前層及び層の概念は圏論的に記述することが出来る。上記の条件 1、条件 2 は次のように書換えられる。

1. F は開集合と包含写像のなす圏 (位相空間と同じく $(X, \mathcal{O})$ で表す) から Sets への反変関手である
2. 任意の $U \in \mathcal{O}$ とその開被覆 $\{W_i \mid i \in I\}$ について、次の図式が等化子 (equalizer) になる。

$$F(U) \xrightarrow{\langle r_{W_i, U} \rangle_{i \in I}} \prod_{i \in I} F(W_i) \xrightarrow[\prod_{i \in I} \langle r_{W_i \cap W_j, W_i} \rangle_{j \in I}]{\langle \prod_{i \in I} r_{W_i \cap W_j, W_i} \rangle_{j \in I}} \prod_{i, j \in I} F(W_i \cap W_j)$$

この記述の仕方により、Sets などの具体圏以外の圏に値を持つ前層、層が考えられる。

定義 4.2 $\mathcal{D}$ は任意の直積を持つ圏とする。

位相空間 $(X, \mathcal{O})$ 上の $\mathcal{D}$ -値前層とは、圏 $(X, \mathcal{O})$ から $\mathcal{D}$ への反変関手である。

位相空間 $(X, \mathcal{O})$ 上の $\mathcal{D}$ -値前層 F が層であるのは、任意の開集合 U とその開被覆 $\{W_i \mid i \in I\}$ について、次の図式が等化子になることである。

$$F(U) \xrightarrow{\langle F(\text{incl}_{W_i, U}) \rangle_{i \in I}} \prod_{i \in I} F(W_i) \xrightarrow[\prod_{i \in I} \langle F(\text{incl}_{W_i \cap W_j, W_i}) \rangle_{j \in I}]{\langle \prod_{i \in I} F(\text{incl}_{W_i \cap W_j, W_i}) \rangle_{j \in I}} \prod_{i, j \in I} F(W_i \cap W_j)$$

ところが $\{W_i \mid i \in I\}$ が U の開被覆である、という性質は、 $(X, \mathcal{O})$ の圏論的性質ではない。従って $(X, \mathcal{O})$ を一般の圏に置き換えるには、この「被覆」の概念を与えなければならない。

定義 4.3 (Grothendieck) $\mathcal{C}$ を圏とする。

$C \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ に対して $t_C = \{f \in \text{Arr}(\mathcal{C}) \mid \text{cod}(f) = C\}$ とする。 $S \subset t_C$ が C 上の篩 (sieve) であるとは、 $f \in S$ かつ $g \in t_{\text{dom}(f)}$ ならば $f \circ g \in S$ となることである。 $\mathcal{F} \subset t_C$ に対し、 $\mathcal{F}$ を含む最小の篩 $\{f \circ g \mid f \in \mathcal{F}, g \in t_{\text{dom}(f)}\}$ を $(\mathcal{F})$ で表す。 C 上の篩 S と $h \in t_C$ に対して $h^*S = \{g \in t_{\text{dom}(h)} \mid h \circ g \in S\}$ とする。明らかに h^*S も篩である。

$\text{Ob}(\mathcal{C})$ によって添字づけされた、 C 上の篩の集合の族 $J = \langle J(C) \rangle_{C \in \text{Ob}(\mathcal{C})}$ が $\mathcal{C}$ 上の Grothendieck-位相 (Grothendieck topology) であるとは、次の 3 条件を満たすことである。

- (1) 任意の $C \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ について $t_C \in J(C)$ となる。
- (2) 任意の $S \in J(C)$ と $f \in t_C$ に対して $f^*S \in J(\text{dom}(f))$ となる。
- (3) 任意の篩 $T \subset t_C$ と $S \in J(C)$ について、もし $f^*T \in J(\text{dom}(f))$ が任意の $f \in S$ について成り立つのなら、 $T \in J(C)$ である。

Grothendieck-位相 J に対し、 $S \in J(C)$ となるとき S は C の J -被覆 (J -cover) という。

圏 $\mathcal{C}$ とその上の Grothendieck-位相 J の対 $(\mathcal{C}, J)$ を景 (site) と呼ぶ。

$T(C) = \{t_C\}$ とすれば、Grothendieck-位相をなし、自明な位相 (trivial topology) と呼ぶ。

例 4.4 最も典型的な例は、当然、圏 $(X, \mathcal{O})$ における通常の被覆の概念である。

$U \in \text{Ob}(X, \mathcal{O}) = \mathcal{O}$ に対して、 $t_U = \{\text{incl}_{VU} \mid V \in \mathcal{O}, V \subset U\}$ である。 $S \subset t_U$ が U 上の篩であるとは、 $\text{incl}_{VU} \in S$ かつ $W \subset V$ ならば $\text{incl}_{WU} \in S$ となること、つまり S と $\{V \mid \text{incl}_{VU} \in S\}$ を同一視すれば、部分集合について閉じた開集合の族となる。

$J(U) = \{S : \text{篩} \mid \bigcup \{V \mid \text{incl}_{VU} \in S\} = U\}$ と定めれば、 $(X, \mathcal{O})$ 上の Grothendieck-位相になる。

例 4.5 もう一つ、位相空間からの例をあげておこう。この Grothendieck-位相は、無矛盾性の数学の文脈では非常に重要である。

位相空間 $(X, \mathcal{O})$ の圏において $U \in \mathcal{O}$ に対し、 $D(U) = \{S : \text{篩} \mid (\bigcup \{V \mid \text{incl}_{VU} \in S\})^{\text{cl}} \supset U\}$ と定める。これを稠密位相 (dense topology) という。

実は、稠密位相と呼ばれる位相はもう一つある。前順序集合 $\mathbb{P} = (P, \leq)$ は自然に圏と見なせる。このとき $p \in P$ に対して $D(p) = \{S : \text{篩} \mid \forall q \leq p \exists r \leq q \text{ such that } (r, p) = \leq_{r,p} \in S\}$ とする。これも稠密位相である。

実は、これらは互の特殊例である。便宜上、前者を位相的稠密位相、後者を順序的稠密位相と呼ぶことにする。前順序集合 $\mathbb{P} = (P, \leq)$ には、 $[p] = \{q \in P \mid q \leq p\}$ を開基底とする位相 (Alexandrov-位相) が入り、この位相に関する位相的稠密位相が順序的稠密位相である。他方、 $\mathcal{O} \setminus \{\emptyset\}$ は $\subset$ について半順序集合であり、この順序に関して順序的稠密位相が位相的稠密位相である。

稠密位相が Grothendieck-位相であることは順序的稠密位相の表現を用いれば容易であろう。

さて、この新たな被覆の概念を用いて、層の定義を拡張しよう。

定義 4.6 (Grothendieck) $(\mathcal{C}, J)$ を景とし、 $\mathcal{D}$ を直積を持つ圏とする。

$\mathcal{C}$ 上の $\mathcal{D}$ -値前層とは $P : \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{D}$ の関手のことである。

$\mathcal{D}^{\mathcal{C}^{\text{op}}}$ を $\mathcal{C}$ 上の $\mathcal{D}$ -値前層と自然変換の圏とする。

$\mathcal{C}$ 上の $\mathcal{D}$ -値前層 P が $(\mathcal{C}, J)$ 上の $\mathcal{D}$ -値層であるのは、任意の $C \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ と $S \in J(C)$ に対して、層条件 (sheaf condition) が成り立つこと、即ち次の図式が $\mathcal{D}$ での等化子となることである。

$$P(C) \xrightarrow{\langle P(f) \rangle_{f \in S}} \prod_{f \in S} P(\text{dom}(f)) \xrightarrow[\langle \langle \pi_{f \circ g} \rangle_{g \in t_{\text{dom}(f)}} \rangle_{f \in S}]{\prod_{f \in S} \{ \langle P(g) \rangle_{g \in t_{\text{dom}(f)}} \}} \prod_{f \in S} \prod_{g \in t_{\text{dom}(f)}} P(\text{dom}(g))$$

ここで $\langle h_f \rangle_{f \in S} \in \mathcal{D}(D, \prod_{f \in S} P(\text{dom}(f)))$ が、上記の並行な二つの射を等化する (equalize) のは、任意の $f \in S$ と $g \in t_{\text{dom}(f)}$ について $h_{f \circ g} = P(g) \circ h_f$ となることと同値である。

自明な位相の場合、これは $f \in t_C$ について $h_f = P(f) \circ h_{\text{id}_C}$ を導くから、この図式は常に等化子であり、 $(\mathcal{C}, T)$ 上の層は $\mathcal{C}$ 上の前層と一致する。つまり前層も層の一種となる。

位相空間の場合に、層となるための十分条件として、共通部分について閉じた開基底を固定し、基本開集合と基本開集合からなる任意の開被覆に対して層条件を満たせば、他の開集合に対しては逆極限によって定義することで一意的に層を決定できることはよく知られている。

実は Grothendieck-位相に対しても基底の概念が定義でき、層条件についてもこの基底について調べれば良いという類似の結果が成り立つ。

定義 4.7 $\mathcal{C}$ を圏とする。

$\text{Ob}(\mathcal{C})$ によって添字づけされた、 t_C の部分集合の集合の族 $K = \langle K(C) \rangle_{C \in \text{Ob}(\mathcal{C})}$ が $\mathcal{C}$ 上の Grothendieck-位相の基底 (base) であるとは、次の 3 条件を満たすことである。

(1') $f \in \text{Arr}(\mathcal{C})$ が $\mathcal{D}$ での同型 (逆射を持つ) ならば $\{f\} \in K(\text{cod}(f))$ である。

(2') $\mathcal{F} \in K(C)$ かつ $h \in t_C$ ならば次を満たす $\mathcal{F}' \in K(\text{dom}(h))$ が存在する：任意の $g \in \mathcal{F}'$ に対して、 $h \circ g = f \circ g'$ を満たす $f \in \mathcal{F}$ と g' が存在する。

$$\begin{array}{ccc} \bullet & \xrightarrow{\exists g'} & \text{dom}(f) \\ \forall g \in \mathcal{F}' \downarrow & & \downarrow \exists f \in \mathcal{F} \\ \text{dom}(h) & \xrightarrow{h} & C \end{array}$$

(3') $\mathcal{F} \in K(C)$ と $\mathcal{F}$ によって添字づけられた $\emptyset \neq \mathfrak{F}_f \subset K(\text{cod}(f))$ となる集合の族 $\langle \mathfrak{F}_f \rangle_{f \in \mathcal{F}}$ について、 $\mathcal{F}' \subset \{f \circ g \mid f \in \mathcal{F}, g \in \mathfrak{F}_f\}$ を満たす $\mathcal{F}' \in K(C)$ が存在する。

Grothendieck-位相の基底 K に対し、次で定義される J は Grothendieck-位相をなし、 K によって生成される位相と言う。

$$S \in J(C) \text{ iff } S : \text{篩} \ \& \ \exists \mathcal{F} \in K(C) \text{ such that } \mathcal{F} \subset S$$

明らかに J 自身、及び $K_J(C) = \{\mathcal{F} \subset t_C \mid (\mathcal{F}) \in J(C)\}$ はいずれも基底となる。

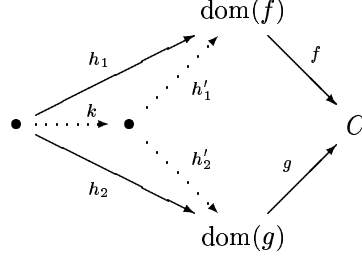
注意 4.8 選択公理の下では、条件 (3') は次のような定式化と同値である。

$\mathcal{F} \in K(C)$ と $\mathcal{F}$ によって添字づけられた $\mathcal{F}_f \in K(\text{cod}(f))$ となる族 $\langle \mathcal{F}_f \rangle_{f \in \mathcal{F}}$ について、 $\mathcal{F}' \subset \{f \circ g \mid f \in \mathcal{F}, g \in \mathcal{F}_f\}$ を満たす $\mathcal{F}' \in K(C)$ が存在する。

定義 4.9 $(\mathcal{C}, J)$ を景とする。 $C \in \text{Ob}(\mathcal{C})$, $f, g \in m_C$ に対し、 $\text{Com}(f, g)$ を次で定める。

$$\text{Com}(f, g) = \{(h_1, h_2) \in t_{\text{dom}(f)} \times t_{\text{dom}(g)} \mid f \circ h_1 = g \circ h_2, \emptyset \notin J(\text{dom}(h_1))\}$$

$Z \subset \text{Com}(f, g)$ が共終 (cofinal) であるとは、任意の $(h_1, h_2) \in \text{Com}(f, g)$ について $h_1 = h'_1 \circ k$ かつ $h_2 = h'_2 \circ k$ となる $(h'_1, h'_2) \in Z$ と $k \in \mathcal{C}(\text{dom}(h_1), \text{dom}(h'_1))$ が存在することである。



$\langle Z^C(f, g) \rangle_{f, g \in t_C, C \in \text{Ob}(\mathcal{C})}$ が共終族 (cofinal family) であるとは、 $C \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ と $f, g \in t_C$ について $Z^C(f, g) \subset \text{Com}(f, g)$ が共終であることとする。

命題 4.10 $(\mathcal{C}, J)$ を景とし、 K を J の基底とする。 P を $\mathcal{C}$ 上の $\mathcal{D}$ -値前層とすると、任意の共終族 $\langle Z^C(f, g) \rangle_{f, g \in t_C, C \in \text{Ob}(\mathcal{C})}$ について、次の (A) と (B) は同値である。

(A) P が $(\mathcal{C}, J)$ 上の $\mathcal{D}$ -値層である。

(B) 任意の $C \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ と $\mathcal{F} \in K(C)$ に対し、下の図式が $\mathcal{D}$ での等化子となる。

$$P(C) \xrightarrow{\langle P(f) \rangle_{f \in \mathcal{F}}} \prod_{f \in \mathcal{F}} P(\text{dom}(f)) \xrightarrow{\frac{\langle \prod_{f \in \mathcal{F}} \langle P(h_1) \rangle_{(h_1, h_2) \in Z^C(f, g)} \rangle_{g \in \mathcal{F}}}{\prod_{g \in \mathcal{F}} \{ \langle \langle P(h_2) \rangle_{(h_1, h_2) \in Z^C(f, g)} \rangle_{f \in \mathcal{F}} \}}} \prod_{f, g \in \mathcal{F}} \prod_{(h_1, h_2) \in Z^C(f, g)} P(\text{dom}(h_1))$$

(証明) $\langle h_k \rangle_{k \in S} : D \rightarrow \prod_{f \in \mathcal{F}} P(\text{dom}(f))$ が上の図式を等化することは、任意の $f, g \in \mathcal{F}$ と $(h_1, h_2) \in Z^C(f, g)$ について $P(h_1) \circ h_f = P(h_2) \circ h_g$ が成り立つことである。

(A) から (B) を導く。 $\langle Z^C(f, g) \rangle_{f, g \in t_C, C \in \text{Ob}(\mathcal{C})}$ を共終族とする。 $C \in \text{Ob}(\mathcal{C})$, $\mathcal{F} \in K(C)$ としよう。 $\langle h_f \rangle_{f \in \mathcal{F}} : D \rightarrow \prod_{f \in \mathcal{F}} P(\text{dom}(f))$ が、二つの並行な射を等化するとする。このとき、 $f, g \in \mathcal{F}$ と $(h_1, h_2) \in Z^C(f, g)$ に対して $P(h_1) \circ h_f = P(h_2) \circ h_g$ となる。このとき $k \in (\mathcal{F})$ に対し、 h'_k を次のように定める。 $k = f \circ h$, $f \in \mathcal{F}$ と表せるから、 $h'_k = P(h) \circ h_f$ とする。

この well-defined 性を見る。 $f \circ h'_1 = g \circ h'_2$ とする。 $\emptyset \in J(\text{dom}(h'_1))$ ならば $P(\text{dom}(h'_1)) = 1_{\mathcal{D}} = P(\text{dom}(h'_2))$ で、故に $P(h'_1) \circ h_f = P(h'_2) \circ h_g$ である。 $\emptyset \notin J(\text{dom}(h'_1))$ では $(h'_1, h'_2) \in \text{Com}(f, g)$ より、 $h'_1 = h_1 \circ l$, $h'_2 = h_2 \circ l$ なる $(h_1, h_2) \in Z^C(f, g)$ と l が存在する。すると $P(h_1) \circ h_f = P(h_2) \circ h_g$ だから $P(h'_1) \circ h_f = P(l) \circ P(h_1) \circ h_f = P(l) \circ P(h_2) \circ h_g = P(h'_2) \circ h_g$ である。

さて、すると $k = f \circ h \in (\mathcal{F})$ と $g \in t_{\text{dom}(k)}$ に対し、 $h'_{k \circ g} = P(h \circ g) \circ h_f = P(g) \circ h'_k$ である。

$$\prod_{k \in (\mathcal{F})} P(\text{dom}(f)) \xrightarrow{\frac{\prod_{k \in (\mathcal{F})} \{ \langle P(g) \rangle_{g \in t_{\text{dom}(k)}} \}}{\langle \langle \pi_{k \circ g} \rangle_{g \in t_{\text{dom}(f)}} \rangle_{k \in (\mathcal{F})}}} \prod_{k \in (\mathcal{F})} \prod_{g \in t_{\text{dom}(k)}} P(\text{dom}(g))$$

つまり $\langle h'_k \rangle_{k \in (\mathcal{F})}$ は上の並行な射を等化する。故に P が層であることから $P(k) \circ h = h'_k$ が任意の $k \in (\mathcal{F})$ について成立する $h : D \rightarrow P(C)$ が一意に存在する。 $f \in \mathcal{F} \subset (\mathcal{F})$ については $P(f) \circ h = h'_f = h_f$ である。逆に $f \in \mathcal{F} \subset (\mathcal{F})$ について $P(f) \circ h' = h'_f = h_f$ であるような $h' : D \rightarrow P(C)$ は、 $P(f \circ h) \circ h' = P(g) \circ h_f = h'_{f \circ h}$ だから、 h の一意性より $h = h'$ となる。

(B) から (A) を導く。 $C \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ と $S \in J(C)$ が与えられ、 $\langle h_k \rangle_{k \in S} : D \rightarrow \prod_{k \in S} P(\text{dom}(k))$ が、上の図式を等化する、つまり $h_{k \circ h} = P(h) \circ h_k$ が成り立つとする。 $\mathcal{F} \subset S$ なる $\mathcal{F} \in K(C)$ を固定する。すると $f, g \in \mathcal{F}$ と $(h_1, h_2) \in Z^C(f, g)$ について $P(h_1) \circ h_f = h_{f \circ h_1} = h_{g \circ h_2} = P(h_2) \circ h_g$ が成り立つから、命題の言明の図式中の並行な射を等化する。そこで $h : D \rightarrow P(C)$ で $P(f) \circ h = h_f$ が任意の $f \in \mathcal{F}$ について成立するようなものが一意的に存在する。

基底の定義により、各 $k \in S$ に対し、 $k \circ \mathcal{F}'_k = \{k \circ l \mid l \in \mathcal{F}_k\} \subset (\mathcal{F})$ となる $\mathcal{F}'_k \in K(\text{dom}(k))$ が存在する。そこで $l \in \mathcal{F}'_k$ に対し $h_l^{(k)} = h_{k \circ l}$ と定める。ここで $l_1, l_2 \in \mathcal{F}'_k$ と $(h_1, h_2) \in Z^{\text{dom}(k)}(l_1, l_2) \subset \text{Com}(l_1, l_2)$ について、 $P(h_1) \circ h_{l_1}^{(k)} = P(h_1) \circ h_{k \circ l_1} = h_{k \circ l_1 \circ h_1} = h_{k \circ l_2 \circ h_2} = P(h_2) \circ h_{l_2}^{(k)}$ であり、 $\text{dom}(k), \mathcal{F}'_k$ に対する言明の図式を $\langle h_l^{(k)} \rangle_{l \in \mathcal{F}'_k}$ が等化する。さて任意の $l \in \mathcal{F}'_f$ に対し、 $f \circ l' = k \circ l$ なる $f \in \mathcal{F}$ と l' が存在するから $P(l) \circ P(k) \circ h = P(k \circ l) \circ h = P(f \circ l') \circ h = P(l') \circ h_{f'} = h_{f \circ l'} = h_{k \circ l} = h_l^{(k)}$ であり、他方 $P(l) \circ h_k = h_{k \circ l} = h_l^{(k)}$ であることから、一意性により $h_k = P(k) \circ h$ を得る。

逆に、任意の $k \in S$ について $h_k = P(k) \circ h'$ ならば、特に $f \in \mathcal{F}$ について $h_f = P(f) \circ h'$ だから h の一意性より $h = h'$ である。 $\square$

今度は前層や層のなす圏を考える。前層は反変関手であるから、前層の間の射は自然変換とする、つまり $\mathcal{C}$ 上の $\mathcal{D}$ -値前層の圏は、関手圏 (functor category) $\mathcal{D}^{\text{cop}}$ である。 $(\mathcal{C}, J)$ 上の $\mathcal{D}$ -値層の圏 $\text{Sh}_{\mathcal{D}}(\mathcal{C}, J)$ は、 $(\mathcal{C}, J)$ 上の $\mathcal{D}$ -値層全体を対象とする $\mathcal{D}^{\text{cop}}$ の充満部分圏 (full subcategory) とする。 $\mathcal{D} = \text{Sets}$ のとき、単に $\text{Sh}(\mathcal{C}, J)$ と書く。

このとき、更に $\mathcal{D}$ は任意の有限極限 (finite limit) を持つと仮定すれば、 $\mathcal{D}^{\text{cop}}$ や $\text{Sh}_{\mathcal{D}}(\mathcal{C}, J)$ における有限極限が存在し、対象ごとに極限を取ったものになる、つまり有限な圏 I に添字づけられた $\mathcal{C}$ 上の $\mathcal{D}$ -値前層の族 P_i 或は $(\mathcal{C}, J)$ 上の $\mathcal{D}$ -値層の族 F_i について、次が成り立つことが知られている。

$$(\lim_{\leftarrow i \in I} P_i)(C) = \lim_{\leftarrow i \in I} (P_i(C)) \quad (\lim_{\leftarrow i \in I} F_i)(C) = \lim_{\leftarrow i \in I} (F_i(C))$$

層化の概念も、位相空間上の場合と同様に定義される。しかし点がないので、層化の具体的な構成法 (存在証明) は、位相空間の場合のように茎を用いた構成は出来ない。

定義 4.11 $(\mathcal{C}, J)$ を景とし、 $\mathcal{D}$ を任意の直積を持つ圏とする。 $\mathcal{C}$ 上の $\mathcal{D}$ -値前層 P に対して、 $\mathcal{D}$ -値前層の射 $a_P : P \rightarrow \mathbf{a}(P)$ が層化 (sheafification) であるとは、 $\mathbf{a}(P)$ が $(\mathcal{C}, J)$ 上の $\mathcal{D}$ -値層であり、任意の $(\mathcal{C}, J)$ 上の $\mathcal{D}$ -値層 Q と任意の $\mathcal{D}$ -値前層の射 $\tau : P \rightarrow Q$ に対し $\tilde{\tau} \circ a_P = \tau$ なる $\mathcal{D}$ -値層の射 $\tilde{\tau} : \mathbf{a}(P) \rightarrow Q$ が存在することである。

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{\tau} & Q \\ a_P \downarrow & \nearrow \tilde{\tau} & \\ \mathbf{a}(P) & & \end{array}$$

つまり層化関手 $\mathbf{a}$ は、包含関手 $\iota : \text{Sh}_{\mathcal{D}}(\mathcal{C}, D) \rightarrow \mathcal{D}^{\text{cop}}$ の左随伴として定義できる。また上で述べたことから $\mathbf{a}$ は有限極限を保つ。

層化の存在に関しては、 $\mathcal{D}$ が Sets や、等式で定義される代数構造の圏 (Grps , Rings など) などかなり具体的な圏であるときには、選択公理の下で Grothendieck の $+$ -構成法 (Grothendieck's plus-construction) を二回適用することにより構成出来る。この構成法は、簡潔に言えば「必要なものをすべて集めて、必要な同値関係で割る」という操作である。 Sets の場合は [2] を、一般の場合は容易な一般化であるが [0] を参照されたい。

4.3 初等トポス

これまで $\text{Sh}_{\mathcal{D}}(\mathcal{C}, J)$ について調べてきた。層は (位相) 空間の概念の本来の機能を発現するための概念であると考えるならば、そうした層全体、つまり圏 $\text{Sh}_{\mathcal{D}}(\mathcal{C}, J)$ によって空間が規定されているという見方も出来よう。特に、具体的な圏はすべて含んでいる Sets について、 Sets -値層全体 $\text{Sh}(\mathcal{C}, J)$ は空間を決めていると考えられる。

圏 $\mathcal{E}$ が Grothendieck-トポス (Grothendieck topos) であるとは、適当な景 $(\mathcal{C}, J)$ に対し $\mathcal{E} \cong \text{Sh}(\mathcal{C}, J)$ となることである。これを更に一般化し、層のなす圏が満す性質から、圏論の言葉のみで記述できるものを抽出したのが、次の初等トポス (elementary topos) の概念である。

定義 4.12 (Lawvere) 圏 $\mathcal{E}$ が初等トポスであるとは、次の $(\alpha)(\beta)$ を満すことである。

(α) $\mathcal{E}$ は任意の有限極限を持つ。 (β) $\mathcal{E}$ は任意の対象 $A \in \text{Ob}(\mathcal{E})$ に対し冪対象を持つ。

ここで A の冪対象とは $P(A) \in \text{Ob}(\mathcal{E})$ と単射 (monomorphism) $\epsilon_A :$

$\epsilon_A : A \times P(A)$ の対で、任意の $B \in \text{Ob}(\mathcal{E})$ と単射 $R : R \rightarrow A \times B$ に対して、 $\bar{R} : B \rightarrow P(A)$ であってかつ次の図式を引戻し (pull-back) とする k が存在するような射 $\bar{R} : B \rightarrow P(A)$ が唯一存在することである。

$$\begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{k} & \epsilon_A \\ R \downarrow & & \downarrow \epsilon_A \\ A \times B & \xrightarrow{\text{id}_A \times \exists! \bar{R}} & A \times P(A) \end{array}$$

冪対象は、定義から存在すれば同型を除いて一意である。名称からも分かる通り、 Sets における冪集合を表している。 Sets においては、 $P(A) = \wp(A)$ であり、 $\epsilon_A = \{(a, A') \mid a \in A' \subset A\} \subset A \times P(A)$ で良い。実際、 A と B の間の関係 $R \subset A \times B$ が与えられたとき、写像 $\bar{R} : B \rightarrow P(A)$ を $\bar{R}(b) = \{a \in A \mid aRb\}$ とすれば良いからである。 $R = \{(a, b) \mid a \in \bar{R}(b)\}$ に注意せよ。

集合が「連続的に変化する」層においても、同様に冪対象が存在することが分かる。具体的には、 $y_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \rightarrow \text{Sets}^{\mathcal{C}^{\text{op}}}$ と $\Omega \in \text{Ob}(\text{Sets}^{\mathcal{C}^{\text{op}}})$ に対し次の通り定義されるが、詳細は [2] を参照されたい。

$$y_{\mathcal{C}}(C) = \mathcal{C}(-, C) \quad y_{\mathcal{C}}(f) = \mathcal{C}(-, f) \quad (\text{米田関手})$$

$$\Omega(C) = \{S : C \text{ 上の篩} \mid \forall f \in t_C(f^*S \in J(\text{dom}(f)) \text{ ならば } f \in S)\} \quad \Omega(f) : S \mapsto f^*S$$

$$P(F)(C) = \{\tau : y_{\mathcal{C}}(C) \times F \rightarrow \Omega \text{ の自然変換}\} \quad P(F)(f) : \tau \mapsto \tau \circ (y_{\mathcal{C}}(f) \times \text{Id}_F)$$

$$\epsilon_F(C) = \{(a, \tau) \in F(C) \times P(F)(C) \mid \tau(C)(\text{id}_C, a) = t_C\}$$

$R : R \rightarrow A \times B$ から $\bar{R}$ が一意に定まり、逆に引き戻しは有限極限の特殊例だから $\bar{R} : B \rightarrow P(A)$ から部分対象 (subobject) $R : R \rightarrow A \times B$ が一意に定まる。これは (B について) ²⁴自然な同型 $\text{SubOb}(A \times B) \cong \mathcal{E}(B, P(A))$ を与える。但し射 f に対しては $\text{SubOb}(f)$ は f に沿った引戻しである。 $\mathcal{E}$ は任意の有限極限、特に終対象を持つから、特に $A = 1_{\mathcal{E}}$ すると、自然な同型 $\text{SubObject}(B) \cong \mathcal{E}(B, P(1))$ を得る。 Sets においては $P(1)$ は $\{\emptyset, \{*\}\}$ つまり、真と偽の真偽値を持つ集合である。その一般化で、初等トポスにおいて $P(1)$ は真偽値の集合と解釈でき、 B から $P(1)$ への射 φ は B の元についての何らかの性質、論理式と思える。 B の部分対象は、 B の部分集合と見なせる。そしてこの対応は、内包的定義 $\{b \in B \mid \varphi(b)\} \leftrightarrow \varphi$ の対応と見なせる。内包的定義が可能となるので、トポスの内部で集合論が展開できるが、これをトポスの内部理論 (internal theory) とか局所集合論と呼ぶ。このように、初等トポスは空間の一般化であると共に、集合論を展開する為の枠組みとしての集合論の宇宙の圏論的一般化ともみなせる。²⁵

²⁴ P を関手として拡張し、 A, B について自然な同型であるとも言えるが、ここでは触れない。

²⁵ これを以て、従来の集合論を基礎とする数学の展開に代る、現代型の圏論的な数学の基礎だという主張もある。確かにトポスにおいてかような集合論が展開できれば、「通常の数学」はほぼトポスの上で記述するのは技術的には可能であることは分かるが、結局それは集合論を通してトポス理論の中で記述しているし、そもそもトポス理論の無矛盾性が集合論の助けなしに信頼できると言い難く、筆者としてはこれを新たな数学の基礎と呼ぶのは難があると思う。

4.4 点と茎

さてこれまで述べてきたことは、空間はその上で変化する構造を背負っているという機能こそが重要だという見方に立てば、層は(位相)空間の概念の本来の機能を発現するための概念であるということであった。とするならば、点の本来の機能とは何であろうか。それは茎を定義することである。

まず位相空間の上で定義された前層、層の茎の定義を振り返ろう。任意の直積と帰納的極限を持つ圏 $\mathcal{D}$ に対し、位相空間 $(X, \mathcal{O})$ 上で定義された $\mathcal{D}$ -値層 F の、点 $x \in X$ における茎 (stalk) $x^*F = F_x \in \text{Ob}(\mathcal{D})$ は次で定義される。

$$x^*F = F_x = \lim_{\longrightarrow U \in \mathfrak{B}(x)} F(U)$$

但し $\mathfrak{B}(x)$ は点 x の開近傍系 (system of open neighbours) である。特に $\mathcal{D} = \text{Sets}$ など具体的な圏では、この余極限が有向順序に沿っているので、有限極限を保つ。自明な方法で x^* は関手 $\text{Sh}_{\mathcal{D}}(\mathcal{C}, J) \rightarrow \mathcal{D}$ に拡張できるが、この関手は摩天楼層 (skyscraper sheaf) と呼ばれる右随伴 (right adjoint) x_* を持つ。 $D \in \text{Ob}(\mathcal{D})$ の点 $x \in X$ における摩天楼層 $x_*D = \text{Sky}_x(D)$ は次で定義される。これは自明に $(X, \mathcal{O})$ 上の $\mathcal{D}$ -値層となる。射 f に対し x_*f の定義は明らかであろう。

$$(x_*D)(U) = \text{Sky}_x(D)(U) = \begin{cases} D & (x \in U) \\ 1_{\mathcal{D}} & (x \notin U) \end{cases} \quad \text{Sky}_x(D)(\text{incl}_{UV}) = \begin{cases} \text{id}_D & (x \in V \subset U) \\ 0_{\text{Sky}_x(D)(U)} & (x \notin V) \end{cases}$$

この随伴が成り立つことは、余極限の普遍性の言い換えに過ぎない。

一般の初等トポスに対する点の概念、幾何学的点²⁶を、これら性質の抽象化として定義する。

定義 4.13 $\mathcal{E}$ を初等トポスとする。

$\mathcal{E}$ の幾何学的点 (geometric point) とは、 Sets から $\mathcal{E}$ への随伴対 $x = (p^*, p_*)$ 即ち $p^* : \mathcal{E} \rightarrow \text{Sets}$, $p_* : \text{Sets} \rightarrow \mathcal{E}$ かつ $p^* \dashv p_*$ で、更に p^* が有限極限を保つものである。

Hausdorff-空間 $(X, \mathcal{O})$ においては²⁷、Grothendieck-トポス $\text{Sh}(X, \mathcal{O})$ の幾何学的点と X の点はぴったり対応する。しかし後で見るように一般の位相空間では一致しない。

注意して欲しい点は、点の一般化である幾何学的点は、初等トポスに対して、つまり $\mathcal{D} = \text{Sets}$ に対して定義されているということである。つまりこの概念を用いるには、個々の圏 $\mathcal{D}$ ですらなく、一度(具体的な圏をすべて含んでいる) Sets 全体を考えなければいけない、ということである。初等トポス $\mathcal{E}$ の中では、全順序対象 (linear order object)、環対象 (ring object) など考えることができ、特に等式で定義された代数的な構造では $\mathcal{E} = \text{Sh}(X, \mathcal{O})$ の場合にその代数構造のなす層に一致する。そしてこれらのなす圏 $\text{Orders}(\mathcal{E}), \text{Rings}(\mathcal{E})$ ²⁸は、 Rings や Grps が Sets の部分圏であるように、トポスの中で扱うことが出来る。しかし、その全体が変化してしまう無矛盾性の文脈では、一度全体を設定しなければ使えない概念は、扱いにくい。しかし位相空間よりは一般的な枠組みで議論したい、という場合に、次節のストーカーの概念が有効になるのである。

²⁶トポスの点 (point of topos) という語が一般に用いられているが、後に位相空間における通常の点等との比較をする際に紛らわしいので、本稿ではこの術語を用いる。

²⁷実際には、Hausdorff より広い sober という性質を満たせば良い。位相空間 $(X, \mathcal{O})$ が sober であるとは、全空間ではない任意の開集合 U について、もし $W_1 \cap W_2 \subset U$ ならば $W_1 \subset U$ 又は $W_2 \subset U$ である、という条件を満たすならば $U = X \setminus \{x_U\}$ となる点 $x_U \in X$ が存在することである。

²⁸コホモロジーの分類空間への連続写像のホモトピー類がコホモロジー類を分類するように、トポス内で定義された構造を分類するトポスがあることが知られている。例えば、全順序対象の分類トポス (classifying topos) は単体集合 (simplicial sets) $\text{Sets}^{\Delta^{\text{op}}}$ であり、環対象のそれは有限表示型環のなす圏 fp-ring の双対圏の上の前層の圏 $\text{Sets}^{\text{fp-ring}}$ となり、自然な同型 $\text{Orders}(\mathcal{E}) \cong \text{Hom}(\mathcal{E}, \text{Sets}^{\Delta^{\text{op}}})$ 及び $\text{Rings}(\mathcal{E}) \cong \text{Hom}(\mathcal{E}, \text{Sets}^{\text{fp-ring}})$ が成り立つ。ここで $\text{Hom}(-, -)$ は次小節で述べる幾何学的射の全体である。こうした理論は非常に興味深いものであり、また 5 頁の論点 2 にも深く関わるのだが、本稿ではこれ以上触れない。

4.5 連続写像

空間、点の一般化として初等トポス、幾何学的点を見てきた。今度は、位相空間の間の連続写像の一般化は何であるかを考えるのは自然であろう。(以下、本節の最後まで選択公理を仮定する。)

まず連続写像 $f : (X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$ は、層の圏 $\mathbf{Sh}(X, \mathcal{O}_X)$, $\mathbf{Sh}(Y, \mathcal{O}_Y)$ に対してどのような作用を及ぼすかを思い出そう。次で定義される関手 $f_* : \mathbf{Sh}(X, \mathcal{O}_X) \rightarrow \mathbf{Sh}(Y, \mathcal{O}_Y)$ と $f^* : \mathbf{Sh}(Y, \mathcal{O}_Y) \rightarrow \mathbf{Sh}(X, \mathcal{O}_X)$ を誘導するのであった。

$$\begin{aligned}
 (f_* F)(V) &= F(f^{-1}V) & (f_* F)(\text{incl}_{V_1 V_2}) &= F(\text{incl}_{f^{-1}V_1, f^{-1}V_2}) \\
 (f^{**}G)(U) &= \lim_{\rightarrow \{W \in \mathcal{O}_Y \mid f^{-1}W \supset U\}} G(W) & f^{**}G(\text{incl}_{U_1 U_2}) &: \text{任意の } W \in \{W \mid f^{-1}W \supset U_2\} \\
 & & & \text{について下の図式を可換とするもの}
 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccc}
 G(W) & \xrightarrow{\text{id}_{G(W)}} & G(W) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \lim_{\rightarrow \{W \mid f^{-1}W \supset U_2\}} G(W) & \xrightarrow{(f^{**}G)(\text{incl}_{U_1 U_2})} & \lim_{\rightarrow \{W \mid f^{-1}W \supset U_1\}} G(W)
 \end{array}$$

$f^*G = a(f^{**}G)$

茎と摩天楼層の随伴とはほぼ同様に $f^{**} \dashv f_*$ であることが分かり、 $a \dashv \iota$ だから、合わせて $f^* \dashv f_*$ となる。また $\{W \in \mathcal{O}_Y \mid f^{-1}W \supset U\}$ は有向順序であり、従って f^{**} は有限極限を保つ。 a が有限極限を保つことから f^* も有限極限を保つ。

一般の初等トポスの間の連続写像の概念を、この性質を抽象して定義とする。²⁹

定義 4.14 初等トポス $\mathcal{E}$ から初等トポス $\mathcal{F}$ への幾何学的射 (geometric morphism) とは、 $\mathcal{E}$ から $\mathcal{F}$ への随伴対 $F = (F^*, F_*)$ で F^* が有限極限を保つものである。

ここで一点空間 $\mathbf{sg} = (\{*\}, \{\emptyset, \{*\}\})$ を考えよう。 $\mathbf{sg}$ 上の層 F は、 $F(\emptyset) = 1$ でなければならないから、 $F(\{*\})$ で完全に決定される。つまり $\mathbf{Sh}_{\mathcal{D}}(\mathbf{sg}) \cong \mathcal{D}$ 特に $\mathbf{Sh}(\mathbf{sg}) = \mathbf{Sets}$ である。すると幾何学的点とは、一点空間 $\mathbf{sg}$ 上の層の圏からの幾何学的射であり、位相空間における「点と一点空間からの連続写像は一对一に対応する」という事実の一般化が成り立っていることが分かる。

この概念が連続写像の一般化として適当であることの傍証としては、 $(Y, \mathcal{O}_Y)$ は Hausdorff-空間³⁰ならば、 $\mathbf{Sh}(X, \mathcal{O}_X)$ から $\mathbf{Sh}(Y, \mathcal{O}_Y)$ への幾何学的射と $(X, \mathcal{O}_X)$ から $(Y, \mathcal{O}_Y)$ への連続写像とが、上述の方法で一对一に対応することが知られている。

ここでも幾何学的射を扱うにはやはり一度、全体 $\mathbf{Sh}_{\mathbf{Sets}}(X, \mathcal{O}_X)$, $\mathbf{Sh}_{\mathbf{Sets}}(Y, \mathcal{O}_Y)$ を考える必要が生じる。しかし位相空間の場合に f^*, f_* は、その定義をよく見てみれば、帰納的極限と層化が存在するような圏 $\mathcal{D}$ に対して、 $\mathcal{D}$ -値層の間の関手として定義できることが分かる。

連続写像を景のレベルで捉えようという試みは、Grothendieck 一派の活動まで遡る。

定義 4.15 (Grothendieck) $(\mathcal{C}, J), (\mathcal{C}', J')$ を有限極限を持つ圏の景とする。

関手 $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ が景の射 (morphism of sites) であるとは、次が成り立つことである。

(a) 有限極限を保つ (b) $S \in J(\mathcal{C})$ ならば $(\{F(f) \mid f \in S\}) \in J'(F(\mathcal{C}))$ となる。

連続写像 $f : X \rightarrow Y$ に対しての関手 $f^{-1} : (Y, \mathcal{O}_Y) \rightarrow (X, \mathcal{O}_X)$ の一般化である。実際、 f^{-1} は共通部分を保ち、被覆関係も保つ。景の射は連続写像と同様に、幾何学的射を誘導する³¹。

²⁹ ここで定義している幾何学的射の概念が、初等トポスの間の構造を保つという意味で自然な写像のクラスである訳ではない。あくまで「一般化された空間」としての側面を見たときに、自然な写像のクラスであるというに過ぎない。特に「高階論理の具体化」としての側面として自然な写像のクラスは、論理関手 (logical functor) であり、トポスの構造を保つという定義であるから、その意味ではこちらの方が自然である。

³⁰ こども実際には sober-空間で十分である。

³¹ しかし同じ幾何学的射を誘導する景の射が同じであるとは限らない。例えば $\emptyset \in J(\mathcal{C}), J'(\mathcal{C}')$ が任意の $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ で成立すると、 $\mathbf{Sh}(\mathcal{C}, J), \mathbf{Sh}(\mathcal{C}', J')$ は共に自明な圏となり、これらの間の幾何学的射は唯一である。

4.6 ロケイル理論

これまで景 (或はその上の Grothendieck-トポス) や初等トポスが空間の一般化であり、その見方に基づいて、対応する点や連続写像の概念を考えてきた。しかし位相空間と景の間の本質的な違いとして、順序であるか否かという違いがある。つまり位相空間では、二つの対象 (開集合) が与えられれば、その間の射は包含射に一意に定まるが、景ではそうとは限らないという点である。実は、位相空間と景の中間に、順序であるという性質を持った概念が広く知られている。それがロケイル (locale) である。本小節では、ロケイルの定義、これに対応する点、写像の概念を概説する。

定義 4.16 ロケイル³²とは、半順序集合 $L = (L, \leq)$ で、二項下限 $\wedge$ と、任意の上限 $\bigvee$ を持ち³³、無限分配則 (infinite distributive law) つまり任意の $U, V_i \in L$ について次式を満すものである。

$$U \wedge \bigvee_{i \in I} V_i = \bigvee_{i \in I} (U \wedge V_i)$$

ここで L 全体の上限つまり最大元を 1_L で、空の上限つまり最小元を 0_L で表す。

L_1 から L_2 へのロケイルの射 Φ とは、順序保存写像 $\Phi : L_2 \rightarrow L_1$ で次を満すものである。

$$\Phi(1_{L_2}) = 1_{L_1} \quad \Phi(U \wedge V) = \Phi(U) \wedge \Phi(V) \quad \Phi\left(\bigvee_{i \in I} V_i\right) = \bigvee_{i \in I} \Phi(V_i)$$

ロケイルは、開集合のなす順序集合 $(\mathcal{O}, \subset)$ の一般化である。実際、位相 $\mathcal{O}$ は有限の共通部分、任意の和について閉じており、無限分配則 $U \cap \bigcup_{i \in I} V_i = \bigcup_{i \in I} U \cap V_i$ を満す。

ロケイルの射は、順序保存写像としての向きとは逆であることに注意しよう。これは連続写像 $f : X \rightarrow Y$ は、順序保存写像 $f^{-1} : (\mathcal{O}_Y, \subset) \rightarrow (\mathcal{O}_X, \subset)$ として捉えられるからである。

ロケイル L は、順序でそのまま圏と見なせ、標準的に Grothendieck-位相 J_L が定義できる。

$$J_L(U) = \{S : \text{篩} \mid \bigvee \{V \mid \leq_V U \in S\} = U\}$$

このとき L_1 から L_2 へのロケイルの射と (L_2, J_{L_2}) から (L_1, J_{L_1}) への景の射と $\text{Sh}(L_1, J_{L_1})$ から $\text{Sh}(L_2, J_{L_2})$ への幾何学的射はそれぞれ一対一に対応する。従って $(Y, \mathcal{O}_Y)$ が Hausdorff-空間ならば、 $(X, \mathcal{O}_X)$ から $(Y, \mathcal{O}_Y)$ への連続写像と、ロケイルの射が一対一に対応する。³⁴

定義 4.17 ロケイル L の点とは、部分集合 $K \subset L$ で次の条件を満すものである。

$$1_L \notin K \quad U \wedge V \in K \text{ iff } U \in K \text{ 又は } V \in K \quad \bigvee_{i \in I} V_i \in K \text{ iff } \forall i \in I (V_i \in K)$$

これは位相空間 $(X, \mathcal{O})$ における点 x の開近傍系の補集合 $\mathcal{O}_X \setminus \mathfrak{B}(x)$ の抽象化である。

ロケイルの点も、一点空間の位相 $(\mathfrak{P}(\{*\}), \subset)$ からのロケイルの射と一対一に対応する。ロケイルの射 $p : (\mathfrak{P}(\{*\}), \subset) \rightarrow L$ に対し $p^{-1}\{\emptyset\}$ はロケイルの点であり、逆にロケイルの点 K に対し $p_K(U) = \{*\}$ iff $U \notin K$ でロケイルの射 $p_K : (\mathfrak{P}(\{*\}), \subset) \rightarrow L$ が定まる。

$\text{pt}(L)$ をロケイルの点の全体とし、 $\langle U \rangle = \{K \in \text{pt}(L) \mid U \notin K\}$ を開基底として位相を入れる。このとき $(X, \mathcal{O}_X)$ が Hausdorff-空間ならば $(X, \mathcal{O}_X) \cong \text{pt}(\mathcal{O}_X, \subset)$ となることが知られている。³⁶

³²実は、ロケイルは完備 Heyting-代数 (complete Heyting algebra) と呼ばれる直観主義論理を表現する代数と同一のものになることが知られている。

³³二項下限と二項上限を持つ半順序集合を束 (lattice) と呼ぶ。

³⁴論理的順序としては、 $(Y, \mathcal{O}_Y)$ が sober-空間であるときに連続写像とロケイルの射が一致することと、ロケイルの射が幾何学的射と一致することから、前小節で述べた連続写像と幾何学的射の関係を導くのが通例かも知れない。

³⁵従って順序保存写像としては $L \rightarrow \mathfrak{P}(\{*\})$ である。

³⁶実際には $(X, \mathcal{O}_X)$ が sober-空間であることと $\text{pt}(\mathcal{O}_X, \subset) \cong (X, \mathcal{O}_X)$ であることが同値になる。

5 ストーカーの定義と諸性質

5.1 既存の概念の問題点

前節までで、トポス理論における既存の空間及び点の一般化としての概念を見てきた。まずこれがどうして無矛盾性の数学の文脈で役に立たないかを見ておこう。

まず generic-拡大や超冪を扱う場合、それが宇宙を拡大させる操作である以上、内側の宇宙 $\mathfrak{M}$ と外側の宇宙 $\mathfrak{N}$ が必要である。そして宇宙の拡大 $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{N}$ の下で、次のような状況となっている。

1. 開集合及び層は内側の宇宙 $\mathfrak{M}$ において定義されている。
しかも外側の宇宙 $\mathfrak{N}$ の意味では層にならない。
2. その空間の点は、内側の宇宙 $\mathfrak{M}$ には存在せず、外側の宇宙 $\mathfrak{N}$ にのみ存在する。
或は外側の宇宙 $\mathfrak{N}$ に存在するが、内側の宇宙 $\mathfrak{M}$ には存在しない点を扱う必要がある。

こういった状況において、前節まで見てきた概念が使えるかどうかを検討してみよう。

まず空間の記述について考えよう。位相空間の概念は役に立たない。何故ならば、層を内側の宇宙 $\mathfrak{M}$ において定義したいが、位相空間は点がなければたった一つの開集合しかない空間になってしまうからである。では景の概念はどうであろうか。点がなくとも、開集合の間の被覆関係 (Grothendieck-位相) だけで、層の概念が定義できるようになる。つまり上記の状況では、開集合は内側の宇宙 $\mathfrak{M}$ で定義されているから、その間の「被覆」の関係、即ち Grothendieck-位相が内側の宇宙 $\mathfrak{M}$ で定義されていれば、すべて内側の宇宙 $\mathfrak{M}$ の中だけで、たとえそこに点がなくとも、層が定義できる。正に、このような状況では、景の概念はうってつけなのである。空間を記述することに関しては、位相空間から景へ抽象度を上げたことがプラスに働く。

ところが点の記述についてはそうは行かない。既に空間として景まで抽象化してしまっているから、点を記述するのに用いることの出来る概念は幾何学的点のみである。つまり点は随伴 $x^* : \text{Sh}(\mathcal{C}, J) \xrightarrow{\gamma} \text{Sets} : x_*$ で左随伴 x^* が有限極限を保つものとして定式化されなければならない。

しかしである、 $\text{Sh}(\mathcal{C}, J) \hookrightarrow \text{Sets}^{C^{\text{op}}}$ に現れる Sets と x^* の行き先の Sets は $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ のどちらなのであるか。いま考えたいのは、内側の宇宙 $\mathfrak{M}$ の意味での層の茎、であるので、 $\text{Sh}(\mathcal{C}, J) \hookrightarrow \text{Sets}^{C^{\text{op}}}$ に現れる Sets は $\mathfrak{M}$ であるべきで、 $\text{Sh}(\mathcal{C}, J)$ は内側の宇宙 $\mathfrak{M}$ の意味での層全体である。ところが随伴対として捉えられた点 $x = (x^*, x_*)$ は外側の宇宙 $\mathfrak{N}$ の元でしかないので、層 F の茎 x^*F は内側の宇宙 $\mathfrak{M}$ に属する保証はどこにもない。しかし $F \in \mathfrak{M} \subset \mathfrak{N}$ だから、外側の宇宙 $\mathfrak{N}$ においてなら茎 $F_x = x^*F$ が定義される。よって x^* の行き先の Sets は外側の宇宙 $\mathfrak{N}$ である。

とするならば x_* は外側の宇宙 $\mathfrak{N}$ のすべての集合に対し、内側の宇宙 $\mathfrak{M}$ の意味での層を返さなければならない。しかし x_* は摩天楼層を意図しており、これは不可能である。何故なら $S \in \mathfrak{N}$ に対して、その摩天楼層が内側の宇宙に属する、つまり $x_*(S) \in \mathfrak{M}$ ならば、空間の全体集合 (正確には、全体集合を意図した景の対象) $X \in \mathfrak{M}$ に対して $S = x_*(S)(X) \in \mathfrak{M}$ となる。何となれば、内側の宇宙 $\mathfrak{M}$ の元 X 及び $x_*(S)$ から、“数学的に” 定義された $x_*(S)(X)$ も内側の宇宙 $\mathfrak{M}$ の元となるからである。外側の宇宙の元 S はすべて内側の宇宙の元になってしまう、つまり $\mathfrak{N} \subset \mathfrak{M}$ となってしまうので、扱いたい状況ではこのようなことは不可能なのである。

このように点の記述では、幾何学的点という高い抽象度の概念を用いることはマイナスに働いてしまう。抽象数学においてよく行われる、何らかの操作の概念の定式化のやり方として、その操作を定義しうるすべてのものを集め、それを定義域とする写像として捉える、という方法があるが、こうしたやり方は複数の宇宙を扱う無矛盾性の数学の文脈においては不都合を生じる場合が多い。

そこで、空間の記述に景の概念を用いたのに対応して位相空間の点よりは抽象的だが、しかし幾何学的点ほど抽象度が低い点の概念が求められる。どう考えれば良いだろうか。13 頁の表 1 を見てみよう。これによると景に対応する点の概念が空白になっている。その為に、初等トポスまで抽象化した点の概念である幾何学的点を必要とした。しかし初等トポスまで抽象化すると、どうしても「層全体」が付き纏い、全体の概念が変化する無矛盾性の数学の文脈では不都合なのであった。そこで景の概念から素直に定義できる、点を記述する為の概念を探すことにしよう。

	位相空間・点	景・ ?	初等トポス・幾何学的点
層の記述	抽象化が必要 $\rightarrow$	$\circ$	$\circ$
茎の記述	—	$\circ ?$	$\leftarrow$ 抽象的過ぎる

ここでロケイル及びロケイルの点を用いた記述法について言及しておく必要がある。実は、generic-拡大や超冪を茎として記述するには、ロケイルとロケイルの点を用いれば十分とも言えないこともない。しかし次に掲げるように、応用・理論両面から、ロケイル及びロケイルの点を用いた記述は不十分であると考ええる。

応用上の理由 generic-拡大を茎として表現する場合、当該の層がロケイル上の層と見る為には、その“空間”に対して「完備化」と呼ばれる操作を経た上でなければならない。

この「完備化」の操作は、してもしなくても generic-拡大としては等価なのだが、「完備化」することで“空間”が煩雑なものになってしまうし、また現実的に generic-拡大を用いる場面では「完備化」を施すことは稀であり、通常の取り扱いをそのまま茎として定式化したい。

理論的な理由 点が存在する外側の宇宙 $\mathfrak{N}$ では、完備性（任意の部分集合の上限が存在すること）は成り立たず、点を扱う場合に実質的に完備性は使えない。

当該の層がロケイル上の層となるのは、内側の宇宙 $\mathfrak{M}$ においてであり、外側の宇宙 $\mathfrak{N}$ においてロケイルになっている保証はない。特に完備性が外側の宇宙 $\mathfrak{N}$ において成立する保証はない。こうした状況では、外側の宇宙にある点を取り扱う場合に完備性を用いることは出来ず、完備性を仮定したロケイルの概念を用いる意味がない。

こうした点を踏まえれば、求める新概念はロケイルの点を必ずしも完備性のない“空間”にまで拡張したものであるべきである。つまりその点に関する新概念としては、次のような条件を満たすものとしたい、ということである。（但し明らかに 1 点目は 3 点目から帰結する。）

0. 景に対応する点の概念であること
1. 位相空間における点の一般化・抽象化であること
2. 初等トポスの幾何学的点の特殊例であること
3. ロケイルの点の拡張になっていること

つまり 13 頁の表 3 を次のように書換えるような、景に対応する点の概念である。

初等トポス	(未定義)		(未定義)		(未定義)		幾何学的点
景・Grothendieck-トポス	(未定義)		(未定義)		??	$\subset$	幾何学的点
ロケイル	(未定義)		ロケイルの点	=	??	=	幾何学的点
位相空間	点	$\subset$	ロケイルの点	=	??	=	幾何学的点
Hausdorff-(sober-) 空間	点	=	ロケイルの点	=	??	=	幾何学的点

逆にこうした性質が満たされれば、generic-拡大や超冪などを茎として記述する為だけの ad hoc な概念ではなく、一般論からの妥当性が保証された概念であると言い得るであろう。

5.2 定義と基本的性質

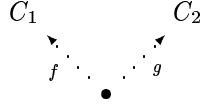
ここでは、前節において必要性を説明した新たな点の概念の候補として、ストーカーを導入する。本小節では、景に対応する点の概念として素朴に定義し、基本的性質を調べる。このように安直に定義したストーカーの概念が、一般論からの妥当性を持った適切な概念であるかどうか、つまり前小節の最後で述べた4点を満たすかどうかは、次小節で議論することとする。

さて、景の概念はどのような意味で空間の一般化であったかを思い出そう。それは、空間の本来の機能は層を定義することであるという観点に立ち、層を定義するのに必要なもの、つまり圏と「被覆」の概念の対が、空間を表していると考えたのであった。ではこの“哲学”の延長線上で、点の本来の機能とは何であろうか。それは層から究極に局所的な情報、つまり茎を取り出すことであろう。従って茎を定義するのに必要なもの、つまり点の開近傍系こそが、点を表しているのだと考えよう。こうした考え方に立てば、次の定義は非常に自然になる。

定義 5.1 (佐藤) 景 $(\mathcal{C}, J)$ 上のストーカー (stalker) $\mathcal{G}$ とは、 $\mathcal{C}$ の充満部分圏 (full subcategory) であって次の条件を満たすものである。

I. $\mathcal{G}$ はフィルタ圏 (filtering category) である。つまり

- $\text{Ob}(\mathcal{G}) \neq \emptyset$
- 任意の $C_1, C_2 \in \text{Ob}(\mathcal{G})$ に対して、 $\text{dom}(f) = \text{dom}(g)$ かつ $\text{cod}(f) = C_1, \text{cod}(g) = C_2$ なる射 f, g が存在する。



- 任意の射 $f, g \in \text{Arr}(\mathcal{G})$ について、 $\text{dom}(f) = \text{dom}(g) \in \text{Ob}(\mathcal{G})$ かつ $\text{cod}(f) = \text{cod}(g) \in \text{Ob}(\mathcal{G})$ ならば、 $f \circ h = g \circ h$ なる射 $h \in \text{Arr}(\mathcal{G})$ が存在する。



II. 任意の射 $f \in \text{Arr}(\mathcal{C})$ について、 $\text{dom}(f) \in \text{Ob}(\mathcal{G})$ ならば $\text{cod}(f) \in \text{Ob}(\mathcal{G})$ である。

III. 任意の $C \in \text{Ob}(\mathcal{G})$ と篩 $S \in J(\mathcal{C})$ について、 $\text{Ob}(\mathcal{G}) \cap \{\text{dom}(f) \mid f \in S\} \neq \emptyset$ である。

$\mathcal{D}$ は任意の直積とフィルタ余極限を持つとする。 $\mathcal{C}$ 上の $\mathcal{D}$ -値前層 P のストーカー $\mathcal{G}$ における茎 (stalk) $\mathcal{G}^*P = P_{\mathcal{G}}$ は、函手 $P \upharpoonright \mathcal{G}^{\text{op}} : \mathcal{G}^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{D}$ の余極限であり、その普遍射を $P_{\mathcal{G}, C}$ で表す。

$$\mathcal{G}^*P = P_{\mathcal{G}} = \varinjlim P \upharpoonright \mathcal{G}^{\text{op}} \quad P_{\mathcal{G}, C} : P(C) \rightarrow \mathcal{G}^*P$$

特に条件 III より $C \in \text{Ob}(\mathcal{G})$ ならば $\emptyset \notin J(\mathcal{C})$ つまり C は空の被覆を持たない。

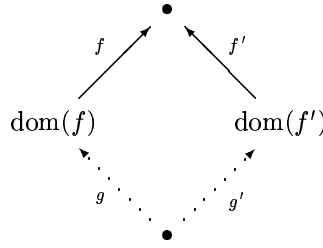
例 4.4 の通り、位相空間 $(X, \mathcal{O})$ 上の通常の被覆 J は Grothendieck-位相をなし、点 $x \in X$ に対して x の開近傍系 $\mathfrak{B}(x) = \{U \in \mathcal{O} \mid x \in U\}$ は明らかに景 $((X, \mathcal{O}), J)$ のストーカーとなる。

また半順序集合 $(P, \leq)$ を圏と見たとき、その部分集合 $F \subset P$ が条件 I, II を満たすことはフィルタであることと同値であることに注意しよう。

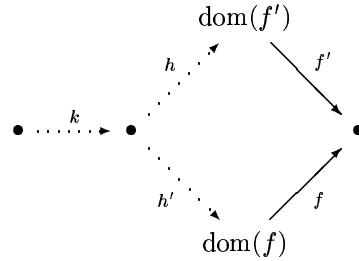
茎をこのように定義すれば、初等トポスの幾何学的点のように、一度 **Sets** 全体を考える必要はなく、圏 $\mathcal{D}$ だけで話が完結する³⁷。更に **Sets** におけるように、 $\mathcal{D}$ の余極限が具体的に分かれば、 $\mathcal{D}$ 全体すら必要なく、もっと素朴な枠組みで茎が扱えることになる。

³⁷これには注意が必要である。例えば、初等トポス $\text{Sh}(\mathcal{C}, J)$ における局所環対象 (local ring object) と呼ばれるものは、**LocRings**-値層ではなく、一度 $\text{Sh}_{\text{Sets}}(\mathcal{C}, J)$ を考え、その中で“局所環の公理”を満たす層を考える必要がある。

補題 5.2 $\mathcal{C}$ をフィルタ圏とする。 $\text{cod}(f) = \text{cod}(f')$ なる射 f, f' に対し、 $f \circ g = f' \circ g'$ なる射 g, g' が存在する。



(証明) $\text{dom}(f), \text{dom}(f')$ に対して、フィルタ圏の第一の条件を適用すると、 $\text{dom}(h) = \text{dom}(h')$ かつ $f \circ h, f' \circ h'$ が並行な射となるような h, h' が存在する。故に $f \circ h \circ k = f' \circ h' \circ k$ なる k が存在し、 $g = h \circ k, g' = h' \circ k$ とすれば良い。



□

例 5.3 位相空間 $(X, \mathcal{O})$ について、点 $x \in X$ が **generic-点 (generic point)** であるとは、任意の稠密開集合に含まれること、つまり任意の $U \in \mathcal{O}$ について $U^{\text{cl}} = X$ ならば $x \in U$ となることであると思い出そう。このとき稠密位相 D について、次の同値が成り立つ。

$$x : \text{generic-点} \iff \mathfrak{B}(x) : \text{景 } ((X, \mathcal{O}), D) \text{ におけるストーカー}$$

点 x に対し $\mathfrak{B}(x)$ が条件 *I, II* を満たすことは明らかである。

まず $x \in X$ が generic-点とする。 $U \in \mathfrak{B}(x)$ と $S \in D(U)$ について、 $V_S = \bigcup \{W \mid \text{incl}_{W,U} \in S\}$ は $V_S^{\text{cl}} \supset U$ を満し、 $V = V_S \cup \text{int}(X \setminus U)$ とすると $V^{\text{cl}} = X$ である。何故ならもし $V \cap \mathcal{O} = \emptyset$ かつ $\mathcal{O} \neq \emptyset$ なる開集合 $\mathcal{O}$ が存在したとすると、 $\mathcal{O} \cap V_S = \emptyset$ より $\mathcal{O} \cap U \subset \mathcal{O} \cap V_S^{\text{cl}} = \emptyset$ であり、故に $\mathcal{O} \subset X \setminus U$ であり $\mathcal{O} \subset \text{int}(X \setminus U) \subset V$ となって矛盾するからである。 x が generic-点だから $x \in V = V_S \cup \text{int}(X \setminus U)$ である。 $x \in U$ より $x \in V_S$ で、従って $\text{incl}_{W,U} \in S$ で $x \in W = \text{dom}(\text{incl}_{W,U})$ なる W が存在する。つまり $\mathfrak{B}(x)$ はストーカーである。

逆に $\mathfrak{B}(x)$ がストーカーとする。稠密開集合 U に対し $\{\text{incl}_{V,X} \mid V \subset U\} \in D(X)$ かつ $X \in \mathfrak{B}(x)$ より、 $V = \text{dom}(\text{incl}_{V,X}) \in \mathfrak{B}(x)$ なる $V \subset U$ が存在する。すると $x \in V \subset U$ である。

勿論、任意の点 x について $X \setminus \{x\}$ が稠密、即ち $\{x\} \notin \mathcal{O}$ ならばこのような点は存在しない。以下の議論で判るように Hausdorff-空間ではすべてストーカーは $\mathfrak{B}(x)$ の形をしており、従って孤立点を持たない Hausdorff-空間に稠密位相を入れれば、ストーカーは存在しない。

これを一般化して次の定義をする。つまり generic-フィルタとは、稠密位相の景における点である。これが無矛盾性の数学において最も基本的な generic-拡大を茎とする場合の点の対応物となる。

定義 5.4 半順序集合 $(P, \leq)$ の部分集合 G が **generic-フィルタ (generic filter)** であるとは、稠密位相 D による景 $((P, \leq), D)$ のストーカーであることである。

ストーカーは、その定義の素朴さゆえに、点の場合に可能だった定義や定理が、非常に素朴かつ自然な形で拡張される。その例として、茎の右随伴である摩天楼層が定義できること、及び前層の茎はその層化の茎と一致することを見て行く。以下 $\mathcal{D}$ は直積とフィルタ余極限を持つとする。

定義 5.5 $(\mathcal{C}, J)$ を景、 $\mathcal{G}$ をその上のストーカーとする。任意の直積を持つ圏 $\mathcal{D}$ とその対象 $D \in \text{Ob}(\mathcal{D})$ に対し、ストーカー $\mathcal{G}$ における摩天楼層 (skyscraper sheaf) $\mathcal{G}_*(D)$ は次で定義される。

$$\mathcal{G}_*(D)(C) = \begin{cases} D & (C \in \text{Ob}(\mathcal{G})) \\ 1_{\mathcal{D}} & (C \notin \text{Ob}(\mathcal{G})) \end{cases} \quad \mathcal{G}_*(D)(f) = \begin{cases} \text{id}_D & (\text{dom}(f) \in \text{Ob}(\mathcal{G})) \\ \bigcirc_D & (\text{dom}(f) \notin \text{Ob}(\mathcal{G}), \text{cod}(f) \in \text{Ob}(\mathcal{G})) \\ \text{id}_{1_{\mathcal{D}}} & (\text{dom}(f), \text{cod}(f) \notin \text{Ob}(\mathcal{G})) \end{cases}$$

ストーカーの条件 II より $\text{dom}(f) \in \text{Ob}(\mathcal{G}), \text{cod}(f) \notin \text{Ob}(\mathcal{G})$ となることはないことに注意せよ。

$\mathcal{D}$ の射 $f : D_1 \rightarrow D_2$ に対して層の射 $\mathcal{G}_*(f) : \mathcal{G}_*(D_1) \rightarrow \mathcal{G}_*(D_2)$ を $\mathcal{G}_*(f)(C) = f$ (if $C \in \text{Ob}(\mathcal{G})$), $= \text{id}_{1_{\mathcal{D}}}$ (if $C \notin \text{Ob}(\mathcal{G})$) と自然に定める。

この摩天楼層が層となることを確認しておこう。前層をなすのは明らかだから、任意の $C \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ と $S \in J(C)$ について層条件を満たすことを確認する。 $C \notin \text{Ob}(\mathcal{G})$ ならば、層条件に現れる対象はすべて終対象 $1_{\mathcal{D}}$ だから、等化子となることは明らかである。故に $C \in \text{Ob}(\mathcal{G})$ とする。

$$\begin{array}{ccc} D' & \xrightarrow{\langle h_f \rangle_{f \in S}} & \prod_{f \in S} \mathcal{G}_*(D)(\text{dom}(f)) \\ \downarrow h & & \searrow \\ \mathcal{G}_*(D)(C) & \xrightarrow{\langle \mathcal{G}_*(D)(f) \rangle_{f \in S}} & \prod_{f \in S} \mathcal{G}_*(D)(\text{dom}(f)) \xrightarrow{\quad} \prod_{f \in S, g \in t_{\text{dom}(f)}} \mathcal{G}_*(D)(\text{dom}(g)) \end{array}$$

$\mathcal{D}$ の射 $\langle h_f \rangle_{f \in S} : D' \rightarrow \prod_{f \in S} \mathcal{G}_*(D)(\text{dom}(f))$ が並行な射を等化するとする。つまり $\mathcal{G}_*(D)(g) \circ h_f = h_{f \circ g}$ が任意の $f \in S, g \in t_{\text{dom}(f)}$ について成り立つ。 $C \in \text{Ob}(\mathcal{G})$ かつ $S \in J(C)$ より、 $\text{dom}(f) \in \text{Ob}(\mathcal{G})$ なる $f \in S$ が存在する。このような f について $h = h_f : D' \rightarrow \mathcal{G}_*(D)(\text{dom}(f)) = D = \mathcal{G}_*(D)(C)$ とする。ここで $f, f' \in S$ に対し $\text{dom}(f), \text{dom}(f') \in \text{Ob}(\mathcal{G})$ ならば、 f, f' は $\mathcal{G}$ の射だから補題 5.2 より $f \circ g = f' \circ g'$ なる $\mathcal{G}$ の射 g, g' が存在する。すると $\mathcal{G}_*(D)(g) = \mathcal{G}_*(D)(g') = \text{id}_D$ だから、 $h_f = \mathcal{G}_*(D)(g) \circ h_{f \circ g} = h_{f \circ g} = h_{f' \circ g'} = \mathcal{G}_*(D)(g') \circ h_{f'} = h_{f'}$ となり、 h はこのような f の取り方に依存しないことが判る。 $\langle \mathcal{G}_*(D)(f) \rangle_{f \in S} \circ h = \langle h_f \rangle_{f \in S}$ つまり任意の $f \in S$ について $\mathcal{G}_*(D)(f) \circ h = h_f : D' \rightarrow \mathcal{G}_*(D)(\text{dom}(f))$ を示す。 $\text{dom}(f) \in \text{Ob}(\mathcal{G})$ ならば、 $\mathcal{G}_*(D)(f) = \text{id}_D$ であり、定義より $h = h_f$ だから成り立つ。 $\text{dom}(f) \in \text{Ob}(\mathcal{G})$ ならば、 $\mathcal{G}_*(D)(\text{dom}(f)) = 1_{\mathcal{D}}$ であり、やはり成り立つ。 $\langle \mathcal{G}_*(D)(f) \rangle_{f \in S} \circ h = \langle h_f \rangle_{f \in S}$ なる h の一意性は明らかである。

命題 5.6 景 $(\mathcal{C}, J)$ 上のストーカー $\mathcal{G}$ に対して $\mathcal{G}^* + \mathcal{G}_*$ は $\mathcal{D}$ から $\mathcal{D}^{\text{cop}}$ への随伴対である。

(証明) 各 $\mathcal{D}$ -値前層 P に対し $\eta_P : P \rightarrow \mathcal{G}_*(\mathcal{G}^*P)$ が存在し、更に任意の前層の射 $t : P \rightarrow \mathcal{G}_*(D)$ について、 $\mathcal{G}_*(\tilde{t}) \circ \eta_P = t$ となる $\tilde{t} : \mathcal{G}^*P \rightarrow D$ が一意に存在することを示せば良い。

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{t} & \mathcal{G}_*(D) \\ \eta_P \downarrow & \nearrow \mathcal{G}_*(\tilde{t}) & \\ \mathcal{G}_*(\mathcal{G}^*P) & & \mathcal{G}^*P \end{array} \quad \begin{array}{ccc} & & D \\ & \nearrow \tilde{t} & \\ & \mathcal{G}^*P & \end{array}$$

まず η_P を次で定める。 $f : C \rightarrow C'$ in $\mathcal{G}$ のとき $P_{\mathcal{G}, C} \circ P(f) = P_{\mathcal{G}, C'}$ だから、前層の射となる。

$$\eta_P(C) = \begin{cases} P_{\mathcal{G}, C} : P(C) \rightarrow \mathcal{G}^*P = \mathcal{G}_*(\mathcal{G}^*P)(C) & (C \in \text{Ob}(\mathcal{G})) \\ \bigcirc_{P(C)} : P(C) \rightarrow 1 = \mathcal{G}_*(\mathcal{G}^*P)(C) & (C \notin \text{Ob}(\mathcal{G})) \end{cases} \quad \begin{array}{ccc} P(C') & \xrightarrow{\eta_P(C')} & \mathcal{G}_*(\mathcal{G}^*P)(C') \\ P(f) \downarrow & & \mathcal{G}_*(\mathcal{G}^*P)(f) \downarrow \\ P(C) & \xrightarrow{\eta_P(C)} & \mathcal{G}_*(\mathcal{G}^*P)(C) \end{array}$$

さて、前層の射 $t : P \rightarrow \text{Sky}_x(D)$ が与えられたとする。 $f : C \rightarrow C'$ in $\mathcal{G}$ に対し次の左の図式が可換となる。従って P_x の普遍性から、任意の $C \in \text{Ob}(\mathcal{G})$ について右を可換とする $\tilde{t}$ が存在する。

$$\begin{array}{ccc} P(C') & \xrightarrow{t(C')} & D = \mathcal{G}_*(D)(C') \\ P(f) \downarrow & & \downarrow \text{id}_D = \mathcal{G}_*(D)(f) \\ P(C) & \xrightarrow{t(C)} & D = \mathcal{G}_*(D)(C) \end{array} \quad \begin{array}{ccc} P(C) & & \\ P_{\mathcal{G},C} \downarrow & \searrow t(C) & \\ \mathcal{G}^*P & \xrightarrow{\tilde{t}} & D \end{array}$$

$\mathcal{G}_*(\tilde{t}) \circ \eta_P = t$ となること、即ち $\mathcal{G}_*(\tilde{t})(C) \circ \eta_P(C) = t(C)$ を示す。 $C \in \text{Ob}(\mathcal{G})$ ならば、これは $\tilde{t} \circ P_{\mathcal{G},C} = t(C)$ だから成立し、 $C \notin \text{Ob}(\mathcal{G})$ ならば $\text{cod}(t(C)) = \mathcal{G}_*(D)(C) = 1$ だから自明である。

最後に一意性を確認しよう。 $\mathcal{G}_*(\tilde{t}) \circ \eta_P = t$ ならば、任意の $C \in \text{Ob}(\mathcal{G})$ についても $\tilde{t} \circ P_{\mathcal{G},C} = \mathcal{G}_*(\tilde{t})(C) \circ \eta_P(C) = t(C)$ となる。従って $\mathcal{G}^*P$ の普遍性から、このような $\tilde{t}$ は一意である。 $\square$

本節の冒頭で述べた通り、内側 $\mathfrak{M}$ と外側 $\mathfrak{N}$ の二つの宇宙があり、ストーカー $\mathcal{G}$ は内側の宇宙 $\mathfrak{M}$ ではなく、層は内側 $\mathfrak{M}$ で定義する場合、 $\mathcal{G}^* \dashv \mathcal{G}_*$ という随伴は意味をなさない。しかし $\mathcal{D}$ が具体的な定義を持ち内側で定義された $\mathcal{D}^{\mathfrak{M}}$ が外側の $\mathcal{D}^{\mathfrak{N}}$ の部分圏となるなら、内側 $\mathfrak{M}$ での $\mathcal{D}$ -値前層、前層の射は、外側 $\mathfrak{N}$ でも $\mathcal{D}$ -値前層、前層の射となり、従って内側の前層の圏 $(\mathcal{D}^{c^{\text{op}}})^{\mathfrak{M}}$ は外側のそれ $(\mathcal{D}^{c^{\text{op}}})^{\mathfrak{N}}$ の部分圏となり、随伴 $\mathcal{G}^* \dashv \mathcal{G}_*$ は外側の宇宙 $\mathfrak{N}$ で成り立つと考えれば良い。

定理 5.7 $\mathcal{D}$ は任意の直積とフィルタ余極限を持つ圏とし、 P は景 $(\mathcal{C}, J)$ 上の $\mathcal{D}$ -値前層で、 $a_P : P \rightarrow \mathbf{a}(P)$ をその層化とする。 $(\mathcal{C}, J)$ 上のストーカー $\mathcal{G}$ に対して $\mathcal{G}^*(a_P) : \mathcal{G}^*P \cong \mathcal{G}^*\mathbf{a}(P)$ である。

(証明) 前層の射 $\eta_P : P \rightarrow \mathcal{G}_*(\mathcal{G}^*P)$ を考える。ここで $\mathcal{G}_*(\mathcal{G}^*P)$ は層であるから、層化の定義より $\widetilde{\eta_P} \circ a_P = \eta_P$ となる $\widetilde{\eta_P} : \mathbf{a}(P) \rightarrow \mathcal{G}_*(\mathcal{G}^*P)$ が存在する。註 18 より η が自然変換であることに注意し、次の左の図式で $\eta_{\mathbf{a}(P)} \circ a_P = \mathcal{G}_*(\mathcal{G}^*(a_P)) \circ \eta_P = \mathcal{G}_*(\mathcal{G}^*(a_P)) \circ \widetilde{\eta_P} \circ a_P$ である。 $\mathcal{G}_*(\mathcal{G}^*(\mathbf{a}(P)))$ は層で、層化の普遍性より $\eta_{\mathbf{a}(P)} = \mathcal{G}_*(\mathcal{G}^*(a_P)) \circ \widetilde{\eta_P}$ である。即ちこの図式はすべて可換である。

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{\eta_P} & \mathcal{G}_*(\mathcal{G}^*P) \\ a_P \searrow & & \nearrow \widetilde{\eta_P} \\ \mathbf{a}(P) & \xrightarrow{\eta_{\mathbf{a}(P)}} & \mathcal{G}_*(\mathcal{G}^*(\mathbf{a}(P))) \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{G}^*P & \xrightarrow{\mathcal{G}^*(\eta_P)} & \mathcal{G}^*P \\ \mathcal{G}^*(a_P) \searrow & & \nearrow \mathcal{G}^*(\widetilde{\eta_P}) \\ \mathcal{G}^*(\mathbf{a}(P)) & \xrightarrow{\mathcal{G}^*(\eta_{\mathbf{a}(P)})} & \mathcal{G}^*(\mathbf{a}(P)) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} P(C) & \xrightarrow{\eta_P(C)} & \mathcal{G}_*(\mathcal{G}^*(P))(C) = \mathcal{G}^*P \\ P_{\mathcal{G},C} \downarrow & & \downarrow \text{id}_{\mathcal{G}^*P} \\ \mathcal{G}^*P & \xrightarrow{\mathcal{G}^*(\eta_P)} & \mathcal{G}^*P \end{array}$$

上の左の図式を関手 $\mathcal{G}^*$ で移すと、明らかに $\mathcal{G}^*\mathcal{G}_*\mathcal{G}^* \cong \mathcal{G}^*$ であるから、上の右の可換図式を得る。ここで $C \in \text{Ob}(\mathcal{G})$ について左の図式の可換性と $\mathcal{G}^*$ の普遍性から、 $\mathcal{G}^*(\eta_P) = \text{id}_{\mathcal{G}^*P}$, $\mathcal{G}^*(\eta_{\mathbf{a}(P)}) = \text{id}_{\mathcal{G}^*(\mathbf{a}(P))}$ である。故に上の右の可換性から $\mathcal{G}^*(\widetilde{\eta_P}) = \mathcal{G}^*(a_P)^{-1}$ を得る。 $\square$

実はこの定理は圏論の一般論から直ちに導かれる。つまり $\mathcal{G}^* \dashv \mathcal{G}_*$, $\mathbf{a} \dashv \iota$ だから $\mathcal{G}^* \circ \mathbf{a} \dashv \iota \circ \mathcal{G}_*$ であり、 $\iota \circ \mathcal{G}_* = \mathcal{G}_*$ と左随伴の (同型を除いた) 一意性から $\mathcal{G}^* \circ \mathbf{a} \cong \mathcal{G}^*$ である。しかし $\mathcal{G}^* \dashv \mathcal{G}_*$ は外側の宇宙 $\mathfrak{N}$ で考えた $\mathcal{D}^{\mathfrak{N}}$ から $(\mathcal{D}^{c^{\text{op}}})^{\mathfrak{N}}$ への随伴であり、ここでいう層化 $\mathbf{a}$ も外側で考える必要がある³⁸。しかし空間や層は内側の宇宙 $\mathfrak{M}$ で考えたいから、層化についても内側でのそれ $\mathbf{a}^{\mathfrak{M}}$ で同様の結果 $\mathcal{G}^*\mathbf{a}^{\mathfrak{M}}(P) \cong \mathcal{G}^*P$ を得たい。上のような或る意味で初等的な証明はこのような文脈でも通用する。実際、 $\mathcal{D}$ が **Sets**, **Rings** などのかなり具体的な圏ならば、定義 4.11 の後で述べた通り層化 $\mathbf{a}$ には具体的な構成法があり、内側 $\mathfrak{M}$ での層化でも外側の層に対する普遍性を保つこと、従って $\mathcal{G}_*(\mathcal{G}^*(P))$ は外側 $\mathfrak{N}$ での層に過ぎないが内側 $\mathfrak{M}$ での層化 $\mathbf{a}(P)$ からの射 $\widetilde{\eta_P}$ が取れることを示せる。このような文脈での柔軟性が、この少々素朴な中間の抽象度の記述の利点なのである。

³⁸ 内側 $\mathfrak{M}$ での $\mathcal{D}$ -値前層、前層の射は、外側 $\mathfrak{N}$ でも $\mathcal{D}$ -値前層、前層の射となるが、層にはこのような絶対性は成立せず、故に内側での層化 $\mathbf{a}^{\mathfrak{M}}(P)$ と外側での層化 $\mathbf{a}^{\mathfrak{N}}(P)$ は一般には一致しない。

5.3 既存の諸概念との比較

さて、前小節では圏論的な概念ではあるが、無矛盾性の数学の特殊な文脈においても通用する素朴な記述を可能とする、新たな点の概念としてストーカーを導入した。この概念が、点の概念の一般化として妥当であることを示す為、既に導入されている他の点の概念の一般化との比較を行う。

ストーカー以外の概念は、複数の宇宙を扱うことを前提としてないので、この比較は固定した一つの宇宙のみを扱う状況で考える。更に初等トポスの扱いでは圏同値など、かなり強い選択公理を仮定する場合が多く、幾何学的点とストーカーの比較でも選択公理に関する仮定は用いることになるが、そもそも幾何学的点の概念が選択公理を前提としていいると考えられるから、こうした仮定を置いても比較の適切さには差し支えなからう。既存の概念がそれぞれ用いられる状況で、この新たな概念の妥当性を確立し、その上で既存の概念では通用しない文脈に持ち込むという訳である。

この結果、まず 13 頁の表 1 は次のように書き加えられる。

	← 具体			抽象 →
“空間”	位相空間	ロケイル	景	初等トポス
“写像”	連続写像	ロケイルの射	景の射	幾何学的射
“点”	点	ロケイルの点	ストーカー	幾何学的点

表 4: 各概念の対応関係 (2)

前節で見たように、この表の縦の関係として、景以外の概念では一点“空間”からの“写像”が“点”と一対一に対応していた。景についても同様の事実が成り立つ必要がある。この為には、有限極限を持つ景の間でのみ定義していた景の射を拡張する必要がある。そしてこの景の射の概念の拡張も、その場限りのものであってはならない。少なくとも 13 頁の表 2 の状況は保たれていなければならない。これらの議論は 5.3.2 で行う。これが 24 頁の 0 点目に対する解答である。

この外、24 頁の 1 点目から 3 点目について議論しなければならない。単に一つの概念が他の概念の一般化となっていることを確認するのみならず、どのような状況下で二つの概念は一致するかについても議論していく。1 点目及び 2 点目を 5.3.1 で、3 点目を 5.3.3 で議論する。結果としては、点に対応する各概念の間の関係、表 3 が次の通りに書き変る。

初等トポス	(未定義)		(未定義)		(未定義)		幾何学的点
景・Grothendieck-トポス	(未定義)		(未定義)		ストーカー	$\subset$	幾何学的点
前順序上の景	(未定義)		(未定義)		ストーカー	$=$	幾何学的点
ロケイル	(未定義)		ロケイルの点	$=$	ストーカー	$=$	幾何学的点
位相空間	点	$\subset$	ロケイルの点	$=$	ストーカー	$=$	幾何学的点
Hausdorff-(sober-) 空間	点	$=$	ロケイルの点	$=$	ストーカー	$=$	幾何学的点

表 5: 点の各概念の関係 (2)

つまりストーカーと幾何学的点が一一致する為の新たな十分条件として、前順序上の景ということが挙げられる。従って少なくとも前順序上の景においては、ストーカーの概念は“点”の一般化として適切なものであると言える。他方、5.3.3 で見るように、前順序でなければこれらが一致しない例が存在するが、しかしストーカーは幾何学的点の中で非常に自然な特徴付けが出来、その意味でもストーカーという概念が“点”を表す概念として妥当なものであると主張できると考える。

5.3.1 位相空間の点・ロケールの点との関係

まずロケールにおいては、ロケールの点とストーカーは同じであることを確認しよう。これは、ロケールの点、ストーカーはそれぞれ一点“空間”からのロケールの射、景の射に一致し、ロケール間ではロケールの射と景の射が一致することに従うが、ここでは分かりやすさの為、手始めとしてこの簡単な場合で考えてみることにする。

命題 5.8 ロケール $L = (L, \leq)$ と、標準的な位相 J_L を入れた景 (L, J_L) を同一視する。

このとき L におけるロケールの点とストーカーの間には次の写像で一対一対応がある。

$$\mathbf{pt}(L) \ni K \mapsto (L \setminus K, \leq) \in \{\mathcal{G} \mid \mathcal{G} : \text{ストーカー}\}$$

(証明) $K \in \mathbf{pt}(L)$ は次の三条件と同値で、これとストーカーの条件 *I-III* との同値性を示せば良い。

$$1_L \in L \setminus K \quad U \wedge V \in L \setminus K \Leftrightarrow U \in L \setminus K \ \& \ V \in L \setminus K \quad \exists i \in I (V_i \in K \setminus L) \Leftrightarrow \bigvee_{i \in I} V_i \in L \setminus K$$

上の三条件が成り立つとする。第一と第二の条件から $(L \setminus K, \leq)$ はフィルタ圏をなす。更に $U \in L \setminus K$, $U \leq V$ とすると $U \wedge V = U \in L \setminus K$ だから $V \in L \setminus K$ である。第三の条件よりストーカーの条件 *III* も満される。

逆に $(L \setminus K, \leq)$ がストーカーであるとする。 $\text{Ob}(\mathcal{G}) \neq \emptyset$ とストーカーの条件 *II* から $1_L \in L \setminus K$ であり、再び条件 *II* より上の第二、第三の条件の $\Rightarrow$ が成立する。 $U, V \in L \setminus K$ とすると、フィルタ圏だから $L \setminus K \ni W \leq U, V$ が存在し、 $W \leq U \wedge V$ だから $U \wedge V \in L \setminus K$ である。最後に第三の条件の $\Leftarrow$ は条件 *III* から明らかである。 $\square$

Hausdorff-空間では、位相空間の点とストーカー即ちロケールの点が一一致することを見ておこう。位相空間の点がストーカーとなることは明らかであるから、位相空間 $(X, \mathcal{O})$ に通常の被覆で位相を入れた景の上のストーカー $\mathcal{G}$ に対し $\mathcal{G} = \mathfrak{B}(x)$ となる $x \in X$ が存在することを見る。³⁹

もし任意の $x \in X$ に対し $\mathfrak{B}(x) \setminus \mathcal{G} \neq \emptyset$ ならば $\{W \in \mathcal{O} \mid W \notin \mathcal{G}\}$ が X の開被覆、即ち $\{\text{incl}_{U,X} \mid U \subset \exists W \notin \mathcal{G}\} \in J(X)$ で、ストーカーの条件 *III* より $\mathcal{G} \ni U \subset W \notin \mathcal{G}$ なる $U, W \in \mathcal{O}$ が存在し、条件 *II* に矛盾する。故に適当な $x \in X$ に対して $\mathfrak{B}(x) \subset \mathcal{G}$ である。

もし $x \neq y$ に対し $\mathfrak{B}(x), \mathfrak{B}(y) \subset \mathcal{G}$ とすると、Hausdorff-空間だから $x \in U, y \in V$ で $U \cap V = \emptyset$ なるものが存在するが、 $U \in \mathfrak{B}(x) \subset \mathcal{G}$, $V \in \mathfrak{B}(y) \subset \mathcal{G}$ であり、更に $\mathcal{G} \ni W \subset U, V$ なる W が存在しなければならない。すると $W = \emptyset$ であり、 $\emptyset \in \mathcal{G}$ だが $\emptyset$ は空被覆を持つので矛盾する。故に $\mathcal{G} \cap \mathfrak{B}(x_g)$ なる点 x_g が一意に存在する。

$W \in \mathcal{G} \setminus \mathfrak{B}(x_g)$ ならば、 $x_g \notin W$ より、任意の $y \in W$ に対し $x_g \in U', y \in V'$ で $U' \cap V' = \emptyset$ なる $U', V' \in \mathcal{O}$ が取れる、つまり $\{V' \cap W \mid \exists U' \in \mathfrak{B}(x_g) (U' \cap V' = \emptyset)\}$ が $W \in \mathcal{G}$ の開被覆である。故に $V' \cap W \in \mathcal{G}$ かつ $U' \cap V' = \emptyset$ なる $V' \in \mathcal{O}$ と $U' \in \mathfrak{B}(x) \subset \mathcal{G}$ が存在する。すると $V' \cap W \cap U' = \emptyset \in \mathcal{G}$ となって矛盾である。よって $\mathcal{G} \setminus \mathfrak{B}(x_g) = \emptyset$ つまり $\mathcal{G} = \mathfrak{B}(x_g)$ である。

尚、Hausdorff-空間でない位相空間で、位相空間の点とロケールの点即ちストーカーが一一致しないものとしては、次の非常に初等的な例がある。

例 5.9 X を無限集合とし $\mathcal{O} = \{U \subset X \mid X \setminus U : \text{有限}\}$ とすると、 $(X, \mathcal{O})$ は位相空間となる。

このとき圏 $(\mathcal{O} \setminus \{\emptyset\}, \subset)$ は、通常の被覆 J に対する景 $((X, \mathcal{O}), J)$ のストーカーであるが、如何なる $x \in X$ についても開近傍系 $\mathfrak{B}(x)$ とは一致しない。実際、 $\mathcal{O} \setminus \{\emptyset\}$ は共通部分について閉じているから条件 *I* を満し、 *II* は明らかである。 *III* も空の被覆を持つ開集合がないから明らかである。しかし任意の $x \in X$ について $X \setminus \{x\} \in \mathcal{O}$, $\notin \mathfrak{B}(x)$ である。

³⁹これは非常に初等的な証明であるが、[2](Prop. IX.3.2) などでは、位相空間の点とロケールの点即ちストーカーが一一致する為、位相空間の必要十分条件を調べている。註 27 など述べているように、これが sober-空間という条件である。

5.3.2 一点からの景の射との関係

定義 5.10 関手 $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ と $D \in \text{Ob}(\mathcal{D})$ に対し、コンマ圏 (comma category) $(D \downarrow F)$ とは、次で定義される。忘却関手 $U_D : (D \downarrow F) \rightarrow \mathcal{C}$ を自然に定める。

$$\begin{aligned} \text{Ob}(D \downarrow F) &= \{(C, f) \mid f : D \rightarrow F(C) \text{ in } \mathcal{D}\} & U_D((C, f)) &= C \\ h : (C, f) \rightarrow (C', f') \text{ in } D \downarrow F &\Leftrightarrow h : C \rightarrow C' \text{ in } \mathcal{C} \text{ \& } f' = F(h) \circ f & U_D(h) &= h \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{h} & C' \\ \mathcal{C} & & \\ & & \begin{array}{ccc} F(C) & \xrightarrow{F(h)} & F(C') \\ & \swarrow f \quad \searrow f' & \\ & D & \mathcal{D} \end{array} \end{array}$$

定義 5.11 (佐藤) 景の間の関手 $F : (\mathcal{C}, J) \rightarrow (\mathcal{D}, J')$ が景の射 (morphism of sites) であるとは、次の条件を満たすことである。

- a'. $D \in \text{Ob}(\mathcal{D})$ に対して $\emptyset \notin J'(D)$ ならば $D \downarrow F$ はフィルタ圏である。
- b'. $C \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ と $S \in J(C)$ に対し $(F^{\ast}S) = \{F(g) \circ h \mid g \in S, h \in t_{\text{dom}(F(g))}\} \in J'(F(C))$ となる。

景の射の概念が、Grothendieck-一派の定義 (定義 4.15) より拡張できることは、例えば [3] で指摘されているが、[3] では上の条件 a. において $\emptyset \notin J'(D)$ という制約を付けない。従ってこの定義は [3] で指摘されているものを更に拡張したものである。本稿での議論にこの拡張は本質的である。

補題 5.12 関手 $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ と $D \in \text{Ob}(\mathcal{D})$ について $D \downarrow F$ がフィルタ圏をなすことと次の三条件は同値である。

- $f : D \rightarrow F(C)$ となる $\mathcal{D}$ の射 f と $C \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ が存在する。
- $f : D \rightarrow F(C)$ と $g : D \rightarrow F(C')$ に対し、 $\mathcal{C}$ の射 f', g' と $\mathcal{D}$ の射 k で、 $\text{dom}(f') = \text{dom}(g'), \text{cod}(f') = C, \text{cod}(g) = C'$ かつ $F(f') \circ k = f, F(g') \circ k = g$ なるものが存在する。

$$\begin{array}{ccc} & & \begin{array}{ccc} F(C) & & F(C') \\ & \swarrow f \quad \searrow g & \\ & D & \end{array} \\ & \begin{array}{ccc} C & & C' \\ & \swarrow f' \quad \searrow g' & \\ & \bullet & \end{array} & \end{array}$$

- 並行な $\mathcal{C}$ の射 f, g と $F(f) \circ h = F(g) \circ h$ かつ $\text{dom}(h) = D$ なる $\mathcal{D}$ の射 h に対し、 $f \circ h' = g \circ h'$ なる $\mathcal{C}$ の射 h' と $\mathcal{D}$ の射 k で $h = F(h') \circ k$ なるものが存在する。

$$\begin{array}{ccc} & \begin{array}{ccc} \bullet & & \bullet \\ \parallel g & & \parallel f \\ \bullet & & \bullet \end{array} & \\ & \swarrow h' & \begin{array}{ccc} F(g) & & F(f) \\ \bullet & & \bullet \\ \swarrow F(h') & & \uparrow h \\ \bullet & & \bullet \\ \leftarrow k & & D \end{array} \end{array}$$

(証明) フィルタ圏の定義 (定義 5.1) とコンマ圏の定義から容易に判る。

□

この結果を用いると連続写像 $f : (X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$ に対し、そこから誘導される関手 $f^{-1} : ((Y, \mathcal{O}_Y), J') \rightarrow ((X, \mathcal{O}_X), J)$ が景の射となることは容易に判る。但し J, J' は通常の被覆とする。実際、 $U \in \mathcal{O}_Y$ について $U \subset f^{-1}X$ であるし、 $U \subset f^{-1}V_1, f^{-1}V_2$ ならば $V_1 \cap V_2 \subset V_1, V_2$ かつ $U \subset f^{-1}(V_1 \cap V_2)$ である。更に $\bigcup_{i \in I} W_i = U$ ならば $\bigcup_{i \in I} f^{-1}W_i = f^{-1}U$ となる。

この意味からも、連続写像の一般化となっていることは判る。

命題 5.13 Grothendieck の意味 (定義 4.15) での景の射は、この意味 (定義 5.11) で景の射である。

(証明) $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ を有限極限を持つ圏の間の関手で、Grothendieck の意味で景の射であるとする。

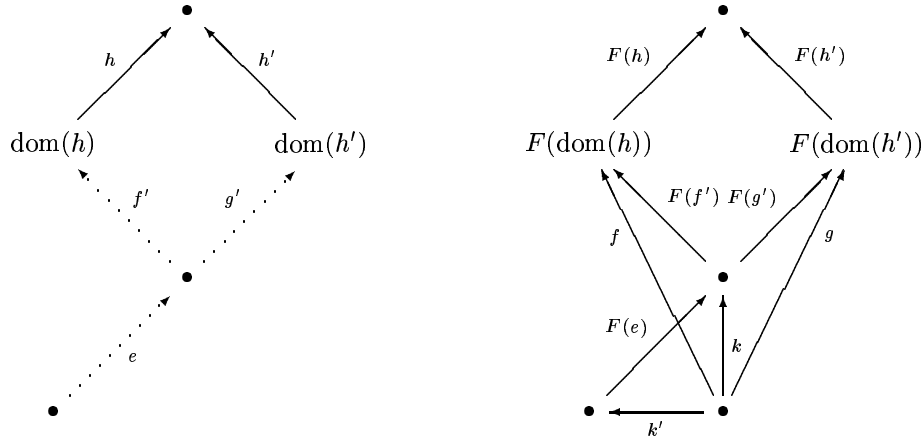
(b') は (b) から判る。(a') は補題 5.12 の三条件を確認すれば良い。最初の条件は $C = 1_C$ とすればよく、第二の条件では $f' = \pi_{C, C'}, g' = \pi'_{C, C'}, k = \langle f, g \rangle$ でよく、第三の条件では h' は f, g の等化子とすれば良い。□

特にロケイルの射は Grothendieck の意味で景の射だから、ここの意味でも景の射である。従って景の射が連続写像及びロケイルの射の一般化・抽象化であることが分かる。

次に景の射と幾何学的射の関係を考える。トポス理論では、かなり強い選択公理を仮定するので、この比較も選択公理を仮定して良いだろう。そして Sets-値層のみを考えれば良く、Sets に対しては選択公理の下で層化は必ず存在する。まず補題を準備して、その上で景の射が幾何学的射の特殊例であるということ、つまり幾何学的射を誘導することを証明する。この誘導は連続写像が幾何学的射を誘導することと可換でなければならない。

補題 5.14 景の射 $F : (\mathcal{C}, J) \rightarrow (\mathcal{D}, J')$ に対して、 $\mathcal{C}$ の射 h, h' が $\text{cod}(h) = \text{cod}(h')$ を満すなら $F^* \text{Com}(h, h')$ は $\text{Com}(F(h), F(h'))$ で共終である。

(証明) $(f, g) \in \text{Com}(F(h), F(h'))$ とする。つまり $F(h) \circ f = F(h') \circ g$ で $\emptyset \notin J'(\text{dom}(f))$ である。すると補題 5.12 より $\mathcal{C}$ の射 f', g' と $\mathcal{D}$ の射 k で、 $\text{dom}(f') = \text{dom}(g')$ かつ $F(f') \circ k = f, F(g') \circ k = g$ なるものが存在する。いま $h \circ f', h' \circ g'$ は $\mathcal{C}$ の並行する射で $F(h \circ f') \circ k = F(h) \circ f = F(h') \circ g = F(h' \circ g') \circ k$ となるから、 $\emptyset \notin J'(\text{dom}(f)) = J'(\text{dom}(k))$ と補題 5.12 より $h \circ f' \circ e = h' \circ g' \circ e$ なる $\mathcal{C}$ の射 e と $\mathcal{D}$ の射 k' で $k = F(e) \circ k'$ なるものがある。



故に $(f' \circ e, g' \circ e) \in \text{Com}(h, h')$ かつ $f = F(f' \circ e) \circ k', g = F(g' \circ e)$ となる。故に $F^* \text{Com}(h, h')$ は $\text{Com}(F(h), F(h'))$ で共終である。□

この補題は、命題 4.10 で層条件に重要な共終族を景の射によって変換する際に重要となる結果である。共終集合の中の共終集合は共終だから、 $Z^C(f, g)$ が共終ならば $F^* Z^C(f, g)$ も共終である。

命題 5.15 選択公理を仮定する。景の射 $F : (\mathcal{C}, J) \rightarrow (\mathcal{D}, J')$ は、 $F_*P = P \circ F$ として幾何学的射 $(F^*, F_*) : \text{Sh}(\mathcal{D}, J') \rightarrow \text{Sh}(\mathcal{C}, J)$ を誘導する。

(証明) まず $(\mathcal{D}, J')$ 上の層 P に対し $P \circ F$ が $(\mathcal{C}, J)$ 上の層となることを示す。いま J 自身が J の基底であり $\langle \text{Com}(f, g) \rangle_{f, g \in t_C, C \in \text{Ob}(\mathcal{C})}$ 自身が共終族をなすから、命題 4.10 よりこれは $C \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ と $S \in J(C)$ について次が等化子となることと同値である。

$$P(F(C)) \xrightarrow{\langle P(F(f)) \rangle_{f \in S}} \prod_{f \in S} P(F(\text{dom}(f))) \xrightarrow[\prod_{g \in S \{ \langle \langle P(F(h_2)) \rangle_{(h_1, h_2) \in \text{Com}(f, g)} \rangle_{f \in S} \}}]{\langle \prod_{f \in S} \langle P(F(h_1)) \rangle_{(h_1, h_2) \in \text{Com}(f, g)} \rangle_{g \in S}} \prod_{f, g \in S} \prod_{(h_1, h_2) \in \text{Com}(f, g)} P(F(\text{dom}(h_1)))$$

これは次の図式と同じであり、 $(F^*S) \in J'(F(C))$ 即ち $F^*S \in K_{J'}(F(C))$ かつ $F^*\text{Com}(f, g)$ は共終である。 $K_{J'}$ は J' の基底であり P が層であるから、命題 4.10 よりこの図式は等化子である。

$$P(F(C)) \xrightarrow{\langle P(f) \rangle_{f \in F^*S}} \prod_{f \in F^*S} P(\text{dom}(f)) \xrightarrow[\prod_{g \in F^*S \{ \langle \langle P(h_2) \rangle_{(h_1, h_2) \in F^*\text{Com}(f, g)} \rangle_{f \in F^*S} \}}]{\langle \prod_{f \in F^*S} \langle P(h_1) \rangle_{(h_1, h_2) \in F^*\text{Com}(f, g)} \rangle_{g \in F^*S}} \prod_{f, g \in F^*S} \prod_{(h_1, h_2) \in F^*\text{Com}(f, g)} P(\text{dom}(h_1))$$

故に $F_* : \text{Sh}(\mathcal{D}, J') \rightarrow \text{Sh}(\mathcal{C}, J)$ は定まった。 F^* を定義する為、まず $F^o : \text{Sh}(\mathcal{C}, J) \rightarrow \text{Sets}^{\mathcal{D}^{\text{op}}}$ を次で定め $F^* = \mathbf{a} \circ F^o$ とし、 $\eta_Q : Q \rightarrow F_*(F^o(Q))$ も定める。但し Q は $(\mathcal{C}, J)$ 上の層とする。

$$F^o(Q)(D) = \begin{cases} \lim_{\rightarrow} Q \circ U_D & (\emptyset \notin J'(D)) \\ 1_{\text{Sets}} & (\emptyset \in J'(D)) \end{cases} \quad \eta_Q(C) = \begin{cases} \text{id}_{Q(C)} & (\emptyset \notin J'(F(C))) \\ \bigcirc_{Q(C)} & (\emptyset \in J'(F(C))) \end{cases}$$

ここで $\emptyset \notin J'(F(C))$ ならば $(F^o(Q))(F(C)) = (Q \circ U_{F(C)})(C, \text{id}_{F(C)}) = Q(C)$ であり、また $\emptyset \in J'(F(C))$ ならば $(F^o(Q))(F(C)) = 1$ であるからこのような η_Q の定義は可能である。

さて $(\mathcal{D}, J')$ 上の層 P と層の射 $t : Q \rightarrow F_*P$ に対し $\tilde{t} : F^o(Q) \rightarrow P$ を次のように定める。 $\emptyset \notin J'(D)$ ならば $(C, f) \in \text{Ob}(D \downarrow F)$ が存在し、このような任意の (C, f) に対し $P(f) \circ t(C) : Q(C) \rightarrow P(F(C)) \rightarrow P(D)$ より次の左の図式を可換とする $\tilde{t}(D) : F^o(Q)(D) = \lim(Q \circ U_D) \rightarrow P(D)$ がある。 $\emptyset \in J'(D)$ ならば $\tilde{t}(D) = \text{id}_1 : F^o(Q)(D) = 1 \rightarrow P(D) = 1$ とする。

$$\begin{array}{ccc} Q(C) & & Q(C) \\ \downarrow & \searrow^{P(f) \circ t(C)} & \downarrow \text{id}_{Q(C)} \searrow^{F(\text{id}_{F(C)}) \circ t(C) = t(C)} \\ F^o(Q)(D) = \lim_{\rightarrow} (Q \circ U_D) & \xrightarrow{\tilde{t}(D)} & P(D) \end{array} \quad \begin{array}{ccc} Q(C) & & Q(C) \\ \downarrow \text{id}_{Q(C)} & \searrow^{F(\text{id}_{F(C)}) \circ t(C) = t(C)} & \downarrow \\ F^o(Q)(F(C)) = Q(C) & \xrightarrow{\tilde{t}(F(C))} & P(F(C)) \end{array}$$

$F_*(\tilde{t}) \circ \eta_Q = t$ を示す。 $\emptyset \in J'(F(C))$ なる $C \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ に対しては $F_*(P)(C) = P(F(C)) = 1_{\text{Sets}}$, $t(C) = \bigcirc_{Q(C)}$ であるから $F_*(\tilde{t})(C) \circ \eta_Q(C) = t(C)$ となる。 $\emptyset \notin J'(F(C))$ ならば上の左の図式で $D = F(C)$ and $f = \text{id}_{F(C)}$ とすれば右図となり $\tilde{t}(F(C)) = t(C)$ 即ち $F_*(\tilde{t})(C) = t(C)$ を得る。

これより $F_*(\tilde{t}) \circ \eta_Q = t$ なる $\tilde{t}$ の一意性は、余極限 $\lim_{\rightarrow} (Q \circ U_D)$ の普遍性に従う。

最後に、 F_*P は層であるから $F_*(\tilde{t}) = F_*(\tilde{t}) \circ \mathbf{a}_{(F^o Q)}$ を満す $\tilde{t} : \mathbf{a}(F^o Q) = F^*Q \rightarrow P$ が一意に存在する。するとこの $\tilde{t}$ が $F_*(\tilde{t}) \circ \mathbf{a}_{(F^o Q)} \circ \eta_Q = F_*(\tilde{t}) \circ \eta_Q = t$ を満す。一意性はそれぞれの一意性に従う。

$$\begin{array}{ccccc} Q & \xrightarrow{\eta_Q} & F_*(F^o(Q)) & \xrightarrow{\mathbf{a}_{(F^o Q)}} & F_*(\mathbf{a}(F^o(Q))) \\ \downarrow t & \nearrow F_*(\tilde{t}) & \nearrow F_*(\tilde{t}) & & \\ F_*(P) & & & & \end{array}$$

故に $F^* \dashv F_*$ である。あとは F^* が有限極限を保つことを示せば良い。層化 $\mathbf{a}$ は有限極限を保つ ([2] Th III.5.1) から F^o が保つことを示す。これは層の有限極限は前層としてのそれであり、余フィルタ圏 $\mathcal{F}$ 上の余極限関手 $\lim_{\rightarrow} : \text{Sets}^{\mathcal{F}} \rightarrow \text{Sets}$ がそれらを保つ ([1] Th IX.2.1) ことに従う。□

以上から、景の射が連続写像及びロケイルの射の一般化・抽象化であり、幾何学的射の特殊例であるということが判った。更に連続写像及びロケイルの射から誘導された幾何学的射は、景の射を誘導してから幾何学的射を誘導したものに等しい。つまり (ロケイルの射) $\subset$ (景の射) $\subset$ ⁴⁰(幾何学的射) と見なせる。ところがロケイルにおいて (幾何学的射) = (ロケイルの射) ⁴¹([2] Prop IX.5.2) だから、ロケイルではロケイルの射、景の射、幾何学的射はすべて等しい概念となる。結局、景の射の概念を一般化しても 13 頁の表 2 の状況は保たれ、景の射の概念の拡張は妥当であったと言える。

こうしたことを踏まえて、一点の空間を景と見た $\mathbf{sg}$ への景の射とストーカーの対応を見よう。但しここで連続写像 f を景の射 f^{-1} と見なすときに、向きが逆となることに注意しよう。

定理 5.16 (佐藤) 任意の景 $(\mathcal{C}, J)$ について、 $(\mathcal{C}, J)$ から $\mathbf{sg}$ への景の射と $(\mathcal{C}, J)$ 上のストーカーは $F \mapsto F^{-1}(\{*\})$ により一対一に対応する。

(証明) まず $F : (\mathcal{C}, J) \rightarrow \mathbf{sg}$ を景の射とし、 $\mathcal{G}$ は $\text{Ob}(\mathcal{G}) = \{C \in \text{Ob}(\mathcal{C}) \mid F(C) = \{*\}\}$ なる充満部分圏とする。ここで $\{*\} \subset F(C)$ と $F(C) = \{*\}$ は同値だから、 $U_{\{*\}} : (\{*\} \downarrow F) \cong F^{-1}(\{*\})$ であり、故に $\mathcal{G}$ はフィルタ圏で、ストーカーの条件 I を満す。また $f : C_1 \rightarrow C_2$ かつ $C_1 \in \text{Ob}(\mathcal{G})$ ならば $\{*\} = F(C_1) \subset F(C_2)$ となり $C_2 \in \text{Ob}(\mathcal{G})$ で、条件 II を満すことも分かる。最後に $S \in J(\mathcal{C})$ かつ $C \in \text{Ob}(\mathcal{G})$ とすると、 $(F^*S) \in J_{\mathbf{sg}}(\{*\})$ だから $\bigcup \{\text{dom}(F(f)) \mid f \in S\} = \{*\}$ であり、故に $\{*\} = F(\text{dom}(f))$ なる $f \in S$ が存在し、これは $\text{dom}(f) \in \text{Ob}(\mathcal{G})$ を意味する。

逆にストーカー $\mathcal{G}$ に対し関手 $F_{\mathcal{G}} : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{sg}$ を次で定める。

$$F_{\mathcal{G}}(C) = \begin{cases} \{*\} & (C \in \text{Ob}(\mathcal{G})) \\ \emptyset & (C \notin \text{Ob}(\mathcal{G})) \end{cases} \quad F_{\mathcal{G}}(f) = \begin{cases} \text{id}_{\{*\}} & (\text{dom}(f) \in \text{Ob}(\mathcal{G})) \\ \text{incl}_{\emptyset, \{*\}} & (\text{dom}(f) \notin \text{Ob}(\mathcal{G}), \text{cod}(f) \in \text{Ob}(\mathcal{G})) \\ \text{id}_{\emptyset} & (\text{cod}(f) \notin \text{Ob}(\mathcal{G})) \end{cases}$$

まず $\{*\} \downarrow F_{\mathcal{G}}$ がフィルタ圏であることは $U_{\{*\}} : \{*\} \downarrow F_{\mathcal{G}} \cong \mathcal{G}$ から明らかである。 $S \in J(\mathcal{C})$ に対し、もし $C \notin \text{Ob}(\mathcal{G})$ ならば $F_{\mathcal{G}}(C) = \emptyset$ は t_0 の任意の部分集合で被覆されるので $(F^*S) \in J_{\mathbf{sg}}(F_{\mathcal{G}}(C))$ であり、 $C \in \text{Ob}(\mathcal{G})$ ならば $f_0 \in S$ かつ $\text{dom}(f_0) \in \text{Ob}(\mathcal{G})$ なるものが存在し、 $\{*\} = F(\text{dom}(f_0)) = \text{dom}(F(f_0)) \subset \bigcup \{\text{dom}(F(f)) \mid f \in S\}$ であるから、 $(F^*S) \in J_{\mathbf{sg}}(\{*\}) = J_{\mathbf{sg}}(F_{\mathcal{G}}(C))$ となる。

明らかに $F \mapsto F^{-1}(\{*\})$ と $\mathcal{G} \mapsto F_{\mathcal{G}}$ は互いに逆である。 $\square$

ここで $D \in \text{Ob}(\mathcal{D})$ に対し $\tilde{D}(\{*\}) = D$, $\tilde{D}(\emptyset) = 1_{\mathcal{D}}$ とすれば $\tilde{D}$ は $\mathbf{sg}$ 上の層で $(F_{\mathcal{G}})_*(\tilde{D}) = \mathcal{G}_*D$ となる。 $\mathbf{sg}$ 上の前層 Q は $Q(\emptyset) = 1$ を満しさえすれば層となるので、ストーカー $\mathcal{G}$ に対して $(F_{\mathcal{G}})^* = (F_{\mathcal{G}})^o$ であることに注意し、 $(F_{\mathcal{G}})^o(P)(\{*\})$ を考えるとこれは茎となる。

$$(F_{\mathcal{G}})^*(P)(\{*\}) = (F_{\mathcal{G}})^o(P)(\{*\}) = \lim_{\rightarrow} P \circ U_{\{*\}} \cong \lim_{\rightarrow} P \upharpoonright \mathcal{G}^{op} = \mathcal{G}^*P$$

また $\text{Id}_{\mathcal{C}} : (\mathcal{C}, T) \rightarrow (\mathcal{C}, J)$ は景の射である。但し T は自明な位相である。このとき $(\text{Id}_{\mathcal{C}})^* = \mathbf{a}$ である。実際、任意の $C \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ について $(\text{Id}_{\mathcal{C}})^o(P)(C) = (\text{Id}_{\mathcal{C}})^o(P)(\text{Id}_{\mathcal{C}}(C)) = P(C)$ であるから $(\text{Id}_{\mathcal{C}})^o(P) = P$ であり $(\text{Id}_{\mathcal{C}})^*(P) = \mathbf{a}((\text{Id}_{\mathcal{C}})^o(P)) = \mathbf{a}(P)$ となる。

この見方で、定理 5.7 が景の射の合成として導かれる。明らかに $F_* \circ G_* = (G \circ F)_*$ であるから随伴から $F^* \circ G^* = (F \circ G)^*$ である。 $(\mathcal{C}, J)$ 上のストーカーは $(\mathcal{C}, T)$ 上のストーカーでもあり、右の可換図式を得る。故に $(F_{\mathcal{G}})^*P = (F_{\mathcal{G}} \circ \text{Id}_{\mathcal{C}})^*P = (F_{\mathcal{G}})^*(\text{Id}_{\mathcal{C}})^*P = (F_{\mathcal{G}})^*(\mathbf{a}(P))$ となる。特に $\{*\}$ を適用して $\mathcal{G}^*P \cong \mathcal{G}^*\mathbf{a}P$ を得る。

$$\begin{array}{ccc} (\mathcal{C}, T) & \xrightarrow{\text{Id}_{\mathcal{C}}} & (\mathcal{C}, J) \\ & \searrow F_{\mathcal{G}} & \swarrow F_{\mathcal{G}} \\ & \mathbf{sg} & \end{array}$$

⁴⁰ 正確には包含関係ではない。同じ (同型な) 幾何学的射を誘導する二つの景の射は同じであるとは限らない。例えば $\emptyset \in J(\mathcal{C})$, $J'(D)$ が任意の $C \in \text{Ob}(\mathcal{C})$, $D \in \text{Ob}(\mathcal{D})$ で成り立つならば、任意の関手 $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ は景の射だが、 $\text{Sh}(\mathcal{C}, J)$, $\text{Sh}(\mathcal{D}, J')$ は自明な圏であってこれらの間の幾何学的射は唯一である。

⁴¹ 正確には圏同値に過ぎない。

5.3.3 幾何学的点との関係

既に随伴 $\mathcal{G}^* \dashv \mathcal{G}_*$ が得られ、また $\mathcal{G}^*$ は余フィルタ圏上の余極限で定義されているから、有限極限を保つ。故にストーカーが幾何学的点を誘導することは分かっている。また $(\mathcal{G}^*, \mathcal{G}_*)$ から、 $\text{Ob}(\mathcal{G}) = \{C \in \text{Ob}(\mathcal{C}) \mid \mathcal{G}_*(\emptyset)(C) = \emptyset\}$ により $\mathcal{G}$ が復元できるから、ストーカー全体は幾何学的点全体に埋め込まれていると見なせる。ここではこの埋込の下で、ストーカーが幾何学的点全体においてどのようなクラスをなしているのかを調べよう。

定義 5.17 関手 $A : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Sets}$ の Grothendieck-構成 (Gorthendieck construction) $\int_{\mathcal{C}} A$ は次のような圏である。

$$\text{Ob}\left(\int_{\mathcal{C}} A\right) = \{(C, a) \mid C \in \text{Ob}(\mathcal{C}), a \in A(C)\} \quad f : (C, a) \rightarrow (C', b) \text{ iff } f : C \rightarrow C' \text{ in } \mathcal{C} \ \& \ A(f)(a) = b$$

関手 $A : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Sets}$ が平坦 (flat) ⁴² であるとは、 $\int_{\mathcal{C}} A$ がフィルタ圏となることである。

景 $(\mathcal{C}, J)$ に対し $A : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Sets}$ が J -連続 (J -continuous) とは、 $S \in J(\mathcal{C})$ に対して $[A(f)]_{f \in S} : \coprod_{f \in S} A(\text{dom}(f)) \rightarrow A(C)$ が全射となることである。

事実 5.18 ([2] Cor VII.5.4) 初等トポス $\text{Sh}(\mathcal{C}, J)$ の幾何学的点と $\mathcal{C}$ 上の $\mathbf{Sets}$ -値 J -連続平坦関手は次で一対一に対応する。但し $y_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Sets}^{\text{cop}}$ は米田関手である。

$$\Phi : (p^*, p_*) : (\mathbf{Sets} \rightarrow \text{Sh}(\mathcal{C}, J)) \mapsto p^* \circ \mathbf{a} \circ y_{\mathcal{C}} : (\mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Sets}^{\text{cop}} \rightarrow \text{Sh}(\mathcal{C}, J) \rightarrow \mathbf{Sets})$$

定理 5.19 (佐藤) $\iota : \mathbf{sg} \hookrightarrow \mathbf{Sets}$ を一つ固定する。ストーカー全体は次の特徴付けがある。

$$\{(\mathcal{G}^*, \mathcal{G}_*) \mid \mathcal{G} : \text{ストーカー}\} = \{(p^*, p_*) : \text{幾何学的点} \mid \Phi((p^*, p_*)) \text{ は } \iota : \mathbf{sg} \hookrightarrow \mathbf{Sets} \text{ を経由する}\}$$

即ち、ストーカー $\mathcal{G}$ について $\iota \circ F_{\mathcal{G}} = \mathcal{G}^* \circ \mathbf{a} \circ y$ であり、また幾何学的点 (p^*, p_*) について $\iota \circ F = p^* \circ \mathbf{a} \circ y$ なる F があれば、適当なストーカー $\mathcal{G}$ について $(p^*, p_*) = (\mathcal{G}^*, \mathcal{G}_*)$ となる。

(証明) まず $\mathcal{G}$ をストーカーとする。 $C \in \text{Ob}(\mathcal{G})$ とする。 $C', C'' \in \text{Ob}(\mathcal{G})$ と $f \in y_{\mathcal{C}}(C)(C')$, $g \in y_{\mathcal{C}}(C)(C'')$ に対し、 $f : C' \rightarrow C$, $g : C'' \rightarrow C$ より補題 5.2 から $f \circ h = g \circ h'$ 即ち $y_{\mathcal{C}}(C)(h)(f) = y_{\mathcal{C}}(C)(h')(g)$ なる $\mathcal{G}$ の射が存在し、故に $y_{\mathcal{C}}(C)_{\mathcal{G}, C'}(f) = y_{\mathcal{C}}(C)_{\mathcal{G}, C''}(g)$ である。つまり $\mathcal{G}^*(y_{\mathcal{C}}(C)) = \{*\} = F_{\mathcal{G}}(C)$ である。他方 $C \notin \text{Ob}(\mathcal{G})$ とすると、任意の $C' \in \text{Ob}(\mathcal{G})$ について $y_{\mathcal{C}}(C)(C') = \emptyset = F_{\mathcal{G}}(C)$ であり、故に $\mathcal{G}^*(y_{\mathcal{C}}(C)) = \emptyset$ である。以上から $\mathcal{G}^* \circ \mathbf{a} \circ y_{\mathcal{C}} = \mathcal{G}^* \circ y_{\mathcal{C}} = \iota \circ F_{\mathcal{G}}$ が分かる。

逆に幾何学的点 (p^*, p_*) について $\iota \circ F = p^* \circ \mathbf{a} \circ y_{\mathcal{C}}$ なる F があるとする。 $(C, a) \in \text{Ob}(\int_{\mathcal{C}} p^* \circ \mathbf{a} \circ y_{\mathcal{C}})$ とすると $a \in F(C)$ より $a = *$, $F(C) = \{*\}$ しかあり得ない。故に $F^{-1}(\{*\}) \cong \int_{\mathcal{C}} p^* \circ \mathbf{a} \circ y_{\mathcal{C}}$ で、これはフィルタ圏となる。また $p^* \circ \mathbf{a} \circ y_{\mathcal{C}}$ の連続性より $S \in J(\mathcal{C})$ に対して $[F(f)]_{f \in S} : \coprod_{f \in S} F(\text{dom}(f)) \rightarrow F(C)$ が全射であり、 $F(C) = \{*\}$ ならば $F(\text{dom}(f)) = \{*\}$ 即ち $\text{dom}(f) \in F^{-1}(\{*\})$ なる $f \in S$ がある。故に $\mathcal{G} = F^{-1}(\{*\})$ はストーカーで $F_{\mathcal{G}} = F$ である。 $\Phi((\mathcal{G}^*, \mathcal{G}_*)) = \mathcal{G}^* \circ \mathbf{a} \circ y_{\mathcal{C}} = \iota \circ F_{\mathcal{G}} = \iota \circ F = p^* \circ \mathbf{a} \circ y_{\mathcal{C}} = \Phi((p^*, p_*))$ より $(\mathcal{G}^*, \mathcal{G}_*) = (p^*, p_*)$ である。 $\square$

これはつまり、ストーカーは幾何学的点で、その“点”を含むか否かで記述出来る限りのもの、である。例えば、位相空間 $(X, \mathcal{O})$ とその間の連続写像の圏では、“点”はそれを含む位相空間だけでは定まらず、各開連続写像でどのように埋め込まれたかの情報が必要となる⁴³。つまり $f : X \rightarrow Y$, $g : X \rightarrow Y$ が共に開連続写像で $y \in \text{Im}(f) \setminus \text{Im}(g)$ となる場合もあり、その“点”は f で埋め込んだ X には含まれ g で埋め込んだ X には含まれない。それ故、各“開集合”に対して $\emptyset, \{*\}$ で表される「含む含まない」の情報、つまり $\mathcal{C}$ から $\mathbf{sg}$ への関手では足りず、 $\mathbf{Sets}$ への関手が必要となる。その中でストーカーは「含む含まない」の情報で事足りる幾何学的点全体となる訳である。

⁴²左 R -加群と右 R -加群のテンソルと同様に $\mathcal{C}$ 上の関手と反変関手のテンソルが考えられる。この平坦は加群の平坦と同様に、このテンソルで誘導される関手がある種の完全性を保つことと同値になる。

⁴³いわゆる “generalised element” の考え方が必要になるということである。

系 5.20 前順序 $(P, \leq)$ とその上の Grothendieck-位相 J に対して、 $((P, \leq), J)$ 上のストーカーと $\text{Sh}((P, \leq), J)$ の幾何学的点は一対一に対応する。

(証明) 前順序上の平坦関手はすべて $\iota : \text{sg} \hookrightarrow \text{Sets}$ を経由することを示せば、前定理に従う。

$A : (P, \leq) \rightarrow \text{Sets}$ を平坦関手とする。このとき $a, b \in A(p)$ とすると、 $(p, a), (p, b) \in \text{Ob}(\int_{(P, \leq)} A)$ であり、故に $f : (q, c) \rightarrow (p, a)$ かつ $g : (q, c) \rightarrow (p, b)$ なる射 f, g が存在する。このとき $f, g : q \rightarrow p$ in $(P, \leq)$ より $f = g$ であり、 $a = A(f)(c) = A(g)(c) = b$ である。

故に $p \in P$ に対し $A(p) \neq \emptyset$ ならば $A(p) \cong \{*\}$ である。 A は $\iota : \text{sg} \hookrightarrow \text{Sets}$ を経由する。 $\square$

自明な位相についてはこの逆、即ち $\mathcal{C}$ が前順序でなければ $(\mathcal{C}, T)$ 上のストーカーと $\text{Sh}(\mathcal{C}, T)$ は一致しない。 $f, g : C \rightarrow C'$ in $\mathcal{C}$ で $f \neq g$ なるものが存在するから関手 $\mathbf{y}^{\mathcal{C}}(C)$ を次で定義する。

$$\mathbf{y}^{\mathcal{C}}(C)(C'') = \{f : \text{射} \mid f : C \rightarrow C''\} \quad \mathbf{y}^{\mathcal{C}}(C)(h) : f \mapsto h \circ f$$

$(C', f) \in \text{Ob}(\int_{\mathcal{C}} \mathbf{y}^{\mathcal{C}}(C))$ より空でない。また $(C'', h), (C''', h') \in \text{Ob}(\int_{\mathcal{C}} \mathbf{y}^{\mathcal{C}})$ に対し $\mathbf{y}^{\mathcal{C}}(C)(h)(\text{id}_C) = h$, $\mathbf{y}^{\mathcal{C}}(C)(h')(\text{id}_C) = h'$ より $h : (C, \text{id}_C) \rightarrow (C'', h)$, $h' : (C, \text{id}_C) \rightarrow (C''', h')$ である。そして $h_1, h_2 : (C'', h) \rightarrow (C''', h')$ に対し $h_1 \circ h = \mathbf{y}^{\mathcal{C}}(C)(h_1)(h) = h' = \mathbf{y}^{\mathcal{C}}(C)(h_2)(h) = h_2 \circ h$ であり、 $h : (C, \text{id}_C) \rightarrow (C'', h)$ となる。結局 $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{y}^{\mathcal{C}}(C)$ はフィルタ圏である。 T -連続性は明らかである。故に $\mathbf{y}^{\mathcal{C}}(C) : \mathcal{C} \rightarrow \text{Sets}$ は T -連続平坦だが、 $\mathbf{y}^{\mathcal{C}}(C)(C') \neq \emptyset, \{*\}$ より $\iota : \text{sg} \hookrightarrow \text{Sets}$ は経由しない。

このように、ストーカーの概念は広く点の一般化として認められている幾何学的点の中で、非常に自然なクラスをなしており、しかも景の言葉で記述できる。そして前順序の景の上では、ストーカーと幾何学的点は一対一、従って初等トポスの言葉で記述される幾何学的点に対して景の言葉での記述を与えたことになる。以上から 29 頁の表 5 が完成したことになる。

前順序の景でストーカーと幾何学的点は一対一だが、景の射と幾何学的射に拡張できるかを考えよう。 $\iota : \text{sg} \hookrightarrow \text{Sets} \cong \text{Sh}(\text{sg})$ は $\mathbf{a} \circ \mathbf{y}$ と見なせるから系 5.20 の拡張として次が成り立つだろうか。景 $(\mathcal{C}, J), (\mathcal{D}, J')$ が共にロケイルならばこれは 4.6 でいうロケイルの射と幾何学的射の一対一対応になるが、前順序の場合には反例があり、それが下の例である。

「幾何学的射 $G : \text{Sh}(\mathcal{D}, J') \rightarrow \text{Sh}(\mathcal{C}, J)$ に対して $G^* \circ \mathbf{a}_{(\mathcal{C}, J)} \circ \mathbf{y}_{\mathcal{C}} = G^* \circ \mathbf{y}_{\mathcal{C}} = \mathbf{a}_{(\mathcal{D}, J')} \circ \mathbf{y}_{\mathcal{D}} \circ F$ なる F の存在と、 $G = (F^*, F_*)$ となる景の射 $F : (\mathcal{C}, J) \rightarrow (\mathcal{D}, J')$ の存在は、同値である。」

$$\begin{array}{ccc} (\mathcal{C}, J) & \xrightarrow{\mathbf{a}_{(\mathcal{C}, J)} \circ \mathbf{y}_{\mathcal{C}}} & \text{Sh}(\mathcal{C}, J) \\ \downarrow & & \downarrow G^* \\ (\mathcal{D}, J') & \xrightarrow{\mathbf{a}_{(\mathcal{D}, J')} \circ \mathbf{y}_{\mathcal{D}}} & \text{Sh}(\mathcal{D}, J') \end{array}$$

例 5.21 $\mathbb{P} = \{*\}$, $\mathbb{Q} = \{0 < 1 < 2 < \dots\}$ とし、自明な位相で考える。 $(\mathbb{P}, T)$ 上の層 A について $(\mathbb{Q}, T)$ 上の層 G^*A を $G^*(A)(n) = A(*)$ で定める。この G^* は明らかに有限極限を保ち、右随伴 G_* が $G_*(P)(*) = \lim_{\leftarrow n} P(n)$ で与えられ⁴⁴、故に (G^*, G_*) は $\text{Sh}(\mathbb{Q}, T)$ から $\text{Sh}(\mathbb{P}, T)$ への幾何学的射である。もし適当な景の射 $F : \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{Q}$ で $\mathbf{y}_{\mathbb{Q}}(F(*)) = G^*(\mathbf{y}_{\mathbb{P}}(*))$ となるとすると、 $F(*) = n$ として $\mathbf{y}_{\mathbb{Q}}(F(*))(n+1) = \emptyset$ かつ $G^*(\mathbf{y}_{\mathbb{P}}(*))(n+1) = \mathbf{y}_{\mathbb{P}}(*) \cong \{*\}$ で、矛盾である。

この例から分かるように、景の概念はある意味で“安定”な概念ではない。にも拘らず、前順序の景の幾何学的点に限れば景の言葉で記述できるというのは、それなりに意義のある結果であろう。

この例では $(\mathcal{D}, J')$ にある種の完備性がない為に、 $\mathbf{y}_{\mathbb{Q}} \circ F = G^* \circ \mathbf{y}_{\mathbb{P}}$ なる F を定義できなかった。では $(\mathcal{D}, J')$ に完備性を仮定、例えばロケイルとしたらどうだろうか。しかし 景の射の条件から $F(C) \vee F(C') \leq F(C'')$ なる C'' の存在が必要で、結局 $(\mathcal{C}, J)$ 側の完備性もどきも必要になる。

結局、系 5.20 では sg であること、つまり全体か空かの二者択一であることが本質的に必要であり、事実 5.18 の幾何学的射への一般化 ([2] Cor VII.10.2) を用いて同様の議論を試みてもそれは分かる。従って一般の“写像”ではなく“点”に対しての主張であることが本質的なのである。

⁴⁴極限 $\lim_{\leftarrow n}$ は対角関数 Δ の右随伴、つまり $\Delta : \text{Sets} \xrightarrow{\leftarrow} \text{Sets}^{\mathbb{N}} : \lim_{\leftarrow n}$ として定義されることによる。

5.4 十分多くのストーカー

上述の通り、景の概念を用いることで、点というもののなしに“空間”の構造を決定できる。従って“空間”は、位相空間のように“点”の集合として捉えることは出来ない。例えば異なる“開集合”が与えられても、それらが異なるということを“点”の立場で記述できない、つまり一方の“開集合”に含まれ、他方の“開集合”には含まれない“点”が存在するとは限らない。

しかし、層の定義は景という概念を用いて可能となったものの、層の理論を展開する上で“点”の持つ役割は意外と大きい。特に“空間”の構造の分析の際には、一つ点を固定してその上での茎を考えることで、“開集合”という「幅」を持った所で考える限り逃れられない「ゆらぎ」から解放される。例えば、 $\mathbb{R}$ -連続関数の層を考えた場合、固定した開集合上では任意の二つの関数 f, g の間に順序は付けられないが、固定した点の上の茎では任意の二つの関数 (の芽) の間に $\leq, \geq$ の順序が付けられるようになる。

このようなことから、景の上でもストーカーによって“空間”構造の分析が可能となることが望まれる。勿論、ストーカーを全く持たない景がある以上、任意の景でそのようなことは叶わないが、“空間”構造を決定するのに十分なストーカーがあるということを定式化しよう。

定義 5.22 (佐藤) 景 $(\mathcal{C}, J)$ が十分ストーカーを持つ (has enough stalkers) とは、任意の篩 $S \subset t_{\mathcal{C}}$ について $S \notin J(\mathcal{C})$ ならば $C \in \text{Ob}(\mathcal{G})$ かつ $\{\text{dom}(f) \mid f \in S\} \cap \text{Ob}(\mathcal{C}) = \emptyset$ となるストーカー $\mathcal{G}$ が存在することである。

位相空間に通常の被覆を入れた景は、明らかに十分ストーカーを持つ。

命題 5.23 選択公理を仮定する。景 $(\mathcal{C}, J)$ が十分ストーカーを持つことと、 $\text{Sh}(\mathcal{C}, J)$ の並行な異なる二つの射 $s, t: P \rightarrow Q$ に対する $\mathcal{G}^*(s) \neq \mathcal{G}^*(t)$ なるストーカー $\mathcal{G}$ の存在は同値である。

(証明) まず景 $(\mathcal{C}, J)$ が十分ストーカーを持つとする。 $s \neq t$ より $s(C)(a) \neq t(C)(a)$ なる $C \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ と $a \in P(C)$ が存在する。このとき $S = \{f \in t_{\mathcal{C}} \mid Q(f)(s(C)(a)) = Q(f)(t(C)(a))\}$ は篩で、 $S \notin J(\mathcal{C})$ とすると Q が層であることから $s(C)(a) = t(C)(a)$ となるから $S \notin J(\mathcal{C})$ である。 $(\mathcal{C}, J)$ が十分ストーカーを持つから、 $C \in \text{Ob}(\mathcal{G})$ かつ $\{\text{dom}(f) \mid f \in S\} \cap \text{Ob}(\mathcal{C}) = \emptyset$ となるストーカー $\mathcal{G}$ が存在する。ここでもし $\mathcal{G}^*(s) = \mathcal{G}^*(t)$ とすると $Q_{\mathcal{G}, C}(s(C)(a)) = \mathcal{G}^*(s)(P_{\mathcal{G}, C}(a)) = \mathcal{G}^*(t)(P_{\mathcal{G}, C}(a)) = Q_{\mathcal{G}, C}(t(C)(a))$ であり、 $f: C' \rightarrow C$ in $\mathcal{G}$ で $Q(f)(s(C)(a)) = Q(f)(t(C)(a))$ なるものが存在することになるので矛盾である。故に $\mathcal{G}^*(s) \neq \mathcal{G}^*(t)$ である。

逆を示す。 C 上の篩 S が J -閉 (J -closed) であるとは、任意の $f \in t_{\mathcal{C}}$ について $f^*S \in J(\text{dom}(f))$ ならば $f \in S$ となることである。 Ω_J を次で定義する。4.3 で述べたように、これは層をなす。⁴⁵

$$\Omega_J(C) = \{S \subset t_{\mathcal{C}} \mid S: C \text{ 上の } J\text{-閉な篩}\} \quad \Omega_J(f)(S) = f^*S$$

C 上の篩 S の閉包 (closure) は $\overline{S} = \{f \in t_{\mathcal{C}} \mid f^*S \in J(\text{dom}(f))\}$ とする。 $f \in S$ なら $f^*S = t_{\text{dom}(f)} \in J(\text{dom}(f))$ だから $S \subset \overline{S}$ で、位相の条件 (2) より $\overline{S}$ は篩である。 $g^*\overline{S} \in J(\text{dom}(g))$ ならば $\{h \in t_{\text{dom}(g)} \mid h^*(g^*S) \in J(\text{dom}(h))\} = \{h \in t_{\text{dom}(g)} \mid (g \circ h)^*S \in J(\text{dom}(h))\} = g^*\overline{S} \in J(\text{dom}(g))$ だから位相の条件 (3) より $g^*S \in J(\text{dom}(g))$ つまり $g \in \overline{S}$ である。故に $\overline{S} \in \Omega_J(C)$ である。

さて C 上の篩 S に対し $S \notin J(\mathcal{C})$ とする。このとき $s, t: \mathbf{y}_C(C) \rightarrow \Omega_J$ を $s(\text{dom}(f))(f) = \Omega_J(f)(\overline{S})$, $t(\text{dom}(f))(f) = t_{\text{dom}(f)}$ と定める。 $(\text{id}_C)^*S = S \notin J(\mathcal{C})$ より $\text{id}_C \notin \overline{S}$ つまり $s(C)(\text{id}_C) = \overline{S} \neq t_{\mathcal{C}} = t(C)(\text{id}_C)$ であるから、 $s \neq t$ である。 $a_{\Omega_J} \circ s = \mathbf{a}(s) \circ a_{\mathbf{y}_C(C)}$ かつ $a_{\Omega_J} \circ t = \mathbf{a}(t) \circ a_{\mathbf{y}_C(C)}$ で $a_{\Omega_J}: \Omega_J \cong \mathbf{a}(\Omega_J)$ だから $\mathbf{a}(s) \neq \mathbf{a}(t): \mathbf{a}(\mathbf{y}_C) \rightarrow \mathbf{a}(\Omega_J)$ である。

⁴⁵トボス的一般論からも導かれるが、閉包の概念を用いると初等的に証明できる。Grothendieck-位相を知るための良い演習問題である。

従って仮定によりストーカー $\mathcal{G}$ で $\mathcal{G}^*a(s) \neq \mathcal{G}^*a(t)$ なるものを得る。このとき $\mathcal{G}^*(s) \neq \mathcal{G}^*(t)$ である。もし $C \notin \text{Ob}(\mathcal{G})$ ならば、 $y_C(C)(C') \neq \emptyset$ なる任意の C' について $C' \notin \text{Ob}(\mathcal{G})$ だから、 $\mathcal{G}^*(s), \mathcal{G}^*(t)$ は共に空の関数で一致してしまう。故に $C \in \text{Ob}(\mathcal{G})$ である。またもし $\text{dom}(f) \in \text{Ob}(\mathcal{G})$ なる $f \in S$ があったとすると、 $g \in y_C(C)(\text{dom}(g))$ に対して、補題 5.2 から $f \circ h = g \circ h'$ かつ $\text{dom}(h) = \text{dom}(h') \in \text{Ob}(\mathcal{G})$ が存在し、 $\Omega_J(h')(s(\text{dom}(g))(g)) = \Omega_J(h')(g^*\bar{S}) = (g \circ h')^*\bar{S} = (f \circ h)^*\bar{S} = h^*(f^*\bar{S}) = h^*(t_{\text{dom}(f)}) = t_{\text{dom}(h)} = \Omega_J(h')(t(\text{dom}(g))(g))$ であり、余極限の定義から $\mathcal{G}^*(s)(y_C(C)_{\mathcal{G}, \text{dom}(g)}(g)) = (\Omega_J)_{\mathcal{G}, \text{dom}(g)}(s(\text{dom}(g))(g)) = (\Omega_J)_{\mathcal{G}, \text{dom}(g)}(t(\text{dom}(g))(g)) = \mathcal{G}^*(t)(y_C(C)_{\mathcal{G}, \text{dom}(g)}(g))$ となる。故に $\mathcal{G}^*(s) = \mathcal{G}^*(t)$ となって矛盾であり、そのような f はない。

$$\begin{array}{ccc}
y_C(C)(\text{dom}(f)) & \xrightarrow[t(\text{dom}(f))]{s(\text{dom}(f))} & \Omega_J(\text{dom}(f)) \\
\downarrow y_C(C)(h) & & \downarrow \Omega_J(h) \\
y_C(C)(\text{dom}(g)) & \xrightarrow[t(\text{dom}(g))]{s(\text{dom}(g))} & \Omega_J(\text{dom}(g)) \\
\downarrow y_C(C)(h') & & \downarrow \Omega_J(g) \\
y_C(C)_{\mathcal{G}, \text{dom}(g)} & \xrightarrow[t(\bullet)]{s(\bullet)} & \Omega_J(\bullet) \\
\downarrow y_C(C)_{\mathcal{G}, \bullet} & & \downarrow (\Omega_J)_{\mathcal{G}, \bullet} \\
\mathcal{G}^*(y_C(C)) & \xrightarrow[\mathcal{G}^*(t)]{\mathcal{G}^*(s)} & \mathcal{G}^*(\Omega_J)
\end{array}$$

$C \in \text{Ob}(\mathcal{G})$ かつ $\{\text{dom}(f) \mid f \in S\} \cap \text{Ob}(\mathcal{G}) = \emptyset$ なるストーカー $\mathcal{G}$ が得られた。 $\square$

トポス理論では、幾何学的点に関して次の定義が広く用いられている。

定義 5.24 初等トポス $\mathcal{E}$ が十分点を持つ (has enough points) とは、 $\mathcal{E}$ の任意の並行な射 $s, t: E \rightarrow F$ について $s \neq t$ ならば、適当な幾何学的点 (p^*, p_*) に対して $p^*(s) \neq p^*(t)$ となる。

従って十分多くのストーカーを持つとは、ストーカーから誘導される幾何学的点のみで十分である、ということを意味し、従って前順序の景など、ストーカーと幾何学的点の概念が一致する場合には、十分ストーカーを持つことと十分点を持つことは全く同じ概念である。

系 5.25 選択公理を仮定する。ロケイル L について、 $\text{Sh}(L, J_L)$ が十分点を持つことと、もし任意のロケイルの点 K について $U \in K \Leftrightarrow V \in K$ ならば $U = V$ となることとは同値である。

(証明) 直前に注意したことから、十分ストーカーを持つことと、上の条件の同値性を示せば良い。

(L, J_L) が十分ストーカーを持つとする。 $U \neq V$ ならば $U \wedge V \leq U$ 又は $U \wedge V \leq V$ である。 $U \wedge V \leq U$ として良い。すると $\{(W, U) \mid W \leq U \wedge V\} \notin J_L(U)$ であるから、 $\{W \mid W \leq U \wedge V\} \cap \mathcal{G} = \emptyset$ かつ $U \in \mathcal{G}$ なるストーカー $\mathcal{G}$ が存在する。もし $V \in \mathcal{G}$ とすると $\mathcal{G}$ がフィルタ圏であることより、 $W \leq U, V$ なる $W \in \mathcal{G}$ が存在するが $W \leq U \wedge V$ となって矛盾である。命題 5.8 から $K = L \setminus \mathcal{G}$ はロケイルの点で $V \in K, U \notin K$ である。

逆を示す。 S を U 上の篩とし $S \notin J_L(U)$ 即ち $\bigvee S = \bigvee \{W \mid (W, U) \in S\} \leq U$ とする。 $\bigvee S \notin K, U \in K$ 或は $\bigvee S \in K, U \notin K$ なるロケイルの点 K が存在する。 $\mathcal{G} = L \setminus K$ はストーカーで、 $\bigvee S \in \mathcal{G}, U \notin \mathcal{G}$ 或は $\bigvee S \notin \mathcal{G}, U \in \mathcal{G}$ だが、前者はありえない。故に $U \in \mathcal{G}$ で $\bigvee S \notin \mathcal{G}$ より $\{W \mid (W, U) \in S\} \cap \mathcal{G} = \emptyset$ となる。故に (L, J_L) は十分ストーカーを持つ。 $\square$

このようにロケイルでは、十分ストーカーを持つとは上述した異なる開集合は点で区別されるといいう位相空間の性質の抽象化なのである。

6 ストーカー理論の利点

6.1 ストーカーの除去

さて前節までに述べてきたことから、景の概念を用いると“点”を考えずに“開集合”の間の関係、つまりその間の射と被覆、さえ決めれば“空間”を定義できるが、しかしそこに“点”としてストーカーを導入し、更にそうした“点”だけで“空間”の構造を決定出来るという、十分ストーカーを持つ、という概念を導入した。では、この“空間”はストーカー全体の位相空間、例えば次のように位相を入れたもの（ロケイルの場合には $\text{pt}(L)$ に一致する）と同じではないのか。

$$\text{Stalker}(\mathcal{C}, J) = \{g : (\mathcal{C}, J) \text{ 上のストーカー} \} \quad \langle C \rangle = \{g \mid C \in \text{Ob}(g)\} : \text{基本開集合}$$

とすれば結局はストーカーという概念は必要ないのではないか、という疑問が生じる。

しかしそうではない。位相空間は“点”がなければ位相空間そのものが定義されない。他方、景とストーカーを考えると、景は“点”つまりストーカーなしでも定義はされている。つまりストーカーを使って景の性質を導いた後、ストーカーが存在しなくてもその性質が成り立つかということは考えられる。位相空間では、空間そのものがないのだから、考えることさえ出来ないのである。これは景とストーカーによる記述でしか出来ないことであり、以下の応用で鍵となることである。

定義 6.1 景 $(\mathcal{C}, J)$ がストーカー除去 (stalker-elimination) を許すとは、次のことである。

$(\mathcal{C}, J)$ を考えていた宇宙 $\mathfrak{M}$ の外側 $\mathfrak{N}$ に十分多くのストーカーがあることを仮定し、その上で $(\mathcal{C}, J)$ についての内側の宇宙 $\mathfrak{M}$ における言明⁴⁶を証明することが出来れば、最後にその仮定を取り除くことが出来る。

不正確な言葉遣いを恐れずに言えば「 $(\mathcal{C}, J)$ があたかも十分ストーカーを持つかのように議論して、得られた結論にストーカーが現れていなければ、 $(\mathcal{C}, J)$ が十分ストーカーを持つという仮定なしにその結論が導かれたことになる」ということである。

では何故、不必要な「ストーカーを十分持つ」という仮定をするのだろうか。それは 5.4 の冒頭でも述べた通り、その方が考えやすいからである。つまり“点”がない状況では、何かを言うのに「十分局所的な開集合が存在して、その開集合では...」という議論をせざるを得ない。するとこうして取った開集合の依存関係が煩雑になってしまう。しかし「究極的に局所的」な“点”を導入すればそれは避けられる。

発想は超準解析の無限小と同じである。無限小がない場合には、「十分小さな δ が存在して、その δ に対して...」というように、依存関係の煩雑な ε - δ 論法で議論せざるを得ない。しかし究極的に小さい「無限小」を導入することで、こうした煩雑な議論を避けることが出来、そして最後に得られた結論から「無限小」の存在という仮定は取り除くことが出来たわけである。

	ストーカー除去	超準解析	Lefschetz の原理
導入するもの	“点”	“無限小”	超越元
発想	究極的な局所性	究極的な小	究極的な無関係性
除去の性質	相対化が必要	初等拡大	

しかし超準解析の場合と本質的に異なるのは、最後の結論が「内側の宇宙 $\mathfrak{M}$ における言明」でなければならぬ⁴⁷、という制約であり、この点は注意が必要である。

⁴⁶正確な定式化には数理論理学の知識が必要であるが、数理論理学の言葉を用いれば $\mathfrak{M}$ に相対化された (relativised) 言明、つまりパラメータも全称、存在の範囲も $\mathfrak{M}$ の中に限定された言明、ということである。

⁴⁷この制約がない、というより「外側の宇宙で成り立つ言明が、内側の宇宙でも成り立つ」というのが初等拡大 (elementary extension) である。

さてストーカー除去の定義はしたが、この性質は成り立つのだろうか。実はすべての景について成り立つ訳ではない。しかし応用上重要な次の十分条件がある。

補題 6.2 景 $(\mathcal{C}, J)$ について、 $(\mathcal{C}, J)$ から余り複雑でなく “定義される” ⁴⁸ $X(\mathcal{C}, J)$ の可算枚举、つまり全単射 $f: \mathbb{N} \rightarrow X(\mathcal{C}, J)$ が存在するような宇宙でこの景が十分ストーカーを持つならば、この景はストーカー除去を許す。

これは、Levy-崩壊 (Levy-collapse) と呼ばれる強制法の一つを用いることで、容易に得られる結果である。より一般的な主張や証明などは [0] を参照されたい。

例 6.3 順序 $\mathbb{P}$ に稠密位相 D を入れた景 $(\mathbb{P}, D)$ はストーカー除去を許す。

簡単の為、 $\mathbb{P}$ には最大値 $1_{\mathbb{P}}$ があり、最小元はないとしよう。 $D(1_{\mathbb{P}}) = \{A \subset \mathbb{P} \mid \forall p \in \mathbb{P} \exists q \in A \text{ s.t. } q \leq p\}$ とみなせる。可算枚举 $D(1_{\mathbb{P}}) = \{A_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ があるような宇宙で考える。

$p \in \mathbb{P}$ と p 上の篩 $S \subset [p]$ で $S \notin D(p)$ なるものを考える。 $S \notin D(p)$ より、 $p_0 \leq p$ で $r \leq p_0$ なる $r \in S$ が存在しない p_0 が取れる。そこで $\mathbb{P}$ の元の下降列 $\langle p_n \mid n \in \mathbb{N} \rangle$ を $p_n \in A_n$ となるように再帰的に定義する。 p_n まで定まったとすると $A_{n+1} \in D(1_{\mathbb{P}})$ より $q \leq p_n$ なる $q \in A_{n+1}$ が存在する。このような q の一つを p_{n+1} とする。こうして従属選択公理を仮定すれば $\langle p_n \mid n \in \mathbb{N} \rangle$ が定義できる。そこで $G = \{q \in \mathbb{P} \mid \exists n \in \mathbb{N} (p_n \leq q)\}$ とすると、明らかにフィルタとなる。

また $q \in G$ と $A \in D(q)$ について、 $A' = \{r \in \mathbb{P} \mid r \in A \text{ or } [r] \cap [q] = \emptyset\}$ とすると $A' \in D(1_{\mathbb{P}})$ となる。何故なら任意の $p \in \mathbb{P}$ について、 $[p] \cap [q] = \emptyset$ ならば $A' \ni p \leq p$ であり、 $[p] \cap [q] \ni s$ ならば $A \in D(q)$ より $A' \cap A \ni t \leq s \leq p$ なる t が存在するからである。故に $A' = A_n \ni p_n$ なる n があり、他方 $q \in G$ より $p_m \leq q$ なる m があるので $p_{\max n, m} \leq p_n, q$ となって $[p_n] \cap [q] \neq \emptyset$ つまり $p_n \in A$ である。故に $p_n \in A \cap G$ であり、 $A \cap G \neq \emptyset$ である。故に G はストーカーである。

$p_0 \leq p$ より $p \in G$ は明らかである。もし $s \in G \cap S$ とすると $p_n \leq s$ なる n が存在する。すると S が篩だから $p_n \in S$ となり $p_n \leq p_0$ と p_0 の取り方が矛盾する。故に $G \cap S = \emptyset$ である。

これで稠密位相の景はストーカー除去を許すことは分かったが、例 5.3 で見たように例えば孤立点を持たない Hausdorff-空間 $(X, \mathcal{O})$ ではストーカー、つまり generic-点など存在しない。存在すらしのないのに十分ストーカーを持つなどということはあり得ない。しかし上の議論は $D(1_{\mathbb{P}})$ に可算枚举、つまり稠密開集合全体を可算と思って良いような外側の宇宙での議論だということを忘れてはならない。 X が非可算ならば $\{X \setminus \{x\} \mid x \in X\}$ だけで非可算個の稠密開集合が存在してしまうから、その外側の宇宙は、元々の宇宙とは必ず異ならなければならないのである。

この外、選択公理を仮定して十分ストーカーを持つことが示されるような場合の多くは、ストーカー除去を許す。勿論、除去した後の結果には選択公理は仮定されない。これは、選択公理を適用したもの $X(\mathcal{C}, J)$ に対して、その可算枚举 $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ が存在するような宇宙では、整列順序を $x_n \leq x_m \Leftrightarrow n \leq m$ で入れることができ、従って $X(\mathcal{C}, J)$ に対して選択函数が作れることになるからである。勿論、選択公理を適用するもの $X(\mathcal{C}, J)$ が景から余りに複雑に定義されるものである場合には、このような議論は成り立たない。

次で見る選択公理なしの Zariski-幾何の例もこのような一例となっており、補題 6.2 は実用上、かなり広く適用できる補題である。

⁴⁸ ここも正確な定式化には数理論理学の知識が必要であるが、数理論理学の言葉を用いれば $(\mathcal{C}, J)$ から Δ_1^0 -定義可能なもの、である。

6.2 応用例

ストーカーの概念を応用出来る、特にストーカーの除去を用いて応用できる例を二つ挙げる。一つは、背景としてあった無矛盾性の数学の手法のうちの、generic-拡大と呼ばれるものである。

6.2.1 選択公理なしの Zariski-幾何

Zariski-位相とは、環 R に対してその素イデアル全体 $\text{Spec}(R)$ に位相を入れたものであった。しかし一般の環において、素イデアルが存在することには選択公理が必要である。つまり $\text{Spec}(R)$ が空でないことを示すのに選択公理が必要になってしまう。更に言えば特殊な環では、素イデアルの存在と弱い形の選択公理が同値になってしまう。更にこの位相空間の性質、つまり位相空間の構造が代数構造を反映していることを示すには、「イデアル I に対して $\sqrt{I} = \bigcap \{p \in \text{Spec}(R) \mid I \subset p\}$ である」ということや、更にこれを導くには「積閉集合 S に対し $I \cap S = \emptyset$ となるイデアル I の中に極大のものが存在し、それは素イデアルである」と言った事実が必要になった。これには選択公理、Zorn の補題を用いていた。

そこで選択公理がない場合には、代数構造によって景を定義し、それを“空間”を思って話をすれば良い。つまり選択公理の下では $D(a) = \{p \mid a \notin p\}$ を基本開集合とすると、 $D(a) \subset D(b) \Leftrightarrow \sqrt{aR} \subset \sqrt{bR}$ かつ $\bigcup_{i \in I} D(a_i) = D(b) \Leftrightarrow b \in \sqrt{\sum_{i \in I} a_i R}$ となったのだが、選択公理なしの状況ではこれによってそれぞれ包含、被覆とし“空間”を定義するのである。

素イデアルとストーカーは $p \mapsto R \setminus p$ で一対一に対応することは容易に分かる。故に選択公理の下では十分ストーカーを持つことになり、6.1 の最後で述べたようにこの景はストーカー除去を満す。つまり選択公理を仮定した場合と同じように“点”を用いて層の性質について議論して良く、それでも最後の結果から“点”の存在の仮定は乗り除け、しかも選択公理なしの結果となるのである。

6.2.2 強制法 (generic-拡大)

無矛盾性の数学の最も基本的な道具立てである generic-拡大は、ストーカーを用いることで順序に稠密位相を入れた景 $(\mathbb{P}, D)$ 上のある層 $V^{\mathbb{P}}$ の、ストーカー G での茎 $G^*(V^{\mathbb{P}})$ と記述出来る。

例として $\text{ZF} \not\models \text{CH}$ を見よう。これは任意の茎 $G^*(V^{\mathbb{P}})$ が連続体仮説の否定の成り立つ宇宙となるような層 $V^{\mathbb{P}}$ を構成することでなされるが、しかしストーカー G の存在は示すことは出来ない。

所がこの景は、例 6.3 で見たようにストーカー除去を許す。そこで $\text{ZF} \vdash \text{CH}$ と仮定し、更に十分ストーカーを持つと仮定すると連続体仮説の否定の成り立つ宇宙 $G^*(V^{\mathbb{P}})$ が存在することになり、矛盾が導かれる。矛盾は内側の宇宙の言明であるから、ストーカーが十分あるという仮定は取り除け、 $\text{ZF} \vdash \text{CH}$ だけから矛盾が導かれた。

6.3 まとめ

“空間”の抽象化である景の概念と、“点”の抽象化として新たに導入したストーカーの概念によって層を扱うと次の利点が得られる。同時に、背景にあった generic-拡大など無矛盾性の数学に用いられる諸手法を、ある層の茎として表現することが可能となる。

- “点”に煩わされずに“空間”を扱うことが出来る。
- 層全体を考えなくても、位相空間上での話と並行の、素朴な設定で茎を扱うことが出来る。
- “点”があるとは限らない“空間”に、仮想的な“点”がある仮定として議論しても、そこで得た結果に“点”が現れなければその仮定を外せるかを問うことが出来る。

附録 (Grothendieck の宇宙との関係)

本稿の基となった講演の後、何人かの方から、Grothendieck 一派が Weil-予想の解決を目指して構築した理論 (SGA など) では、圏論で現れる困難を宇宙の階層を考えることで解決しているが、それとの関係について尋ねられたので、関連する点について幾つか記しておく。

まずこのような宇宙の階層の存在は、無限個の到達不可能基数の存在に同値であるが、3 頁の表からも分かるように、到達不可能基数の存在は通常の数学よりも無矛盾性が真に強い仮定であり、ましてや無限個の存在は更に無矛盾性が強く通常の数学からは到底証明できないものである。

しかしここでも、スターカー除去と同様のことが成立する。つまりこうして“壮大”な宇宙の階層を用いて議論をしても、最終的に得られた結果が一番内側の宇宙、つまり最も下の階層においての言明であるならば、その結果は通常の数学で証明できることになる。

この証明は [8] で述べられているそうだが、基本的には反映原理の標準的な応用である。何かを証明する際、証明という人間の行為は所詮有限であるから、用いている仮定は有限に過ぎず、各階層に現れる宇宙の性質のうち実際に必要となるのは有限のみである。反映原理は「有限個の性質についてだけなら、どんな性質達であっても、宇宙と同じ性質を満す集合が存在する」ことを述べているので、宇宙の階層“もどき”は通常の数学で構成でき、しかもそれで十分だということである。

勿論こうした議論を正確に把握する為には数理論理学の知識が必要となるが、本稿で筆者が試みたように、非常に抽象度の高いトポス理論の概念に対して複数の宇宙が現れる文脈でも使える中間的な抽象度の対応する概念を導入することで、この「Grothendieck の宇宙」の問題が解決出来るようになれば、より良い解決になると言えないであらうか。これは筆者の夢である。いや全く見込みもなく言っている夢に過ぎない、というべきかも知れない。

謝辞

本研究の端緒は、長谷川真人氏 (京都大学数理解析研究所) から [2] を紹介して頂いたことにあり、ご助言頂いたことに深く感謝致します。

同時に、京都大学で行われた A.Simpson 氏 (Edinburgh 大学情報学部) による集合論と圏論の関係についての非公式な 세미나 並びに氏との議論が本研究に与えた影響は大きく、氏には深い感謝の念を表します。

そして何より本研究について講演の機会と本報告書に本稿の紙幅を与えてくださった城崎セミナー「モジュライ理論と不変量」の運営委員及び COE 関係者の皆様に、この場をお借りして心より御礼申し上げます。また講演の後、有益なご助言を頂いた方々に感謝致します。

参考文献

- [0] K.Sato “*Stalker Theory*” (Master's Thesis) unpublished (2004)
- [1] S.MacLane “*Categories for the Working Mathematician*” Springer-Verlag (1971)
- [2] S.MacLane & I.Moerdijk “*Sheaves in Geometry and Logic*” Springer-Verlag (1992)
- [3] P.T.Johnstone “*Sketches of an Elephant*” Clarendon Press (2002)
- [4] T.Jech “*Set Theory*” Academic Press (1978)
- [5] A.Blass & A.Scudro “*Freyd's Models for the Independence of the Axiom of Choice*” AMS(1989)
- [6] S.Shelah “*Can you take Solovay's inaccessible away?*” Israel J. Math. 48 (1984), 1–47.
- [7] A.Blass “*The Interaction between Category Theory and Set Theory*” Cont.Math.30 (1984), 5–29
- [8] S.Feferman “*Set-theoretical Foundations of Category Theory*” Lecture notes in Math.106(1969)201–247