(2015 年 2 月 12 日)

高知西高演習問題

[1] (放物線の性質)

平面上に点 F と F を通らない直線 l をとる。このとき、点 P と点 F の距離と点 P と直線 l の距離が等しいような P の軌跡は放物線となることを証明せよ。

注意. 点 F を放物線の焦点といい、直線 l を放物線の準線という。

[2] (楕円の方程式)

平面上に異なる 2 点 $\mathrm{F}_1, \mathrm{F}_2$ をとる。このとき、点 P と点 F_1 の距離と点 P と点 F_2 の距離の和が一定であるような P の軌跡を楕円という。平面に座標を導入して楕円の方程式を求めよ。

注意. 点 $\mathrm{F}_1, \mathrm{F}_2$ を楕円の焦点という。

[3] (双曲線の方程式)

平面上に異なる 2 点 $\mathrm{F}_1, \mathrm{F}_2$ をとる。このとき、点 P と点 F_1 の距離と点 P と点 F_2 の距離の差の絶対値が一定であるような P の軌跡を双曲線という。平面に座標を導入して双曲線の方程式を求めよ。

注意. 点 $\mathrm{F}_1, \mathrm{F}_2$ を双曲線の焦点という。

[4] (角の 2 等分線の性質)

平面内に $\triangle\mathrm{ABC}$ をとる。このとき、辺 BC 上の任意の点 D に対して

$$\angle\mathrm{BAD} = \angle\mathrm{CAD} \iff \mathrm{AB} : \mathrm{BD} = \mathrm{AC} : \mathrm{CD}$$

が成り立つことを証明せよ。

注意. 問題 [4] は以下の問題 [5], [6], [7] を解くための準備である。

[5] (放物線の焦点)

座標平面に放物線

$$C\,:\,y=x^2$$

を定める。また、放物線 C 上にあり x 軸上にはない点 $\mathrm{P}(x_0, x_0^2)$ を任意にとる。次の各問に答えよ。

(1) 点 P において、放物線 C の接線と直交する直線 ℓ の方程式を求めよ。

(2) 放物線 C の焦点を F とし $\mathrm{F}'=(x_0, 2x_0^2+\frac{1}{4})$ とおく。このとき、直線 ℓ と直線 FF' の交点 M の座標を求めよ。

(3) 直線 ℓ は $\angle\mathrm{FPF}'$ の 2 等分線となることを証明せよ。

注意. (1) の直線 ℓ を放物線 C の点 P における法線という。

[6] (楕円の焦点)

$a, b\ (0<b<a)$ を定数とし、座標平面に楕円

$$C\,:\,\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

を定める。また、楕円 C 上にあり x 軸上にはない点 $\mathrm{P}(x_0, y_0)$ を任意にとる。次の各問に答えよ。

(1) 点 P における楕円 C の接線の方程式を求めよ。

(2) 点 P において、接線と直交する直線 ℓ の方程式を求めよ。

(3) 楕円 C の焦点を $\mathrm{F}_1, \mathrm{F}_2$ とする。このとき、直線 ℓ は $\angle\mathrm{F}_1\mathrm{PF}_2$ の 2 等分線となることを証明せよ。

注意. (2) の直線 ℓ を楕円 C の点 P における法線という。

[7] (双曲線の焦点)

$a, b\ (a>0,\, b>0)$ を定数とし、座標平面に双曲線

$$C\,:\,\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

を定める。また、双曲線 C 上にあり x 軸上にはない点 $\mathrm{P}(x_0, y_0)$ を任意にとる。次の各問に答えよ。

(1) 点 P における双曲線 C の接線の方程式を求めよ。

(2) 点 P において、接線と直交する直線 ℓ の方程式を求めよ。

(3) 双曲線 C の焦点を $\mathrm{F}_1, \mathrm{F}_2$ とする。このとき、点 P における C の接線は $\angle\mathrm{F}_1\mathrm{PF}_2$ の 2 等分線となることを証明せよ。また、直線 ℓ は $\angle\mathrm{F}_1\mathrm{PF}_2$ の外角の 2 等分線となることを証明せよ。

注意. (2) の直線 ℓ を双曲線 C の点 P における法線という。

文字の導入について

[1]. ディオファントス (246? ～ 330?) : 未知数（求めたい数）を文字 ς で表し、未知数を含む等式として方程式という概念を導入した。その結果として「未知数を文字で表し、方程式を立て、それを解いて未知数を求める」という方法論が確立された。

注意. 文字 ς は数という意味のギリシャ語 $\alpha\rho\iota\theta\mu o\varsigma$ (アリトモス) の最後の文字である。

[2]. ビエート (1540 ～ 1603) : 未知数だけでなく、特に特定する必要のないときは既知数も文字で表し、一般方程式という概念を導入した。既知数を子音で表し、未知数を母音で表した。

[3]. デカルト (1596 ～ 1650) : ビエートと同様に既知数も未知数も文字で表した。既知数をアルファベットの前の方 $a, b, c, \cdots$ で表し、未知数をアルファベットの後ろの方 $\cdots, x, y, z$ で表した。

[4]. 一般方程式 : ビエートの導入した一般方程式をデカルトの記号で表せば

$$ax + b = 0, \qquad ax^2 + bx + c = 0, \qquad ax + by + c = 0$$

等となる。

注意. 一般方程式という概念が導入されるまでは、方程式の解法を学ぶということは式変形の過程を理解することであった。一般方程式が導入された後は、式変形の結果として「解の公式」が考えられるようになった。

[5]. 関数 : 既知数を表す文字は定数を表す文字に、未知数を表す文字は変数を表す文字に変化することもある。その結果、1 次関数や 2 次関数が

$$y = ax + b, \qquad y = ax^2 + bx + c$$

等と表されるようになった。

[6]. 単位 : 古代ギリシャ以来、文字 a, b が長さを表す場合、積 ab は面積を表すものと考えられていた。これを「次元の原理」という。この原理を順守すると、文字 a, b, c, x が長さを表す場合

$$ax + b, \qquad ax^2 + bx + c$$

等の式が意味をもたなくなってしまう。デカルトは「文字 a, b が長さを表すならば、積 ab も長さを表すことができる」ということを示して、この困難を回避した。

[7]. 超越元：未知数・変数を表す文字は、さらに超越元（不定元）と呼ばれるものに変化していった。超越元とは

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n = 0 \implies a_0 = a_1 = \cdots = a_n = 0$$

という性質をもつ x のことである。この性質は未定係数法の原理でもある。ここで x は方程式

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n = 0$$

の解を表しているわけではないことに注意する。

無限遠点と射影平面

目標　以下の内容を確認する：

(1) 放物線・楕円・双曲線の統一的把握は可能であること。

(2) にもかかわらず、問題 [5], [6], [7] の統一的記述は極めて困難であると思われること。

(1) について：無限遠点の全体として無限遠直線を導入し

☒ 放物線は無限遠直線と 1 点で交わる 2 次曲線である

☒ 楕円は無限遠直線とは交わらない 2 次曲線である

☒ 双曲線は無限遠直線と 2 点で交わる 2 次曲線である

と考えることにより、これらを統一的に把握する。

注意. (i) 無限遠点は、はじめに絵画において強く認識され（例えば、レオナルド・ダ・ビンチの最後の晩餐、等）画法幾何学という数学の分野をへて、射影幾何学の理論へと発展した。

(ii) 無限遠点はひとつではないと考える。例えば、互いに平行ではない二組の平行線は異なる無限遠点で交わると考える。

同次座標

通常のユークリッド平面に無限遠直線を付け加えて得られる数学的対象を射影平面という。これを数学的に厳密に扱うために、同次座標という概念を導入する。

記号 $(x_0 : x_1 : x_2)$ で実数 x_0, x_1, x_2 の連比を表す。このとき

$$\mathbb{P}^2 = \{(x_0 : x_1 : x_2) \mid (x_0, x_1, x_2) \neq (0,0,0)\}$$

とおき、射影平面と呼ぶ。ここで

$$U_0 = \{(x_0 : x_1 : x_2) \in \mathbb{P}^2 \mid x_0 \neq 0\}$$
$$L_0 = \{(x_0 : x_1 : x_2) \in \mathbb{P}^2 \mid x_0 = 0\}$$

とおけば

$$\mathbb{P}^2 = U_0 \cup L_0, \qquad U_0 \cap L_0 = \varnothing$$

が成り立つ。さらに、写像

$$\Phi_0 : \begin{array}{ccc} U_0 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \cup & & \cup \\ (x_0 : x_1 : x_2) & \longmapsto & \left(\frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0}\right) \end{array}$$

は全単射であり、その逆写像は

$$\Phi_0^{-1} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & U_0 \\ \cup & & \cup \\ (x, y) & \longmapsto & (1 : x : y) \end{array}$$

となる。

また、単位円周を C と表せば、写像

$$\Psi_0 : \begin{array}{ccc} L_0 & \longrightarrow & C \\ \cup & & \cup \\ (0 : x_1 : x_2) & \longmapsto & \left(\frac{x_1^2 - x_2^2}{x_1^2 + x_2^2}, \frac{2x_1x_2}{x_1^2 + x_2^2}\right) \end{array}$$

は全単射となり、その逆写像 $\Psi_0^{-1} : C \to L_0$ は点 $(x, y) \in C$ に対して

$$\Psi_0^{-1}(x, y) = \begin{cases} (0 : 1 + x : y) & \big((x, y) \neq (-1, 0) \text{ のとき}\big) \\ (0 : y : 1 - x) & \big((x, y) \neq (1, 0) \text{ のとき}\big) \end{cases}$$

と表される。ここで、点 $(x, y) \in C$ に対して

$$(x, y) \neq (-1, 0), (1, 0) \implies (0 : 1 + x : y) = (0 : y : 1 - x)$$

が成り立つことに注意する。

注意. (i) 全単射 Φ_0, Φ_0^{-1} により射影平面内の点 $(1 : x_1 : x_2) \in U_0$ と通常の平面内の点 $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ とを同一視して $U_0 = \mathbb{R}^2$ とみなすこともある。このとき L_0 を $U_0 = \mathbb{R}^2$ に対する無限遠直線という。

(ii) 全単射 Ψ_0, Ψ_0^{-1} により無限遠直線 L_0 と単位円周 C とを同一視することができる。このとき L_0 と C は同形であるといい $L_0 \cong C$ と表す。

(iii) U_0 と $\mathbb{R}^2$ とを同一視することにより、単位円周 C を射影平面 $\mathbb{P}^2$ の部分集合とみなすことができる。即ち

$$C \subset \mathbb{R}^2 = U_0 \subset \mathbb{P}^2$$

であると考える。このとき

$$C = \{(x_1^2 + x_2^2 : x_1^2 - x_2^2 : 2x_1x_2) \mid (x_1, x_2) \neq (0, 0)\}$$

と表すこともできる。

以上により、無限遠直線 L_0 が円周と本質的に同じものであり、射影平面 $\mathbb{P}^2$ が通常の平面 $\mathbb{R}^2$ に無限遠直線 L_0 を付け加えて得られることが解った。

同様に

$$U_1 = \{(x_0 : x_1 : x_2) \in \mathbb{P}^2 \mid x_1 \neq 0\}$$
$$L_1 = \{(x_0 : x_1 : x_2) \in \mathbb{P}^2 \mid x_1 = 0\}$$

とおけば

$$\mathbb{P}^2 = U_1 \cup L_1, \qquad U_1 \cap L_1 = \varnothing$$
$$U_1 \cong \mathbb{R}^2, \qquad L_1 \cong C$$

が成り立つ。また

$$U_2 = \{(x_0 : x_1 : x_2) \in \mathbb{P}^2 \mid x_2 \neq 0\}$$
$$L_2 = \{(x_0 : x_1 : x_2) \in \mathbb{P}^2 \mid x_2 = 0\}$$

とおけば

$$\mathbb{P}^2 = U_2 \cup L_2, \qquad U_2 \cap L_2 = \varnothing$$
$$U_2 \cong \mathbb{R}^2, \qquad L_2 \cong C$$

も成り立つ。

射影曲線

通常の平面 $\mathbb{R}^2$ 内の曲線と同様に、射影平面 $\mathbb{P}^2$ のなかでも曲線を定義することができる。

まず、射影平面内の直線（1 次曲線）を定義し、その基本的な性質を調べる。

定義 1. 3 次元行ベクトル $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$ $(\mathbf{a} \neq \mathbf{0})$ と変数 X_0, X_1, X_2 に対して $X = (X_0, X_1, X_2)$ とおき、1 次同次多項式

$$F(X) = \mathbf{a} \begin{bmatrix} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}$$

を定める。このとき、条件

$$F(x_0, x_1, x_2) = 0$$

を満たす点 $(x_0 : x_1 : x_2) \in \mathbb{P}^2$ の全体を

$$L \,:\, F(X) = 0$$

と表し、多項式 F により定義される射影直線という。ベクトル $\mathbf{a}$ が

$$\mathbf{a} = (a_0, a_1, a_2)$$

と表されていれば、射影直線 L は

$$L \,:\, a_0X_0 + a_1X_1 + a_2X_2 = 0$$

と表される。

注意. (i) 定義 1 に関して

$$\begin{aligned} \mathbf{a} = (1,0,0) &\implies L = L_0 \\ \mathbf{a} = (0,1,0) &\implies L = L_1 \\ \mathbf{a} = (0,0,1) &\implies L = L_2 \end{aligned}$$

が成り立つ。即ち L_0, L_1, L_2 はすべて射影直線である。

(ii) 射影直線 $L \,:\, a_0X_0 + a_1X_1 + a_2X_2 = 0$ を平面 $U_0 = \mathbb{R}^2$ 内で考えれば通常の直線

$$a_1x + a_2y + a_0 = 0$$

と一致する。

定理 1. 射影平面 $\mathbb{P}^2$ 内の射影直線 L はすべて射影直線 L_0 と同形になる。従って L は単位円周とも同形になる。

次に、射影平面内の 2 次曲線を定義し、その基本的な性質を調べる。

定義 2. 3 次の対称かつ正則な行列 A と変数 X_0, X_1, X_2 に対して $X = (X_0, X_1, X_2)$ とおき、2 次同次多項式

$$F(X) = [X_0 \ X_1 \ X_2] \ A \begin{bmatrix} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}$$

を定める。このとき、条件

$$F(x_0, x_1, x_2) = 0$$

を満たす点 $(x_0 : x_1 : x_2) \in \mathbb{P}^2$ の全体を

$$C \,:\, F(X) = 0$$

と表し、多項式 F により定義される射影 2 次曲線という。行列 A が

$$A = \begin{bmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{01} & a_{11} & a_{12} \\ a_{02} & a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}$$

と表されていれば、射影 2 次曲線 C は

$C : a_{00}X_0^2 + a_{11}X_1^2 + a_{22}X_2^2 + 2a_{01}X_0X_1 + 2a_{02}X_0X_2 + 2a_{12}X_1X_2 = 0$

と表される。ここで $\det A \neq 0$ より

$$a_{00}a_{11}a_{22} + 2a_{01}a_{02}a_{12} \neq a_{00}a_{12}^2 + a_{11}a_{02}^2 + a_{22}a_{01}^2$$

となることに注意する。

例 1. 定義 2 で定めた射影 2 次曲線 C に対して

$$C_0 = C \cap U_0$$

とおく。このとき

(i) $a_{12} = a_{22} = 0$ であれば、C_0 は放物線となり

$$C \cap L_0 = \{(0:0:1)\}, \qquad C = C_0 \cup \{(0:0:1)\}$$

が成り立つ。

(ii) $a_{01} = a_{02} = a_{12} = 0$, $a_{00}a_{11} < 0$, $a_{00}a_{22} < 0$ であれば、C_0 は楕円となり

$$C \cap L_0 = \varnothing, \qquad C = C_0$$

が成り立つ。

(iii) $a_{01} = a_{02} = a_{12} = 0$, $a_{00} > 0$, $a_{11} < 0$, $a_{22} > 0$ であれば、C_0 は双曲線となり

$$C \cap L_0 = \{(0 : \sqrt{a_{22}} : -\sqrt{-a_{11}}),\ (0 : \sqrt{a_{22}} : \sqrt{-a_{11}})\}$$
$$C = C_0 \cup \{(0 : \sqrt{a_{22}} : -\sqrt{-a_{11}}),\ (0 : \sqrt{a_{22}} : \sqrt{-a_{11}})\}$$

が成り立つ。

例 2. 定数 a, b, c が条件 $(a, b) \neq (0, 0)$ を満たすと仮定し、平面 $\mathbb{R}^2$ 内の直線

$$\ell_0 \,:\, ax + by + c = 0$$

を射影平面内の直線

$$\ell \,:\, cX_0 + aX_1 + bX_2 = 0$$

の部分集合とみなす。このとき

(i) $b \neq 0$ であれば、直線 ℓ_0 上の任意の点 $(1 : x : y)$ に対して

$$\lim_{x \to \pm\infty} (1 : x : y) = (0 : -b : a)$$

が成り立つ。

(ii) $a \neq 0$ であれば、直線 ℓ_0 上の任意の点 $(1:x:y)$ に対して

$$\lim_{y \to \pm\infty}(1:x:y) = (0:-b:a)$$

が成り立つ。

(iii) $\ell = \ell_0 \cup \{(0:-b:a)\}$ が成り立つ。

例 3. 定数 a, b, c が条件 $a \neq 0$ を満たすと仮定し、平面 $\mathbb{R}^2$ 内の放物線

$$C_0 \,:\, y = ax^2 + bx + c$$

を射影平面内の 2 次曲線

$$C \,:\, X_0X_2 - aX_1^2 - bX_0X_1 - cX_0^2 = 0$$

の部分集合とみなす。このとき

(i) 曲線 C_0 上の任意の点 $(1:x:y)$ に対して

$$\lim_{x \to \pm\infty}(1:x:y) = (0:0:1)$$

が成り立つ。

(ii) $C = C_0 \cup \{(0:0:1)\}$ が成り立つ。

注意. 無限遠点 $(0:0:1)$ は放物線 C_0 の焦点のひとつであると考える。従って (ii) より、射影 2 次曲線 C は放物線 C_0 の焦点を含むことが解る。

例 4. 定数 a, b が条件 $a > 0, b > 0$ を満たすと仮定し、平面 $\mathbb{R}^2$ 内の双曲線

$$C_0 \,:\, \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

を射影平面内の 2 次曲線

$$C \,:\, a^2b^2X_0^2 - b^2X_1^2 + a^2X_2^2 = 0$$

の部分集合とみなす。このとき

(i) 曲線 C_0 上の任意の点 $(1:x:y)$ に対して

$$\lim_{x \to -\infty}(1:x:y) = \begin{cases} (0:a:-b) & (y > 0\,\text{のとき}) \\ (0:a:b) & (y < 0\,\text{のとき}) \end{cases}$$

$$\lim_{x \to +\infty}(1:x:y) = \begin{cases} (0:a:b) & (y > 0\,\text{のとき}) \\ (0:a:-b) & (y < 0\,\text{のとき}) \end{cases}$$

が成り立つ。

(ii) $C = C_0 \cup \{(0:a:-b), (0:a:b)\}$ が成り立つ。

注意. 点 $(1:\pm\sqrt{a^2+b^2}:0)$ は双曲線 C_0 の焦点である。従って、射影 2 次曲線 C は双曲線 C_0 の焦点を含まないことが解る。

射影 2 次曲線 C を実数の範囲で考えると $C=\varnothing$ となることがある。以下ではこのような場合は除外して考える。一般に、射影 2 次曲線 C を複素数の範囲で考えれば、$C=\varnothing$ となることはない。

射影変換

通常の平面 $\mathbb{R}^2$ 上のアフィン変換と同様に、射影平面 $\mathbb{P}^2$ 上の射影変換を定義することができる。

定義 3. 3 次正則行列 P に対して、写像

$$\bar{P}: \begin{array}{ccc} \mathbb{P}^2 & \longrightarrow & \mathbb{P}^2 \\ \uplus & & \uplus \\ (x_0 : x_1 : x_2) & \longmapsto & (y_0 : y_1 : y_2) \end{array}$$

を等式

$$\begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

により定め、行列 P が定義する射影平面 $\mathbb{P}^2$ 上の射影変換という。

補題 1. 任意の対称行列 A に対して $P^{-1}AP$ が対角行列となるような直交行列 P が存在する。

定理 2. 射影平面 $\mathbb{P}^2$ 内の射影 2 次曲線 C が空集合でなければ、C を単位円周に移す射影変換 P が存在する。従って C は射影直線 L_0 と同形になる。

(2) について：理由をいくつか挙げる。

☒ 通常の平面の距離関数を射影平面の距離関数に拡張することはできない。従って、問題 [1], [2], [3] で示したような焦点の性質が意味をもたなくなってしまう。

☒ 射影平面内の 2 直線のなす角を通常の平面 U_0, U_1, U_2 内の 2 直線のなす角の一般化となるように定義することはできない。従って、問題 [5], [6], [7] で示したような焦点の性質が意味をもたなくなってしまう。

☒ 射影 2 次曲線の焦点を通常の平面 U_0, U_1, U_2 内の放物線、楕円、双曲線の焦点の一般化となるように定義することはできない。

関連事項の整理

[1]. 射影直線 $\mathbb{P}^1$ の導入

射影直線 $\mathbb{P}^1$ を

$$\mathbb{P}^1 = \{(x_0 : x_1) \mid (x_0, x_1) \neq (0,0)\}$$

と定める。このとき、射影直線 $\mathbb{P}^1$ から単位円周 C への写像

$$\Psi: \begin{array}{ccc} \mathbb{P}^1 & \longrightarrow & C \\ \cup & & \cup \\ (x_0 : x_1) & \longmapsto & \left(\frac{x_0^2 - x_1^2}{x_0^2 + x_1^2}, \frac{2x_0x_1}{x_0^2 + x_1^2}\right) \end{array}$$

は全単射となり、その逆写像 $\Psi^{-1} : C \to \mathbb{P}^1$ は点 $(x,y) \in C$ に対して

$$\Psi^{-1}(x,y) = \begin{cases} (1 + x : y) & \big((x,y) \neq (-1,0) \text{ のとき}\big) \\ (y : 1 - x) & \big((x,y) \neq (1,0) \text{ のとき}\big) \end{cases}$$

と表される。ここで、点 $(x,y) \in C$ に対して

$$(x,y) \neq (-1,0), (1,0) \implies (1 + x : y) = (y : 1 - x)$$

が成り立つことに注意する。

また、写像

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} & \longrightarrow & C \\ \cup & & \cup \\ (x_0, x_1) & \longmapsto & \left(\frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 + x_1^2}}, \frac{x_1}{\sqrt{x_0^2 + x_1^2}}\right) \end{array}$$

は定義されるが、写像

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}^1 & \longrightarrow & C \\ \cup & & \cup \\ (x_0 : x_1) & \longmapsto & \left(\frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 + x_1^2}}, \frac{x_1}{\sqrt{x_0^2 + x_1^2}}\right) \end{array}$$

は定義されない。さらに、写像

$$\begin{array}{ccc} C & \longrightarrow & \mathbb{P}^1 \\ \cup & & \cup \\ (x,y) & \longmapsto & (x : y) \end{array}$$

は定義されて全射となるが単射ではない。

注意. 一般に d 次元射影空間 $\mathbb{P}^d$ が

$$\mathbb{P}^d = \{(x_0 : x_1 : \cdots : x_d) \mid (x_0, x_1, \cdots, x_d) \neq (0, 0, \cdots, 0)\}$$

により定義される。このとき、射影直線は 1 次元射影空間 $\mathbb{P}^1$ であり、射影平面は 2 次元射影空間 $\mathbb{P}^2$ である。

[2]. 単位円周 C を射影曲線とみなせば

$$C \,:\, X_0^2 - X_1^2 - X_2^2 = 0$$

と表される。このとき、写像 Ψ は

$$\Psi : \begin{array}{ccc} \mathbb{P}^1 & \longrightarrow & C \\ \cup & & \cup \\ (x_0 : x_1) & \longmapsto & (x_0^2 + x_1^2 : x_0^2 - x_1^2 : 2x_0x_1) \end{array}$$

と表され、その逆写像 $\Psi^{-1} : C \to \mathbb{P}^1$ は点 $(y_0 : y_1 : y_2) \in C$ に対して

$$\Psi^{-1}(y_0 : y_1 : y_2) = \begin{cases} (y_0 + y_1 : y_2) \quad ; \quad (y_0 : y_1 : y_2) \neq (1 : -1 : 0) \\ (y_2 : y_0 - y_1) \quad ; \quad (y_0 : y_1 : y_2) \neq (1 : 1 : 0) \end{cases}$$

と表される。ここで、点 $(y_0 : y_1 : y_2) \in C$ に対して

$$(y_0 : y_1 : y_2) \neq (1 : -1 : 0), (1 : 1 : 0) \implies (y_0 + y_1 : y_2) = (y_2 : y_0 - y_1)$$

が成り立つことに注意する。

また、写像

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}^1 & \longrightarrow & C \\ \cup & & \cup \\ (x_0 : x_1) & \longmapsto & \left(\sqrt{x_0^2 + x_1^2} : x_0 : x_1\right) \end{array}$$

は定義されないことにも注意する。

[2] a を正の定数とし、座標平面に放物線 $y=x^2$ と点 $\mathrm{A}(a,a^2)$ を定める。次の各問に答えよ。

(1) 点 A において $y=x^2$ の接線と直交する直線 ℓ の方程式を求めよ。また、直線 ℓ と y 軸との交点 B の座標を求めよ。

(2) 点 $\mathrm{C}(a,a^2+\frac{1}{2})$ をとり $\alpha=\angle\mathrm{BAC}$ とおく。$\tan\alpha$ を a で表せ。

(3) y 軸上に点 F を $\angle\mathrm{BAF}=\alpha$ となるようにとる。直線 AF と x 軸の正の向きとのなす角を β とするとき、β を α で表せ。また $\tan\beta$ を a で表せ。

(4) 直線 AF の方程式を求めよ。また、点 F の座標を求めよ。

注意. (1) の直線 ℓ を放物線上の点 A における法線という。

[3] $\triangle\mathrm{ABC}$ において，辺 AC 上に点 D をとり，辺 AB 上に点 E をとる。

$$\angle\mathrm{CBD}=60^\circ,\ \angle\mathrm{EBD}=20^\circ,\ \angle\mathrm{BCE}=50^\circ,\ \angle\mathrm{ECD}=30^\circ$$

であるとき $\angle\mathrm{BDE}$ と $\angle\mathrm{CED}$ の大きさを求めよ。

[4] $\triangle\mathrm{ABC}$ において $a=\mathrm{BC},\ b=\mathrm{CA},\ c=\mathrm{AB}$ とおき，面積を S とする。次の各問に答えよ。

(1) 三辺 $a,\ b,\ c$ の長さが解っている場合，

$$S=\frac{\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)}}{4}$$

が成り立つという公式をヘロンの公式という。

(1.1) ヘロンの公式を三角関数を用いずに導出せよ。

(1.2) ヘロンの公式を三角関数を用いて導出せよ。

(2) 二辺 $a,\ b$ の長さと $\angle\mathrm{C}=\angle\mathrm{ACB}$ の大きさが解っている場合，S を $a,\ b,\ \angle\mathrm{C}$ で表せ。

(3) 辺 a の長さと $\angle\mathrm{B}=\angle\mathrm{ABC},\ \angle\mathrm{C}=\angle\mathrm{ACB}$ の大きさが解っている場合，S を $a,\ \angle\mathrm{B},\ \angle\mathrm{C}$ で表せ。

注意. この問題は三角形の合同条件と面積の間の関係を示している。

[5] 実数値をとる定数 a,b が条件 $(a,b)\neq(0,0)$ を満たすと仮定する。このとき，等式

$$ax+by=c$$

を満たす有理数 $x,\ y$ が存在するかしないかを判定し，存在する場合はすべて求めよ。

[6] a, b があらゆる実数値をとるとき，定積分

$$I = \int_{-1}^{1} |x^2 + ax + b| \, dx$$

の最小値とそのときの係数 a, b の値を求めよ。

[5] $a,\, b$ を定数とする。次の各問に答えよ。

(1) 多項式 x^3+ax+b を
$$x^3+ax+b=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$$
と因数分解する。このとき
$$D=(\alpha-\beta)^2(\beta-\gamma)^2(\gamma-\alpha)^2$$
を $a,\, b$ で表せ。

(2) 方程式 $x^3+ax+b=0$ が重解をもつための条件を求めよ。

(3) 関数 $f(x)=x^3+ax+b$ が極大値，極小値をもつための条件を求めよ。このとき，極大値と極小値の積を $a,\, b$ で表せ。

(4) (3) を用いて (2) とおなじ結果を導け。

(5) 直線 $ax+y+b=0$ が曲線 $y=x^3$ に接するための条件を求めよ。

(6) (5) を用いて (2) とおなじ結果を導け。

注意. (1), (2) では係数 $a,\, b$ および解 $\alpha,\, \beta,\, \gamma$ は実数でなくてもよい。また，多項式 $x^2+ax+b=(x-\alpha)(x-\beta)$ の判別式 D は
$$D=a^2-4b=(\alpha-\beta)^2$$
と表されることにも注意する。

[6] 正の整数 $m,\, n$ に関する条件
$$f(m,1)=2, \qquad f(1,n)=1+n$$
$$f(m+1,n+1)=f(m+1,n)+f(m,n)$$
により定義される関数 $f(m,n)$ について考える。次の各問に答えよ。

(1) $f(1,n)$ は直線上の異なる n 個の点が直線を分割する個数であることを示せ。

(2) $f(2,n)$ を n で表せ。また，$f(2,n)$ は平面上の異なる n 個の直線が平面を分割する個数の最大値であることを示せ。

(3) $f(3,n)$ を n で表せ。また，$f(3,n)$ は空間内の異なる n 個の平面が空間を分割する個数の最大値であることを示せ。

(4) $f(m,n)$ を $m,\, n$ で表せ。

注意. $f(m,n)$ は m 次元空間 $\mathbb{R}^m$ 内の異なる n 個の超平面が $\mathbb{R}^m$ を分割する個数の最大値である。

[**7**]　条件

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 1, \quad a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \ \ (n \geqq 1)$$

により定義される数列 $a_1, a_2, a_3, \cdots$ をフィボナッチ数列という。このとき，2 以上の任意の整数 m に対して，a_n が m の倍数となるような n が無限にたくさん存在することを証明せよ。

[**7′**]　条件

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 1, \quad a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \ \ (n \geqq 1)$$

により定義される数列 $a_1, a_2, a_3, \cdots$ をフィボナッチ数列という。次の各問に答えよ。

(1) フィボナッチ数列 $a_1, a_2, a_3, \cdots$ に対して $a_0 = 0$ とおけば，漸化式 $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ は $n = 0$ でも成り立つことを示せ。

(2) 整数 a を 2 以上の整数 m で割った余りを $\bar{a}$ と書き，フィボナッチ数列 $a_0, a_1, a_2, \cdots$ に対して，数列 $\bar{a}_0, \bar{a}_1, \bar{a}_2, \cdots$ を定める。このとき，条件

$$0 \leqq k < \ell \leqq m^2, \ (\bar{a}_k, \bar{a}_{k+1}) = (\bar{a}_\ell, \bar{a}_{\ell+1})$$

を満たす整数 k, ℓ が存在することを示せ。

(3) $p = \ell - k$ とおく。このとき，数列 $\bar{a}_0, \bar{a}_1, \bar{a}_2, \cdots$ は周期 p をもつことを示せ。

(4) 2 以上の任意の整数 m に対して，a_n が m の倍数となるような n が無限にたくさん存在することを証明せよ。

注意.　この結果は整数係数線形漸化式で定義されるより一般の数列に対して成立する。

[**8**]　関数のグラフと対称性に関して、次の各問に答えよ。

(1) 1 次関数のグラフはすべてある直線に関して線対称であり、ある点に関して点対称であることを証明せよ。

(2) 2 次関数のグラフはすべてある直線に関して線対称であることを証明せよ。

(3) 3 次関数のグラフはすべてある点に関して点対称であることを証明せよ。

[9]　次の各問に答えよ。

(1) 方程式

$$\cos t = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

の $-\pi < t < \pi$ における実数解 t の個数を求めよ。

(2) 方程式

$$\sin t = \frac{2t}{1+t^2}$$

の $-\pi < t < \pi$ における実数解 t の個数を求めよ。

[9′]　次の各問に答えよ。

(1) 実数 t に対して，$\cos t = \frac{1-t^2}{1+t^2}$，$\sin t = \frac{2t}{1+t^2}$ が成り立つとき

$$\cos t + t\sin t$$

の値を求めよ。

(2) 方程式

$$\cos t = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

の $-\pi < t < \pi$ における実数解 t の個数を求めよ。

(3) 方程式

$$\sin t = \frac{2t}{1+t^2}$$

の $-\pi < t < \pi$ における実数解 t の個数を求めよ。

[9″]　次の各問に答えよ。

(1) 条件 $-\pi < t < \pi$ を満たす実数 t に対して

$$\cos t = \frac{1-t^2}{1+t^2} \iff 1 - t\sin t = \cos t$$

および

$$\sin t = \frac{2t}{1+t^2} \iff 1 - t\sin t = \pm\cos t$$

が成り立つことを示せ。

(2) 方程式

$$\cos t = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

の $-\pi < t < \pi$ における実数解 t の個数を求めよ。

(3) 方程式

$$\sin t = \frac{2t}{1+t^2}$$

の $-\pi < t < \pi$ における実数解 t の個数を求めよ。

[10]　実数全体で定義された関数 $y = f(x)$ と $y = g(x)$ は次の 3 条件：

(a) 任意の実数 α, β に対して

$$f(\alpha+\beta) = f(\alpha)f(\beta) - g(\alpha)g(\beta)$$
$$g(\alpha+\beta) = g(\alpha)f(\beta) + f(\alpha)g(\beta)$$

が成り立つ

(b) $f(0) = 1, \quad g(0) = 0$

(c) 関数 $y = f(x)$, $y = g(x)$ はどちらも点 $x = 0$ で微分可能

を満たす。次の各問に答えよ。

(1) 関数 $y = f(x)$, $y = g(x)$ はどちらも任意の点 x で微分可能で

$$f'(x) = f'(0)f(x) - g'(0)g(x)$$
$$g'(x) = g'(0)f(x) + f'(0)g(x)$$

が成り立つことを示せ。

次の (2), (3) では条件：

(c_1) $f'(0) = 1, \quad g'(0) = 0$

を仮定する。

(2) このとき

$$f'(x) - f(x) = 0, \qquad g'(x) - g(x) = 0$$

が成り立つことを示せ。

(3) 一般に，等式 $y' - y = 0$ を満たす関数 y はすべて

$$y = ce^x \quad (c \text{ は定数})$$

と表されることが知られている。この結果を用いて $f(x)$, $g(x)$ を求めよ。

次の (4), (5) では条件：

(c_2) $f'(0) = 0, \quad g'(0) = 1$

を仮定する。

(4) このとき，関数 $y = f(x)$, $y = g(x)$ の 2 階導関数が存在して

$$f''(x) + f(x) = 0, \qquad g''(x) + g(x) = 0$$

が成り立つことを示せ。

(5) 一般に，等式 $y'' + y = 0$ を満たす関数 y はすべて

$$y = c_1 \cos x + c_2 \sin x \quad (c_1, c_2 \text{ は定数})$$

と表されることが知られている。この結果を用いて $f(x)$, $g(x)$ を求めよ。

[11]　ここでは凸集合と関数との関連およびその応用について考える。

定義. (i)　平面内の集合 D は，条件

$$\mathrm{P}, \mathrm{Q} \in D \implies \text{線分}\,\mathrm{PQ} \subset D$$

が成立するとき，凸集合であるといわれる。

(ii)　区間 I で定義された関数 $f : I \to \mathbb{R}$ は，集合

$$D = \{(a, b) \mid a \in I,\ f(a) \leqq b\}$$

が凸集合であるとき，下に凸であるといわれる。

(iii)　区間 I で定義された関数 $g : I \to \mathbb{R}$ は，条件

$$x_1, x_2 \in I,\ x_1 < x_2 \implies g(x_1) \leqq g(x_2)$$

が成立するとき，広義単調増加であるといわれる。

問題.　以上の定義に従って次の各問に答えよ。

(1)　D を凸集合とする。このとき，$(a_1, b_1), \cdots, (a_n, b_n) \in D$ かつ $t_1, \cdots, t_n \geqq 0,\ t_1 + \cdots + t_n = 1$ であれば

$$(t_1 a_1 + \cdots + t_n a_n,\ t_1 b_1 + \cdots + t_n b_n) \in D$$

となることを証明せよ。

(2)　区間 I で定義された関数 $f : I \to \mathbb{R}$ が下に凸であるとする。このとき，$a_1, \cdots, a_n \in I$ かつ $t_1, \cdots, t_n \geqq 0,\ t_1 + \cdots + t_n = 1$ であれば

$$f(t_1 a_1 + \cdots + t_n a_n) \ \leqq\ t_1 f(a_1) + \cdots + t_n f(a_n)$$

が成り立つことを証明せよ。

(3)　開区間 I で定義された微分可能な関数 $f : I \to \mathbb{R}$ に対して

$$f\ \text{は下に凸} \iff f'\ \text{は広義単調増加}$$

が成り立つことを証明せよ。

(4)　実数 $a_1, \cdots, a_n$ に対して

$$\left(\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}\right)^2 \leqq \ \frac{a_1^2 + \cdots + a_n^2}{n}$$

および

$$\left(\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}\right)^2 = \ \frac{a_1^2 + \cdots + a_n^2}{n} \iff a_1 = \cdots = a_n$$

が成り立つことを証明せよ。

(5)　負でない実数 $a_1, \cdots, a_n$ に対して

$$\sqrt[n]{a_1 \cdots a_n} \ \leqq\ \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}$$

および

$$\sqrt[n]{a_1 \cdots a_n} \ =\ \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} \iff a_1 = \cdots = a_n$$

が成り立つことを証明せよ。

[11′]　ここでは凸集合と関数との関連およびその応用について考える。

定義. (i)　平面内の集合 D は，条件

$$\mathrm{P}, \mathrm{Q} \in D \implies \text{線分}\ \mathrm{PQ} \subset D$$

が成立するとき，凸集合であるといわれる。

(ii)　区間 I で定義された関数 $y = f(x)$ は，集合

$$D = \{(a, b) \mid a \in I,\ f(a) \leqq b\}$$

が凸集合であるとき，下に凸であるといわれる。

(iii)　区間 I で定義された関数 $y = g(x)$ は，条件

$$x_1, x_2 \in I,\ x_1 < x_2 \implies g(x_1) \leqq g(x_2)$$

が成立するとき，広義単調増加であるといわれる。

問題.　以上の定義に従って次の各問に答えよ。

(1)　D を凸集合とする。このとき，$(a_1, b_1), \cdots, (a_n, b_n) \in D$ かつ $t_1, \cdots, t_n \geqq 0,\ t_1 + \cdots + t_n = 1$ であれば

$$(t_1 a_1 + \cdots + t_n a_n,\ t_1 b_1 + \cdots + t_n b_n) \in D$$

となることを証明せよ。

(2)　区間 I で定義された関数 $y = f(x)$ が下に凸であるとする。このとき，$a_1, \cdots, a_n \in I$ かつ $t_1, \cdots, t_n \geqq 0,\ t_1 + \cdots + t_n = 1$ であれば

$$f(t_1 a_1 + \cdots + t_n a_n) \ \leqq\ t_1 f(a_1) + \cdots + t_n f(a_n)$$

が成り立つことを証明せよ。

(3)　開区間 I で定義された微分可能な関数 $y = f(x)$ に対して

$$f\ \text{は下に凸} \iff f'\ \text{は広義単調増加}$$

が成り立つことを証明せよ。

(4)　実数 $a_1, \cdots, a_n$ に対して

$$\left(\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}\right)^2 \leqq \frac{a_1^2 + \cdots + a_n^2}{n}$$

および

$$\left(\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}\right)^2 = \frac{a_1^2 + \cdots + a_n^2}{n} \iff a_1 = \cdots = a_n$$

が成り立つことを証明せよ。

注意.　区間 $(0, +\infty)$ で定義された関数 $y = -\log x$ が下に凸であることを示すことができる。この結果を用いて「負でない n 個の実数の相加平均が相乗平均以上となる」ことを示すこともできる。

[12] 座標平面内の集合

$$A = \{(x, y) \mid \sin(x+y) = \sin x + \sin y\}$$

を sin という記号を用いないで表示したい。次の各問に答えよ。

(1) $B_1 = \{(2m\pi, y) \mid m \in \mathbb{Z},\ y \in \mathbb{R}\}$ とおけば $B_1 \subset A$ となることを示せ。

(2) $B_2 = \{(x, 2n\pi) \mid x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{Z}\}$ とおけば $B_2 \subset A$ となることを示せ。

(3) $B_3 = \{(x, y) \mid x + y = 2k\pi\ (k \in \mathbb{Z})\}$ とおけば $B_3 \subset A$ となることを示せ。

(4) $f(x) = \dfrac{\sin x}{1 - \cos x}\ (x \neq 2m\pi,\ m \in \mathbb{Z})$ とおけば f は周期 2π をもつ奇関数で

$$f'(x) = -\frac{1}{1 - \cos x} < 0$$

となることを示せ。

(5) $A = B_1 \cup B_2 \cup B_3$ と表されることを証明せよ。

[13] 負でない整数 n と実変数 x に対して

$$f_n(x) = \int_0^x t^n e^{-t}\, dt$$

とおく。このとき

(1) $f_0(x) = 1 - e^{-x}$

(2) $f_n(x) = nf_{n-1}(x) - x^n e^{-x} \qquad (n \geqq 1)$

(3) $f_n(x) = n! - \dfrac{n!}{e^x} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \qquad (n \geqq 0)$

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{n!} = 0$

(5) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{f_n(x)}{n!} = 0$

(6) $e^x = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$

が成り立つことを示せ。

採用問題

[1] $\triangle$ABC において，$\angle B$ の二等分線が線分 AC と交わる点を D とし，$\angle C$ の二等分線が線分 AB と交わる点を E とする。このとき

$$\mathrm{AB} = \mathrm{AC} \iff \mathrm{BD} = \mathrm{CE}$$

が成り立つことを示せ。

(2013 年度採用)

解答. (1) $\Rightarrow$ を示す。AB = AC より $\angle\mathrm{ABC} = \angle\mathrm{ACB}$ となるから

$$\angle\mathrm{EBD} = \angle\mathrm{DBC} = \angle\mathrm{BCE} = \angle\mathrm{ECD}$$

が解る。従って、合同条件（一辺とその両端の角が等しい）より

$$\triangle\mathrm{BDC} \equiv \triangle\mathrm{CEB}$$

となるから

$$\mathrm{BD} = \mathrm{CE}$$

が解る。 (証明終)

(2) $\Leftarrow$ を示すために補題をふたつ準備する。

補題 1. $\triangle$ABC において

$$\mathrm{AC} < \mathrm{AB} \iff \angle\mathrm{ABC} < \angle\mathrm{ACB}$$

が成り立つ。

証明. $\Rightarrow$ を示す。AC < AB より、辺 AB 上に AM = AC となるような点 M をとることができる。このとき

$$\angle\mathrm{ABC} + \angle\mathrm{BCM} = \angle\mathrm{AMC} = \angle\mathrm{ACM}$$

となるから

$$\angle\mathrm{ABC} = \angle\mathrm{ACM} - \angle\mathrm{BCM} < \angle\mathrm{ACM} + \angle\mathrm{MCB} = \angle\mathrm{ACB}$$

が解る。

$\Leftarrow$ は転換法より明らか。 (証明終)

補題 2. $\triangle$ABC と $\triangle\mathrm{A'B'C'}$ において

$$\mathrm{AB} = \mathrm{A'B'},\ \mathrm{AC} = \mathrm{A'C'},\ \angle\mathrm{BAC} < \angle\mathrm{B'A'C'} \implies \mathrm{BC} < \mathrm{B'C'}$$

が成り立つ。

証明. $\mathrm{AB} = \mathrm{A'B'}$ より、A と A$'$ および B と B$'$ を重ねることができる。また、辺 BC$'$ 上に DC = DC$'$ となるような点 D をとることができる。このとき $\angle\mathrm{DCC'} = \angle\mathrm{DC'C}$ となるから $\angle\mathrm{BC'}C < \angle\mathrm{BCC'}$ となる。よって $\triangle\mathrm{BCC'}$ に補題 1 を適用すれば

$$\mathrm{BC} < \mathrm{BC'} = \mathrm{B'C'}$$

が解る。 (証明終)

(2) $\Leftarrow$ の証明：背理法により示す。$\mathrm{AB} \neq \mathrm{AC}$ と仮定する。このとき $\mathrm{AC} < \mathrm{AB}$ と仮定しても一般性は失われない。$\mathrm{AC} < \mathrm{AB}$ であれば、補題 1 より $\angle\mathrm{ABC} < \angle\mathrm{ACB}$ となるから $\angle\mathrm{DBC} < \angle\mathrm{ECB}$ が解る。このことと補題 2 より

$$\mathrm{CD} < \mathrm{BE} \quad \cdots\cdots \quad \boxtimes$$

が解る。

また、点 E を通り直線 BD に平行な直線と、点 D を通り直線 AB に平行な直線の交点を F とする。このとき $\mathrm{EF} = \mathrm{BD} = \mathrm{CE}$ となるから $\triangle\mathrm{ECF}$ は二等辺三角形となる。$\angle\mathrm{EFD} < \angle\mathrm{ECD}$ であるから $\angle\mathrm{DCF} < \angle\mathrm{DFC}$ となる。従って、補題 1 より

$$\mathrm{BE} = \mathrm{DF} < \mathrm{CD} \quad \cdots\cdots \quad \boxtimes$$

が解る。

$\boxtimes$, $\boxtimes$ は矛盾するから $\mathrm{AB} = \mathrm{AC}$ となることが解る。 (証明終)

別証明：(2) $\Leftarrow$ にベクトルを用いた証明をつける。そのために補題をひとつ準備する。

補題 3. $\triangle\mathrm{ABC}$ において、$\angle A$ の二等分線が線分 BC と交わる点を N とする。このとき

$$\mathrm{AB} : \mathrm{AC} = \mathrm{BN} : \mathrm{NC}$$

が成り立つ。

証明. $\triangle\mathrm{ABN}$ の面積を S_1 とし、$\triangle\mathrm{ANC}$ の面積を S_2 とする。このとき、$\triangle\mathrm{ABN}$ と $\triangle\mathrm{ANC}$ に関して、BN と NC を底辺と考えれば高さは共通であるから

$$S_1 : S_2 = \mathrm{BN} : \mathrm{NC}$$

が成り立つ。また、AB と AC を底辺と考えれば高さは同じ長さとなるから

$$S_1 : S_2 = \mathrm{AB} : \mathrm{AC}$$

が成り立つ。従って

$$\mathrm{AB} : \mathrm{AC} = \mathrm{BN} : \mathrm{NC}$$

が成り立つことが解る。 (証明終)

(2) $\Leftarrow$ の別証明：ベクトルを用いて示す。$\mathrm{BC} = 1$ と仮定しても一般性は失われない。このとき

$$\overrightarrow{p} = \overrightarrow{\mathrm{AB}}, \qquad \overrightarrow{q} = \overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

とおき

$$c = |\overrightarrow{p}| = \mathrm{AB}, \qquad b = |\overrightarrow{q}| = \mathrm{AC}$$

と定めれば、$\overrightarrow{\mathrm{BC}} = \overrightarrow{q} - \overrightarrow{p}$ より

$$|\overrightarrow{q} - \overrightarrow{p}| = \mathrm{BC} = 1$$

となる。よって

$$\overrightarrow{q}\cdot\overrightarrow{q}-2\overrightarrow{p}\cdot\overrightarrow{q}+\overrightarrow{p}\cdot\overrightarrow{p}=1$$

より

$$\overrightarrow{p}\cdot\overrightarrow{q}=\frac{1}{2}(b^2+c^2-1) \quad \cdots\cdots \quad \boxtimes$$

を得る。また、補題 3 より

$$\mathrm{CD}:\mathrm{DA}=1:c$$

となるから、内分の公式より

$$\overrightarrow{\mathrm{BD}}=\frac{c\overrightarrow{\mathrm{BC}}+\overrightarrow{\mathrm{BA}}}{1+c}=\frac{c(\overrightarrow{q}-\overrightarrow{p})-\overrightarrow{p}}{1+c}=\frac{c}{1+c}\overrightarrow{q}-\overrightarrow{p}$$

となる。従って $\boxtimes$ より

$$\begin{aligned}\mathrm{BD}^2&=\big(\frac{c}{1+c}\overrightarrow{q}-\overrightarrow{p}\big)\cdot\big(\frac{c}{1+c}\overrightarrow{q}-\overrightarrow{p}\big)\\&=\big(\frac{c}{1+c}\big)^2|\overrightarrow{q}|^2-2\frac{c}{1+c}\overrightarrow{p}\cdot\overrightarrow{q}+|\overrightarrow{p}|^2\\&=\big(\frac{c}{1+c}\big)^2b^2-\frac{c}{1+c}(b^2+c^2-1)+c^2\\&=c-\frac{b^2c}{(c+1)^2}\end{aligned}$$

が解る。

全く同様に

$$\overrightarrow{\mathrm{CE}}=\frac{b}{1+b}\overrightarrow{p}-\overrightarrow{q}$$

と $\boxtimes$ より

$$\mathrm{CE}^2=b-\frac{bc^2}{(b+1)^2}$$

も解る。

ここで仮定 $\mathrm{BD}=\mathrm{CE}$ を用いれば

$$c-\frac{b^2c}{(c+1)^2}=b-\frac{bc^2}{(b+1)^2}$$

となる。この等式を移行して整理すると

$$(c-b)\big(1+bc\cdot\frac{b^2+bc+c^2+2b+2c+1}{(b+1)^2(c+1)^2}\big)=0$$

となるから $c=b$ 即ち

$$\mathrm{AB}=\mathrm{AC}$$

が解る。 (証明終)

この証明を修正すれば次の定理を示すことができる。

定理. $\triangle\mathrm{ABC}$ において，$\angle B$ の二等分線が線分 AC と交わる点を D とし，$\angle C$ の二等分線が線分 AB と交わる点を E とする。このとき

$$\begin{aligned}\mathrm{AB} < \mathrm{AC} &\iff \mathrm{BD} < \mathrm{CE}\\ \mathrm{AB} = \mathrm{AC} &\iff \mathrm{BD} = \mathrm{CE}\\ \mathrm{AB} > \mathrm{AC} &\iff \mathrm{BD} > \mathrm{CE}\end{aligned}$$

が成り立つ。

数学課題 5

[1] $x = \sqrt{3} - \sqrt{2}$ とおく。次の各問に答えよ。

(1) $x^4 - 10x^2 + 1 = 0$ が成り立つことを示せ。

(2) $\sqrt{3} + \sqrt{2}$ を x の整数係数多項式で表せ。

(3) $\sqrt{3}$ と $\sqrt{2}$ を x の有理数係数多項式で表せ。

注意. (2) と (3) はどちらを先に解答してもよい。

[2] 数列 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots$ を

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

により定める。次の各問に答えよ。

(1) a_n を 2 項定理を用いて展開せよ。

(2) すべての正の整数 n に対して $a_n \leqq 3$ が成り立つことを示せ。

(3) すべての正の整数 n に対して $a_n \leqq a_{n+1}$ が成り立つことを示せ。

[3] 問題 [2] より，極限値

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

が存在することが解る。この値を e と書く。即ち

$$e = \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

と定義する。次の各問に答えよ。

(1) $e = \displaystyle\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ が成り立つことを示せ。

(2) $e = \displaystyle\lim_{x \to -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ が成り立つことを示せ。

(3) $e = \displaystyle\lim_{h \to 0} (1 + h)^{\frac{1}{h}}$ が成り立つことを示せ。

(4) $\displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{\log_e(1 + h)}{h} = 1$ が成り立つことを示せ。

(5) 関数 $f(x) = \log_e x$ の導関数 $f'(x)$ を定義に従って計算せよ。

[4] 2 次正方行列 A は kE (k は実数，E は単位行列) という形ではないとする。このとき，任意の 2 次正方行列 X に対して

$AX = XA \iff X = \alpha E + \beta A$ となる定数 α, β が存在する

が成り立つことを示せ。

[5] 弧度法により表された角 θ に対して，次の各問に答えよ。

(1) $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ であれば

$$\sin\theta < \tan\theta, \quad \sin\theta < 2\sin\frac{\theta}{2}, \quad 2\tan\frac{\theta}{2} < \tan\theta$$

が成り立つことを示せ。

(2) 弧の長さを円の内接折れ線の極限と考えて

$$\theta = \lim_{n\to+\infty} 2^n \sin\frac{\theta}{2^n} = \lim_{n\to+\infty} 2^n \tan\frac{\theta}{2^n}$$

が成り立つことを示せ。

(3) $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ であれば

$$\sin\theta < \theta < \tan\theta$$

が成り立つことを示せ。

(4) $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$, $\theta \neq 0$ であれば

$$\cos\theta < \frac{\sin\theta}{\theta} < 1$$

が成り立つことを示せ。

(5) $\displaystyle\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta} = 1$ を示せ。

(6) 関数 $f(x) = \sin x$ の導関数 $f'(x)$ を定義に従って計算せよ。

注意. [5] により，半径 a の円の面積が πa^2 であることを用いることなしに，三角関数の導関数が計算できることが解った。

数学問題

[1] $\triangle$ABC において $a=\mathrm{BC}$, $b=\mathrm{CA}$, $c=\mathrm{AB}$ とおけば，面積 S は

$$S=\frac{\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)}}{4}$$

により与えられるという公式をヘロンの公式という。これを以下の手順に従って証明せよ。

(1) 頂点 A から直線 BC におろした垂線と BC との交点を H とする。BH を a, b, c で表せ。

(2) AH を a, b, c で表せ。

(3) $\triangle$ABC の面積 S を a, b, c で表し，ヘロンの公式を導け。

[2] n を正の整数とし，a_1, a_2, $\cdots$, a_n を負でない実数とする。次の各問に答えよ。

(1) 関数 $f(x)=x^{n+1}-(n+1)a_1\cdot\cdots\cdot a_n x+a_1^{n+1}+\cdots+a_n^{n+1}$ の $x\geqq 0$ における最小値とそのときの x の値を求めよ。

(2) 不等式

$$a_1^n+a_2^n+\cdots+a_n^n\geqq na_1\cdot\cdots\cdot a_n$$

が成り立つことを n に関する数学的帰納法を用いて証明せよ。また，等号が成立するための条件を求めよ。

(3) 負でない実数 b_1, $\cdots$, b_n に対して

$$\frac{b_1+\cdots+b_n}{n}\geqq\sqrt[n]{b_1\cdot\cdots\cdot b_n}$$

が成り立つことを示せ。また，等号が成立するための条件を求めよ。

注意. [1], [2] の応用として，周の長さが一定の三角形の面積の最大値を求めることができる。

[3] n を正の整数とする。次の各問に答えよ。

(1) n 次以下の多項式

$$f_k(x)=\frac{x(x-1)\cdots(x-k+1)}{k!}\qquad(0\leqq k\leqq n)$$

は条件

$$\alpha\in\mathbb{Z}\implies f_k(\alpha)\in\mathbb{Z}$$

を満たすことを示せ。

(2) 条件

$$\alpha\in\mathbb{Z}\implies f(\alpha)\in\mathbb{Z}$$

を満たす n 次多項式 $f(x)$ をすべて求めよ。

[4] 座標平面上に単位円 $C: x^2+y^2=1$ と原点とは異なる点 $\mathrm{A}(a,b)$ をとり，直線 $\ell: ax+by=1$ を定める。次の各問に答えよ。

(1) 点 A が円 C の周上にあるとき，即ち $a^2+b^2=1$ であるとき，直線 ℓ は点 A における円 C の接線であることを示せ。

(2) 点 A が円 C の外部にあるとき，即ち $a^2+b^2>1$ であるとき，点 A から円 C にひいた 2 本の接線の接点をそれぞれ P, Q とすれば、直線 ℓ は直線 PQ に一致することを示せ。

(3) 点 A が円 C の内部にあるとき，即ち $a^2+b^2<1$ であるとき，点 A から直線 ℓ を作図する方法を述べることにより A と ℓ との関係を明らかにせよ。

注意. 一般に，円 C とは無関係に，点 A から直線 ℓ を作図することもできる。

[5] $x=\sqrt{3}-\sqrt{2}$ とおく。次の各問に答えよ。

(1) $x^4-10x^2+1=0$ が成り立つことを示せ。

(2) $\sqrt{3}+\sqrt{2}$ を x の整数係数多項式で表せ。

(3) $\sqrt{3}$ と $\sqrt{2}$ を x の有理数係数多項式で表せ。

注意. (2) と (3) はどちらを先に解答してもよい。

[6] 数列 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots$ を

$$a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \quad (n=1,2,3,\cdots)$$

により定める。次の各問に答えよ。

(1) a_n を 2 項定理を用いて展開せよ。

(2) すべての正の整数 n に対して $a_n \leqq 3$ が成り立つことを示せ。

(3) すべての正の整数 n に対して $a_n \leqq a_{n+1}$ が成り立つことを示せ。

[7] a, b $(0<a<b)$ を定数とし，座標平面上に直線 $\ell: y=ax+b$ と点 $\mathrm{A}(-1,0)$, $\mathrm{B}(1,0)$ をとる。次の各問に答えよ。

(1) 直線 ℓ と x 軸との交点において ℓ と直交する直線が y 軸と交わる点の y 座標を求めよ。

(2) 2 点 A, B を通る円の中心は y 軸上にあることを示せ。

(3) 2 点 A, B を通り直線 ℓ に接する円の中心の y 座標を求めよ。

(4) 点 P が直線 ℓ の上を動くとき，$\angle\mathrm{APB}$ が最大となるような P の座標を求めよ。

[8] 次の各問に答えよ。

(1) 条件 $-\pi < t < \pi$ を満たす実数 t に対して

$$1 - t\sin t = \cos t \iff \cos t = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

および

$$1 - t\sin t = \pm\cos t \iff \sin t = \frac{2t}{1+t^2}$$

が成り立つことを示せ。

(2) 方程式 $\cos x = \dfrac{1-x^2}{1+x^2}$ は $0 < x < \pi$ においてただひとつの実数解をもつことを示せ。また，その解を $x = a$ とすれば $\frac{\pi}{2} < a < \pi$ となることを示せ。

(3) 方程式 $\sin x = \dfrac{2x}{1+x^2}$ は $0 < x < \pi$ において異なるふたつの実数解をもつことを示せ。また，そのひとつの解は (2) で求めた $x = a$ であり，他の解を $x = b$ とすれば $1 < b < \frac{\pi}{2}$ となることを示せ。

(4) 条件 $-\pi < t < \pi$ を満たす実数 t に対して

$$\cos t = \frac{1-t^2}{1+t^2} \implies \sin t = \frac{2t}{1+t^2}$$

が成り立つことを示せ。また，この逆

$$\cos t = \frac{1-t^2}{1+t^2} \impliedby \sin t = \frac{2t}{1+t^2}$$

は成り立たないことを反例を挙げて示せ。

(5) c を定数とする。方程式 $x - \sin x - c\cos x = 0$ の $-\pi < x < \pi$ における異なる実数解の個数を求めよ。

[9] a, b を定数とする。次の各問に答えよ。

(1) 多項式 $x^3 + ax + b$ を

$$x^3 + ax + b = (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$$

と因数分解する。このとき

$$D = (\alpha-\beta)^2(\beta-\gamma)^2(\gamma-\alpha)^2$$

を a, b で表せ。

(2) 方程式 $x^3 + ax + b = 0$ が重解をもつための条件を求めよ。

(3) 関数 $f(x) = x^3 + ax + b$ が極大値，極小値をもつための条件を求めよ。このとき，極大値と極小値の積を a, b で表せ。

(4) (3) を用いて (2) とおなじ結果を導け。

注意. (1), (2) では係数 a, b および解 α, β, γ は実数でなくてもよい。

[10] 正の整数 $m,\, n$ に関する条件

$$f(m,1)=2, \qquad f(1,n)=1+n$$
$$f(m+1,n+1)=f(m+1,n)+f(m,n)$$

により定義される関数 $f(m,n)$ について考える。次の各問に答えよ。

(1) $f(1,n)$ は直線上の異なる n 個の点が直線を分割する個数であることを示せ。

(2) $f(2,n)$ を n で表せ。また，$f(2,n)$ は平面上の異なる n 個の直線が平面を分割する個数の最大値であることを示せ。

(3) $f(3,n)$ を n で表せ。また，$f(3,n)$ は空間内の異なる n 個の平面が空間を分割する個数の最大値であることを示せ。

(4) $f(m,n)$ を $m,\, n$ で表せ。

注意. $f(m,n)$ は m 次元空間 $\mathbb{R}^m$ 内の異なる n 個の超平面が $\mathbb{R}^m$ を分割する個数の最大値である。

[11] 条件

$$a_1=1, \quad a_2=1, \quad a_n=a_{n-1}+a_{n-2} \ \ (n \geqq 3)$$

により定義される数列 $a_1,\, a_2,\, a_3,\, \cdots$ をフィボナッチ数列という。このとき，任意の正の整数 m に対して，a_n が m の倍数となるような n が無限にたくさん存在することを証明せよ。

注意. この結果は整数係数線形漸化式で定義されるより一般の数列に対して成立する。

[12] a, b を定数とする。座標平面上の点 $\mathrm{P}(a,b)$ から放物線 $C: y=x^2$ に異なる 2 本の接線 $\ell_1,\, \ell_2$ がひける。このとき次の各問に答えよ。

(1) $b<a^2$ が成り立つことを示せ。

(2) 接線 $\ell_1,\, \ell_2$ と曲線 C との交点をそれぞれ A, B とし

$$\theta = \angle \mathrm{APB}$$

とおく。$\cos\theta$ を $a,\, b$ で表せ。

(3) $\triangle \mathrm{APB}$ の面積 S を $a,\, b$ で表せ。

(4) 角 θ が一定であるとき，点 $\mathrm{P}(a,b)$ は双曲線の上を動くことを示せ。

[13] 問題 [6] より，極限値

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

が存在することが解る。この値を e と書く。即ち

$$e = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

と定義する。次の各問に答えよ。

(1) $e = \displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ が成り立つことを示せ。

(2) $e = \displaystyle\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ が成り立つことを示せ。

(3) $e = \displaystyle\lim_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}}$ が成り立つことを示せ。

(4) $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{\log_e(1+h)}{h} = 1$ が成り立つことを示せ。

(5) 関数 $f(x) = \log_e x$ の導関数 $f'(x)$ を定義に従って計算せよ。

[14] 2 次正方行列 A は kE (k は実数，E は単位行列) という形ではないとする。このとき，任意の 2 次正方行列 X に対して

$AX = XA \iff X = \alpha E + \beta A$ となる定数 α, β が存在する

が成り立つことを示せ。

[15] ここでは凸集合と導関数の関連について考える。

定義 (i) 平面内の集合 D は，条件

$$\mathrm{P}, \mathrm{Q} \in D \implies \text{線分}\ \mathrm{PQ} \subset D$$

を満たすとき，凸集合であるといわれる。

(ii) 区間 I で定義された関数 $f : I \to \mathbb{R}$ は，集合

$$D = \{(x, y) \mid x \in I,\ y \geqq f(x)\}$$

が凸集合であるとき，下に凸であるといわれる。

(iii) 区間 I で定義された関数 $g : I \to \mathbb{R}$ は，条件

$$x \leqq y \implies g(x) \leqq g(y)$$

を満たすとき，単調非減少であるといわれる。

以上の定義に従って次を示せ。

定理 開区間 I で定義された微分可能な関数 $f : I \to \mathbb{R}$ に対して

$$f\ \text{は下に凸} \iff f'\ \text{は単調非減少}$$

が成り立つ。

[16] 座標平面内の集合

$$A = \{(x, y) \mid \sin(x + y) = \sin x + \sin y\}$$

を sin という記号を用いないで表示したい。次の各問に答えよ。

(1) $B_1 = \{(2m\pi, y) \mid m \in \mathbb{Z},\ y \in \mathbb{R}\}$ とおけば $B_1 \subset A$ となることを示せ。

(2) $B_2 = \{(x, 2n\pi) \mid x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{Z}\}$ とおけば $B_2 \subset A$ となることを示せ。

(3) $B_3 = \{(x, y) \mid x + y = 2k\pi\ (k \in \mathbb{Z})\}$ とおけば $B_3 \subset A$ となることを示せ。

(4) $f(x) = \dfrac{\sin x}{1 - \cos x}$ $(x \neq 2m\pi,\ m \in \mathbb{Z})$ とおけば f は周期 2π をもつ奇関数で

$$f'(x) = -\frac{1}{1 - \cos x} < 0$$

となることを示せ。

(5) $A = B_1 \cup B_2 \cup B_3$ と表されることを証明せよ。

[17] 弧度法により表された角 θ に対して，次の各問に答えよ。

(1) $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ であれば

$$\sin\theta < \tan\theta, \quad \sin\theta < 2\sin\frac{\theta}{2}, \quad 2\tan\frac{\theta}{2} < \tan\theta$$

が成り立つことを示せ。

(2) 角 θ に対して

$$\theta = \lim_{n\to+\infty} 2^n \sin\frac{\theta}{2^n} = \lim_{n\to+\infty} 2^n \tan\frac{\theta}{2^n}$$

が成り立つことを示せ。

(3) $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ であれば

$$\sin\theta < \theta < \tan\theta$$

が成り立つことを示せ。

(4) $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$, $\theta \neq 0$ であれば

$$\cos\theta < \frac{\sin\theta}{\theta} < 1$$

が成り立つことを示せ。

(5) $\displaystyle\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta} = 1$ を示せ。

(6) 関数 $f(x) = \sin x$ の導関数 $f'(x)$ を定義に従って計算せよ。

注意. [17] により，半径 a の円の面積が πa^2 であることを用いることなしに，三角関数の導関数が計算できることが解った。

[18] 定数 a, b と連続関数 $f(x)$ が条件

(ア) $\quad f(x) = \displaystyle\int_0^1 (ax+bt)f(t)dt$

を満たす。次の各問に答えよ。

(1) $f(x)$ は x の 1 次以下の多項式であることを示せ。

(2) $f(x) = \alpha x + \beta$ (α, β は定数) のとき，定積分

$$\int_0^1 (ax+bt)f(t)dt$$

を計算せよ。また a, b, α, β の間の関係式を求めよ。

(3) さらに a, b, $f(x)$ が条件

(イ) $\quad f(0) = 2b \neq 0,\ \ f(1) = a+2 \neq 0$

も満たすと仮定する。このとき a, b, $f(x)$ を求めよ。

[19] 負でない整数 a, b と連続関数 $f(x)$ が条件

(ア) $\quad f(x) = \displaystyle\int_0^1 (ax+bt)f(t)dt$

を満たす。次の各問に答えよ。

(1) $f(x)$ は x の 1 次以下の多項式であることを示せ。

(2) $f(x) = \alpha x + \beta$ (α, β は定数) のとき，定積分

$$\int_0^1 (ax+bt)f(t)dt$$

を計算せよ。また a, b, α, β の間の関係を行列を用いて表せ。

(3) さらに a, b, $f(x)$ が条件

(イ) $\quad f(1) - f(0) = 7$

も満たすと仮定する。このとき $(a+6)(b+6)$ の値を計算せよ。
また a, b, $f(x)$ を求めよ。

[20] 次の各問に答えよ。

(1) 定積分 $\displaystyle\int_{-1}^1 x^2 dx,\ \int_{-1}^1 \left|x^2 - \frac{1}{4}\right| dx,\ \int_{-1}^1 |x^2-1|dx$ の値を計算せよ。

(2) 定積分 $I = \displaystyle\int_{-1}^1 |x^2 - c^2|dx$ の最小値とそのときの定数 c の値を求めよ。

(3) 定積分 $I = \displaystyle\int_{-1}^1 |x^2 + b|dx$ の最小値とそのときの定数 b の値を求めよ。

(4) 定積分 $I = \displaystyle\int_{-1}^{1} |x^2 + ax + b| dx$ の最小値とそのときの定数 a, b の値を求めよ。

問題 A

[1] $\triangle$ABC において $a=\mathrm{BC},\ b=\mathrm{CA},\ c=\mathrm{AB}$ とおくとき，面積 S は

$$S=\frac{\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)}}{4}$$

により与えられるという公式をヘロンの公式という。これを以下の手順に従って証明せよ。

(1) 頂点 A から直線 BC におろした垂線と BC との交点を H とする。BH を $a,\ b,\ c$ で表せ。

(2) AH を $a,\ b,\ c$ で表せ。

(3) $\triangle$ABC の面積 S を $a,\ b,\ c$ で表し，ヘロンの公式を導け。

[2]* a を正の定数とし，座標平面上に点 $\mathrm{A}(a,a^2)$ と放物線 $y=x^2$ をとる。次の各問に答えよ。

(1) 点 A において $y=x^2$ の接線と直交する直線の方程式を求めよ。また，この直線と y 軸との交点 B の座標を求めよ。

(2) 点 $\mathrm{C}(a,a^2+\frac{1}{2})$ をとり $\alpha=\angle\mathrm{BAC}$ とおく。$\tan\alpha$ を a で表せ。

(3) y 軸上に点 F を $\angle\mathrm{BAF}=\alpha$ となるようにとる。直線 AF と x 軸の正の向きとのなす角を β とするとき，β を α で表せ。また $\tan\beta$ を a で表せ。

(4) 直線 AF の方程式を求めよ。また，点 F の座標を求めよ。

[3] n を正の整数とし，$a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n$ を負でない実数とする。次の各問に答えよ。

(1) 関数 $f(x)=x^{n+1}-(n+1)a_1\cdot\cdots\cdot a_nx+a_1^{n+1}+\cdots+a_n^{n+1}$ の $x\geqq 0$ における最小値とそのときの x の値を求めよ。

(2) 不等式

$$a_1^n+a_2^n+\cdots+a_n^n\geqq na_1\cdot\cdots\cdot a_n$$

が成り立つことを n に関する数学的帰納法を用いて証明せよ。

(3) 負でない実数 $b_1,\ \cdots,\ b_n$ に対して

$$\frac{b_1+\cdots+b_n}{n}\geqq\sqrt[n]{b_1\cdot\cdots\cdot b_n}$$

が成り立つことを示せ。

[4] n を正の整数とする。条件

$$\alpha\in\mathbb{Z}\implies f(\alpha)\in\mathbb{Z}$$

を満たす n 次多項式 $f(x)$ をすべて求めよ。

[5] 座標平面上に単位円 $C : x^2 + y^2 = 1$ と原点とは異なる点 $\mathrm{A}(a, b)$ をとり，直線 $\ell : ax + by = 1$ を定める。次の各問に答えよ。

(1) 点 A が円 C の周上にあるとき，即ち $a^2 + b^2 = 1$ であるとき，直線 ℓ は点 A における円 C の接線であることを示せ。

(2) 点 A が円 C の外部にあるとき，即ち $a^2 + b^2 > 1$ であるとき，点 A から円 C にひいた 2 本の接線の接点をそれぞれ P, Q とすれば、直線 ℓ は直線 PQ に一致することを示せ。

(3) 点 A が円 C の内部にあるとき，即ち $a^2 + b^2 < 1$ であるとき，点 A から直線 ℓ を作図する方法を述べることにより A と ℓ との関係を明らかにせよ。

注意. 一般に，円 C とは無関係に，点 A から直線 ℓ を作図することもできる。

[6] $x = \sqrt{3} - \sqrt{2}$ とおく。次の各問に答えよ。

(1) $x^4 - 10x^2 + 1 = 0$ が成り立つことを示せ。

(2) $\sqrt{3} + \sqrt{2}$ を x の整数係数多項式で表せ。

(3) $\sqrt{3}$ と $\sqrt{2}$ を x の有理数係数多項式で表せ。

注意. (2) と (3) はどちらを先に解答してもよい。

[7] 数列 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots$ を

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

により定める。次の各問に答えよ。

(1) a_n を 2 項定理を用いて展開せよ。

(2) すべての正の整数 n に対して $a_n \leqq 3$ が成り立つことを示せ。

(3) すべての正の整数 n に対して $a_n \leqq a_{n+1}$ が成り立つことを示せ。

[8]* 自然対数の底 e を

$$e = \lim_{h \to 0} (1 + h)^{\frac{1}{h}}$$

により定義する。ただし，この極限が存在することは既知とする。次の各問に答えよ。

(1) $\displaystyle \lim_{h \to 0} \frac{\log_e (1 + h)}{h} = 1$ を示せ。

(2) 関数 $f(x) = \log_e x$ の導関数を定義に従って計算せよ。

(3) 関数 $y = e^x$ の導関数を逆関数の導関数の公式と (2) の結果を用いて計算せよ。

[9]　3 回微分可能な関数 $y = f(x)$ と $z = g(y)$ の合成関数 $z = g(f(x))$ が定義されると仮定する。次の各問に答えよ。

(1)　$\big(g(f(x))\big)' = g'(f(x))f'(x)$ が成り立つことを証明せよ。

(2)　2 階導関数 $\big(g(f(x))\big)''$ を計算せよ。

(3)　3 階導関数 $\big(g(f(x))\big)'''$ を計算せよ。

注意.　n 階導関数 $\big(g(f(x))\big)^{(n)}$ を具体的に表すこともできる。

[10]　ベクトル $\vec{a}, \vec{b}$ に対して次の各問に答えよ。

(1)　内積　$\vec{a} \cdot \vec{b}$　の定義を述べよ。

(2)　$\vec{a} \cdot \vec{b} = \dfrac{1}{2}(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - |\vec{b} - \vec{a}|^2)$ を示せ。

(3)　$\vec{a} = (a_1, a_2)$,　$\vec{b} = (b_1, b_2)$ と成分表示されているとき

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2$$

となることを示せ。

(4)　$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$,　$\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ と成分表示されているとき

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

となることを示せ。

[11]　a, b $(0 < a < b)$ を定数とし，座標平面上に直線 $\ell : y = ax + b$ と点 $\mathrm{A}(-1, 0)$, $\mathrm{B}(1, 0)$ をとる。次の各問に答えよ。

(1)　直線 ℓ と x 軸との交点において ℓ と直交する直線が y 軸と交わる点の y 座標を求めよ。

(2)　2 点 A, B を通る円の中心は y 軸上にあることを示せ。

(3)　2 点 A, B を通り直線 ℓ に接する円の中心の y 座標を求めよ。

(4)　点 P が直線 ℓ の上を動くとき，$\angle\mathrm{APB}$ が最大となるような P の座標を求めよ。

[12]　条件 $-\pi < t < \pi$ を満たす実数 t に対して

$$\cos t = \frac{1 - t^2}{1 + t^2} \implies \sin t = \frac{2t}{1 + t^2}$$

が成り立つことを示せ。また，この逆

$$\cos t = \frac{1 - t^2}{1 + t^2} \impliedby \sin t = \frac{2t}{1 + t^2}$$

は成り立たないことを反例を挙げて示せ。

[13] 次の各問に答えよ。

(1) 条件 $-\pi < t < \pi$ を満たす実数 t に対して

$$1 - t\sin t = \cos t \iff \cos t = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

および

$$1 - t\sin t = \pm\cos t \iff \sin t = \frac{2t}{1+t^2}$$

が成り立つことを示せ。

(2) 方程式 $\cos x = \dfrac{1-x^2}{1+x^2}$ は $0 < x < \pi$ においてただひとつの実数解を持つことを示せ。また，その解を $x = a$ とすれば $\frac{\pi}{2} < a < \pi$ となることを示せ。

(3) 方程式 $\sin x = \dfrac{2x}{1+x^2}$ は $0 < x < \pi$ において異なるふたつの実数解を持つことを示せ。また，そのひとつの解は (2) で求めた $x = a$ であり，他の解を $x = b$ とすれば $1 < b < \frac{\pi}{2}$ となることを示せ。

(4) c を定数とする。方程式 $x - \sin x - c\cos x = 0$ の $-\pi < x < \pi$ における異なる実数解の個数を求めよ。

[14] a, b を定数とする。方程式 $x^3 + ax + b = 0$ の解を α, β, γ とするとき

$$D = (\alpha-\beta)^2(\beta-\gamma)^2(\gamma-\alpha)^2$$

を a, b で表せ。

注意. 係数 a, b および解 α, β, γ は実数でなくてもよい。

[15] 正の整数 m, n に対して，条件

$$f(m,1) = 2, \quad f(1,n) = 1+n$$
$$f(m+1,n+1) = f(m+1,n) + f(m,n)$$

を満たす $f(m,n)$ を m, n で表せ。

注意. $f(m,n)$ は m 次元空間 $\mathbb{R}^m$ 内の異なる n 個の超平面が $\mathbb{R}^m$ を分割する個数の最大値である。

[16] $a_1, a_2, a_3, \cdots$ をフィボナッチ数列とする。このとき，任意の正の整数 m に対して，a_n が m の倍数となるような n が無限にたくさん存在することを証明せよ。

注意. この結果は整数係数線形漸化式で定義されるより一般の数列に対して成立する。

[17] p を素数とする。整数 n に対して

$$\alpha_n = \begin{cases} 0 & (n < 0 \text{ のとき}) \\ 1 & (n = 0 \text{ のとき}) \\ \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{n-p^k} & (n > 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

とおくことにより有理数 α_n $(n \in \mathbb{Z})$ を定める。次の各問に答えよ。

(1) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots, \alpha_{p-1}$ を計算せよ。

(2) $\alpha_p = \dfrac{(p-1)!+1}{p!}$ となることを示せ。また，$(p-1)!+1$ は p で割り切れることを示せ。

(3) α_n $(n \geqq 1)$ を既約分数で表したとき，分母は p で割り切れないことを証明せよ。

注意. 一般に，2 以上の整数 a に対して

$$a \text{ は素数} \iff (a-1)!+1 \in a\mathbb{Z}$$

が成り立つ。これをウィルソンの定理という。

[18] a, b を定数とする。座標平面上の点 $\mathrm{P}(a, b)$ から放物線 $C : y = x^2$ に異なる 2 本の接線 ℓ_1, ℓ_2 がひける。次の各問に答えよ。

(1) a, b の条件を求めよ。($b < a^2$ が成り立つことを示せ。)

(2) 接線 ℓ_1, ℓ_2 と曲線 C との交点をそれぞれ A, B とし

$$\theta = \angle\mathrm{APB}$$

とおく。$\cos\theta$ を a, b で表せ。

(3) $\triangle\mathrm{APB}$ の面積 S を a, b で表せ。

(4) 接線 ℓ_1, ℓ_2 のなす角 θ が一定であるとき，a, b の間の関係式を求めよ。

[19] p を奇素数とする。このとき，$2p+1$ も素数であれば

$$x^p + y^p = z^p$$

を満たす p と互いに素な正の整数 x, y, z は存在しないことを証明せよ。

注意. これをソフィ・ジェルマンの定理 (1823) という。

[20] これまでに学んできた数学のなかから最も印象に残った定理をひとつ選び，それを正確に記述し，厳密に証明せよ。

[21] 座標平面上に点 $\mathrm{F}(0, \frac{1}{4})$, 直線 $m : y = -\frac{1}{4}$ および放物線 $C : y = x^2$ をとる。点 $\mathrm{P}(a, b)$ から放物線 $C : y = x^2$ に異なる 2 本の接線 ℓ_1, ℓ_2 がひけるとき，次の各問に答えよ。

(1) $b < a^2$ となることを示せ。

(2) 接線 ℓ_1, ℓ_2 と曲線 C との交点をそれぞれ A, B とするとき，直線 AB の方程式を求めよ。また，線分 AB の中点の x 座標は点 P の x 座標に等しいことを示せ。

(3) 曲線 C 上の任意の点 Q に対して，FQ は Q と m との距離に等しいことを示せ。

(4) 点 P が直線 m 上にあれば，接線 ℓ_1, ℓ_2 は直交することを証明せよ。

解答

[1] (1) $\mathrm{BH} = \dfrac{a^2 - b^2 + c^2}{2a}$

(2) $\mathrm{AH} = \dfrac{\sqrt{2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2 - a^4 - b^4 - c^4}}{2a}$

(3) $$S = \dfrac{\sqrt{2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2 - a^4 - b^4 - c^4}}{4}$$
$$= \dfrac{\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)}}{4}$$

[2] (1) $y = -\dfrac{1}{2a}x + a^2 + \dfrac{1}{2}, \qquad \mathrm{B}\Big(0,\ a^2 + \dfrac{1}{2}\Big)$

(2) $\tan\alpha = 2a$

(3) $\beta = 2\alpha - \dfrac{\pi}{2}, \qquad \tan\beta = \dfrac{4a^2 - 1}{4a}$

(4) $y = \dfrac{4a^2 - 1}{4a}x + \dfrac{1}{4}, \qquad \mathrm{F}(0, \dfrac{1}{4})$

[3] (1) $f'(x) = (n+1)x^n - (n+1)a_1 \cdots a_n$ となることに注意して増減表を書けば，$x = \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n}$ のとき，最小値

$$f(\sqrt[n]{a_1 \cdots a_n}) = a_1^{n+1} + \cdots + a_n^{n+1} - n\sqrt[n]{a_1^{n+1} \cdots a_n^{n+1}}$$

をとることが解る。

(2) n に関する数学的帰納法による。$n = 1$ のときは明らか。$n = k$ のとき正しいと仮定する。$n = k + 1$ のとき，任意の $a_{k+1} \geqq 0$ に対して $f(a_{k+1}) \geqq f(\sqrt[k]{a_1 \cdots a_k})$ となるから，$c_i = \sqrt[k]{a_i^{k+1}}$ $(1 \leqq i \leqq k)$ とおけば

$$f(a_{k+1}) \geqq c_1^k + \cdots + c_k^k - kc_1 \cdots c_k \geqq 0$$

となる。

(3) $a_i = \sqrt[n]{b_i}$ $(1 \leqq i \leqq n)$ とおけば，(2) より

$$b_1 + \cdots + b_n = a_1^n + \cdots + a_n^n \geqq na_1 \cdots a_n = n\sqrt[n]{b_1 \cdots b_n}$$

が解る。

[**4**] まず，n 次以下の多項式

$$f_k(x)=\frac{x(x-1)\cdots(x-k+1)}{k!}\qquad(0\leqq k\leqq n)$$

が条件

$$\alpha\in\mathbb{Z}\implies f_k(\alpha)\in\mathbb{Z}$$

を満たすことに注意する。次に，n 次以下の任意の多項式 $f(x)$ が $f(x)=c_0f_0(x)+\cdots+c_nf_n(x)$ と表されることに注意する。従って，問題の多項式はすべて

$$f(x)=c_0f_0(x)+\cdots+c_nf_n(x)\quad(c_0,\cdots,c_n\in\mathbb{Z},\ c_n\neq 0)$$

と表されることが解る。

[**5**] (1), (2) 略

(3) ℓ は直線 OA と直交し，原点からの距離が $\dfrac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}$ である直線であることに注意する。このことを用いて，例えば次の手順で点 A から直線 ℓ を作図することができる。

Step 1. 点 A を通り直線 OA に直交する直線をひき，円 C との交点を P, Q とする。

Step 2. 点 P, Q において円 C の接線をひき，その交点を B とする。

Step 3. 点 B を通り直線 OA に直交する直線をひく。これが直線 ℓ となる。

[**6**] (1) $x=\sqrt{3}-\sqrt{2}$ の両辺を 2 乗すると $x^2=5-2\sqrt{6}$ となる。これを $x^2-5=-\sqrt{24}$ と変形して 2 乗すれば $x^4-10x^2+1=0$ となる。

(2) $\sqrt{3}+\sqrt{2}=10x-x^3$

(3) $\sqrt{3}=\dfrac{11}{2}x-\dfrac{1}{2}x^3,\qquad \sqrt{2}=\dfrac{9}{2}x-\dfrac{1}{2}x^3$

[**7**], [**8**] 略

[**9**] (1) 略

(2) $\big(g(f(x))\big)''=g''(f(x))f'(x)^2+g'(f(x))f''(x)$

(3) $\big(g(f(x))\big)'''=g'''(f(x))f'(x)^3+3g''(f(x))f'(x)f''(x)$
$\qquad\qquad+\ g'(f(x))f'''(x)$

[**10**] 略

[11] (1) 直線 ℓ と x 軸との交点は $(-\frac{b}{a}, 0)$ である。この点で ℓ と直交する直線の方程式は

$$y = -\frac{1}{a}x - \frac{b}{a^2}$$

となるから，求める点の y 座標は

$$y = -\frac{b}{a^2}$$

となる。

(2) y 軸が線分 AB の垂直 2 等分線であることより明らか。

(3) 求める円の中心を $(0, c)$ とすれば，円の方程式は

$$x^2 + y^2 - 2cy = 1$$

となる。これが直線 ℓ と接することと (1) より

$$c = \frac{-b + \sqrt{(a^2+1)(b^2-a^2)}}{a^2}$$

が解る。

(4) $\angle$APB が最大となるのは，点 P が (3) で求めた円と ℓ との接点に一致するときである。従って $\angle$APB が最大となるような点 P の座標は

$$\Bigl(\frac{-(a^2+1)b + \sqrt{(a^2+1)(b^2-a^2)}}{a(a^2+1)},\ \frac{\sqrt{(a^2+1)(b^2-a^2)}}{a^2+1}\Bigr)$$

となる。

[12] (i) $\cos t = \frac{1-t^2}{1+t^2} \implies \sin t = \frac{2t}{1+t^2}$ の証明：t と $\sin t$ が同符号であることと $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$ より明らか。

(ii) $\cos t = \frac{1-t^2}{1+t^2} \impliedby \sin t = \frac{2t}{1+t^2}$ の反例：

$$\cos t = \frac{t^2-1}{t^2+1}, \quad \sin t = \frac{2t}{t^2+1}$$

となる $t \in (-\pi, \pi)$ が存在することを示せばよい。関数

$$f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1} = 1 - \frac{2}{x^2+1}$$

の増減を調べれば，条件

$$\cos b = \frac{b^2-1}{b^2+1}, \quad 1 < b < \frac{\pi}{2}$$

を満たす定数 b が存在することが解る。このとき

$$\sin b = \frac{2b}{b^2+1}$$

も成り立つから，この b は反例となる。

[13] (1) よっつに分けて示す。

(i) $1-t\sin t=\cos t \implies \cos t=\frac{1-t^2}{1+t^2}$ の証明：$t\sin t=1-\cos t$ として両辺を平方すれば $t^2(1-\cos t)(1+\cos t)=(1-\cos t)^2$ となる。これより $\cos t=\frac{1-t^2}{1+t^2}$ が解る。

(ii) $1-t\sin t=\cos t \impliedby \cos t=\frac{1-t^2}{1+t^2}$ の証明：$\sin t=\frac{2t}{1+t^2}$ を示し，これを代入すればよい。

(iii) $1-t\sin t=\pm\cos t \implies \sin t=\frac{2t}{1+t^2}$ の証明：(i) と同様に示せる。

(iv) $1-t\sin t=\pm\cos t \impliedby \sin t=\frac{2t}{1+t^2}$ の証明：(ii) と同様に示せる。

(2) 関数 $f(x)=\cos x+x\sin x-1$ の増減を調べれば，方程式 $f(x)=0$ が $0<x<\pi$ に唯一つの解 $x=a$ を持つことが解る。(1) よりこれが $\cos x=\frac{1-x^2}{1+x^2}$ の解となることも解る。

(3) 関数 $g(x)=\cos x-x\sin x+1$ の増減を調べれば，方程式 $g(x)=0$ が $0<x<\pi$ に唯一つの解 $x=b$ を持つことが解る。(1) よりこれが $\sin x=\frac{2x}{1+x^2}$ の解となることも解る。

(4) 関数 $h(x)=\frac{x-\sin x}{\cos x}$ の増減を調べれば，方程式 $h(x)=c$ の解の個数が

$$|c|>\pi \implies \text{解は 2 個}$$
$$\frac{a-\sin a}{a\sin a-1}<|c|\leqq\pi \implies \text{解は 3 個}$$
$$|c|=\frac{a-\sin a}{a\sin a-1} \implies \text{解は 2 個}$$
$$|c|<\frac{a-\sin a}{a\sin a-1} \implies \text{解は 1 個}$$

であることが解る。さらに

$$x-\sin x-c\cos x=0 \iff h(x)=c$$

となることより，方程式 $x-\sin x-c\cos x=0$ の解の個数もこれと同じであることが解る。

[14] 解と係数の関係

$$\alpha+\beta+\gamma=0,\quad \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=a,\quad \alpha\beta\gamma=-b$$

より

$$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=-3b,\quad \alpha^3\beta^3+\beta^3\gamma^3+\gamma^3\alpha^3=a^3+3b^2$$

が解る。これらを用いて D を計算すれば

$$D=-(4a^3+27b^2)$$

となる。

[15] n に関する数学的帰納法により

$$f(m,n) = \sum_{k=0}^{\min\{m,n\}} {}_n\mathrm{C}_k$$

と表されることが解る。

注意. [15] は m または $m+n$ に関する数学的帰納法を用いて示すこともできる。

[16] フィボナッチ数列 $a_1, a_2, a_3, \cdots$ に対して $a_0 = 0$ とおけば，漸化式 $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ は $n = 0$ でも成り立つことに注意する。一般に，整数 a を m で割った余りを $\bar{a}$ と書き，フィボナッチ数列 $a_0, a_1, a_2, \cdots$ に対して，数列 $\bar{a}_0, \bar{a}_1, \bar{a}_2, \cdots$ を定める。このとき

$$S = \{(\bar{a}_k, \bar{a}_{k+1}) \mid k = 0, 1, 2, 3, \cdots\}$$

とおけば，S は有限集合でその個数は m^2 以下となるから，条件

$$0 \leqq k < \ell \leqq m^2,\ (\bar{a}_k, \bar{a}_{k+1}) = (\bar{a}_\ell, \bar{a}_{\ell+1})$$

を満たす整数 k, ℓ が存在する。ここで $p = \ell - k$ とおけば，数列 $\bar{a}_0, \bar{a}_1, \bar{a}_2, \cdots$ は周期 p を持つことが解る。従って，負でない任意の整数 k に対して $\bar{a}_{pk} = 0$ となる。即ち，任意の正の整数 m に対して，a_n が m の倍数となるような n が無限にたくさん存在することが示された。

[17] (1) $\alpha_n = \dfrac{1}{n!}\ \ (1 \leqq n \leqq p-1)$

(2) $\alpha_p = \dfrac{1}{p}(\alpha_{p-1} + \alpha_0) = \dfrac{1}{p}\Big(\dfrac{1}{(p-1)!} + 1\Big) = \dfrac{(p-1)!+1}{p!}$

(3) $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n x^n \in \mathbb{Q}[[x]]$ とおき，次の手順に従って示す。

Step 1. $f'(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^{p^n - 1} \cdot f(x)$ が成り立つ。

Step 2. $f(x) = \exp(\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{p^n} x^{p^n})$ と書ける。

Step 3. $f(x)^p = f(x^p) \cdot \exp(px)$ が成り立つ。

Step 4. $f(x) \in \mathbb{Z}_{(p)}[[x]]$ となる。ここで

$$\mathbb{Z}_{(p)} = \{\frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z},\ b \in \mathbb{Z} - p\mathbb{Z}\}$$

である。

[18] (1) $b < a^2$

(2) $\cos\theta = -\dfrac{4b+1}{\sqrt{16a^2+(4b-1)^2}}$

(3) $S = \dfrac{a^2-b}{2}\sqrt{16a^2+32b^2+2}$

(4) a, b は条件

$$(\cos\theta)^2a^2 - (\sin\theta)^2\Big(b + \frac{1+\cos^2\theta}{4\sin^2\theta}\Big)^2 = -\Big(\frac{\cos\theta}{2\sin\theta}\Big)^2$$

かつ

$$\begin{aligned} 0 < \theta \leqq \frac{\pi}{2} &\implies b \leqq -\frac{1}{4} \\ \frac{\pi}{2} \leqq \theta < \pi &\implies b \geqq -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

を満たす。

注意. [18], (4) で $\theta \neq \frac{\pi}{2}$ であれば，点 $\mathrm{P}(a,b)$ は双曲線の半分の上を動く。$\theta = \frac{\pi}{2}$ であれば，点 $\mathrm{P}(a,b)$ は直線 $y = -\frac{1}{4}$ の上を動く。

[19] 略

[20] 略

微分積分 1

問題 1. 次の関数の導関数を計算せよ。

(1) $f(x) = e^x \cos x$

(2) $f(x) = e^x \sin x$

(3) $f(x) = x \log x - x$

(4) $f(x) = \log |5x|$

(5) $f(x) = \log |\cos x|$

(6) $f(x) = \log |\sin x|$

(7) $f(x) = \dfrac{\sin x}{1 + \cos x}$

(8) $f(x) = x^{3x}$

(9) $f(x) = \sin^{-1} \dfrac{x}{3}$

(10) $f(x) = \cos^{-1} \dfrac{x}{5}$

(11) $f(x) = \tan^{-1} \dfrac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$

問題 2. 次の関数の不定積分を計算せよ。

(1) $\displaystyle\int xe^x \, dx$

(2) $\displaystyle\int x \log x \, dx$

(3) $\displaystyle\int \frac{\sin x}{1 + \cos x} \, dx$

(4) $\displaystyle\int \frac{x - 1}{x^3 + x} \, dx$

(5) $\displaystyle\int \cos^{-1} x \, dx$

(6) $\displaystyle\int \frac{1}{\cos x} \, dx$

(7) $\displaystyle\int \frac{1}{1 + \cos x} \, dx$

(8) $\displaystyle\int \frac{1}{1 + \sin x + \cos x} \, dx$

問題 3. a を定数とする。座標平面上のふたつの放物線 $\ell_1 : y = x^2$ と $\ell_2 : y = -(x - a)^2 + a + \dfrac{3}{2}$ が異なる 2 点で交わる。次の各問に答えよ。

(1) a が満たす条件を求めよ。

(2) 放物線 ℓ_1, ℓ_2 が囲む図形の面積 S を a で表せ。

(3) S の最大値を求めよ。また，そのときの a の値を求めよ。

問題 4. 正の整数 n と変数 x に対して

$$I_n(x) = \int_0^x \frac{dt}{(1 + t^2)^n}$$

とおく。次の各問に答えよ。

(1) $I_1(x)$ を計算せよ。

(2) $n \geqq 2$ のとき $I_n(x)$ と $I_{n-1}(x)$ の関係式を求めよ。

線形代数

問題 1. 次の行列 A の正則性を判定し、正則ならば逆行列 A^{-1} を求めよ。

(1) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ (2) $A = \begin{bmatrix} 7 & 4 & 1 \\ 8 & 5 & 2 \\ 9 & 6 & 3 \end{bmatrix}$

(3) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ -3 & -5 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ (4) $A = \begin{bmatrix} -3 & -1 & 1 & -1 \\ -3 & -1 & 0 & 1 \\ -4 & -1 & 1 & 0 \\ -10 & -3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

問題 2. 次の連立 1 次方程式を解け。

(1) $\begin{cases} -10x_1 + 2x_2 + 7x_3 = 1 \\ 7x_1 - x_2 - 5x_3 = 2 \\ -x_1 + x_3 = 3 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 2 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} 5x_1 + 24x_2 + 7x_3 + 22x_4 = 36 \\ 2x_1 + 25x_2 + 5x_3 + 11x_4 = 32 \\ x_1 + 9x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 12 \end{cases}$

問題 3. 線形写像 $f : X \to Y,\ g : Y \to Z$ に対して

(1) $g \circ f : X \to Z$ は線形写像となることを示せ。

(2) f が同形であれば、逆写像 $f^{-1} : Y \to X$ が存在して f^{-1} も同形となることを示せ。

問題 4. 次の行列 A が対角化可能であるかないかを判定し、可能な場合は対角化せよ。

(1) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & 5 \end{bmatrix}$ (2) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 1 \\ 2 & -4 & 0 \end{bmatrix}$

微分方程式

問題 1. 次の微分方程式を解け。

(1) $xy' = y^2$　(2) $2xy' = y^2 - 1$

(3) $y''' - 7y' + 6y = 0$　(4) $y''' - 3y' + 2y = 0$

(5) $y''' - 6y'' + 12y' - 8y = 0$　(6) $y''' - y'' + 2y = 0$

(7) $y'''' - 4y''' + 6y'' - 4y' + y = 0$

(8) $y'''' - 2y'' + y = 0$

(9) $xy' = 2y - y^2$　(10) $y' + y = \sin x$

(11) $y'' + y' - 2y = e^{-x}$　(12) $y'' - 2y' + 2y = 2e^x \cos x$

(13) $y'' + 4y + 4y = \frac{e^{-2x}}{x}$

(14) $xyy' - x^2 - y^2 = 0$　(15) $xy' + y - y^2 \log x = 0$

(16) $\dfrac{dy}{dt} = t(y^2 - 1)$　(17) $\dfrac{dy}{dt} - 3y = t^2 e^{4t}$

(18) $\dfrac{d^2y}{dt^2} - 4\dfrac{dy}{dt} + 5y = 8$　(19) $\dfrac{d^2y}{dt^2} - 4\dfrac{dy}{dt} + 4y = e^{2t} \cos t$

問題 2. 次の各問に答えよ。

(1) 関数 $y = x$ が微分方程式 $x^2y'' + xy' - y = 0$ の解であることを確かめよ。

(2) $x^2y'' + xy' - y = 0$ を解け。

(3) $x^2y'' + xy' - y = 3x^2$ を解け。

問題 3. 次の各問に答えよ。

(1) 関数 $y = x,\ y = e^x$ が微分方程式 $(x-1)y'' - xy' + y = 0$ の解であることを確かめよ。

(2) $(x-1)y'' - xy' + y = (x-1)^2$ を解け。

微分積分 2

問題 1. 曲面 $z = 2x^2 - xy + y^3$ の点 $(x, y) = (2, 1)$ における接平面の方程式を求めよ。

問題 2. $f(x, y) = e^x + \sin y,\ \ x(u, v) = uv + u,\ \ y(u, v) = uv$ であるとき

(1) 偏導関数 f_x, f_y を求めよ。

(2) ヤコビ行列 $\begin{bmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{bmatrix}$ を求めよ。

(3) 合成関数 $z = f(x(u, v), y(u, v))$ の u, v に関する偏導関数 z_u, z_v を u, v で表せ。

問題 3. (1) 関数 $f(x, y) = 2x^2 - 2xy + y^2 - y$ の極値をすべて求めよ。

(2) 関数 $f(x, y) = 3x^2 - 6xy - y^3 - 6x + 6y + 3$ の極値をすべて求めよ。

問題 4. 関数 $f(x, y) = x + y$ に対して

(1) $D_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$ における極値をすべて求めよ。

(2) $D_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ における極値をすべて求めよ。

(3) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leqq 1\}$ における最大値、最小値とそのときの (x, y) を求めよ。

問題 5. 次の 2 重積分の値を求めよ。

(1) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ x + y \leqq \frac{\pi}{2}\}$ のとき

$$\iint_D \sin(x + y)\ dxdy$$

(2) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ x + y \leqq \pi\}$ のとき

$$\iint_D \sin(x + y)\ dxdy$$

(3) D を xy 平面上の 3 点 $(0, 0)$, $(1, 1)$, $(2, 0)$ を結ぶ三角形の周及び内部のとき

$$\iint_D (x + 2y)\ dxdy$$

(4) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ x^2 + y^2 \leqq 4\}$ のとき

$$\iint_D 2e^{x^2+y^2}\ dxdy$$

(5) $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0\leqq x+y\leqq 3,\ 0\leqq x-y\leqq 2\}$ のとき

$$\iint_D (x+y)^2(x-y)\ dxdy$$

問題 6. V を正の定数とする。体積が V である直方体で表面積が最小となるものを求めよ。

問題 7. 半径 a の球の体積が $\dfrac{4}{3}\pi a^3$ であることを 2 重積分を用いて証明せよ。

参考問題

小問

(1) 式 $\log_2\sqrt{27}-\log_4 48-\log_8 216$ の値を求めよ。

(2) 正の定数 a に対して，式 $\sqrt{a^3}\times\sqrt[3]{a^2}\div\sqrt[6]{a}$ を簡単にせよ。

(3)

(4)

大問

II $\triangle$ABC において $a=\mathrm{BC}$ とおく。次の各問に答えよ。

(1) 頂点 A から直線 BC におろした垂線と BC との交点を H とする。$x=\mathrm{BH}$ とおくとき，$\tan B$, $\tan C$ を a, x, AH で表せ。

(2) x, AH を a, $\tan B$, $\tan C$ で表せ。

(3) $\triangle$ABC の面積を a, $\tan B$, $\tan C$ で表せ。

問題集、quest ; 2012 年 3 月 11 日版