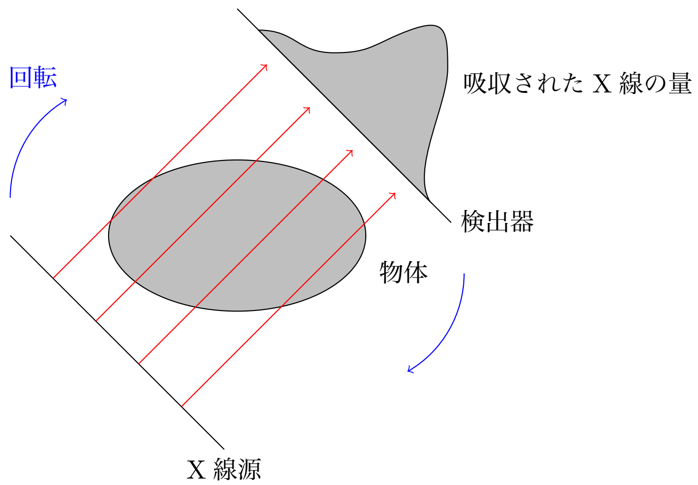
12　フーリエ変換の応用３：ラドン変換とトモグラフィー

12.1　CT の原理

この節では，フーリエ変換の応用の一例として，CT スキャンの理論について簡単に説明する．

いま下図のように，平面上に物体があり，物体の横の X 線源から X 線を照射し，物体をはさんで反対側にある検出器で X 線を受け取る．



検出器には，物体に吸収され減衰した X 線が届き，減衰係数（関数）$f = f(x)$ の直線に沿った積分量

$$\int_L f(x)ds$$

が観測される（L は一つの X 線に沿った積分路）．

いま，X 線源と検出器を物体の周りで回転させて，全ての方向からの減衰係数 f の積分値が分かったとする．このとき，得られた積分値の情報から，もとの関数 $f(x)$，すなわち物体の内部の状態が分かるか，という問題を考える．

この問題に対して，Radon は 1917 年に次の定理を示した．

定理 12.1. ２次元の関数の任意の点の値は，その点を通る全ての方向の直線に沿うその関数の積分値から一意的に定まる．

この結果をもとに，Cormack (1963,1964) によって CT の理論的な土台が築かれ，さらに Hounsfield (1972) らによって CT の装置が開発された．この業績により Cormack と Hounsfield は 1979 年にノーベル生理学・医学賞を受賞している．

12.2　Radon の定理

ここでは上の Radon による結果を３次元の場合に（簡単のため）説明する．始めにいくつか記号を導入する．３次元空間の点 $x \in \mathbb{R}^3$ を $x = (x_1, x_2, x_3)$ のように表す．３次元空間 $\mathbb{R}^3$ の単位球面を $\mathbb{S}^2$ と表す．すな

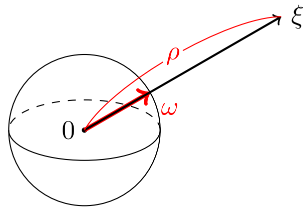
わち，

$$\mathbb{S}^2 = \left\{ \omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2 = 1 \right\}.$$

このとき，空間 $\mathbb{R}^3$ の点 $\xi \in \mathbb{R}^3$ は $\rho \geq 0$（半径）と $\omega \in \mathbb{S}^2$（方向）を用いて

$$\xi = \rho\omega$$

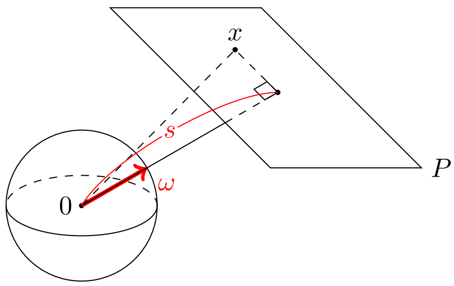
と表される（極座標）．



また空間内の平面 P は，$s \in \mathbb{R}$（原点との距離）と $\omega \in \mathbb{S}^2$（方向）を用いて，

$$P = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x \cdot \omega = s \right\}$$

と表される．



また，関数 $f = f(x) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{C}$ に対し，3 次元フーリエ変換を

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^3} \int_{\mathbb{R}^3} f(x) e^{-ix\cdot\xi} dx$$

で定義する．ここで $x \cdot \xi$ は x と ξ の内積（$x \cdot \xi = x_1\xi_1 + x_2\xi_2 + x_3\xi_3$）である．3 次元のフーリエ変換に対しても，1 次元のときと同様の性質を持つことが証明できる．証明も 1 次元のときとほぼ同じであるので省略する．

さて，関数 $f = f(x) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ は C^∞ 級であり，ある $R > 0$ に対し $f(x) = 0$ $(|x| \geq R)$ を満たすと仮定する．このとき，

$$R[f](s, \omega) = \int_{x\cdot\omega=s} f(x) dS$$

を f のラドン変換という．ここで，上式の積分は $P = \{x \in \mathbb{R}^3 | x \cdot \omega = s\}$ で与えられる平面上の面積分である．

ここでは次の定理を示す．

定理 12.2. 関数 $f = f(x)$ は上述の仮定を満たすとする．このとき

$$f(x) = -\frac{1}{8\pi^2} \int_{\mathbb{S}^2} \left(\frac{d}{ds} \right)^2 R[f](x \cdot \omega, \omega) d\omega$$

が成立する．

上の定理は，$R[f](s,\omega)$ の値からもとの f を復元できることを意味している．

証明． まずフーリエの反転公式より，

$$f(x) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^3}\int_{\mathbb{R}^3}\hat{f}(\xi)e^{ix\cdot\xi}d\xi.$$

極座標変換 $\xi = \rho\omega$ を施すと，

$$f(x) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^3}\int_{\mathbb{S}^2}\int_0^\infty \hat{f}(\rho\omega)e^{i\rho(x\cdot\omega)}\rho^2 d\rho d\omega. \tag{12.1}$$

ここで，フーリエ変換の定義より，

$$\hat{f}(\rho\omega) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^3}\int_{\mathbb{R}^3} f(x)e^{-i\rho(x\cdot\omega)}dx.$$

変数変換 $x\cdot\omega = s$ を施すと，上式の右辺は

$$\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^3}\int_{\mathbb{R}^3} f(x)e^{-i\rho(x\cdot\omega)}dx = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^3}\int_{-\infty}^\infty\left(\int_{x\cdot\omega=s} f(x)dS\right)e^{-i\rho s}ds$$

と表される．よってラドン変換の定義より，

$$\hat{f}(\rho\omega) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^3}\int_{-\infty}^\infty R[f](s,\omega)e^{-i\rho s}ds$$

を得る．ここで，上式右辺は $(1/2\pi)R[f](s,\omega)$ の s 変数についての 1 次元フーリエ変換と見ることができる．そこでこの両辺を 1 次元フーリエ逆変換すると，

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^\infty \hat{f}(\rho\omega)e^{i\rho s}d\rho = \frac{1}{2\pi}R[f](s,\omega).$$

さらに s について 2 回微分すると，

$$\frac{1}{2\pi}\left(\frac{d}{ds}\right)^2 R[f](s,\omega) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^\infty \hat{f}(\rho\omega)e^{i\rho s}\rho^2 d\rho.$$

$s = x\cdot\omega$ とおくと，

$$\frac{1}{2\pi}\left(\frac{d}{ds}\right)^2 R[f](x\cdot\omega,\omega) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^\infty \hat{f}(\rho\omega)e^{i\rho(x\cdot\omega)}\rho^2 d\rho.$$

最後に，$\mathbb{S}^2$ 上で積分すると，

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{S}^2}\left(\frac{d}{ds}\right)^2 R[f](x\cdot\omega,\omega)d\omega &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{S}^2}\int_{-\infty}^\infty \hat{f}(\rho\omega)e^{i\rho(x\cdot\omega)}\rho^2 d\rho d\omega \\ &= -\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{S}^2}\int_0^\infty \hat{f}(\rho\omega)e^{i\rho(x\cdot\omega)}\rho^2 d\rho d\omega.\end{aligned}$$

ここで，最後の式変形では，積分範囲を $(-\infty,0)$ と $(0,\infty)$ に分けてから $(-\infty,0)$ の積分について $\rho\mapsto -\rho, \omega\mapsto -\omega$ と変数変換を行った．これと (12.1) より，

$$\begin{aligned}f(x) &= \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^3}\int_{\mathbb{S}^2}\int_0^\infty \hat{f}(\rho\omega)e^{i\rho(x\cdot\omega)}\rho^2 d\rho d\omega \\ &= -\frac{1}{8\pi^2}\int_{\mathbb{S}^2}\left(\frac{d}{ds}\right)^2 R[f](x\cdot\omega,\omega)d\omega\end{aligned}$$

を得る．これで示された． □