球面を切らずに裏返す方法

中学 3 年 2 組　藤村悠太朗

0　はじめに

本日は数学研究部にお越しいただきありがとうございます。この記事では、タイトルの通り**球面に穴を開けないで裏返す方法**について考えていきます。内容自体はそこまで難しくないので、どんな方でも気楽に読んでいただけるかと思います。(図形に弱い方は若干苦戦するかもしれませんが、それでも簡単です。)

僕にとっては初めての部誌と TEX で、読みづらいところ、表現がわかりにくいところが多々あると思いますが、了承願えたらなと思います。

また、図の一部が手書きで非常に見辛いものになっています。申し訳ありません。

1　ルールの説明

今回裏返す球は次に上げる性質を持った素材でできているとします。

1. 捻ったり、伸ばしたり、**お互いをすり抜けられる。**
2. 穴をあけたり、引き裂いたりすることはできない。
3. 折り目をつけるなどして、**尖った部分を作ってはならない**。

一見すると、ルール 1 のおかげで目的は簡単に達成出来そうですが、単純に球面を自己交差させるだけでは、図 1[*1]のように真ん中の輪っかを解消できないので、ルールに反します。

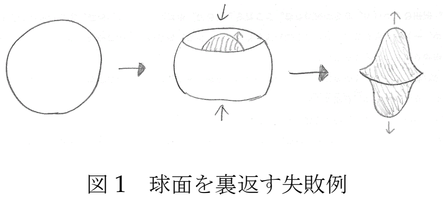

図 1　球面を裏返す失敗例

[*1] 図の斜線部は球面の裏面を表しています。この後も、図に斜線があれば、その部分が裏面だと考えてください。

このように、ルール 3 のおかげで簡単には球面を裏返すことはできません。

いきなり球面について考えるのは難しいので、まず、同様のルールで円（カーブ）について考えます。

2 回転数

円を都合上、図 2 のような輪ゴムのような立体で考えていきます。

まず、変化させたいカーブについて、ルールに則ってカーブを変形させたときに不変な量（不変量）について考えます。

今、図 2 の上にミニカーが乗っていて、ミニカーがこの図形上をまっすぐ同じ方向に走って元の所に戻ってくる、とします。このとき、ミニカーずっと左回りでちょうど 1 回転しています。[2] このミニカーが回転した数をその図形の**回転数** *(Turning Number)*[3] といい、これは必ず

図 2　輪ゴム

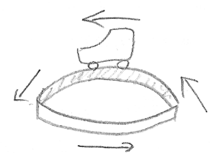

図 3　輪ゴムの上のミニカー

整数になります[4]。

この回転数が今探している不変量なのですが、今からそれを簡単に確かめてみましょう。図 4 のような複雑な形を考えてみようと思います。まずはこれの回転数を求めるのですが、先程のようにいちいちミニカーの向きを考えるのは面倒なので、このような（カーブに垂直な壁を立てたような）形の回転数を求め方がたくさんあるのでその中の 1 つを紹介しましょう。[5]

■回転数の簡単な求め方

図 4 でミニカーが左回りに進むときに、決まった方向に進む場所を見つけます。ここでは決まった方向をここでは右として、ミニカーが右に進んでいるところに印をつけてみたのが図 6 です。ちなみに、図 6 を見ればわかると思いますが、“右に進む場所”=“裏面[6]の見えていると

[2] 図 3 のミニカーの向きを表す矢印がちょうど 1 回転していることからわかると思います。

[3] 実はこの回転数、なかなか凄いやつで応用すれば代数学の基本定理なんかも証明できるらしいです。トポロジーを勉強すると詳しく学べるはずです。

[4] これのちゃんとした証明は省略します。とりあえずそうなんだな、と納得してください。

[5] もちろん、この立体の上を走るミニカーの向きを考えても回転数は求められます。

[6] 斜線の入った面

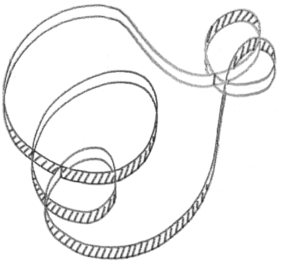

図 4　複雑な形

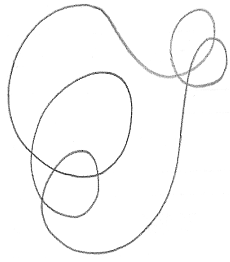

図 5　図 4 を上から見た図

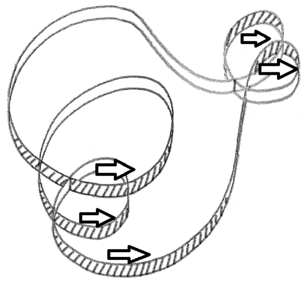

図 6　印をつけた図

ころ” となります。

この “右に進む場所” のうち、3 カ所はミニカーがこちら側から見て遠ざかるように曲がっていますが（∪字型の場所）、ここでミニカーが正の向きに 1 回転しているとします。逆に、2 カ所の∩字型の場所では負の向きに 1 回転しているとします。すると、図 4 の回転数は（∪字形の部分）－（∩字型の部分）= 3 − 2 = 1 となり、回転数は 1 だと分かります。

話を戻しましょう。図 4 の右端のループを 1 つずらしてみると（図 7)、∪字型と∩字型が打ち消されます。∪字型の部分、∩字型の部分どちらも 1 ずつ減るので回転数は変わりません。同様に、図 7 を逆にたどれば、∪字型の部分、∩字型の部分どちらも 1 ずつ増えて、回転数は変わらないことがわかります。

このように、∪字型と∩字型は必ずセットになっていて、変形しても、その差は変わりません。回転数は（∪字形の部分）－（∩字型の部分）で求まるので回転数も変わらない、と言えそうです。

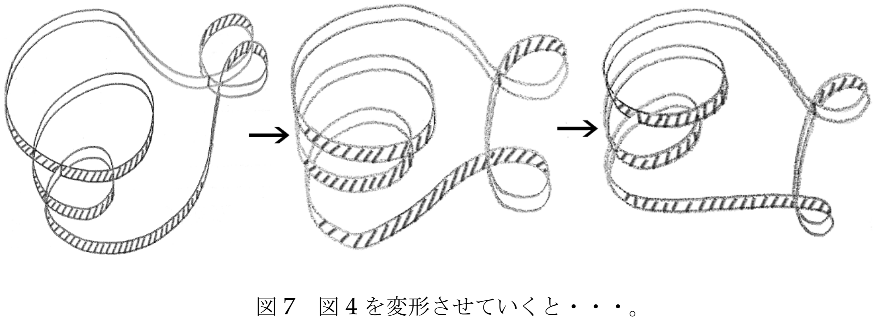

図 7　図 4 を変形させていくと・・・。

これで、回転数が不変量だというのがなんとなくわかっていただけたと思います。回転数が不変量ということは、図 2 と同じ回転数である図 4 は、変形させていけば図 2 と同じになることがわかります。

しかし、同じ回転数でも必ず図 7 のような変形を続けていけるのでしょうか。ここで、図 7 のような変形をもうすこし一般化することを考えてみたいと思います。

折り目をつけることを許していいとき、カーブを目的の形に変形させるには、単純に図 8[*7]のようにすればいいだけです。

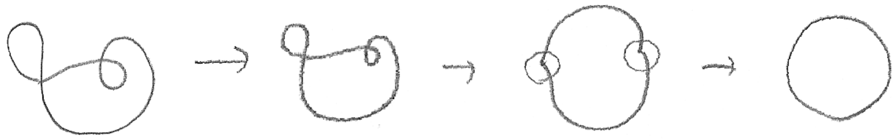

図 8

この方法は、変形させる図形と目的の形の回転数が同じならば、うまく利用できます。そのためには、図形に波を加えます。（図 9）これがどういうことかをこれから説明していきます。

回転数が 1 の図形（図 10）で考えます。変化をわかりやすくするため、カーブに小さな印をつけています。（図の太線部分）

図 9

図 10　太線部分が印

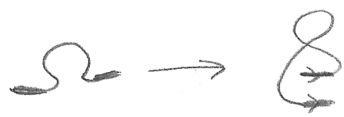

図 11

この印の間の部分に図 9 のように波を加えます。“波を加える” というのは、図 10 の印と印の間をふくらませるような感じです。このとき、図 11 のように、隣り合った印は、印同士が互いにおおよそ平行であれば、どんな風にも自由に動かせます。

これで、印を回転させずに、目的の位置までまっすぐ持ってくるように変形させていきます。オリジナルのカーブ[*8]は角を作りますが、こちらは波なのでずっとなめらかなままです。そして、印を目的の位置まで持ってきたら、あとは印を回転させて円上に並べれば完成です。印を回転させないようにしたのは、印を円上に並べるときに印同士をおおよそ平行に保つためです。この変形をまとめたものが、図 12 です。

[*7] ○印のところでどうしても角ができます。

[*8] 元々の波を付ける前のカーブ。同級生に校正を頼んだら、“オリジナルって何？” と聞かれたので一応。

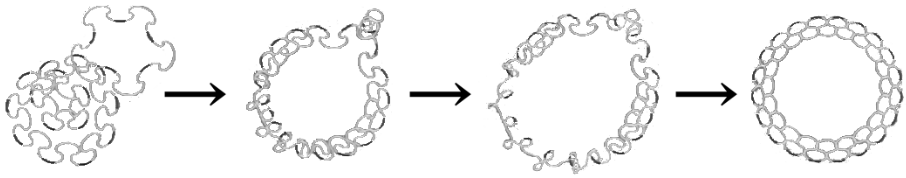

図 12　黒い部分が印

この方法を使うことで、同じ回転数の図形であれば、いちいち変形の仕方を考えなくても、常に変形が出来ます。これを *Whitney-Graustein* の定理と言います。

3　球を裏返そう

さて、長々と回転数の話を続けてきたわけですが、これが球を裏返すのにかなり関係します。

3.1　立体の回転数

そもそも、球は裏返せるのでしょうか。それを確かめるためには、球の回転数と球を裏返したときの回転数が同じであることを確かめればいいはずです。そのために立体の回転数について少し考えます。

図 13 のような一般的な（？）形で考えます。この形で、表側にあるすべての（地面に）水平な 1 点を考えます。その点をわかりやすくするため、水平なリングを描いておきます。（図 14）

図 13

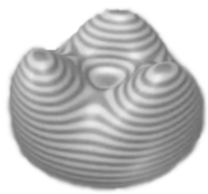

図 14

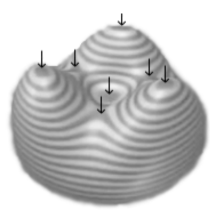

図 15

すると、先程の∪字型の部分にあたるボウル状にへこんだ部分と、∩字型にあたるドーム状にふくらんだ部分と、そのどちらでもない自転車のサドルのような部分があります。（図 15）ボウルとドームの周りはリングが、サドルには×が書かれているように見えます。

これらがどう影響しあうかですが、図 16 で、右側のドームを小さくしていくと、最後はサドルと打ち消しあいます。また、図 17 でも、ボウルを小さくしていくと、サドルと打ち消し

あいます。しかし、ボウルとドームはどうやっても打ち消しあいません。

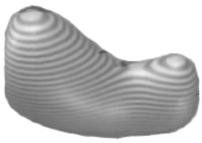

図 16　ドームとサドル

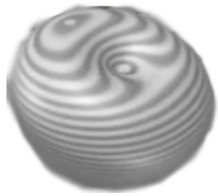

図 17　ボウルとサドル

なので、表面の回転数は、ドームとボウルの数を足してサドルの数を引いたもの、とできます。

このもとで球と球を裏返したものの回転数を求めると、どちらも 1 となり同じになる[*9]ので、球は裏返せると言えます。

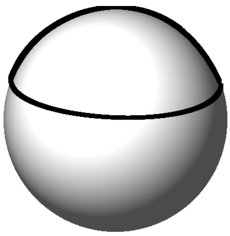

図 18　球（線で囲んだ部分がドーム）

図 19　球（裏）（線で囲んだ部分がボウル）

3.2　本題

さて、ようやく本題に入ります。カーブのときは、波をつけることで折り目がつくのを防いでいましたが、あれを球にも利用します。

球を、円の集合でできた筒に上下にフタをしたものだと考えます。球に波をつけるとすれば、筒に波をつけて、円の時のように、ベルト[*10]部分と波部分に分けて、最後に円筒にフタをすればいいことになります。

ここで一旦、上下のフタと 1 本のベルトに注目します。まず、上下のフタを互いに押し込み、上下を入れ替えます。完全に入れ替えて目的の位置まで持っていってしまうと、ベルトに折り目ができてしまうので、折り目が出来る前に止めます。すると、ベルトに輪っかができます。この輪っかをなんとかするために、上下のフタをねじります。あとは、ベルトを球の中心

[*9] 球はドームが 1 つで 1、球（裏）はボウルが 1 つで 1。
[*10] 円のとき印をつけてあった部分。見た目がベルトっぽいので便宜上ベルトと呼ぶことにします。

図 20　これにフタをする

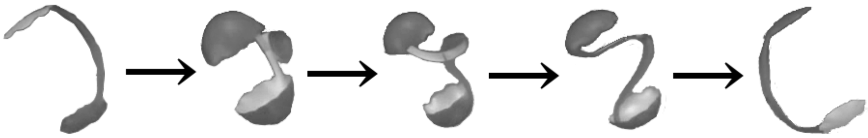

図 21　ベルトが 1 本の場合

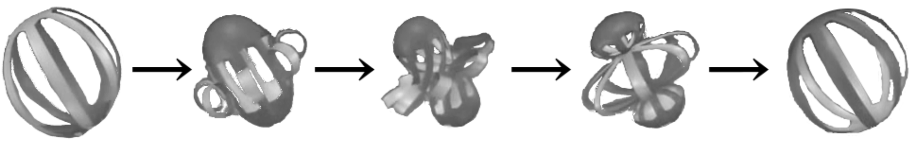

図 22　ベルトが全部の場合

を通るようにして、目的の位置に持ってくれば、とりあえず裏返せました。ここまでの経過は図 21 にあります。この方法なら、ベルトが複数でも尖った部分を作ることがありません。

この方法で全部のベルトを裏返します。その経過が図 22 です。

あとは波の部分ですが、ベルト間に折り目ができないように柔軟にする役割をもっているだけで、基本的にベルトの動きと同じです。

これで、球を裏返すための動きは完成しました。球を裏返すときのすべての経過は図 23 です。複雑なように見えますが、波をつけて、上下のフタを入れ替えて、ねじって、中心を通るようにして目的の位置に持ってくる、という 4Step だけです。

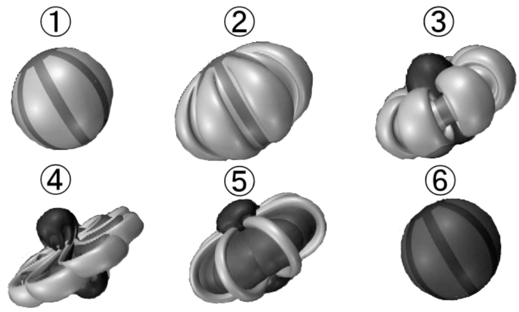

図 23　球を裏返す

4　後書き

どうだったでしょうか。証明した方がよさそうなことを飛ばしまくったり、図がむちゃくちゃだったり、数学の発表というより小学生の自由研究みたいでしたが、最後までお読みいただきありがとうございました。

参考にしたもの

1. “Outside in”- Google Video
   http://video.google.com/videoplay?docid=-6626464599825291409&hl=ja#
   大いに参考にさせていただきました。詳しく優しく解説しています。また、いかにも 3DCG っぽい図（図 11~ 図 21）はここからお借りしました。
2. 1. のスクリプトの日本語訳
   http://eigo.goo.ne.jp/goals/113245
3. TeX 関連サイト多数