割算の基本定理

n を負でない整数とするとき，定数 $a_n, a_{n-1}, \cdots, a_1, a_0$ と変数 x を用いて

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

の形に表わされる式を多項式（整式）という。

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \ \ (a_n \neq 0)$$

のとき $f(x)$ の次数は n であるといい $f(x)$ の次数を $\deg f(x)$ で表わす。また 各 a_k を k 次の係数と呼ぶ。係数がすべて 0 である多項式 0 多項式については，次数は定義できないが，任意の多項式 $f(x)$ に対して $\deg f(x) > \deg 0$ と約束する[注1]。

多項式の割り算に関する基本定理を証明する。

定理（多項式の割算の基本定理）

$f(x),\ g(x)$ は多項式で $g(x)$ は 0 多項式でないとする。このとき

$$f(x) = h(x)g(x) + r(x), \quad \deg g(x) > \deg r(x)$$

となる多項式 $h(x)$，$r(x)$ がただひと組存在する。
$h(x),\ r(x)$ をそれぞれ $f(x)$ を $g(x)$ で割った商，余りという。

存在と一意性に分けて証明する。

（ア）$h(x),\ r(x)$ の存在

$f(x)$ が 0 多項式のときは $0 = 0 \cdot g(x) + 0$ であり，0 多項式の次数は他のどの多項式の次数より小さいので $\deg g(x) > \deg 0$ である。従って $h(x) = 0,\ r(x) = 0$ とすればよい。

そこで以下 $f(x) \neq 0$ とする。

$\deg f(x)$ に関する数学的帰納法で示す。

(1) $\deg f(x) = 0$ のとき

$f(x) = a\ (\neq 0)$ とする。$f(x) = 0 \cdot g(x) + f(x)$ であるから $\deg g(x) \geqq 1$ のときは，$h(x) = 0,\ r(x) = f(x)$ とおくと $\deg g(x) > \deg r(x)$ で $f(x) = h(x) \cdot g(x) + r(x)$ となる。また $\deg g(x) = 0$ のときは，$g(x) = b\ (\neq 0)$ とすると，$a = (ab^{-1})b + 0$ であるから，$h(x) = ab^{-1},\ r(x) = 0$ とおくと $f(x) = h(x) \cdot g(x) + r(x)$ となる。そして $\deg g(x) > \deg r(x)$（0 多項式の次数は他のどんな多項式の次数よりも小さい）である。

[注1] $\deg 0 = -\infty$ と考えると便利である。

(2) $\deg f(x) = n-1$ のとき正しいと仮定して $\deg f(x) = n$ のとき考える。
$\deg g(x) > n$ のときは，$h(x) = 0$，$r(x) = f(x)$ とおくと

$$f(x) = h(x)g(x) + r(x), \quad \deg g(x) > \deg r(x)$$

なるので正しい。そこで $\deg g(x) \leqq n$ とする。

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \ \ (a_n \neq 0)$$
$$g(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0 \ \ (b_m \neq 0)$$

とおく（$n \geqq m$）。そうすると $f(x) - a_n b_m^{-1} x^{n-m} g(x)$ の n 次の係数は０となるので

$$\deg(f(x) - a_n b_m^{-1} x^{n-m} g(x)) \leqq n-1$$

である。よって帰納法の仮定から

$$\deg(f(x) - a_n b_m^{-1} x^{n-m} g(x)) = h_1(x)g(x) + r_1(x), \quad \deg g(x) > \deg r_1(x)$$

となる $h_1(x)$，$r_1(x)$ が存在する。そこで $h(x) = h_1(x) + a_n b_m^{-1} x^{n-m}$，$r(x) = r_1(x)$ とおくと

$$f(x) = h(x)g(x) + r(x), \quad \deg g(x) > \deg r(x)$$

となる。従って $\deg f(x) = n$ のときも正しくなり帰納法によって $h(x)$, $r(x)$ の存在が示された。

（イ）$h(x)$, $r(x)$ の一意性

$$f(x) = h_1(x)g(x) + r_1(x), \quad \deg g(x) > \deg r_1(x)$$
$$f(x) = h_2(x)g(x) + r_2(x), \quad \deg g(x) > \deg r_2(x)$$

とする。辺々引くと

$$(h_1(x) - h_2(x))g(x) = r_2(x) - r_1(x)$$

を得る。ここで $h_1(x) \neq h_2(x)$ とすると

$$\deg(\text{左辺}) = \deg(h_1(x) - h_2(x)) + \deg g(x) \geqq \deg g(x)$$

となる。一方 $\deg r_1(x) < \deg g(x)$，$\deg r_2(x) < \deg g(x)$ であるから

$$\deg(\text{右辺}) = \deg(r_2(x) - r_1(x)) < \deg g(x)$$

である。よって $\deg(\text{左辺}) > \deg(\text{右辺})$ となって矛盾である。従って $h_1(x) = h_2(x)$ である。そうすると，$r_1(x) = r_2(x)$ でもあるから結局

$$h_1(x) = h_2(x) \text{ かつ } r_1(x) = r_2(x)$$

となり一意性が示された。■