第1章　命題と論理

数学の厳密性や普遍性を支えているのが, 曖昧さを許さない言葉づかいと単純明快な論理である. まずは, 数学の記述で使われるものの言い方と論理展開の様式を整理しておこう. 数学の記述と言えども, 日常語を用いるので, 日常語のもつ曖昧さや語感に振り回されないことが重要である.

1.1　命題と論理演算

真であるか偽であるかが明確に定まる主張のことを**命題**という. つまり, 命題は必ず真か偽であり, 中間のグレーゾーンを許さない. この原理を**排中律**という. また, 一つの命題が同時に真でありかつ偽であることはない. これを**矛盾律**という. たとえば,「7 は素数である」や「円周率は 3 より小さい」という主張は命題であり, 前者は真であり, 後者は偽である. 双子素数は無数に存在するかと問われたとき, その答は無数に存在するか, 有限個で尽きるかのいずれかである.[1] したがって,「双子素数は無数に存在する」という主張は命題である. 一方で,「円周率は 3 に近い」という主張は, 述べ方が曖昧で真偽を明確にできないので命題ではない. 以下では, 命題を $P, Q, \ldots$ のような大文字で表す.

■ 論理演算 与えられた命題を論理演算によって結合して**複合命題**が作られる. 最も基本的な論理演算は次の 4 つである.

(1) 否定 $\neg P$ 「P でない」と読む. $\neg P$ は, P が成り立たないときに真, P が成り立つときに偽となる命題を表す.

(2) 論理和 $P \vee Q$ 「P または Q」と読む. $P \vee Q$ は, P が成り立つか, Q が成り立つか, あるいは両方が成り立つときに真となる命題を表す.

[1] $\{3,5\}$ や $\{11,13\}$ のように, 差が 2 となる素数の組を双子素数という. 双子素数は無数に存在すると予想されているが, 現時点では未解決である.

(3) 論理積 $P \wedge Q$ 「P かつ Q」と読む．$P \wedge Q$ は, P と Q 両方が同時に成り立つときに真となる命題を表す．

(4) 含意 $P \to Q$ 「P ならば Q」と読む．$P \to Q$ は, P が偽または Q が真であるときに真となる命題を表す．ここで, P を**前件**または仮定, Q を**後件**または結論という.[2)]

■ **真理値**　命題に対して, それが真ならば 1, 偽ならば 0 を対応させて, 命題の**真理値** (または**真偽値**) という.[3)] 排中律と矛盾律によって, すべての命題の真理値は 0 または 1 のいずれかに定まる．複合命題の真偽を場合分けして一覧にしたものを**真理値表** (または**真偽値表**) という．4 つの基本的な複合命題の真理値表は次のとおりであり, これによって論理演算が定義されている.

P	$\neg P$
1	0
0	1

P	Q	$P \vee Q$	$P \wedge Q$	$P \to Q$
1	1	1	1	1
1	0	1	0	0
0	1	1	0	1
0	0	0	0	1

(1.1)

日常語の「P または Q」は, 文脈によっては「P または Q のどちらか一方だけ」を意味することがあるが, 論理和 $P \vee Q$ にそのような意味はない．命題 P, Q に対して, P または Q のどちらか一方だけが真のときに真となる命題は**排他的論理和**と呼ばれ, $P \oplus Q$ で表される (問 1.1).

■ **含意**　含意 $P \to Q$ は「P ならば Q」と読むので, P を原因や根拠, Q を結果とする因果関係が感じられるだろうが, そのような解釈は論理の世界から切り離しておこう．論理演算としての含意 $P \to Q$ は, 真理値表 (1.1) に示したように, 2 つの命題 P, Q を結合する規則を与えているだけなのである.

例 1.1　次の 4 つの命題の真偽を考えてみよう.[4)]

(1) 円周率が 3 より大きいならば, 5 は素数である.

(2) 円周率が 3 より大きいならば, 6 は素数である.

[2)] 文献によっては, $P \Rightarrow Q$ あるいは $P \supset Q$ とも書くが, 後者は集合の包含関係と紛らわしい．本書では, $P \to Q$ が恒真命題であるときに $P \Rightarrow Q$ と書く (後出).

[3)] 数値 $1, 0$ の代わりに T (true), F (false) を用いることもある.

[4)] この例は, 中島「集合・写像・論理」(共立出版, 2012) から取った．この本では, 日常の言葉づかいと比較しながら数学の論理を丁寧に解説している．面白い例もたくさん収められている.

(3) 円周率が 3 より小さいならば, 5 は素数である.

(4) 円周率が 3 より小さいならば, 6 は素数である.

(1), (3), (4) が真, (2) が偽である. (3) と (4) では前件「円周率が 3 より小さい」が偽であるから, 後件の真偽にかかわらず, その命題は真となる. 特に, (4) では「円周率が 3 より小さい」も「6 は素数である」も誤りなのに, 「円周率が 3 より小さいならば, 6 は素数である」は真となることに違和感があるかも知れない. 一方, (1) が真であるのは, 前件「円周率が 3 より大きい」も後件「5 は素数である」も真であるから当然であるが, 多少の不審感を抱くかも知れない. つまり, 「円周率が 3 より大きい」ことが根拠となって, なにか深い理由があって「5 が素数である」ことが導かれるというニュアンスが感じられる. 既に注意したように, 論理の世界に日常語の語感は無用である. 単に 2 つの命題 P, Q から複合命題 $P \to Q$ が作られて, それが真偽の対象になるというだけのことだと割り切るのがよいだろう.

論理の世界は別とは言ったが, 日常的な例で含意 $P \to Q$ を再考するのも悪くない. 教授が「授業に出席したら単位を与える」と発言したとする. このとき, 教授が嘘つきだと責められるのはどういう場合だろうか. それは, 授業に出席したのに単位がもらえなかった時だけである. 授業に出席しなかった場合は, 単位がもらえても (ラッキー), もらえなくても (当然), 教授を責めることはできない. 「授業に出席する」を P,「単位を与える」を Q とすれば, 教授の約束は $P \to Q$ となる. 授業に出席しなかった者に対しては, 単位を与えても与えなくとも教授は約束を守っているのである. これは P が偽であれば, Q の真偽によらず $P \to Q$ を真とする含意の定義と同じだと納得できるだろう. 別の例として, 「この大会で優勝しなければ引退する」という主張はどうか. 優勝して引退しても嘘つきではないのだが.

■ **恒真命題と矛盾命題**　命題 P に対して, 複合命題 $P \vee \neg P$ と $P \wedge \neg P$ の真理値表は次のようになる.

P	$\neg P$	$P \vee \neg P$
1	0	1
0	1	1

P	$\neg P$	$P \wedge \neg P$
1	0	0
0	1	0

(1.2)

$P \vee \neg P$ のように, 真理値がすべて 1 になる命題を**恒真命題**または**トートロジー**という. 一方, $P \wedge \neg P$ のように, 真理値がすべて 0 になるものを**矛盾命

題という．一般に, 矛盾命題を否定すると恒真命題になり, 恒真命題を否定すると矛盾命題になる．

なお, 論理演算では, 1 項演算 $\neg$ が 2 項演算 $\vee, \wedge, \rightarrow$ より優先される．したがって, $P \vee \neg P$ をことさら $P \vee (\neg P)$ のように書く必要はない．

例 1.2 $(P \rightarrow Q) \vee (Q \rightarrow P)$ は恒真命題である．真理値表を作ってみよう．

P	Q	$P \rightarrow Q$	$Q \rightarrow P$	$(P \rightarrow Q) \vee (Q \rightarrow P)$
1	1	1	1	1
1	0	0	1	1
0	1	1	0	1
0	0	1	1	1

確かに, $(P \rightarrow Q) \vee (Q \rightarrow P)$ の真理値はすべて 1 である．したがって, 2 つの命題 P, Q に対して, それらの真偽によらずに, 「P ならば Q」または「Q ならば P」が必ず成り立つ．このことは, 「ならば」に因果関係を重ねる日常の語感とは相容れないだろうが, 論理演算の帰結なのである．

定 理 1.3 (肯定法) $((P \rightarrow Q) \wedge P) \rightarrow Q$ は恒真命題である．

証 明 関連する命題に関して真理値表を作ると次の通り．

P	Q	$P \rightarrow Q$	$(P \rightarrow Q) \wedge P$	$((P \rightarrow Q) \wedge P) \rightarrow Q$
1	1	1	1	1
1	0	0	0	1
0	1	1	0	1
0	0	1	0	1

(1.3)

確かに, $((P \rightarrow Q) \wedge P) \rightarrow Q$ の真理値がすべて 1 となっている． ∎

問 1.1 命題 P, Q, R, S, U の真理値表が次のように与えられているとき, R, S, U を P, Q と論理演算 $\neg, \vee, \wedge$ を用いて表せ．

P	Q	R	S	U
1	1	0	0	0
1	0	1	0	1
0	1	0	1	1
0	0	0	0	0

上の U は, P または Q のどちらか一方だけが真のときに真となる命題, すなわち, P, Q の排他的論理和である.

問 1.2 (多数決命題) 3 つの命題 P, Q, R のうち少なくとも 2 つが真であるときに真となる命題は

$$(P \wedge Q) \vee (Q \wedge R) \vee (R \wedge P)$$

で与えられることを示せ.

■ **同値** 2 つの命題 P, Q の真偽がつねに一致するとき, P と Q は同値であるといい, $P \equiv Q$ と書く.

定 理 1.4 2 つの命題 P, Q に対して次が成り立つ.

$$P \to Q \equiv \neg P \vee Q. \tag{1.4}$$

証 明 実際, 真理値表は次のようになる.

P	Q	$P \to Q$	$\neg P$	$\neg P \vee Q$
1	1	1	0	1
1	0	0	0	0
0	1	1	1	1
0	0	1	1	1

確かに, $P \to Q$ と $\neg P \vee Q$ の真理値が一致しているので, それらは同値である. ■

定理 1.4 は, 含意 $P \to Q$ を複合命題 $\neg P \vee Q$ によって定義してよいことを示している. 実は, 本節の冒頭で基本的な論理演算として $\neg, \vee, \wedge, \to$ を導入したが, 複合命題の記述にあたってこの 4 つが必須というわけではなく, 使用する論理演算の種類を減らすことができる (問 1.4, 1.5 を参照). 上手に論理演算を選んで, わかやすい記述をするのがよい.

定 理 1.5 命題 P に対して,

$$P \to P \equiv \neg P \vee P \tag{1.5}$$

が成り立つ. 特に, $P \to P$ は恒真命題である.

証 明　(1.4) において $Q = P$ とおいたものが (1.5) である. (1.2) で示したように, $\neg P \vee P$ は恒真命題であるから, $P \to P$ もそうである. ■

■ **双条件文**　命題 P, Q に対して $(P \to Q) \wedge (Q \to P)$ を $P \leftrightarrow Q$ と書いて,「P のとき, そのときに限って Q」と読む. 定義によって, $P \leftrightarrow Q$ は P, Q の真偽が一致するときに真, そうでないときに偽となる. 双条件文 $P \leftrightarrow Q$ を「P と Q は同値である」と読ませることもあるが, 直前に定義した同値と紛らわしい. 実際, 2 つの命題 P, Q が同値 $P \equiv Q$ であることは, $P \leftrightarrow Q$ が恒真命題であることを意味する.

問 1.3 2 つの命題 P, Q に対して,

$$P \wedge (P \to Q) \equiv P \wedge Q$$

であることを真理値表を用いて示せ.

■ **逆・裏・対偶**　含意 $P \to Q$ に対して, $Q \to P$ を**逆**, $\neg P \to \neg Q$ を**裏**, $\neg Q \to \neg P$ を**対偶**という. これら 4 つの命題の相互関係は次の図の通りである.

$$\begin{tikzcd} P \to Q \arrow[rr, dash, "\text{逆}"] \arrow[d, dash, "\text{裏}"'] \arrow[drr, dash] & & Q \to P \arrow[d, dash, "\text{裏}"] \arrow[dll, dash, "\text{対偶}"] \\ \neg P \to \neg Q \arrow[rr, dash, "\text{逆}"'] & & \neg Q \to \neg P \end{tikzcd}$$

定 理 1.6 2 つの命題 P, Q に対して, $(P \to Q) \equiv (\neg Q \to \neg P)$ が成り立つ.

証 明　真理値表を作ってみよう.

P	Q	$P \to Q$	$\neg P$	$\neg Q$	$\neg Q \to \neg P$
1	1	1	0	0	1
1	0	0	0	1	0
0	1	1	1	0	1
0	0	1	1	1	1

確かに, $P \to Q$ と $\neg Q \to \neg P$ の真理値はすべて一致しているから, それらは同値である. ∎

■ **命題変数と命題定数** つねに真である特別な命題 T とつねに偽である特別な命題 F を導入すると便利である.[5] 言い換えると, T の真理値はつねに 1 であり, F の真理値はつねに 0 である. これらを**命題定数**という. これに対して, ふつうの命題 P は 2 つの真理値をとるので**命題変数**という.

命題定数を用いると, 真理値表 (1.2) は,

$$P \vee \neg P \equiv T, \qquad P \wedge \neg P \equiv F$$

のような式にまとめられる. 前者が排中律, 後者が矛盾律である.

1.2 論理演算の基本法則

定 理 1.7 (交換法則) 命題 P, Q に対して次が成り立つ.

$$P \vee Q \equiv Q \vee P, \qquad P \wedge Q \equiv Q \wedge P.$$

証 明 $P \vee Q$ の真理値表 (1.1) を見れば, P と Q を入れ替えても真理値が変わらないことがすぐわかり, $P \vee Q \equiv Q \vee P$ が示される. $P \wedge Q \equiv Q \wedge P$ についても同様である. ∎

定 理 1.8 (べき等法則) 命題 P に対して次が成り立つ.

$$P \vee P \equiv P, \qquad P \wedge P \equiv P.$$

定 理 1.9 (対合律または二重否定の法則) 命題 P に対して次が成り立つ.

$$\neg\neg P \equiv P.$$

上の法則についても真理値表から証明は容易である. 日常の言葉づかいでは, 二重否定は微妙なニュアンスを帯びるが, すべての命題は真か偽であると割り切る数学の論理 (排中律) では, 微妙なニュアンスを許さない. 「好きでないこともない」はすなわち「好きである」ことになる.

[5] 文献によっては, T, F の代わりに $\top, \bot$ を用いる.

定 理 1.10 (結合法則) 命題 P, Q, R に対して次が成り立つ.

$$(P \vee Q) \vee R \equiv P \vee (Q \vee R), \qquad (P \wedge Q) \wedge R \equiv P \wedge (Q \wedge R).$$

証 明 ここでは, 最初の等式を示そう. 2 番目の等式も同様である. まず, 3 つの命題の真偽の組合せは 8 通りあるから, それらを列挙して, $(P \vee Q) \vee R$ と $P \vee (Q \vee R)$ の真理値を計算すると, 次のような表にまとめられる.

P	Q	R	$P \vee Q$	$(P \vee Q) \vee R$	$Q \vee R$	$P \vee (Q \vee R)$
1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1
1	0	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	0	1
0	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1	1
0	0	1	0	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0

確かに, すべての場合で, $(P \vee Q) \vee R$ と $P \vee (Q \vee R)$ の真理値が一致するから, $(P \vee Q) \vee R \equiv P \vee (Q \vee R)$ が成り立つ. ∎

結合法則によって, 3 つの命題 P, Q, R の論理和や論理積は単に,

$$P \vee Q \vee R, \qquad P \wedge Q \wedge R,$$

と書いてよい. 前者は 2 つの論理和, 後者は 2 つの論理積を含み, どちらを先にとるかに任意性があるが, 結果は同じになるからである. 多数の命題の論理和や論理積でも同様である.

次に, $\vee$ と $\wedge$ の組合せに関する法則を述べる.

定 理 1.11 (吸収法則) 命題 P, Q に対して次が成り立つ.

$$P \vee (P \wedge Q) \equiv P, \qquad P \wedge (P \vee Q) \equiv P.$$

定 理 1.12 (分配法則) 命題 P, Q, R に対して次が成り立つ.

$$P \vee (Q \wedge R) \equiv (P \vee Q) \wedge (P \vee R),$$
$$P \wedge (Q \vee R) \equiv (P \wedge Q) \vee (P \wedge R).$$

証 明　議論は同様であるから, 最初の式だけ証明してみよう. P, Q, R の真理値の取り方 8 通りのそれぞれについて, $P \vee (Q \wedge R)$ と $(P \vee Q) \wedge (P \vee R)$ の真理値を定義に基づいて計算すると, 結果は次の表にまとめられる.

P	Q	R	$Q \wedge R$	$P \vee (Q \wedge R)$	$P \vee Q$	$P \vee R$	$(P \vee Q) \wedge (P \vee R)$
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	1	0	0
0	0	1	0	0	0	1	0
0	0	0	0	0	0	0	0

すべての場合で, $P \vee (Q \wedge R)$ と $(P \vee Q) \wedge (P \vee R)$ の真理値はすべて一致しているから, $P \vee (Q \wedge R) \equiv (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$ が成り立つ. ∎

定 理 1.13 (ド・モルガンの法則)　命題 P, Q に対して次が成り立つ.

$$\neg(P \vee Q) \equiv \neg P \wedge \neg Q, \qquad \neg(P \wedge Q) \equiv \neg P \vee \neg Q.$$

証 明　証明は真理値表を用いればよい. ∎

定 理 1.14 (恒真命題の性質)　恒真命題を T とすれば, 任意の命題 Q に対して,

$$T \vee Q \equiv T, \qquad T \wedge Q \equiv Q$$

が成り立つ. したがって, 2 つの命題 P, Q に対して次が成り立つ.

$$(P \vee \neg P) \vee Q \equiv P \vee \neg P, \qquad (P \vee \neg P) \wedge Q \equiv Q.$$

証 明　真理値表を作ってみよう.

T	Q	$T \vee Q$	$T \wedge Q$
1	1	1	1
1	0	1	0

確かに, $T \vee Q$ と T の真偽はすべて一致しているので, $T \vee Q \equiv T$ が成り立つ. 同様に, $T \wedge Q$ と Q の真偽はすべて一致するので, $T \wedge Q \equiv T$ が成り立つ. ∎

定 理 1.15 (矛盾命題の性質) 矛盾命題を F とすれば, 任意の命題 Q に対して,

$$F \wedge Q \equiv F, \qquad F \vee Q \equiv Q$$

が成り立つ. したがって, 2 つの命題 P, Q に対して次が成り立つ.

$$(P \wedge \neg P) \wedge Q \equiv P \wedge \neg P, \qquad (P \wedge \neg P) \vee Q \equiv Q.$$

証 明 定理 1.14 の証明と同様である. ∎

例 1.16 (問 1.2 参照) $P \wedge (P \to Q) \equiv P \wedge Q$ を論理演算を用いて証明することができる. 実際, 定理 1.4, 定理 1.12 (分配法則), 定理 1.15 を順次適用すると,

$$P \wedge (P \to Q) \equiv P \wedge (\neg P \vee Q) \equiv (P \wedge \neg P) \vee (P \wedge Q) \equiv P \wedge Q$$

が得られる.

例 1.17 (定理 1.3 参照) $((P \to Q) \wedge P) \to Q$ が恒真命題であることを論理演算を用いて示してみよう. 交換法則 (定理 1.7) と結合法則 (定理 1.10) は断りなく用いることにする. まず, 例 1.16 の結果から,

$$((P \to Q) \wedge P) \to Q \equiv (P \wedge Q) \to Q$$

となる. 右辺に定理 1.4 と定理 1.13 (ド・モルガンの法則) を適用すると,

$$\begin{aligned} ((P \to Q) \wedge P) \to Q &\equiv (\neg(P \wedge Q)) \vee Q \\ &\equiv (\neg P \vee \neg Q) \vee Q \\ &\equiv (Q \vee \neg Q) \vee \neg P \end{aligned}$$

となる. ここで, 定理 1.14 を適用すると, 最後の式は $Q \vee \neg Q$ となる. これは恒真命題であるから, $((P \to Q) \wedge P) \to Q$ もそうである.

問 1.4 論理演算 $P \wedge Q$, $P \to Q$, $P \leftrightarrow Q$ は, 否定 $\neg$ と論理和 $\vee$ の組み合わせで表されることを示せ.

問 1.5 論理演算 $P \wedge Q$, $P \vee Q$, $P \leftrightarrow Q$ は, 否定 $\neg$ と含意 $\to$ の組み合わせで表されることを示せ.

問 1.6 命題 P, Q, R に対して次を示せ.

(1) $(P \wedge Q) \to R \equiv P \to (Q \to R)$
(2) $(P \to Q) \wedge (\neg P \to R) \equiv (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge R)$

問 1.7 命題 P, Q に対して, 次の命題が恒真命題であることを示せ.

(1) $((P \to Q) \to P) \to P$
(2) $(P \to Q) \to (\neg Q \to \neg P)$

1.3 推　論

数学の証明では, 「命題 P が真である」という**仮定**から「命題 Q が真である」という**結論**を導く. 一般に, 仮定が真であれば結論も真になるような論証を**有効**な推論という. 以下では, 有効な推論の形式について述べる.

■ **肯定法** 2 つの命題 P, Q に対して含意 $P \to Q$ を思い出そう. その定義から, 2 つの命題 P と $P \to Q$ がともに真であれば, 命題 Q も真である. これを「P が真である」と「$P \to Q$ が真である」を仮定, 「Q が真である」を結論とする論証とみなせば, 有効な推論になる. これを肯定法といい, 形式的に次のように書く.

$$\begin{array}{ccc} P & \to & Q \\ P & & \\ \hline & & Q \end{array} \tag{1.6}$$

肯定法で述べていることは, 日常的にも全く常識的なことに過ぎないのだが, ここでは形式的な部分に着目している.

肯定法 (1.6) の有効性は,

$$((P \to Q) \wedge P) \to Q \tag{1.7}$$

が恒真命題であることと言い換えてよい. 実際, (1.7) の真理値表 (1.3) の 1 行目が, 肯定法の有効性に対応する. 一方, 真理値表の 2–4 行目は, 2 つの命題 $P \to Q$ と P のいずれか, または両方が偽である場合に対応する. この場合は, 前件 $(P \to Q) \wedge P$ が偽であるから, (1.7) は真になる. したがって, 肯定法 (1.6) の有効性から命題 (1.7) が恒真命題になることが従う. 逆は明らかなので, 肯定法 (1.6) が有効であることと命題 (1.7) が恒真命題であることは同等である.

■ **必要条件と十分条件** 命題 $P \to Q$ が真であるとき, P を Q であるための**十分条件**, あるいは Q を P であるための**必要条件**という. また, $P \leftrightarrow Q$ が真であるときは, P を Q であるための**必要十分条件**, または Q を P であるための必要十分条件, あるいは P と Q は同値な条件であるという.

本来, 含意 $P \to Q$ は 2 つの命題 P, Q から得られる複合命題を表しているに過ぎず, 「$P \to Q$ が真である」こととは区別すべきである. しかしながら, 文脈から明らかであったり, 冗長な言い方を避ける習慣から, 単に「$P \to Q$」と書いて「$P \to Q$ が真である」という意味を含ませることも多い. また, 論理学をテーマとしていない多くの数学書では, $\to$ を別の意味 (写像や極限など) に用いるため, $P \to Q$ の代わりに $P \Rightarrow Q$ のように書いて, 大概の文脈では「$P \to Q$ が真である」ことを意味する. したがって,「$P \Rightarrow Q$」は, P を根拠とした Q の証明, あるいは, P が Q であるための十分条件であること (同じことだが, Q が P であるための必要条件であること) の略記として多用される. 同様に, $P \leftrightarrow Q$ の代わりに $P \Leftrightarrow Q$ と書いて, P と Q が同値な条件であることを意味する.

数学は,「$P \to Q$ が真である」という形の議論を積み重ねてできている. 「命題 P が真である」ことが既知であれば, 「$P \to Q$ が真である」ことを示すことで「Q が真である」ことの証明になる. 「命題 P が真である」ことが未知のときは, 「$P \to Q$ が真である」ことを示すことで「命題 Q が真である」ことの証明が「命題 P が真である」ことの証明に帰着される.

■ **否定法** 次の推論は有効である.

$$\begin{array}{ccc} P & \to & Q \\ \neg Q & & \\ \hline & & \neg P \end{array}$$

実際, $((P \to Q) \land \neg Q) \to \neg P$ が恒真命題になる.

■ **三段論法** 次の推論は有効である.

$$\begin{array}{ccc} P & \to & Q \\ Q & \to & R \\ \hline P & \to & R \end{array}$$

実際, $((P \to Q) \land (Q \to R)) \to (P \to R)$ が恒真命題になる.

問 1.8 命題 P, Q, R に対して, 次の命題が恒真命題であることを示せ.

(1) [否定法] $((P \to Q) \wedge \neg Q) \to \neg P$
(2) [三段論法] $((P \to Q) \wedge (Q \to R)) \to (P \to R)$
(3) [場合分け] $((P \vee Q) \wedge (P \to R) \wedge (Q \to R)) \to R$

■ 対偶による証明 定理 1.6 によって,「P ならば Q」の真偽と「Q でなければ P でない」の真偽はつねに一致する. したがって, 命題「P ならば Q である」を証明するかわりに,「Q でなければ P でない」を証明してもよい. この証明法は,「対偶を示せばよい」という形で様々な場面で使われる.

例 1.18 x, y を自然数とするとき, xy が偶数であれば, x または y は偶数である. このことを対偶によって証明してみよう. まず,「x または y は偶数である」の否定は「x, y ともに奇数である」となることに注意する. そうすれば, 対偶命題は「x, y ともに奇数であれば, xy も奇数である」となる. この命題は, $x = 2m + 1$, $y = 2n + 1$ とおいて計算すれば直ちに示されるように, 真である. つまり, 対偶命題は真である. よって, 本来の主張も真であり証明が完了する.

■ 逆は必ずしも真ならず 真理値表からすぐわかるように, 命題 $P \to Q$ が真であっても命題 $Q \to P$ が真であるとは限らない. このことは「逆は必ずしも真ならず」と覚えておくとよい.

例 1.19 自然数 n について, 命題「n が 6 の倍数であれば, n は 2 の倍数である」は真であるが, その逆「n が 2 の倍数であれば, n は 6 の倍数である」は偽である.

定 理 1.20 (背理法) 次の推論は有効である.

$$\begin{array}{l} \neg P \ \to \ Q \\ \underline{\neg Q \qquad\qquad} \\ \qquad\quad P \end{array} \tag{1.8}$$

証 明 関連する命題の真理値表は次の通りである.

P	Q	$\neg P$	$\neg Q$	$\neg P \to Q$	$(\neg P \to Q) \wedge \neg Q$	$((\neg P \to Q) \wedge \neg Q) \to P$
1	1	0	0	1	0	1
1	0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0	1
0	0	1	1	0	0	1

命題 $\neg P \to Q$ と $\neg Q$ がともに真になるのは, 表の第 2 行目である. そのとき, P は真であるので, 推論 (1.8) は有効である. あるいは, $((\neg P \to Q) \wedge \neg Q) \to P$ が恒真命題になっていることからもわかる. ∎

■ **背理法による証明** 定理 1.20 は, 命題 P が真であることを証明する 1 つの証明法を与えている. まず, 結論を否定して $\neg P$ が真であると仮定し, $\neg P$ から命題 Q を導く. 一方, $\neg Q$ が真であることを示す. そうすると Q と $\neg Q$ が同時に真となり矛盾が生じる. この矛盾の原因は, $\neg P$ が真であると仮定したことにあるので, $\neg P$ は偽である. したがって, P は真であるという論法である. このような証明方法を**背理法**という.

例 1.21 素数は無数に存在することを背理法で証明してみよう.[6] 結論の否定「素数が有限個で尽きる」を仮定する. 有限個で尽きている素数を順に $p_1, p_2, \ldots, p_n$ として,

$$a = p_1 p_2 \cdots p_n + 1$$

とおく. a は, $p_1, \ldots, p_n$ のいずれよりも大きいので素数ではない. そうすると, a は合成数であるから素因数をもつ. 素因数は $p_1, p_2, \ldots, p_n$ の中にあるはずだが, a はそのいずれでも割り切れない (1 余る). これは矛盾である. こうして, 結論の否定から矛盾が導かれた. よって, 結論「素数は無数にある」は真である.

例 1.22 $\sqrt{2}$ は無理数であることを背理法で証明してみよう. 結論の否定「$\sqrt{2}$ は有理数である」を仮定して矛盾を導けばよい. すべての有理数は既約分数で表され, $\sqrt{2}$ は正の数であるから,

$$\sqrt{2} = \frac{m}{n}$$

となる互いに素な 2 つの自然数 m, n が取れる. 両辺を 2 乗して分母を払えば,

$$2n^2 = m^2 \tag{1.9}$$

となる. ここで, m の偶奇で場合分けしよう.

(i) m が奇数のとき. m^2 も奇数であるが, (1.9) の左辺を見るとそれは偶数でなくてはならず, 矛盾を引き起こす.

---

[6] この証明はユークリッド (Euclid, BC3 世紀頃) の原論にある. 背理法を用いない証明も知られている.

(ii) m が偶数ならば, $m = 2k$ とおくことができる. これを (1.9) に代入して, 両辺を 2 で割ると,

$$n^2 = 2k^2$$

が得られる. (i) の議論を繰り返すと, n は偶数でなければならない. そうすると, m, n ともに偶数となるから, m, n を互いに素とした初めの仮定に矛盾する.

いずれの場合も矛盾であるから, 要するに,「$\sqrt{2}$ は無理数である」の否定から矛盾が導かれたことになる. したがって,「$\sqrt{2}$ は無理数である」は真である.

なお, すべての自然数は一意的に素因数分解される (つまり, 与えられた自然数を素数の積で表すとき, 必要な素数とそのべき指数は一意的に定まる) ことを用いてもよい. (1.9) の左辺を素因数分解するとき, 素因子 2 は奇数回現れるが, 右辺では偶数回である. これは, 素因数分解の一意性に矛盾する.

問 1.9 次の主張を背理法によって証明せよ.

(1) $\sqrt{12}$ は無理数である.

(2) m は $m \geq 2$ なる自然数とする. $2^m - 1$ が素数ならば m は素数である.

■ 公理と定義 ある命題 P が真であることを示すためには, すでに真であることがわかっている他の命題から正しい推論によってその命題を導き出せばよい. この推論を命題 P の**証明**という. ある命題の証明のために用いる命題が真であることを示すには, さらに別の命題を用いることになり, それが真であることを示さなければならない. これの繰り返しによって, 最後には, 証明無しで真であることを認めざるをえない基本的な命題に到達する. これを**公理**という. 証明によって真であることが示された命題を**定理**という.[7)]

公理や定理で用いる用語や記号の意味を明確に述べた記述を**定義**という. ある用語なり記号なりを定義するには, 別の用語が必要になり, その用語の定義にはさらに別の用語が必要になる. これを繰り返すと, 最後には, これ以上別の言葉では定義できない基本的な用語に到達する. これを**無定義用語**という.

■ パラドックス 議論は妥当と認められるのに, 導き出された結論が一般の判断や感覚に反するような現象をパラドックス (逆理) という. パラドックスと言えば, ゼノンが考案したとされる「アキレスと亀」や「飛んでいる矢は止まっている」がよく知られている. パラドックスと名付けられたものには, 単に直感に

[7)] 数学書においては,「定理」という言葉が羅列されるのを嫌って, 準備的なものを補題, 重要度の低いものを命題, 定理などから直ちにわかるものを系などと称する.

反しているというだけのものから, 深刻な問題を提起したものまで色々ある. 次章で触れるが, 集合論に関するラッセルのパラドックスは後者に属する. ここでは, その前触れとして, 命題に関するパラドックスを紹介しておこう.

さて, 次の主張

$$P: \text{この文は偽である} \tag{1.10}$$

の真偽を問いたい. 「この文」が何を指しているのか明確ではないという意見もありそうだが, 主張 P そのものを指すものとする. ふつうはそのように受け取るだろう. では初めに, P は真であるとしてみよう. そうすると,「この文は偽である」ことが正しいのだから, この文, すなわち P は偽である. これは, 初めに P は真としたことに矛盾する. ならば, P は偽であるとしてみよう. そうすると, その否定 $\neg P$ が真になるから, 「この文は真である」が正しく, すなわち, P は真である. これもまた矛盾である. 結局, P を真としても偽としても矛盾を生じてしまい, 身動きが取れなくなってしまう. 無限ループにはまって抜け出せない感じである.

上のパラドックスは, 古代ギリシアの伝説的な詩人エピメニデスに遡るとされる. クレタ人であるエピメニデスが「クレタ人は嘘つきだ」と言ったのだが, はたしてエピメニデスは嘘をついているのだろうか, というものである. 卑近なところでも, 「このページに書かれていることは誤りである」という文言は誤りか, 「例外のない規則はない」という規則には例外はあるか, 「この壁に張り紙をするな」という張り紙は許容されるか, などいくらでも思い浮かぶ. これらのパラドックスの共通点は「自己言及」にある. ただし, 自己言及を含んでいれば必ず矛盾が生じるというわけでもない. たとえば,

$$Q: \text{この文は真である} \tag{1.11}$$

は矛盾を引き起こさない.

いずれにせよ, 自己言及を含む (1.10), (1.11) のような主張は, そもそも真偽を問うべき命題ではないとして排除する. もちろん, より厳密な論理構成のためには, 不都合だから排除するといった場当たり的な措置ではなく, 真偽を問うべき命題とは何かをあらかじめ決めておくことが重要である. しかし, そのためには本格的な形式論理学を必要とするので, 本書ではこれ以上は立ち入らないことにする.

1.4 述語論理

これまで, 命題と論理演算を組み合わせて, より複雑な命題を構成したり, 推論形式の有効性を議論してきた. そこで展開してきた論理体系を**命題論理**と呼ぶ. しかしながら, 命題論理では真偽が確定する命題だけを扱うため, 数学の基礎づけとしては守備範囲が極めて限定的で不十分である. 命題論理を拡張して, 変数を含む命題を扱うことのできる論理体系を**述語論理**という. 現代数学のほとんどの部分は述語論理によってカバーされる.

■ **命題関数** 変数 (扱う対象は数とは限らないので変項ともいう) を含む主張で, その変数を特定するごとに真偽の確定する命題になるものを**命題関数** といい, $P(x), Q(x, y)$ のような記号で表す. ここで, x, y を**自由変数**と呼ぶ.

たとえば, 「x の 2 乗は 25 である」という主張は x を変数とする命題関数 $P(x)$ として扱うことができる. $P(x)$ そのものは命題ではないが, x を特定するごとに真偽の確定する命題になる. 実際, $x = 3$ とすれば, $P(3)$ は「3 の 2 乗は 25 である」という命題になり, この命題は偽である. $x = 5$ とすれば, $P(5)$ は「5 の 2 乗は 25 である」という命題になり, この命題は真である. また,「x は y の倍数である」という主張は, 2 個の自由変数を含む命題関数 $Q(x, y)$ として扱われる.

■ **全称命題と存在命題** $P(x)$ を命題関数とするとき, 「すべての x に対して, $P(x)$ が真である」という命題を考えることができる. これを**全称命題**といい,

$$\forall x\, P(x)$$

のように書く. また, 「ある適当な x をとれば, $P(x)$ が真となる」という命題を**存在命題**といい,

$$\exists x\, P(x)$$

のように書く. これは「$P(x)$ が真になるような x が存在する」といってもよい. 単に存在すればよく個数は問わないのだが, 特に強調して「少なくとも 1 個存在する」と言うこともある. 記号 $\forall$, $\exists$ をあわせて**量化子**と呼ぶ.[8)]

---

8) 元来, $\forall$ は A を, $\exists$ は E を回転させたものである. 反転でないのは, 活字を節約できるからだそうだ. 存在量化子の記号 $\exists$ は 1897 年にペアノ (Giuseppe Peano, 1858–1932) が, 全称量化子の記号 $\forall$ は 1935 年にゲンツェン (Gerhard Karl Erich Gentzen, 1909–1945) が初めて導入して定着した. 述語論理が登場してからずいぶん後のことである.

たとえば,「x の 2 乗は 25 である」という命題関数を $P(x)$ とするとき, 全称命題 $\forall x\, P(x)$ は偽であるが, 存在命題 $\exists x\, P(x)$ は真である．また, $Q(x)$ を「$(x+1)^2 = x^2+2x+1$ である」という命題関数とするとき, 全称命題 $\forall x\, Q(x)$ は真であり, もちろん, 存在命題 $\exists x\, Q(x)$ も真である.

命題関数の導入によって, 全称命題と存在命題を扱うことができるようになったことが重要である．これによって, 数学における公理系や存在定理を述語論理で記述できるようになった.

■ 全称命題と存在命題の否定 全称命題 $\forall x\, P(x)$ は,「すべての x に対して $P(x)$ が成り立つ」ことを意味する．これを否定すると,「$P(x)$ が成り立たない x が存在する」となる．存在すればよいので, そのような x の個数は問わない. したがって,

$$\neg(\forall x\, P(x)) \equiv \exists x\,(\neg P(x)) \tag{1.12}$$

となる．排中律によって, ある命題とその否定のいずれか一方が必ず成り立つことを反映している．同様に, 存在命題 $\exists x\, P(x)$ は,「$P(x)$ が成り立つような x が存在する」ことを意味するので, その否定は「どんな x をとっても $P(x)$ が成り立たない」となる．すなわち,

$$\neg(\exists x\, P(x)) \equiv \forall x\,(\neg P(x)) \tag{1.13}$$

となる．(1.12) と (1.13) を見ると, 否定に関して $\forall$ と $\exists$ が対称的にふるまうことがわかる.

問 1.10 次の命題の否定を示し, その真偽を述べよ．ただし, x は実数とする.

(1) $\forall x\,(x^2 = 2)$
(2) $\forall x\,((x \geq 0) \vee (x \leq 0))$
(3) $\exists x\,(x^2 < 1)$
(4) $\exists x\,((x > 0) \wedge (x < 0))$

■ 複数の変数を含む場合 複数の変数を含む命題関数に対して, 量化子を組み合わせて, 全称と存在の混合した命題を作ることができる．例として, 2 つの変数 x, y を含む命題関数 $P(x, y)$ を考えよう．まず, 記法であるが,

$$\forall x\, \exists y\, P(x, y) \tag{1.14}$$

と書くときは, 左から読むことを前提としているので, $\forall x\,(\exists y\,P(x,y))$ の意味にとる．すなわち, 任意に x を固定すると, $P(x,y)$ は y のみを変数とする命題関数となり, それが真になる y が存在するという意味である．存在すべき y は, 初めに固定した x ごとに決まればよく, したがって, x ごとに異なってよい．このことを念頭において, (1.14) を「すべての x に対して, ある y が存在して $P(x,y)$ が成り立つ」のように読み下す．

(1.14) において $\forall x$ と $\exists y$ を入れ替えると,

$$\exists y\,\forall x\,P(x,y) \tag{1.15}$$

となる．これは「ある y が存在して, すべての x に対して $P(x,y)$ が成り立つ」と読む．つまり, y はすべての x に対して共通に選ばれることになる．(1.14) と (1.15) の違いは決定的である．

たとえば, $P(x,y)$ として「x は y の子である」という命題関数を考えよう．$\forall x\exists y\,P(x,y)$ は「すべての x に対して, ある y が存在して, x は y の子である」となる．誰でも誰かの子であると言いたかったのである．しかし, $\exists y\forall x\,P(x,y)$ は「ある y が存在して, すべての x に対して x は y の子である」という命題になる．すべての x に共通の y (神か) が存在することを主張している．

なお, 並列する全称量化子は順序によらない．存在量化子でも同様である．たとえば,

$$\forall x\,\forall y\,P(x,y) \equiv \forall y\,\forall x\,P(x,y), \qquad \exists x\,\exists y\,P(x,y) \equiv \exists y\,\exists x\,P(x,y)$$

が成り立つ．

問 1.11 x,y は自然数を表すとして, 命題関数 $P(x,y)$ を「$x \le y$ である」とする．このとき, 次の命題の真偽を答えよ．

(1) $\forall x\exists y\,P(x,y)$

(2) $\exists y\forall x\,P(x,y)$

(3) $\forall y\exists x\,P(x,y)$

(4) $\exists x\forall y\,P(x,y)$

問 1.12 a,b は実数とする．命題

$$\forall a\,\forall b\,((a^2 = b^2) \to (a = b))$$

の真偽について調べよ．次に, 上の命題の否定を示し, その真偽について調べよ．

■ 概念記法 人類史上, 最大級の知の巨人と言えば, まずアリストテレス[9]の名があがるだろう．とりわけ, 演繹的に真実を導き出す手法として論理学を体系化した功績は著しく, 知の礎として不動の地位を築いた．矛盾律や排中律といった論理の基本原理や肯定法, 否定法, 三段論法などの推論法は, 古代にすでに確立していた．カントは, アリストテレス以来, 論理学は進歩も退歩もせず, それ自体すでに自己完了している観があると書き残している.[10]

この論理学に革命を起こしたのがフレーゲ[11]である．フレーゲは, 命題論理の公理化を行い, 命題関数を導入して述語論理を創始した．その成果は主著「概念記法」(1879) に纏められ, 全称命題や存在命題を扱うことができるようになった．ただし, 世の中にすぐには受け入れられず, 本人もかなり落胆したらしい．そこに採用した 2 次元的な独特な表記法はまだ良しとしても, その内容が余りにも先進的過ぎたのだろう．フレーゲは「概念記法」の成果をもとに, 数学は論理に帰着しうるという思想 (論理主義) の最初の論客となった．実際, 自然数論と実数論を純粋に論理から組み立てるプログラムを実行して「算術の基本法則」(1893) を著した．しかしながら, この試みは, ラッセルの登場によって挫折することになる．これについては次章で触れることにしよう．

---

[9] Aristotle (英語表記, BC384–322). 古代アテネの哲学者．プラトンの弟子で「万学の祖」とも呼ばれる．論理学に関する著作は「オルガノン」として, 継承者たちによって編纂されて今日に伝わっている．

[10] Immanuel Kant (1724–1804)「純粋理性批判」第 2 版序文 (1787) にある．

[11] Friedrich Ludwig Gottlob Frege (1848–1925). ドイツの哲学者, 数学者, 論理学者．主にイエナ大学で学び教えた．