数学集中講義

3倍角の公式の応用　～3次方程式を解こう～

吉田　信夫

大学への数学　11 年 7 月号　掲載

3 次方程式を解くための公式としては，“カルダノの公式”と呼ばれるものが有名であるが，大学入試で直接扱われることはほとんど無い (本稿の最後に紹介する).

他に“3 倍角の公式”を利用する方法があるので，そちらの方法を見ていきたい．まず，2009 年の信州大 (後期) の問題である．

問題 1.　関数 $f(x)=4x^3-3x-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ について，次の問いに答えよ．

（1） $f(\cos\theta)=0$ を満たす $\theta\left(0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$ を求めよ．また，そのときの $\cos\theta$ の値を求めよ．

（2） 方程式 $f(x)=0$ の実数解をすべて求めよ．

解　（1） 3 倍角の公式から，

$$f(\cos\theta)=4\cos^3\theta-3\cos\theta-\frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$=\cos3\theta-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

となるので，$f(\cos\theta)=0$ を満たす θ は，

$$\cos3\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}\quad\therefore\quad 3\theta=\frac{\pi}{4}\quad\left(\because\ 0\leqq3\theta\leqq\frac{3\pi}{2}\right)$$

$$\therefore\quad \theta=\boldsymbol{\frac{\pi}{12}}$$

となる．このとき，加法定理より，

$$\cos\theta=\cos\frac{\pi}{12}=\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}}$$

である．

（2） $f'(x)=12x^2-3=3(2x-1)(2x+1)$

より，増減表は次のようになる．

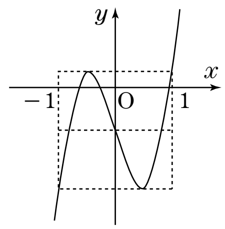
x	$\cdots$	$-\frac{1}{2}$	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$1-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\searrow$	$-1-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\nearrow$

さらに，

$$f(1)=4-3-\frac{1}{\sqrt{2}}=1-\frac{1}{\sqrt{2}}=f\left(-\frac{1}{2}\right),$$

$$f(-1)=-4+3-\frac{1}{\sqrt{2}}=-1-\frac{1}{\sqrt{2}}=f\left(\frac{1}{2}\right)$$

に注意して，グラフを描くと，図のようになる．



ゆえに，$f(x)=0$ は 3 つの実数解をもち，すべて $-1\leqq x\leqq1$ の範囲にあると分かるので，

$$x=\cos\theta\ (0\leqq\theta\leqq\pi)$$

と表せる．

すると，（1）と同様にして，$f(\cos\theta)=0$ を満たす θ は，

$$\cos3\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\therefore\quad 3\theta=\frac{\pi}{4},\ \frac{7\pi}{4},\ \frac{9\pi}{4}\quad(\because\ 0\leqq3\theta\leqq3\pi)$$

$$\therefore\quad \theta=\frac{\pi}{12},\ \frac{7\pi}{12},\ \frac{3\pi}{4}$$

となる．

$$\cos\frac{7\pi}{12}=\cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4},$$
$$\cos\frac{3\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

より，$f(x)=0$ の実数解は

$$x=\boldsymbol{\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}},\ \boldsymbol{\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}},\ \boldsymbol{-\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

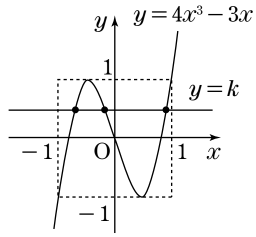
である．

＊　　　　　　＊

$-1<k<1$ なる実数 k に対し，3 次方程式

$$4x^3-3x=k$$

は異なる 3 つの実数解をもつ．3 つの解は $-1<x<1$ の範囲にあるので，何らかの角度により，



$$x=\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma\ (0\leqq\alpha<\beta<\gamma\leqq\pi)$$

という形で書ける．今回は

$$\alpha=\frac{\pi}{12},\ \beta=\frac{7\pi}{12},\ \gamma=\frac{3\pi}{4}$$

であった．$\cos 3\theta$ の値が分かりやすいものであったため，解をキチンと表記できたのである．

一般に，異なる３つの実数解をもつような３次方程式 $ax^3+bx^2+cx+d=0$ $(a>0)$ は，変換 (下の注) により上記の

$$4x^3-3x=k \quad (-1<k<1)$$

に帰着できる．

⇨注　$y=ax^3+bx^2+cx+d$ の変曲点 $(p,\ q)$ のとき，変曲点が原点にくるよう平行移動すると，方程式は

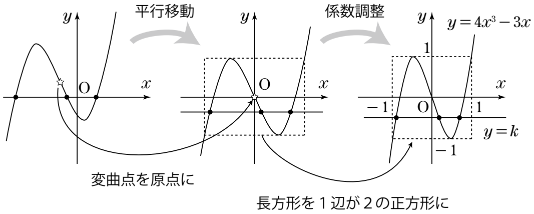
$$ax^3-Ax=-q \ (A>0)$$

という形になる．係数を調整するために $x=2\sqrt{\dfrac{A}{3a}}X$ とおくと，

$$a\cdot 8\cdot\frac{A}{3a}\sqrt{\frac{A}{3a}}X^3-A\cdot 2\sqrt{\frac{A}{3a}}X=-q$$

$$\therefore\quad 4X^3-3X=-q\cdot\frac{3}{2A}\sqrt{\frac{3a}{A}}$$

となる．これが目指していた形である．



＊　　　　　＊

次は，2009 年の東北大 (後期) の問題を考えてみよう．見たことのない人には，非常に不思議な問題であろう．

問題 2.　実数の間の等式

$$\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}-\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}=2 \quad \cdots\cdots\cdots \quad (*)$$

を以下の手順に従って示せ．

（１）　係数が整数である x の３次方程式で $x=\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}-\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}$ が解になるものを１つ求めよ．

（２）（１）で求めた３次方程式を解くことにより，等式 $(*)$ を証明せよ．

なぜ，$\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}-\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}$ が２になるのだろうか．そのカラクリを探りたいが，まずは，３乗根を消去して，証明しておこう．

解（１）　$b=\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}$，$a=\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}$ とおくと，

$$x=b-a,$$
$$b^3=5\sqrt{2}+7,\ a^3=5\sqrt{2}-7,$$
$$ab=\sqrt[3]{(5\sqrt{2}+7)(5\sqrt{2}-7)}=\sqrt[3]{50-49}=1$$

である．これを，

$$(b-a)^3=b^3-a^3-3ab(b-a)$$

に代入すると，x が解になる３次方程式

$$x^3=(5\sqrt{2}+7)-(5\sqrt{2}-7)-3\cdot 1\cdot x$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{x^3+3x-14=0}$$

を得る．

（２）（１）の３次方程式を解くと，

$$(x-2)(x^2+2x+7)=0 \quad \therefore\quad x=2,\ -1\pm\sqrt{6}i$$

となる．$b-a$ は実数であるから，$b-a=2$ が成り立つ．これで示された．

＊　　　　　＊

一体，何が起こったのか？このカラクリを調べるため，**問題** 1 と類似の流れの問題を作ってみよう．

問題 3.　$f(x)=x^3+3x-14$ とする．また，

$$g(t)=\frac{e^t-e^{-t}}{2}$$

で関数 $g(t)$ を定める．

（１）　$g(3t)=4\{g(t)\}^3+3g(t)$ を示せ．

（２）　$f(2g(t))=0$ となる実数 t を求めよ．また，そのときの $2g(t)$ の値を求めよ．

解（１）　示すべき式の右辺を変形すると，

$$4\{g(t)\}^3+3g(t)=4\left(\frac{e^t-e^{-t}}{2}\right)^3+3\left(\frac{e^t-e^{-t}}{2}\right)$$
$$=\frac{(e^{3t}-3e^{2t}e^{-t}+3e^te^{-2t}-e^{-3t})+3(e^t-e^{-t})}{2}$$
$$=\frac{e^{3t}-e^{-3t}}{2}=g(3t)$$

となる．これで題意は示された．

（２）（１）を用いて変形すると，

$$f(2g(t))=\{2g(t)\}^3+3\{2g(t)\}-14$$
$$=2\{4\{g(t)\}^3+3g(t)\}-14$$
$$=2g(3t)-14$$

である．ゆえに，$f(2g(t))=0$ を変形すると，

$$2g(3t)-14=0 \quad \therefore\quad e^{3t}-e^{-3t}-14=0$$

となる．両辺に e^{3t} をかけると，

$$e^{6t}-14e^{3t}-1=0$$

という e^{3t} の２次方程式になり，解の公式から

$$e^{3t}=7+5\sqrt{2} \ (\because\ e^{3t}>0)$$

となる．t を求めると，

$$e^t=\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}$$

$$\therefore\quad t=\log\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}=\boldsymbol{\frac{1}{3}\log(5\sqrt{2}+7)}$$

となる．このとき，

$$e^{-t}=\sqrt[3]{\frac{1}{5\sqrt{2}+7}}=\sqrt[3]{\frac{5\sqrt{2}-7}{50-49}}=\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}$$

$$\therefore\quad 2g(t)=e^t-e^{-t}=\boldsymbol{\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}-\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}}$$

である (これが $f(x)=0$ の実数解である).

*　　　　　　　　　　*

$$f'(x)=3x^2+3>0$$

より，$f(x)$ は単調増加し，$f(x)=0$ の実数解はただ 1 つである．それが $x=2$ であるから，

$$\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}-\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}=2$$

と分かる．これが 問題 2 の (*) である．

問題 1 での $x=\cos\theta$ の代わりに 問題 3 での置換に用いた関数 $g(t)=\dfrac{e^t-e^{-t}}{2}$ は双曲正弦関数と呼ばれるもので，$g(t)=\sinh t$ と書く．

（1）で証明した式をこの形で書き直すと，

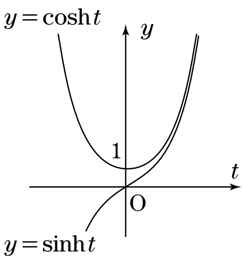
$$\sinh 3t=4\sinh^3 t+3\sinh t$$

となり，まさに“3 倍角の公式”である．

単調増加タイプの 3 次方程式を解くための置換には，$\sinh t$ を用いるのである．

実は，双曲余弦関数

$$\cosh t=\frac{e^t+e^{-t}}{2}$$



というものがある．相加平均，相乗平均の関係から，

$$\cosh t=\frac{e^t+e^{-t}}{2}\geqq\sqrt{e^te^{-t}}=1$$

を満たす．また，偶関数であるから，$t\geqq 0$ と $\cosh t\geqq 1$ が 1 : 1 に対応している．さらに，3 倍角の公式：

$$\cosh 3t=4\cosh^3 t-3\cosh t$$

が成り立つ (証明は，次の問題で).

これを使って, どんな 3 次方程式が解けるのだろうか？

問題 4.　$f(x)=x^3-3x-3$ とする．また，

$$g(t)=\frac{e^t+e^{-t}}{2}\quad(t\geqq 0)$$

で関数 $g(t)$ を定める．

（1） 方程式 $f(x)=0$ の実数解の個数を求めよ．

（2） $g(3t)=4\{g(t)\}^3-3g(t)$ を示せ．

（3） $f(2g(t))=0$ となる 0 以上の実数 t を求めよ．また，そのときの $2g(t)$ の値を求めよ．

解　（1）　$f'(x)=3x^2-3=3(x-1)(x+1)$

より，増減は次のようになる．

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	-1	↘	-5	↗

極大値が負なので，$f(x)=0$ の実数解は **1 個**である．

（2） 示すべき式の右辺を変形すると，

$$\begin{aligned}&4\{g(t)\}^3-3g(t)\\&=4\left(\frac{e^t+e^{-t}}{2}\right)^3-3\left(\frac{e^t+e^{-t}}{2}\right)\\&=\frac{(e^{3t}+3e^{2t}e^{-t}+3e^te^{-2t}+e^{-3t})-3(e^t+e^{-t})}{2}\\&=\frac{e^{3t}+e^{-3t}}{2}=g(3t)\end{aligned}$$

となる．これで題意は示された．

（3） $t\geqq 0$ より，$e^t\geqq 1$ である．

（2）を用いて変形すると，

$$\begin{aligned}f(2g(t))&=\{2g(t)\}^3-3\{2g(t)\}-3\\&=2\{4\{g(t)\}^3-3g(t)\}-3\\&=2g(3t)-3\end{aligned}$$

である．ゆえに，$f(2g(t))=0$ から

$$2g(3t)-3=0\quad\therefore\quad e^{3t}+e^{-3t}-3=0$$

である． 問題 3 と同様，両辺に e^{3t} をかけて，e^{3t} の 2 次方程式を作り，解の公式を用いることで，

$$e^{6t}-3e^{3t}+1=0\quad\therefore\quad e^{3t}=\frac{3+\sqrt{5}}{2}\quad(\because\ e^{3t}\geqq 1)$$

$$\therefore\quad e^t=\sqrt[3]{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}$$

$$\therefore\quad t=\log\sqrt[3]{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}=\boldsymbol{\frac{1}{3}\log\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)}$$

となる．このとき，

$$e^{-t}=\sqrt[3]{\frac{2}{3+\sqrt{5}}}=\sqrt[3]{\frac{2(3-\sqrt{5})}{9-5}}=\sqrt[3]{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}$$

$$\therefore\quad 2g(t)=e^t+e^{-t}=\boldsymbol{\sqrt[3]{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}+\sqrt[3]{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}}$$

である (これが $f(x)=0$ の実数解である).

*　　　　　　　　　　*

問題 2 の $\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}-\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}$ と近い形が得られた

が，問題 4 の $2g(t)$ が簡単な数になるということではない．$\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}-\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}$ は，$x=2$ を解にもつことが分かった方程式から逆算して作っているのである．

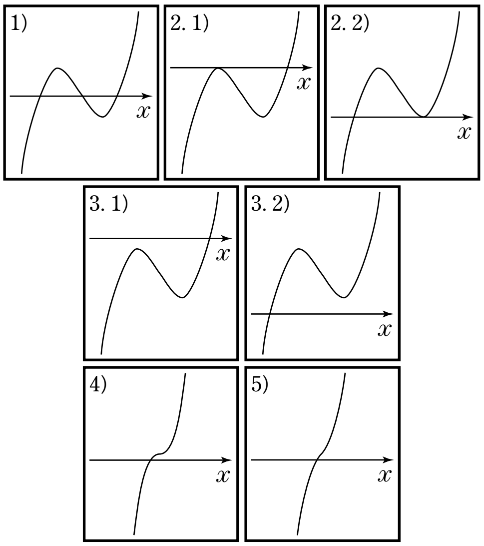
ここで，2 つの 3 乗根の間にある符号が変わっていることに注意して，3 倍角の公式を比較する．すると，

$$\sinh 3t=4\sinh^3 t+3\sinh t,$$
$$\cosh 3t=4\cosh^3 t-3\cosh t,$$
$$\cos 3\theta=4\cos^3\theta-3\cos\theta$$

なので，実は，$\cosh t$ と $\cos\theta$ では同じ係数である．

極値をもつ 3 次関数と x 軸の交点を求めるときに，3 交点なら $\cos\theta$ で, 1 交点なら $\cosh t$ で置換するのである．

ここで, 3 次方程式の解について, グラフで分類すると, 以下のようになる．



ここまでに扱ってきたのは, 1)，3)，5) である．2) は「極値」，4) は「$(x-a)^3$ の形」から簡単に解ける．解法をまとめると，以下のようになる．

1) $x=\cos\theta\ (0\leqq\theta\leqq\pi)$ とし，3 倍角の公式を利用
2) 極値をとる x を重解にもつことを利用
3) $x=\cosh t\ \ (t\geqq 0)$ とし，3 倍角の公式を利用
4) 3 乗根を利用
5) $x=\sinh t$ とし，3 倍角の公式を利用

■**研究**　最後に，これらをまとめて扱い，虚数解まで求める方法を紹介しよう．“カルダノの公式”という方法である．問題 2，3 で考えた

$$x^3+3x-14=0 \quad \cdots\cdots\cdots \quad (\#)$$

を例として説明する (一般的には，平行移動と係数調整が必要となる)．

(#) の解が，2 つの複素数 u，v を用いて $x=u+v$ と表せるとしたら，(#) に代入して，

$$(u+v)^3+3(u+v)-14=0$$
$$\therefore\quad u^3+v^3+3(u+v)(uv+1)=14$$

となる．もしも，

$$u^3+v^3=14,\ uv+1=0$$

を満たす u，v があれば，$x=u+v$ は (#) の解である．

$$u^3+v^3=14,\ u^3v^3=-1$$

が必要なので，解と係数の関係から，

$$X^2-14X-1=0$$

は $X=u^3$，v^3 を解にもつ．解の公式から，

$$X=7\pm5\sqrt{2}$$

となるので，u，v が実数になるなら，

$$u^3=7+5\sqrt{2},\ v^3=7-5\sqrt{2}\ \ (<0)$$
$$\therefore\quad u=\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7},\ v=-\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}$$

である．これは $uv=-1$ を満たし，十分である．

さらに，u，v として虚数も考えるために，1 の 3 乗根の 1 つとして $\omega=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ をとる．すると，

$$u^3+v^3=14,\ uv=-1$$

を満たす u，v は，

$$(u,\ v)=(\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7},\ -\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}),$$
$$(\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}\omega,\ -\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}\omega^2),$$
$$(\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}\omega^2,\ -\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}\omega)$$

となる．よって, (#) の解はすべて求まったことになり，

$$x=\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}-\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7},$$
$$\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}\omega-\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}\omega^2,$$
$$\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}\omega^2-\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}\omega$$

である．

＊　　　　＊

確かに，3 次方程式の解を求めることができた．因数分解で (#) を解くと，

$$(x-2)(x^2+2x+7)=0 \quad \therefore\quad x=2,\ -1\pm\sqrt{6}i$$

であったから，「難しく解いただけ」という印象かも知れない．実際，異なる 3 つの実数解をもつ 1) のタイプでも, 解を表記するのに虚数 ω を用いることになる．「どんな 3 次方程式でも解ける公式を使うと，実数を表すために虚数が必要になる」という事実は，“虚数の存在価値”を認めさせるのに十分な説得力をもつ．さらに，大学で三角関数と指数関数の関係を学び，

$$\omega=\cos\frac{2}{3}\pi+i\sin\frac{2}{3}\pi=e^{i\frac{2}{3}\pi}$$

といった表記法を学ぶと，3 倍角の公式の方法とカルダノの公式で得た表記が同じだと思えるであろう．

（よしだ　のぶお，予備校講師）