

1 年の復習 (線形代数)

作成日：April 18, 2012 Updated：April 24, 2012

実施日：April 24, 2012

ウォーミングアップ (1 次独立, 基底, 1 次変換)

問題 1. (行列計算) 次の計算をせよ：
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

問題 2. (1 次独立性・基底の定義)

- (1) ベクトル空間 $V = \mathbb{R}^n$ の元 $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m$ が 1 次独立であるとは「 $c_i \in \mathbb{R}$, ($i = 1, 2, \dots, m$) としたとき, $c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + \dots + c_m\vec{v}_m = \vec{0}$ となるのは***のときに限る」というものである. ***にあてはまる主張を書け.
- (2) 3 次元ベクトル空間 $\mathbb{R}^3$ を考える. 次のベクトルの組の中で, 基底とならないものを全てえらび, その理由をそれぞれ簡潔に述べよ. (基底となるものについては答えなくてよい.)

$$\begin{array}{ll} \text{(ア)} & \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} & \text{(イ)} & \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \pi \\ e \\ 0 \end{pmatrix} \\ \text{(ウ)} & \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix} & \text{(エ)} & \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \end{array}$$

問題 3. (1 次変換クイズ) $\mathbb{R}^2$ から $\mathbb{R}^2$ への 1 次変換 (行列表示を A とする) について以下の問いに答えよ.

- (1) 2 つのベクトル $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ をそれぞれ, $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ に写すとき, 行列 A を求めよ.
(方針は 3 秒で頭の中で答えよ.)
- (2) 2 つの単位ベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ をそれぞれ, $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ に写すとき, 行列 A を 1 秒で答えよ.

1 次変換による図形の像

問題 4. (1 次変換による図形の像：3 次元空間内) 行列 $A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ で表され

る 1 次変換 $T_A: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ について以下の問いに答えよ.

(1) $\det A$ を求めよ. また逆行列 A^{-1} が存在する場合はそれも求めよ.

(2) 直線 $l = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x-1 = \frac{y+2}{2} = \frac{z-3}{-2} \right\}$ をベクトル表示し, T_A による像を求めよ.

(3) 平面 $\pi = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + y - z = 3 \right\}$ の T_A による像を求めよ.

対角化の原理

問題 5. (固有ベクトルの 1 次独立性と対角化の原理) $V = \mathbb{C}^3$ とする. 3×3 行列 A の固有値を (重複を込めて) 並べたものを $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ とし, それぞれに属する固有ベクトル $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ をとる. このとき次の問いに答えよ.

(1) $\lambda_1 \neq \lambda_2$ のとき $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ は 1 次独立であることを示せ.

(2) $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ がすべて相異なるとき, $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ は 1 次独立であることを示せ.

(3) $P := (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ とおくと, $P^{-1}AP$ は対角行列となることを示せ.

対角化の応用

問題 6. (対角化とその漸化式への応用：フィボナッチ数列)

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n, \quad a_0 = a_1 = 1$$

で定義される数列 $\{a_n\}$ をフィボナッチ数列という.

(1) ベクトル $\vec{v}_n = \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix}$ を用いて, 漸化式を $\vec{v}_{n+1} = A\vec{v}_n$ の形に表すとき, 行列 A を求めよ.

(2) $B = P^{-1}AP$ のように A が対角化されるとき, $B^n = P^{-1}A^nP$ であることを利用して, A^n を求めよ.

(3) これを利用して一般項 a_n を求めよ.

内積、実対称行列の対角化

問題 7. (実対称行列の性質)

${}^tA = A$ を満たす実行列を実対称行列という. 以下 $V = \mathbb{C}^n$ とし, 内積は標準的なものとする. すなわち $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{C}^n$ に対して,

$$(\vec{u}, \vec{v}) := \vec{u}^* \vec{v} = {}^t \vec{u} \vec{v} = (\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_n) \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \bar{u}_1 v_1 + \bar{u}_2 v_2 + \dots + \bar{u}_n v_n.$$

特に, $\lambda \in \mathbb{C}$ に対して, $(\lambda \vec{u}, \vec{v}) = \bar{\lambda}(\vec{u}, \vec{v})$, $(\vec{u}, \lambda \vec{v}) = \lambda(\vec{u}, \vec{v})$ である.

- (1) 実対称行列 A の固有値はすべて実数であることを示せ. (ヒント: $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$, $\vec{v} \neq \vec{0}$ とおき, $(A\vec{v}, \vec{v}) = (\vec{v}, A\vec{v})$ を示す. これから $\bar{\lambda}(\vec{v}, \vec{v}) = \lambda(\vec{v}, \vec{v})$ を導く. なお $(A\vec{v})^* = \vec{v}^* A^*$ であることに注意.)
- (2) 実対称行列 A の相異なる固有値に対する固有ベクトルは互いに直交することを示せ. (ヒント: $\lambda_i, \lambda_j \in \mathbb{R}$ を A の相異なる固有値とし, それらに属する固有ベクトルをそれぞれ $\vec{v}_i, \vec{v}_j$ としたとき, $(A\vec{v}_i, \vec{v}_j) = (\vec{v}_i, A\vec{v}_j)$ を示す. これから $\lambda_i(\vec{v}_i, \vec{v}_j) = \lambda_j(\vec{v}_i, \vec{v}_j)$ を導く.)

問題 8. (実対称行列の対角化と 2 次曲線への応用)

前問の続きだが, ここでは 2 次元の場合を考える.

- (1) 2×2 実対称行列 A の 2 個の固有値がすべて相異なるとき, それらに対する 2 個の固有ベクトル $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ が一次独立であることを, 問題 7(2) の結果を用いて示せ. (このとき, $P = (\vec{v}_1, \vec{v}_2)$ とすると $P^{-1}AP$ が対角行列になる.)
- (2) 固有ベクトルを実にとり正規化すれば, P は直交行列 (すなわち ${}^tPP = E$ を満たす行列) となることを示せ.
- (3) 次の実対称行列を対角化せよ. (次の小問のために固有ベクトルを (実にとって) 正規化しておくとい.)

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 7 \end{pmatrix}$$

- (4) (基底変換の行列 P の 1 次変換としての性質に注意して) 2 次曲線

$C := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid 5x^2 - 2\sqrt{3}xy + 7y^2 = 4 \right\}$ の概形を描け. (ヒント: C を表す方程式の左辺は, $(x, y)A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ と書ける. また, 回転の向きに注意.)

今週の宿題 (提出期限は 5 月 1 日 (火) 演習開始時です！表紙は不要ですが複数枚に及ぶときは必ずホッチキスなどで閉じてください。))

問題 9. 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -5 \\ -3 & -5 & 12 \end{pmatrix}$ で表される 1 次変換 $T_A: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ について考える.

(1) $\det A$ を求めよ. また逆行列 A^{-1} が存在する場合はそれも求めよ.

(2) 平面 $\pi = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid 4x + 2y - 3z = 2012 \right\}$ の T_A による像を求めよ.

問題 10.

(1) 曲線 $C := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 10\sqrt{3}xy + 11y^2 = 8 \right\}$ の概形を描け.

(2) $V = \mathbb{C}^n$ とする. $n \times n$ 行列 A の固有値を (重複を込めて) 並べたものを $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ とし, それぞれに属する固有ベクトル $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ をとる. $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ がすべて相異なるとき, $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ は 1 次独立であることを示し, $P := (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n)$ とおくと, $P^{-1}AP$ は対角行列となることを示せ. (ヒント: たとえば帰納法)

今週のボーナス問題 (提出期限は 5 月 1 日 (火) 演習開始時です！)

問題 11. (2 次曲面とその標準化)

(1) 3 次元空間 $\mathbb{R}^3$ 内において以下の方程式 (i)~(vi) で記述される図形は何か? それぞれ (ア)~(キ) の中から選べ ($a, b, c > 0$). なお高次元図形の直観的理解には断面 ($z = 0$ のスライスなど) を見るというのが有効である. 用語が分からないときは調べよう.

$$(i) \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \quad (ii) \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (iii) x^2 + y^2 - z^2 = 1$$

$$(iv) x^2 - y^2 - z^2 = 1 \quad (v) x^2 + y^2 = 1 \quad (vi) z = x^2 + y^2$$

(ア) 楕円面 (イ) 一葉双曲面 (ウ) 二葉双曲面 (エ) 楕円放物面

(オ) 双曲放物面 (カ) 楕円錐面 (キ) その他

(2) 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ の固有値, 固有ベクトルをすべて求め, A を対角化せよ.

(3) 曲面 $S := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + z^2 + 2xy + 2yz - 4zx = 6 \right\}$ のあらわす図形を (1) の (ア)~(キ) の中から選べ.