連分数（解説）

＜授業展開について＞

◎１時間目

導入

・分母分子に分数が入った計算は、計算ミスが多いことを伝えるとよい。

展開①

・$1+\frac{1}{1+}\frac{1}{1}=\frac{3}{2}$、$1+\frac{1}{1+}\frac{1}{1+}\frac{1}{1}=\frac{5}{3}$、$1+\frac{1}{1+}\frac{1}{1+}\frac{1}{1+}\frac{1}{1}=\frac{8}{5}$、・・・・・と順に計算すると、前の結果を次に使えることに気付いて速く計算できる生徒が出てくる。他にも、答えの分数の分母分子の数の規則性から、計算しないで答えを導く生徒もいるので、進度に大きな差が生まれる可能性がある。

・答えの分数の規則性に気付く場面では、指導案の解説例の他に、「分母分子はそれぞれ、前２つの和になっている。」と答える可能性もある。

・答えの分数から小数に直し、値を調べる場面では、それ以前に黄金比の知識を生徒に指導しておく必要がある。また、生徒が値を求めた一連の連分数に続く連分数の値については、コンピュータで計算した結果を生徒に提示すると、より黄金比に近付く様子が実感できる。もし、黄金比についての知識がない場合には、「小数の並びを見て感じることは？」などと発問するとよい。

・練習問題の値は①が円周率π、②が$\sqrt{3}$の値に近くなる。

展開②

・無限連分数の計算方法は以下のとおりである。

$1+\frac{1}{1+}\frac{1}{1+}\frac{1}{1+}\frac{1}{1+}\cdots\cdots=x$　とおく。

$\frac{}{1+}\frac{1}{1+}\frac{1}{1+}\frac{1}{1+}\cdots\cdots=x$　とおける。

よって、$1+\frac{1}{x}=x$　だから、$x^2-x-1=0$

$x>0$　より、$x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$　　（黄金比φを表していることが分かる。）

・練習問題の計算方法は上記と同様であるが、やや工夫が必要である。

$1+\frac{2}{2+}\frac{2}{2+}\frac{2}{2+}\frac{2}{2+}\cdots\cdots=x$　とおく。

$1+\frac{2}{(1+1)+}\frac{2}{2+}\frac{2}{2+}\frac{2}{2+}\cdots\cdots=x$　と変形すると、

$\frac{}{1+}\frac{2}{2+}\frac{2}{2+}\frac{2}{2+}\cdots\cdots=x$　とおける。

よって、$1+\frac{2}{1+x}=x$　だから　$x^2-3=0$

$x>0$　より、　$x=\sqrt{3}$

まとめ

・無限という概念を使ってはいるものの、無理数が分数で表せることを強調すると、連分数

のよさや、自分達のやっていることに満足感が得られる。

◎２時間目

$\boxed{\text{導入}}$

・１時間目の無限連分数の計算について、全ての生徒が理解している状態でないと、それ以降の作業が全くできなくなってしまうので、授業の始めに十分な確認が必要である。グループ内で教え合うなどして効率よく復習させるとよい。

・本時の課題を明確に伝えて、グループで競争させると盛り上がる。また、本時の課題についてどう感じるかを生徒に聞くと、$\sqrt{2010}$ という値が余り見掛けない大きな数なので、「難しそう。」、「自分には無理では。」などという感想を答える。そのような難しい課題でも１時間後には「できた。」という達成感をもたせるために、課題に対する感想を聞くとよい。

・2010 という数はそのときの西暦など適宜変更するとよい。

$\boxed{\text{展開①}}$

・ヒントを一つずつ与えていくことで､生徒にとって難しそうだが何とか理解できるという、ぎりぎりの状態で考えさせる。また、生徒の実態に合わせて進度をコントロールすることもできる。

・ヒントに対する答えを全体で発表させるか、グループ内だけの意見交換に留めるかは、授業の方針によって変わってくる。発表を重視したり、進度をそろえたりしたい場合にはその都度答えを発表させた方がよい。しかし、グループ間の競争を意識させる場合には、全体での発表はせず、進度の極端に遅いグループに対してのみアドバイスを与える。

・少ないヒントで様々な見方をして課題を解決するグループが出てくる可能性があるので、机間指導では注意深く様子をうかがう。

・（ヒント１）全員が６問を解くのは時間が掛かりすぎるので、グループで手分けをさせる。この際にリーダーを作っておくと、グループ内で効率的に値を求めることができる。$\sqrt{8}$ を $2\sqrt{2}$ と直すグループが出てくるが、$\sqrt{8}$ のままの方が考えやすいことを、どのタイミングで伝えるかが重要である。

・（ヒント２） $\sqrt{13}$、$\sqrt{14}$ も連分数で表すと、より規則性が発見しやすくなる。自主的に生徒が調べるようにさせたい。

・（ヒント３）初めは自然数の正の平方根の小数表示を示さずに発問した方がよい。その後示すと、早い段階で最初の自然数が整数部分を表していることに気付く。また、残りの分数部分が小数部分を表していることも伝えるとよい。$\sqrt{2010}$ の整数部分が 44 であることが分からない生徒もいるので電卓を使わせると、今回の趣旨と違うところで悩むことなくできる。ただし、電卓を使わずに求められることも大切なので、生徒の実態に合わせて対応するとよい。

・（ヒント４）分数部分の分母の先頭の数は整数部分の 2 倍になっているが、ヒント４を示す以前に気付いていることが予想される。

・（ヒント５）分数部分の分子の数は、１から１ずつ増加して分数部分の先頭の数と一致すると再び１に戻る。答え方が難しいので様々な解答が考えられる。

・課題の答えは、 $44+\frac{74}{88+}\frac{74}{88+}\frac{74}{88+}\frac{74}{88+}\cdots\cdots$ である。44 は $\sqrt{2010}=44.833\cdots$ の整数部分、74 は

$2010-44^2=74$、88 は 44 の 2 倍によって求まる。

・答えは一通りでないことにも注意が必要である。例えば、$\sqrt{5}$ については、授業では

$2+\frac{1}{4+}\frac{1}{4+}\frac{1}{4+}\frac{1}{4+}\cdots\cdots$ と表したが、$1+\frac{4}{2+}\frac{4}{2+}\frac{4}{2+}\frac{4}{2+}\cdots\cdots$ なども考えられる。

展開②

・展開①で得た規則性を使って、様々な自然数の正の平方根を無限連分数で表したり、その逆をすることで理解を深め、次の一般化につなげる。

・一般化に入る前に $\sqrt{4},\sqrt{9},\sqrt{16}\cdots$ を無限連分数で表すとどうなるかを確認した上で取り組ませるとよい。

・無限連分数で表す場合の要素は三つで、整数部分と、分数部分の分母の先頭の数、分数部分の分子であることを強調することで、どこに目を向ければよいかをはっきりさせる。

・一般化の答えは、$m+\frac{n}{2m+}\frac{n}{2m+}\frac{n}{2m+}\frac{n}{2m+}\cdots\cdots=\sqrt{m^2+n}$ (m:自然数、n:0以上の整数) である。

まとめ

・数学Ｂをまだ学んでいない生徒に対しては、数の並びから規則性を見付け一般化する概念は数学Ｂの数列で学ぶことを伝えるとよい。

・数学Ｂを学んでいる生徒に対しては、今回の自然数の正の平方根と無限連分数の関係は数学Ｂの群数列と関係が深いことを伝えるとよい。

$$\underbrace{\frac{0}{2},\frac{1}{2},\frac{2}{2}}_{1群},\Bigg|\underbrace{\frac{0}{4},\frac{1}{4},\frac{2}{4},\frac{3}{4},\frac{4}{4}}_{2群},\Bigg|\underbrace{\frac{0}{6},\frac{1}{6},\cdots\cdots}_{3群}\Bigg|\underbrace{\frac{0}{2m},\frac{1}{2m},\cdots\frac{n}{2m},\cdots\frac{2m}{2m}}_{m群}$$

項番号が√の中の自然数で、群番号が整数部分、数列の分母が無限連分数の分数部分の分母の先頭の数、数列の分子が無限連分数の分数部分の分子となっている。

＜連分数の他の展開例＞

連分数は高校数学と関連が深く、次のような授業の展開も考えられる。

① ユークリッドの互除法と連分数の関係

例えば、112 と 60 の最大公約数をユークリッドの互除法で求めると、

$112\div 60=1\quad\cdots 52$

$60\div 52=1\quad\cdots 8$

$52\div 8=6\quad\cdots 4$

$8\div 4=2$

より、最大公約数は 4 である。四つの計算式の様子を連分数で表すと、

$$\frac{112}{60}=1+\frac{52}{60}=1+\frac{1}{1+\frac{8}{52}}=1+\frac{1}{1+\frac{1}{6+\frac{4}{8}}}=1+\frac{1}{1+\frac{1}{6+\frac{1}{2}}}$$

となる。

② 無理数の整数部分・小数部分と分母の有理化の概念を利用して無限連分数展開する。

例えば、$\dfrac{\sqrt{3}+2}{3}$の整数部分・小数部分（整数部分 1・小数部分$\dfrac{\sqrt{3}-1}{3}$）を求めるという問題がよくあるが、それは$\dfrac{\sqrt{3}+2}{3}$の無限連分数表示の始めの計算をしているに過ぎない。それ以降の計算も同じことを繰返し行っていくと、無理数の無限連分数表示ができあがる。また、その過程で分母の有理化が何度も登場するので復習になる。

$$
\begin{aligned}
\frac{\sqrt{3}+2}{3} &= 1+\frac{\sqrt{3}-1}{3} \\
&= 1+\cfrac{1}{\cfrac{3}{\sqrt{3}-1}} \\
&= 1+\cfrac{1}{\cfrac{3\sqrt{3}+3}{2}} \\
&= 1+\cfrac{1}{4+\cfrac{3\sqrt{3}-5}{2}} \\
&= 1+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{3\sqrt{3}+5}} \qquad \leftarrow ※ \\
&= 1+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{10+3\sqrt{3}-5}} \\
&= 1+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{10+\cfrac{1}{\cfrac{3\sqrt{3}+5}{2}}}} \\
&= 1+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{10+\cfrac{1}{5+\cfrac{3\sqrt{3}-5}{2}}}} \\
&= 1+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{10+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{3\sqrt{3}+5}}}}
\end{aligned}
$$

↑

※と同じなので以下繰り返す

$$
= 1+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{10+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{10+\cfrac{1}{5+\cdots}}}}}
$$

<生徒アンケート結果>

①今回の授業を受けてどうでしたか？

とても楽しかった	楽しかった	つまらなかった	とてもつまらなかった
7	２０	0	0

②今回の授業の難易度はどうですか？

難しい	ちょうどよい	簡単
7	２０	0

③今回の授業の説明は分かりやすかったですか？

とても分かりやすい	分かりやすい	分かりにくい	とても分かりにくい
8	１９	0	0

④今回の授業では驚くことや感動することはありましたか？

あった	なかった
２５	2

↓

・無理数が分数で表せるなんて！
・こんなこと知っている高校生はなかなかいないことを聞いてうれしくなった。
・複雑な計算も法則に気付けば簡単になるということ。
・連分数という概念に驚きました。
・無理数を無限連分数で表したときの法則性。
・同じ問題でも導き方が何通りもあって、なるほどと思うところがあった。
・きれいな分数になってなんかすごいなと思った。
・連分数が他の分野にもつながっていることに驚きました。
・$\sqrt{2010}$ を無限連分数で表わせたこと。

⑤授業後の感想

・他のグループに負けないようにグループでまとまってやれたことがよかった。
・今まで以上にグループで話し合いながらできた。
・グループ内の話合いが多くあって、お互いに協力しながら答えを求められた。また、授業も分かりやすく楽しくできた。
・他のグループとの意見交換もやれるともっと面白かったのでは。
・解けたとき、すごくうれしかった。
・最初はすごく難しく感じていたけど、少しずつ丁寧に解いていけば解決できることに面白さを感じました。
・自分一人だったら多分何も分からなかったけど、グループでヒントもあって自分で解けて楽しかった。

・今後もグループで競って楽しい授業をやりたい。
・黄金比がきれいだった。
・自分はほとんど説明をされる側だったので、教える側になれるように気付きを大切にしていきたい。
・問題をもう少しやさしくしてほしい。