

バナッハ=タルスキーのパラドックス

小澤 登高(おざわ なるたか)

1. バナッハ=タルスキーのパラドックス

定理 1 (Banach–Tarski 1924). 3次元空間内の半径1の球体を有限個(実は5個で十分)に分割したのち、それらを別の方法で組み合わせることにより半径1の球体を2個作ることが出来る。

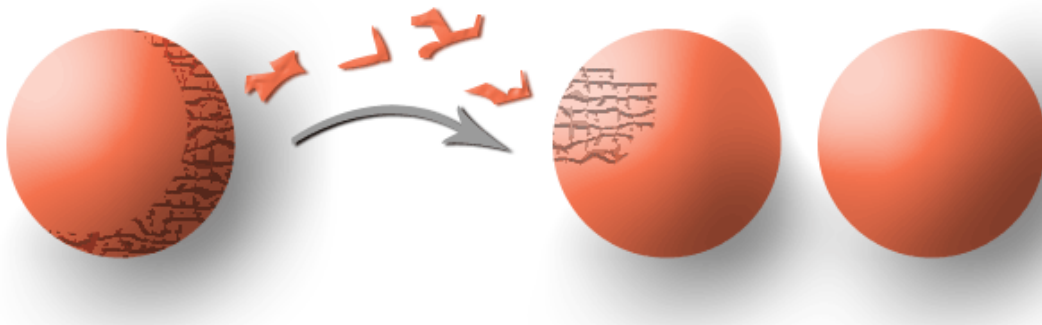


図 1: バナッハ=タルスキーのパラドックス (Wikipedia より引用)

バナッハ=タルスキーのパラドックスとして知られる上の定理を紹介することが、本講義の主題である。さっそく定理の意味するところについて説明しよう。分割したピースを伸ばしたり縮めたり変形したりすることはもちろん禁止されているが、平行移動したり回転させたりすることはできるものとする。さらにこの過程でピース同士が重なるようなことがあっても、ぶつからずに通り抜けることが仮定されている。

より厳密には、単位球を $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$ と書くとき、定理の主張は次のようになる。単位球 D は

$$D = A_1 \sqcup \cdots \sqcup A_k \sqcup B_1 \sqcup \cdots \sqcup B_l$$

と分割できて(ここで、 $A \sqcup \cdots \sqcup Z$ は A, \dots, Z の直和集合である。つまり A, \dots, Z の和集合 $A \cup \cdots \cup Z$ のことだが、 A, \dots, Z はどの2つも共通部分を持たないことが要請されている) さらに A_i 及び B_j と合同な A'_i 及び B'_j で(ここでは鏡像は考えなくともよい)

$$D = A'_1 \sqcup \cdots \sqcup A'_k = B'_1 \sqcup \cdots \sqcup B'_l$$

を満たすものを見つけてくる事ができる。これが定理の主張である。合同な図形の体積は同じなので、空間図形 C の体積を $m(C)$ と書くことにすると、

$$\begin{aligned} m(D) &= m(A_1 \sqcup \cdots \sqcup A_k \sqcup B_1 \sqcup \cdots \sqcup B_l) \\ &= m(A_1) + \cdots + m(A_k) + m(B_1) + \cdots + m(B_l) \\ &= m(A'_1) + \cdots + m(A'_k) + m(B'_1) + \cdots + m(B'_l) \\ &= m(A'_1 \sqcup \cdots \sqcup A'_k) + m(B'_1 \sqcup \cdots \sqcup B'_l) \\ &= m(D) + m(D) \end{aligned}$$

(♠)

となり、上の定理は一見、 $1 = 2$ (あるいは $\frac{4\pi}{3} = 2 \cdot \frac{4\pi}{3}$) を主張しているように見える。それが上の定理が「パラドックス」と呼ばれる由縁であるが、定理は歴とした定理である。それでは以上の話のどこに抜け道があるかという、「体積」というものが全ての図形に対して定義できるわけではない、従って計算式(♠)は不適當であるということにある。定理1に使われる分割ピースは、いかなる意味においても体積を測ることができない図形で、具体的に構成することはできない。質量保存の法則がある限り、物理的にも存在し得ない。ただ存在を証明できるだけである。

次の章では、長さや面積、体積をどうやって測るかについて考察する。説明の都合上、主に面積つまり2次元の場合を説明する。その前に寄り道をし、現在も完全には未解決の「タルスキーの円積問題」について述べよう。

寄り道。面積が等しい2つの多角形は、一方を直線で幾つかに切り分けたのち再構成することで、もう一方を作ることができる。では、面積が同じ正方形と円板ではどうだろうか？正方形を滑らかな曲線(幾つかの例外点があってもよい)に沿って幾つかに切り分けたとすると、得られたピースたちの境界における凸曲線の長さの和と凹曲線の長さの和は等しくなる(直線は凸でもあり凹でもある)。ピースたちをどのような方法で組み合わせたとしても、境界の凸曲線の長さの和と凹曲線の長さの和は等しいままである。結局、正方形を滑らかな曲線に沿って切り分けたのち再構成することによってでは、円板にすることはできない。では、ピースたちに境界の条件を課さなければどうか？というのがタルスキーの円積問題である。比較的最近(1990年)になってこれが可能であるということが証明されたが、その分割は非構成的で、ピースの個数は 10^{50} 個、さらにより悪いことにいわゆる非可測(どうやっても面積を測れない)な図形を必要とした。円積問題を構成的に解決できるか否かは現在でも未解決である。



図2: ロマネスコ
(カリフラワーの一種)

2. 長さ・面積・体積をどうやって測るか

日本では古来、田地に対して面積当たりで課税されていたが、それは田地の面積がそこに栽培できる稲の量にだいたい比例していたからであろう。逆に言えば、田地の面積は概ねそこに植えられる苗の本数に比例するのであり、そこから小学校で習う長方形の面積の公式「縦の長さ×横の長さ」を得ることが出来る。(ところで、「底辺の長さ×高さ」ではなく「縦の長さ×横の長さ」と教えているのはなぜだろうか?)



図3: 田

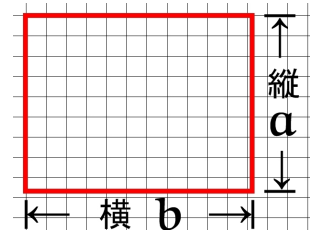


図4: 長方形

実際、一辺の長さが1の単位正方形の面積を1とした場合、一辺の長さが $\frac{1}{n}$ の正方形の面積は $(\frac{1}{n})^2$ となる。従って、縦の長さが a で横の長さが b の長方形 $R_{a,b}$ の面積 $m(R_{a,b})$ は、不等式

$$(a - \frac{1}{n})(b - \frac{1}{n}) \leq \frac{1}{n^2} [na] \cdot [nb] \leq m(R_{a,b}) \leq \frac{1}{n^2} ([na] + 1)([nb] + 1) \leq (a + \frac{1}{n})(b + \frac{1}{n})$$

を満たす(図4)。この不等式の両端は、 n を大きくすることにより、いくらでも ab に近くすることができるので、長方形の面積は $m(R_{a,b}) = ab$ であることが分かる。この論法は二重帰謬法と呼ばれ、古代ギリシャ時代より使われている由緒正しいものである。この論法を発展させて、もっと一般の図形 S の面積をどうやって測ればよいかを考えよう。

以下、簡単のため図形は全て有界なものを考えることにする。図形 S が与えられたとき、まずはそれを座標平面上に置く(図5)。どのように置いたとしても結果は同じになるのだが、それについては後

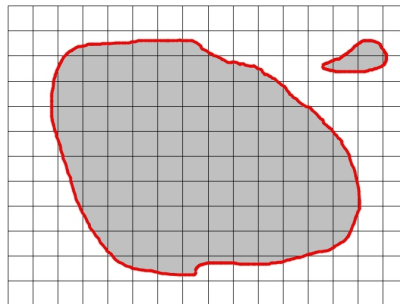


図 5: 一般の図形 S

で述べる。図形を1目盛 $\frac{1}{n}$ の「方眼紙」と重ね合わせ、図形 S に完全に含まれるマス目の数を $\underline{N}_n(S)$ 、図形 S と触れ合うマス目の数を $\overline{N}_n(S)$ とする(図6~7)。このとき、1マスの面積は $\frac{1}{n^2}$ なので、図形

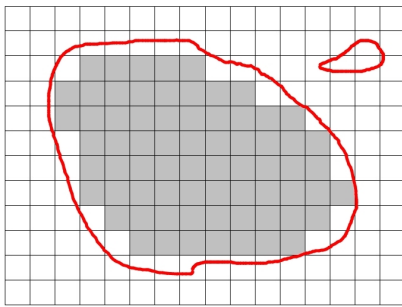


図 6: $\underline{N}_n(S) = 70$

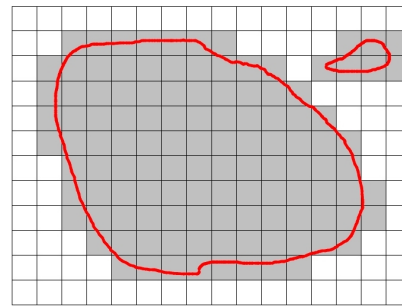


図 7: $\overline{N}_n(S) = 117$

S の面積 $m(S)$ は(もしそのようなものが存在するなら)

$$\frac{1}{n^2} \underline{N}_n(S) \leq m(S) \leq \frac{1}{n^2} \overline{N}_n(S)$$

を満たすはずである。極限 $n \rightarrow \infty$ を考えると、左辺は(有界な)概ね増大列、右辺は概ね減少列なので、極限值

$$\underline{m}_J(S) := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \underline{N}_n(S) \quad \text{および} \quad \overline{m}_J(S) := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \overline{N}_n(S)$$

が存在する。一般に $m_J(S) \leq \bar{m}_J(S)$ である。これらの値はそれぞれ、Jordan 内測度、Jordan 外測度と呼ばれる。3次元、あるいは他の次元でも同様の定義ができる。「測度」という用語は、1次元なら「長さ」、2次元なら「面積」、3次元なら「体積」のことを指すが、現実世界ではともかく数学においては次元に依らない用語があった方が便利なので使われている。

定義 2. Jordan 内測度と Jordan 外測度が一致するとき、 S は面積確定 (3次元なら体積確定、一般には Jordan 可測) であると言い、 S の面積 (体積、Jordan 測度) を

$$m_J(S) := \underline{m}_J(S) = \bar{m}_J(S)$$

で定義する。他の次元においても同様である。面積確定な図形全体の集合を \mathfrak{R}_J と書くことにする。

直感的には明らかだが、多角形や、境界が有限個の点を除いて滑らかな図形など「真つ当な」図形は面積確定である。一方、

$$([0, 1] \cap \mathbb{Q})^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x, y \in \mathbb{Q}, 0 \leq x, y \leq 1\}$$

などは Jordan 内測度が 0、外測度が 1 なので、面積確定でない。実は数学には Jordan 測度より適用範囲がはるかに広い Lebesgue 測度というものがあり、そのような測度に対しては、 $([0, 1] \cap \mathbb{Q})^2$ やその他の可算集合は Lebesgue 測度が確定してゼロとなることが知られている。Lebesgue 測度については本稿では扱わない。話を Jordan 測度に戻すと、 S が面積確定であることは、 S の「境界」 ∂S の Jordan 外測度 $\bar{m}_J(\partial S)$ が 0 であることと同値である。

定理 3. 図形 S が面積確定であるか否かは、 S をどのように座標平面上に置くに依らない。さらに、面積確定の場合、その面積 $m_J(S)$ も S の配置に依らない。

証明. 単位正方形 B が単位方眼紙の上に置かれている状況を考える。 B がどのように置かれていたとしても、 B は B の中心を含むマス目を中心とする 3×3 のマスに含まれる (図 8)。(B をなるべく多くのマス目に触れるように配置したら、最大何個のマス目と触れるのだろうか?) 従って、もし座標平面上に置かれた図形 S_1 と S_2 が合同なら、その境界 ∂S_1 と ∂S_2 も合同であり、

$$\frac{1}{9} \bar{N}_n(\partial S_1) \leq \bar{N}_n(\partial S_2) \leq 9 \bar{N}_n(\partial S_1)$$

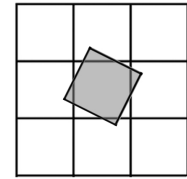


図 8: 配置例

となる。このことから、境界 ∂S_1 の Jordan 外測度が 0 であること (= S_1 が面積確定であること) と、 ∂S_2 の Jordan 外測度が 0 であること (= S_2 が面積確定であること) は同値であることが分かる。

面積が等しいことを示すには、図形 S_1 と S_2 の Jordan 測度が一致することを直接示すのではなく、 S_1 を S_2 に移す変換に対して Jordan 測度が不変であることを示そう。図形 S_1 と S_2 が合同であるので、定義により、 $\Phi(S_1) = S_2$ となる等長変換 Φ が存在する。ここで、写像 Φ が等長変換であるというのは、平面上の任意の 2 点 x, y に対して $\text{dist}(\Phi(x), \Phi(y)) = \text{dist}(x, y)$ を満たすことを意味する (このような写像は直線を直線に移し、それゆえ一次変換でもある)。ちなみに等長変換は回転写像、平行移動写像、反転写像の組み合わせで表すことが出来ることが知られている。勝手な大きさの正方形 B を等長変換 Φ で移した図形 $\Phi(B)$ の面積が元の面積と変わらないことは簡単に示せるので、正方形の面積を基準にして定義した Jordan 測度も Φ で不変であることが分かる。□

面積確定でない図形の面積はどうやって決めればよいのだろうか。これを考えるために、面積という概念が持つ性質を抽象的に抜き出してみよう。面積 $m(S)$ を測ることのできる図形 S の集合を \mathfrak{R} と書くことにすると、 \mathfrak{R} と $m: \mathfrak{R} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ は次の条件を満たすべきであろう。

- (1) 単位正方形は \mathfrak{R} に属し、その面積は 1
- (2) $S, T \in \mathfrak{R} \Rightarrow S \cup T, S \cap T \in \mathfrak{R}$
- (3) $S, T \in \mathfrak{R}, S \subset T \Rightarrow T \setminus S := \{p : p \in T \text{ かつ } p \notin S\} \in \mathfrak{R}$
(次の条件と合わせれば、このときさらに $m(S) \leq m(T)$ となることが分かる。)
- (4) $S, T \in \mathfrak{R}, S \cap T = \emptyset \Rightarrow m(S \cup T) = m(S) + m(T)$

- (5) 図形 S が以下の条件を満たすなら、 $S \in \mathfrak{R}$
 任意の $\varepsilon > 0$ に対して $T_1 \subset S \subset T_2$, $m(T_2) - m(T_1) < \varepsilon$ となる $T_1, T_2 \in \mathfrak{R}$ が存在する。
 (6) $S \in \mathfrak{R}$, $S \equiv T$ (合同) $\Rightarrow T \in \mathfrak{R}$, $m(S) = m(T)$

前段落で見たように、 \mathfrak{R} として面積確定な図形全体の集合 \mathfrak{R}_J 、 m として Jordan 測度 m_J を取れば上の条件を全て満たす。逆に、上の条件を全て満たす \mathfrak{R} と m の組は Jordan 測度を拡張したものになっている。つまり $\mathfrak{R}_J \subset \mathfrak{R}$ かつ $S \in \mathfrak{R}_J$ に対して $m(S) = m_J(S)$ となる (上の条件から、正方形 B は境界を含んでいようが含んでいまいが面積 $m(B)$ は変わらないことを示せる)。

問題 (♡)

\mathfrak{R} として有界な図形全体の集合をとったとき、上の条件全てを満たす $m: \mathfrak{R} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ は存在するか

実は問題 (♡) の答えは、次元が 2 以下なら YES であり (さらに条件を満たす m は複数存在する)、次元が 3 (以上) なら NO である。従って、2 次元空間内では前章の計算式 (♠) が有効であり、バナッハ＝タルスキーのパラドックスのようなことは起こらないのである。問題 (♡) において 2 次元以下と 3



図 9: チョコレートの無限増殖法 (imgur.com より引用)

次元以上を分けるものが何であるかは次の章で見ることにするが、その前に寄り道をして、曲面積について少し述べておく。

寄り道. 上で述べた面積の話は、2 次元空間内の図形の面積の話であり、3 次元空間内の曲面の面積などは図形が「たいら」でないため定義がずいぶんややこしくなる。それゆえ本稿では厳密な定義は取り扱わない。それでもアルキメデスは球面の面積が何であるかを色々な方法で考察し、 $4\pi R^2$ の公式にたどり着いた。

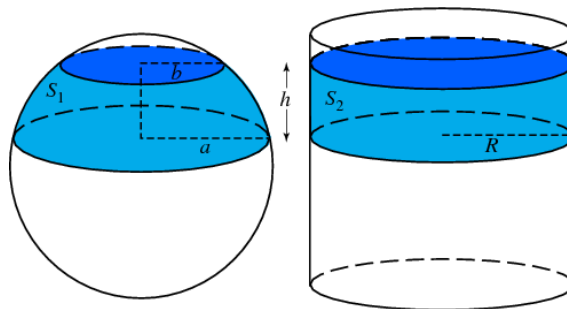


図 10: アルキメデスの定理 (Wolfram Math World より引用)

さらに彼の発見によれば、半径 R の球を 2 つの平行面で切ったときにできる球帯の表面積 (上下の切り口は含まない) は $2\pi R h$ で、球帯の高さ h により依存し球帯の位置には依存しない (図 10)。やや驚くべき事実である。面積比の正しい世界地図を作る方法のひとつであるランベルト正積円筒図法はこの事実を元になっている。

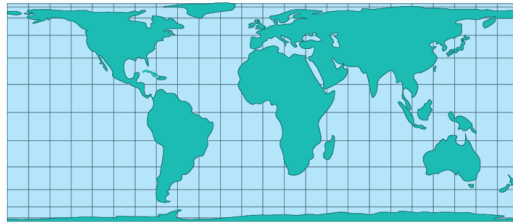


図 11: ランベルト正積地図 (US Geological Survey より引用)

クイズ. プールの底に半径 100cm の円板状に穴が開いている。これを完全に塞ぎたいのだが、幅 1cm の長い板が幾つかあるばかりである。穴を完全に塞ぐためには板は最低何枚必要だろうか?¹ ただし、板は厚さがゼロでいくらかでも重ねられるが、切ったり変形したりすることはできないものとする。

3. 自由群と 3 次回転群

2次元空間 \mathbb{R}^2 と 3次元空間 \mathbb{R}^3 の違いのうち、今回の講義に関して重要となるのは、合同関係の複雑さである。以下、考える空間の次元を d で表すことにする。 $d=2$ でも $d=3$ でも、図形 S_1 と S_2 が合同であるのは、2点間の距離を変えない全単射 $\Phi: S_1 \rightarrow S_2$ が存在することを意味する。このような等長変換 Φ は空間全体 \mathbb{R}^d の等長変換に拡張でき、それは回転写像、平行移動写像、反転写像の組み合わせで書くことができる。(線形代数を知っていれば、この事実の証明はそれほど難しくない。)そこで空間 \mathbb{R}^d の等長変換全体のなす集合を $E(d)$ と書くことにする。この集合 $E(d)$ は変換群となる。ここで、写像たちの(空でない)集合 G が(変換)群であるとは、

- (1) Φ が G に含まれる写像なら、その逆写像 Φ^{-1} も G に含まれる
- (2) Φ と Ψ が G に含まれる写像なら、その合成写像 $\Phi \circ \Psi$ も G に含まれる

の 2 条件を満たすときを言う。この 2 条件から特に、恒等写像 Id は G に含まれることが要請される。上で見た \mathbb{R}^d 上の等長変換群 $E(d)$ は d 次ユークリッド群と呼ばれている。まとめると、

$$S_1 \equiv S_2 \iff \Phi(S_1) = S_2 \text{ となる } \Phi \in E(d) \text{ が存在する}$$

ユークリッド群 $E(d)$ に含まれる重要な変換群である回転群 $R(d)$ に注目しよう。(回転群は一般には $SO(d)$ と書かれるが、本稿では $R(d)$ としておく。)これは原点を中心とした回転写像全体のなす変換群である。2 次の回転写像は行列を使って

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

と表すことができ、これらは簡単な関係式 $R(\theta)R(\theta') = R(\theta + \theta') = R(\theta')R(\theta)$ を満たす。一方、3 次の回転写像は行列(の積)を使って $R_x(\alpha)R_y(\beta)R_z(\gamma)$ と表される。ここで $R_x(\alpha)$ は x 軸を軸とした角度 α の回転行列である。 y, z についても同様。注意しなければならないのは、軸の異なる回転、例えば $R_x(\alpha)$ と $R_y(\beta)$ は可換でない、つまり $R_x(\alpha)R_y(\beta) \neq R_y(\beta)R_x(\alpha)$ であるということである。さらに言えば、ほとんど全ての α, β に対して、 $R_x(\alpha)$ と $R_y(\beta)$ は非自明な関係式を一切満たさない。

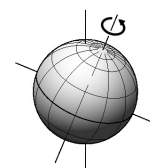


図 12: 回転

$$R_x(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}, R_y(\beta) = \begin{pmatrix} \cos \beta & 0 & -\sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \beta & 0 & \cos \beta \end{pmatrix}, R_z(\gamma) = \begin{pmatrix} \cos \gamma & -\sin \gamma & 0 \\ \sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

¹200 枚あれば十分なことはいくらに分かると思うが、それより少なくとも大丈夫だろうか?

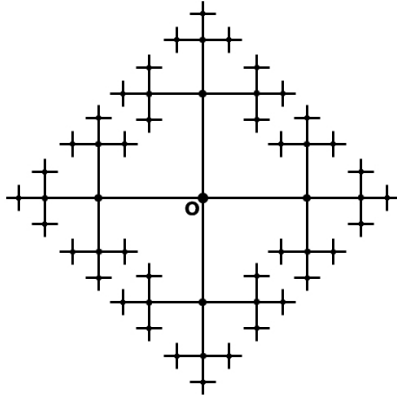


図 13: 4-正則樹木グラフ

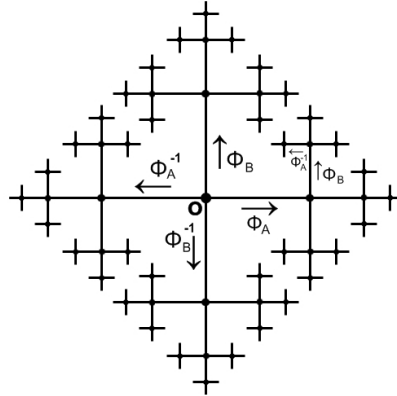


図 14: 4-正則樹木グラフの変換群

この事実をより詳細に説明するため、先ずはより簡単な 4-正則樹木グラフ T の場合を考えよう。4-正則樹木グラフとは、各頂点から 4 本ずつ辺が出ているグラフで、勝手な頂点から別の頂点へ行く道が唯 1 つしか無いようなものを言う (図 13)。このグラフ T に図にあるように東西南北の方角を考える。さらにグラフ T の頂点の集合を V とし、基準となる頂点 $o \in V$ を 1 つ選ぶ。頂点集合 V 上の写像 $\Phi_A: V \rightarrow V$ を、各頂点を「一歩」東へ動かす写像とする (図 14)。その逆写像 Φ_A^{-1} は各頂点を一歩西へ動かす写像である。同様に Φ_B を、各頂点を一歩北へ動かす写像とする。例えば $\Phi_B^{-1} \circ \Phi_A^{-1} \circ \Phi_B \circ \Phi_A$ は、東へ動いた後、北へ動き、さらに西、南へと動く写像である。京都のような格子状の地形であれば元に戻ってくるが、樹木上ではそうはならない。つまり、 $\Phi_B^{-1} \circ \Phi_A^{-1} \circ \Phi_B \circ \Phi_A \neq \text{Id}$ である。さらに、 Φ_A と Φ_B が非自明な関係性を一切満たさない。つまり、 Φ_A の非自明なベキと Φ_B の非自明なベキを交互に合成した写像は決して恒等写像にならない。実際、 Φ がそのような写像であるとしよう。

$$(*) \quad \Phi = \Phi_A^{m_1} \circ \Phi_B^{n_1} \circ \cdots \circ \Phi_A^{m_k} \circ \Phi_B^{n_k}, \quad m_1, \dots, m_k, n_1, \dots, n_k \in \mathbb{Z} - \{0\}$$

ただし (*) には他にも、左端が Φ_B のベキである、右端が Φ_A のベキである、単に Φ_A あるいは Φ_B のみのベキであってももう一方は出てこないなどの可能性がある。このとき Φ を基準点 o に適用すると、先ずは $\Phi_B^{n_k}$ で南北方向に動き、さらに $\Phi_A^{m_k}$ で東西方向に動き...となって逆戻りすることがないため、決して基準点 o には戻ってこない。さらに (*) ような Φ の表示は $\Phi(o)$ によって一意的に決まる。(*) のように定義される写像全体の集合は恒等写像 Id と合わせて (V 上の) 変換群となる。この変換群を自由群と呼び、 F と書くことにする。

4-正則樹木グラフ T の頂点集合 V が、バナッハ＝タルスキーのパラドックスの簡易版となることを見よう。各頂点 p に対して、 o から p へ行く順路を考え、最後のステップが Φ_A (東行) であるような頂点 p 全体の集合を V_A と書くことにする。すなわち V_A は図 15 において a のラベルがついている頂点たちの集合である。同様に最後のステップが Φ_A^{-1} である頂点たちの集合を $V_{\bar{A}}$ と書くことにする。 $V_B, V_{\bar{B}}$ も同様に定めたいが、そうすると $V_A \sqcup V_{\bar{A}} \sqcup V_B \sqcup V_{\bar{B}} = V - \{o\}$ となり都合が悪いので、基準点 o の真北方向、真南方向にある頂点は全て V_B に属するものとする。これで、 $V_A, V_{\bar{A}}, V_B, V_{\bar{B}}$ は V の分割を与えることになる。

$$V = V_A \sqcup V_{\bar{A}} \sqcup V_B \sqcup V_{\bar{B}}$$

一方、図 15 から分かるように、

$$(\diamond) \quad V = V_A \sqcup \Phi_A(V_{\bar{A}}) = V_B \sqcup \Phi_B(V_{\bar{B}})$$

となり、 V を分割した 4 つのピースを 2 組に分け、それぞれ

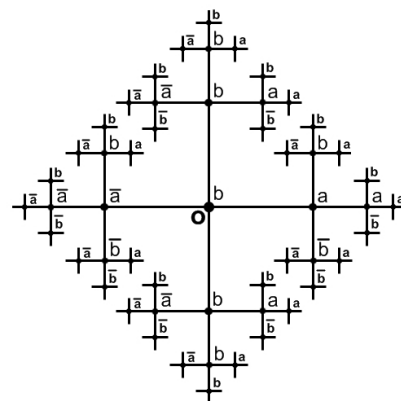


図 15: 4-正則樹木グラフの分割

の組の一方を「平行移動」させて組み合わせることにより、 V を2つ得ることができた。すなわち4-正則樹木グラフに対するバナッハ＝タルスキーのパラドックスである。また、写像 $\Theta: V \rightarrow V$ を

$$(\$) \quad \Theta(p) = \begin{cases} p & \text{if } p \in V_A \sqcup V_B \\ \Phi_A(p) & \text{if } p \in V_{\bar{A}} \\ \Phi_B(p) & \text{if } p \in V_{\bar{B}} \end{cases}$$

で定義すれば、次の条件を満たす。

- (1) 任意の p に対して、頂点 p と $\Theta(p)$ は隣接している。
- (2) Θ は2対1写像である。つまり、任意の p に対して、 Θ による逆像 $\Theta^{-1}(p)$ は2点からなる。

次章では、4-正則樹木グラフに対するバナッハ＝タルスキーのパラドックスを正真正銘のバナッハ＝タルスキーのパラドックスにアップグレードすることを考える。ここでは、そのために必要となる、自由群 F と3次回転群 $\mathbf{R}(3)$ の関係について述べる。本稿では特に $\theta = \arccos \frac{1}{3}$ と置いて、回転写像 $R_x(\theta)$ と $R_y(\theta)$ について考察する。これらの回転写像を 3×3 直交行列で行列表示をすると、

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{2\sqrt{2}}{3} \\ 0 & \frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & -\frac{2\sqrt{2}}{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{2\sqrt{2}}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

となる。以下簡単のため、3次回転群 $\mathbf{R}(3)$ の元とその行列表示を同一視することにする。座標系は常に固定されているので混乱は起こらないはずである。

命題 4. 写像 $\sigma: F \rightarrow \mathbf{R}(3)$ を $\sigma(\text{Id}) = I$, $\sigma(\Phi_A) = R_x(\theta) = A$, $\sigma(\Phi_B) = R_y(\theta) = B$,

$$\sigma(\Phi_A^{m_1} \circ \Phi_B^{n_1} \circ \cdots \circ \Phi_A^{m_k} \circ \Phi_B^{n_k}) = A^{m_1} B^{n_1} \cdots A^{m_k} B^{n_k}, \quad m_1, \dots, m_k, n_1, \dots, n_k \in \mathbb{Z} - \{0\}$$

として定義する(式(*)とその注釈を参照すること)。このとき、 σ は単射である。更には、 $\Phi \in F$ が

$$\sigma(\Phi) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

を満たすのは、 $\Phi = \Phi_A^m$, $m \in \mathbb{Z}$ のときに限る。

証明. 任意の $n \in \mathbb{Z}$ に対して

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos n\theta & -\sin n\theta \\ 0 & \sin n\theta & \cos n\theta \end{pmatrix}, \quad B^n = \begin{pmatrix} \cos n\theta & 0 & -\sin n\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin n\theta & 0 & \cos n\theta \end{pmatrix}$$

である。ここで漸化式

$$\cos n\theta = 2 \cos \theta \cdot \cos(n-1)\theta - \cos(n-2)\theta$$

(これは加法公式と積和公式から導ける) を使うと、 $\cos \theta = \frac{1}{3}$ だったから、

$$3^n \cos n\theta = 2 \cdot 3^{n-1} \cos(n-1)\theta - 9 \cdot 3^{n-2} \cos(n-2)\theta$$

となり、全ての整数 $n \neq 0$ に対して $3^{|n|} \cos n\theta$ は3で割り切れない整数であることが数学的帰納法で示される。つまり、 $n \neq 0$ のとき、 $\cos n\theta = \frac{a_n}{3^{|n|}}$, $a_n \in \mathbb{Z}$, $a_n \not\equiv 0 \pmod{3}$ である。同様に、 $n \neq 0$ のとき、 $\sin n\theta = \frac{b_n \sqrt{2}}{3^{|n|}}$, $b_n \in \mathbb{Z}$, $b_n \not\equiv 0 \pmod{3}$ である。

さて、勝手な $\Phi \in F$ が与えられたとする。 Φ が Φ_A のベキなら当然、 $\sigma(\Phi)$ はベクトル $(1, 0, 0)$ を固定する(本来は縦ベクトルで表記するべきであるが、見苦しいので横ベクトルで表記している)。背理法のため Φ が Φ_A のベキでないにもかかわらずベクトル $(1, 0, 0)$ を固定すると仮定する。このとき、 Φ の両側から Φ_A のベキを取り去って

$$\sigma(\Phi) = B^{n_1} A^{m_2} \cdots B^{n_{k-1}} A^{m_k} B^{n_k}, \quad n_1, \dots, n_k, m_2, \dots, m_k \in \mathbb{Z} - \{0\}$$

の形をしているとしてよい。

ここでベクトル空間 \mathbb{R}^3 の部分集合

$$X_A := \left\{ \frac{1}{3^m} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z\sqrt{2} \end{pmatrix} : m \in \mathbb{N}, x, y, z \in \mathbb{Z}, x \equiv 0 \pmod{3}, y \not\equiv 0 \pmod{3}, z \not\equiv 0 \pmod{3} \right\}$$

$$X_B := \left\{ \frac{1}{3^m} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z\sqrt{2} \end{pmatrix} : m \in \mathbb{N}, x, y, z \in \mathbb{Z}, x \not\equiv 0 \pmod{3}, y \equiv 0 \pmod{3}, z \not\equiv 0 \pmod{3} \right\}$$

を考えると、任意の整数 $n \neq 0$ に対して $B^n(1, 0, 0) \in X_B$ 及び $B^n X_A \subset X_B$ が成り立つ。実際、

$$\frac{1}{3^m} B^n \begin{pmatrix} x \\ y \\ z\sqrt{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{3^{m+|n|}} \begin{pmatrix} a_n x - 2b_n z \\ 3^{|n|} y \\ (b_n x + a_n z)\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

で、 $x \equiv 0 \pmod{3}$, $b_n, z \not\equiv 0 \pmod{3}$ だから

$$a_n x - 2b_n z \equiv 2b_n z \not\equiv 0 \pmod{3}$$

となる。残りも同様である。さらに、 x 座標と y 座標を入れ換えて考えれば、任意の整数 $n \neq 0$ に対して $A^n X_B \subset X_A$ も成り立つ。結局、 n_i や m_j のいずれもゼロでないなら、

$$\begin{aligned} B^{n_1} A^{m_2} \dots B^{n_{k-1}} A^{m_k} B^{n_k} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} &\in B^{n_1} A^{m_2} \dots B^{n_{k-1}} A^{m_k} X_B \\ &\subset B^{n_1} A^{m_2} \dots B^{n_{k-1}} X_A \subset \dots \subset B^{n_1} X_A \subset X_B \end{aligned}$$

となる。 $(1, 0, 0) \notin X_B$ であるから、これより $\sigma(\Phi)(1, 0, 0) \neq (1, 0, 0)$ が従う。

以上により、 Φ が Φ_A のベキでない限り $\sigma(\Phi) \neq I$ であることが示された。このことより、 Φ が Φ_A の非自明なベキのときも、 $B^{-1}\sigma(\Phi)B \neq I$ を考えれば、 $\sigma(\Phi) \neq I$ が従う。□

上の命題の σ は、 $\sigma(\Phi \circ \Psi) = \sigma(\Phi)\sigma(\Psi)$ と合成射を像の合成に移すので、群の準同型と呼ばれる。

寄り道. 4-正則樹木グラフの各頂点に人がいると想定すれば、ネズミ講で皆が幸せになれることになる。実際、(§) の写像 Θ に従って各人が1万円を送れば、全員1万円ずつ儲けられることになる。もちろんバナッハ=タルスキーのパラドックスが物理的には不可能なように、2対1写像を必要とするネズミ講を現実社会で実現するのは不可能に見える。どこかに抜け道はあるのだろうか？

4. バナッハ=タルスキーのパラドックス

前章で見た4-正則樹木グラフに対するバナッハ=タルスキーのパラドックス (\diamond) を、まずは単位球面 S^2 に対するバナッハ=タルスキーのパラドックスに移すことを考える。

$$S^2 := \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

これには命題4を使う。

任意の回転写像 $R \in \mathbf{R}(3)$ (恒等写像でないものとする) は、原点を通る回転軸が唯一つに定まり、単位球面 S^2 上で考えると(回転軸と S^2 の交わりとなる)ちょうど2つの点を固定する(図12における北極と南極がそれに当たる)。命題4の準同型 $\sigma: \mathbf{F} \rightarrow \mathbf{R}(3)$ を考え、 $\mathbf{F} := \sigma(\mathbf{F}) \subset \mathbf{R}(3)$ と置く。変換群 \mathbf{F} に属する恒等写像でない適当な回転写像により固定される単位球面上の点の集合を Q と書くことにする。

$$Q := \{q \in S^2 : R \neq I \text{ かつ } Rq = q \text{ となる } R \in \mathbf{F} \text{ が存在する}\}$$

点 q が回転写像 R の固定点のとき、 q の別の回転写像 R' による像 $R'q$ は回転写像 $R'R(R')^{-1}$ の固定点である(回転写像と表現行列を同一視したのでいちいち合成記号 \circ を書かなかった)。この事実と \mathbf{F} が変換群であることから、 \mathbf{F} に属する各変換は Q を Q に移すことが分かる。従って $S^2 - Q$ を $S^2 - Q$ に移す。以下、 Q の点たちとそれ以外の点たち $S^2 - Q$ を分けて考えることにする。もし無限集合の「大きさ」で

ある濃度について知っているなら、 F が可算無限集合であること、従って Q もそうであり、連続無限集合である S^2 に比べてはるかに「小さい」ことが分かるはずである。本稿ではこの知識は使わない。かわりに、 Q に属する点が特別な条件を満たすことを示す。 $R \in F$ が単位行列 I でないとすると、 $p \in \mathbb{R}^3$ に関する方程式 $Rp = p$ の解は3次回転行列 R の軸となる直線である。ここで $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Q}\}$ とおくと、これは足し算・掛け算・割り算といった操作で閉じている(割り算については分母の有理化を考えればよい)。 3×3 行列 R の成分はすべて $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ に属しているため、解 p を $p = (p_x, p_y, p_z)$ と成分表示すると各成分の比はやはり $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ に属する数である。 $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ に属さない無理数はまだいくらでも存在するので、球面 S^2 上の「ほとんど」の点は Q に属さない。

先ずは大きい方、 $S^2 - Q$ を取り扱う。各点 $x \in S^2 - Q$ に対して部分集合 $[x]_F \subset S^2 - Q$ を、

$$[x]_F := \{y \in S^2 - Q : Rx = y \text{ となる } R \in F \text{ が存在する}\}$$

と定める(x の軌道集合と呼ばれる)。点 $x \in S^2 - Q$ を固定して、軌道集合 $[x]_F$ を考えよう。各 $y \in [x]_F$ は $y = Rx$, $R \in F$ と唯一通りに書ける。実際、もし $Rx = R'x$ なら $x = R^{-1}R'x$ となり、定義より $x \in Q$ となる。従って、軌道集合 $[x]_F$ と前章で見た4-正則樹木グラフ T の頂点集合 V の間に次のような全単射を定義できる。

$$\Delta_x : V \ni \Phi(\mathbf{o}) \longleftrightarrow \sigma(\Phi)x \in [x]_F, \quad \Phi \in F$$

この全単射は、任意の $p \in V$ と $\Phi \in F$ に対して、 $\Delta_x(\Phi(p)) = \sigma(\Phi)\Delta_x(p)$ を満たす。それゆえ、 $[x]_F$ を

$$[x]_F = \Delta_x(V_A) \sqcup \Delta_x(V_{\bar{A}}) \sqcup \Delta_x(V_B) \sqcup \Delta_x(V_{\bar{B}})$$

と分割すると、バナッハ=タルスキーのパラドックス (\diamond) は

$$[x]_F = \Delta_x(V_A) \sqcup A(\Delta_x(V_{\bar{A}})) = \Delta_x(V_B) \sqcup B(\Delta_x(V_{\bar{B}}))$$

となる。この各軌道集合 $[x]_F$ に対するバナッハ=タルスキーのパラドックスを寄せ集めて集合 $S^2 - Q$ に対するバナッハ=タルスキーのパラドックスを得ることにする。

補題 5. 任意の $z \in [x]_F$ に対して $[z]_F = [x]_F$ である。特に、 $[x]_F$ と $[y]_F$ に共通部分があれば実は $[x]_F = [y]_F$ であり、集合 $S^2 - Q$ は $[x]_F$ の形をした部分集合たちの直和集合(互いに共通部分を持たない集合たちの和集合)として書ける。つまり、 $\{x_i : i \in I\} \subset S^2 - Q$ をうまく選んで、 $[x_i]_F \cap [x_j]_F = \emptyset$, $i \neq j$, かつ

$$S^2 - Q = \bigsqcup_{i \in I} [x_i]_F$$

とできる。ここで、 I は適当な添え字集合である。

証明. $z \in [x]_F$ ならば定義より z は $z = Rx$ と表される。 $[x]_F$ の他の元 y は $y = R'x$ の形をしているので、 $y = R'x = R'R^{-1}z \in [z]_F$ となる。これは $[x]_F \subset [z]_F$ を意味する。逆の包含関係も同様に示される。

$[x]_F$ の形をした部分集合たち全体を考える。ただし、同じ集合は同じであるのだから何度も数えたりしないことにする。このとき、 $S^2 - Q$ はもちろん $\{[x]_F : x \in S^2 - Q\}$ の和集合となるが、前段落で見たようにこれは直和になっている。□

注意: 集合 $S^2 - Q$ が軌道集合たちの直和で書けることは事実であるが、各軌道集合から元を1つずつ選びそれを $\{x_i : i \in I\}$ と書く際に、どのようにしたらそれを達成できるのかは明示されていない。これは「選択公理」と呼ばれる公理(数学におけるルールのようなもの)を使った²もので、Banach-Tarski の定理 1 は、証明にこうしたものを使う(必要とする)ので、パラドックス的な分割は存在こそ証明できるが、構成法については何も語ってはくれない。

上の補題で得られた部分集合 $\{x_i : i \in I\} \subset S^2 - Q$ を考え、

$$W_A = \bigsqcup_{i \in I} \Delta_{x_i}(V_A), \quad W_{\bar{A}} = \bigsqcup_{i \in I} \Delta_{x_i}(V_{\bar{A}}), \quad W_B = \bigsqcup_{i \in I} \Delta_{x_i}(V_B), \quad W_{\bar{B}} = \bigsqcup_{i \in I} \Delta_{x_i}(V_{\bar{B}})$$

²世の中には選択公理や排中律による存在証明をまったく認めない構成主義の数学者もわずかながら存在する。一般の数学者はそこまで極端でないが、あるものの存在を証明する際に、構成手続きが存在するかどうかは当然気にするものである。

とおけば、

$$\begin{aligned} S^2 - Q &= \bigsqcup_{i \in I} [x_i]_{\mathbb{F}} \\ &= \bigsqcup_{i \in I} (\Delta_{x_i}(V_A) \sqcup \Delta_{x_i}(V_{\bar{A}}) \sqcup \Delta_{x_i}(V_B) \sqcup \Delta_{x_i}(V_{\bar{B}})) \\ &= W_A \sqcup W_{\bar{A}} \sqcup W_B \sqcup W_{\bar{B}} \end{aligned}$$

は $S^2 - Q$ の分割で、

$$(\clubsuit) \quad S^2 - Q = W_A \sqcup A(W_{\bar{A}}) = W_B \sqcup B(W_{\bar{B}})$$

を満たす。即ち、 $S^2 - Q$ に対するバナッハ＝タルスキーのパラドックスである。

例外集合である Q の部分処理するため、「穴ぼこ球面」 $S^2 - Q$ が球面 S^2 そのものと分割合同であることを示そう。つまり、 $S^2 - Q$ を幾つかに分割して各ピースに回転変換を行ったあとで再構成することにより、 S^2 を作れることを示す。そのために、回転行列 $C \in \mathbf{R}(3)$ で、その回転軸が Q の点を通らないものを考える。回転角を適当に選べば、すべての $n \in \mathbb{Z} - \{0\}$ に対して $C^n Q \cap Q = \emptyset$ となるようにできる。これはまた、任意の $m \neq n$ に対して

$$C^m Q \cap C^n Q = C^n (C^{m-n} Q \cap Q) = \emptyset$$

であることを意味する。そこで、 $Q_1 := \bigcup_{n=0}^{\infty} C^{-n}(Q)$, $Q_2 := \bigcup_{n=1}^{\infty} C^{-n}(Q) = Q_1 - Q$ と置くと、穴ぼこ球面 $S^2 - Q$ は

$$S^2 - Q = (S^2 - Q_1) \sqcup Q_2$$

と2つのピースに分解でき、一方を C で回転して組み合わせると、 S^2 そのものを得られる。

$$(S^2 - Q_1) \sqcup C(Q_2) = (S^2 - Q_1) \sqcup Q_1 = S^2$$

以上をまとめると、まず、 S^2 を2つのピースに分解して一方を回転したのち組み合わせることにより、 $S^2 - Q$ にできる(前段落の逆操作を行う)。次に、 $S^2 - Q$ を (\clubsuit) に従って4つに分解したのち2組に分け、それぞれの一方を回転したのち組み合わせることにより、 $S^2 - Q$ を2個得ることができる。最後に、それぞれの $S^2 - Q$ は2つのピースに分解して一方を回転したのち組み合わせることにより、 S^2 にできる。これらの操作を一遍に行うと、結局、 S^2 を分解してピースを回転したのち組み合わせることで、 S^2 を2個得ることができたことになる。 S^2 の分解法を中身の詰まった球体 D (ただし原点を除く) に移すことは簡単である。ここまでは原点を通る直線を軸とする回転写像しか利用してこなかったが、最後に原点を扱うために、 $\mathbf{R}(3)$ に属さない等距離変換を使う。具体的には、直線「 $x = 1/3$ かつ $y = 0$ 」を軸とする適当な回転を考えると、これは原点 O を球体 D 内の別の点に動かす。そこで上と同じようなトリックを使って穴を埋めれば、ついに球体 D に対するバナッハ＝タルスキーのパラドックス・定理1を得る。

これでバナッハ＝タルスキーのパラドックスに関する話は終わりであるが、最後に選択公理に関するパラドックスをもう1つ紹介しておく。

寄り道。地獄に囚人が(可算)無限人いる状況を考える。獄卒の鬼がやってきて言うことには、翌日に次のようなゲームを行い囚人側が勝てば囚人たち全員を解放する、鬼側が勝てば全員を拷問に掛けることである。鬼は先ず囚人全員を広場に集め(地獄は広いので無限の人数が集まれるのだ)、囚人各人に赤または白の帽子を被せる。囚人たちは自分の帽子の色を知ることにはできないが、他の囚人の帽子の色は全て見ることができる。囚人たちは自分の帽子の色を推測し、全員で一斉にそれが赤か白かを答える。もし自分の帽子の色を間違えた囚人の数が有限なら、囚人側の勝ちである。もし間違えた囚人の数が無限なら、鬼側の勝ちである。ただし、囚人たちはゲームの開始前にはいくらかでも作戦を相談してよいが、一端ゲームが始まったら意思の疎通は一切禁止されるものとする。はたして囚人たちがこのゲームに必ず勝てる作戦は存在するだろうか？

他の囚人の帽子の色と自分の帽子の色には何の関係もないのだから、自分の帽子の色を推測するのに使える情報はゼロである。それにも関わらず、驚くべきことに、囚人側がこのゲームに必ず勝てる作戦が存在するのである。それを以下に述べる。

囚人たちに番号をふり、自然数全体の集合 \mathbb{N} と同一視する。よって赤い帽子を被せられた囚人たちの集まりは \mathbb{N} の部分集合となる。これを X_{Red} と書く。一方で自分の帽子が赤であると答えた囚人たちの集まりも \mathbb{N} の部分集合である。これを X_{Ans} と書く。囚人側が勝つ条件は、 X_{Red} と X_{Ans} の対称差

$$X_{\text{Red}} \triangle X_{\text{Ans}} := (X_{\text{Red}} \setminus X_{\text{Ans}}) \cup (X_{\text{Ans}} \setminus X_{\text{Red}})$$

が有限となることである。そこで、自然数 \mathbb{N} の部分集合全体の集合 $\mathfrak{P}(\mathbb{N})$ に同値関係 \sim_f を

$$X \sim_f Y \stackrel{\text{def}}{\iff} \text{対称差 } X \triangle Y \text{ が有限集合}$$

として定義する。2項関係 \sim が同値関係であるとは条件

- (1) 任意の X に対して $X \sim X$ が成り立つ
- (2) $X \sim Y \Rightarrow Y \sim X$
- (3) $X \sim Y, Y \sim Z \Rightarrow X \sim Z$

が満たされているときを言う。例えば V 上の変換群 F に対して、次のような同値関係を定めることができる(軌道同値関係と呼ばれる)。

$$p \sim_F q \stackrel{\text{def}}{\iff} \Phi(p) = q \text{ となる } \Phi \in F \text{ が存在する}$$

このとき集合 V が軌道集合 $[p]_F$ たちの直和として書けることは補題5で見たとおりである。もとの議論に戻ると、 \sim_f が同値関係であることを見るのは難しくない。各 $X \in \mathfrak{P}(\mathbb{N})$ に対して、それと同値な \mathbb{N} の部分集合全体の集合を

$$[X]_f := \{Y \in \mathfrak{P}(\mathbb{N}) : Y \sim_f X\}$$

と書くことにする(X の同値類と呼ばれる)。このとき、補題5と同様に、 $\mathfrak{P}(\mathbb{N})$ は同値類の直和として書ける。つまり、 $\{X_i : i \in I\} \subset \mathfrak{P}(\mathbb{N})$ をうまく選んで、

$$\mathfrak{P}(\mathbb{N}) = \bigsqcup_{i \in I} [X_i]_f$$

とできる。この集合 $\{X_i : i \in I\}$ (念のために書くと、これは \mathbb{N} の部分集合たちの成す集合である) が囚人側の「作戦計画書」である。計画書 $\{X_i : i \in I\}$ を囚人各人があらかじめ保有しておき、帽子を被せられたら、まずは周りを確認して赤い帽子を被せられた囚人たちの集合 X_{Red} がどの X_i と同値かを調べる。このとき自分の帽子の色は分からないのだが、自分を含めて有限個の帽子の色が分からなくても、対称差 $X_{\text{Red}} \triangle X_i$ が有限か否かを知るのに影響はない。 X_{Red} と同値である X_i が分かったら(これは唯一通りに定まる)、 X_i に従って自分の帽子の色を述べればよいのである(自分が囚人番号 n で $n \in X_i$ なら赤と答える)。すると囚人側の X_{Ans} は X_i と一致し、自分の帽子の色を間違えた囚人たちの集合 $X_{\text{Red}} \triangle X_{\text{Ans}}$ は無事に有限となる。

この赤白帽子ゲームの「パラドックス」は、自分が知らないはずのことを予言できるように見えるため、バナッハ=タルスキーのパラドックスよりさらに直感に反する。このようなパラドックスをどのようにして納得したらよいのだろうか？

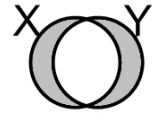


図 16: 対称差 $X \triangle Y$
(灰色の部分)