予習問題

点Oを中心とした扇形OPQは、弧PQ長さが1、中心角$\angle\mathrm{POQ}=\theta$ $(0<\theta<2\pi)$を満たしている。線分PQと弧PQに囲まれる部分の面積を$S(\theta)$としたとき、以下の問に答えよ。

⑴　$S(\theta)$をθで表せ。

⑵　$S(\theta)$の最大値を求めよ。

値替え問題

点Oを中心とした扇形OPQは、弧PQ長さがa、中心角$\angle\mathrm{POQ}=\theta$ $(0<\theta<2\pi)$を満たしている。線分PQと弧PQに囲まれる部分の面積を$S(\theta)$としたとき、これの最大値を求めよ。

発展問題

体積が$\dfrac{\pi}{3}$である直円錐を考える。

⑴　底面の半径をrとするとき、表面積をrで表せ。

⑵　rを動かしたときの表面積の最小値を求めよ。

3ー雨どい

予習問題

点Oを中心とした扇形OPQは、弧PQ長さが1、中心角$\angle \mathrm{POQ}=\theta$ $(0<\theta<2\pi)$を満たしている。線分PQと弧PQに囲まれる部分の面積を$S(\theta)$としたとき、以下の問に答えよ。

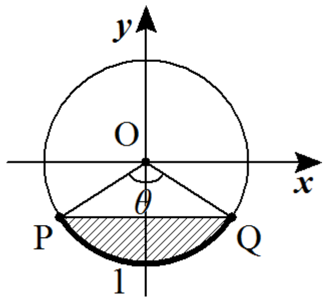
(1)　$S(\theta)$をθで表せ。

(2)　$S(\theta)$の最大値を求めよ。

（1）８点

題の条件より円の半径は$\dfrac{1}{\theta}$である。θとπの大小で場合分けする。

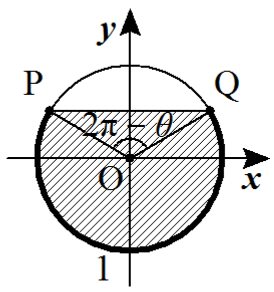
ｉ）　$\theta<\pi$とき



扇形OPQから三角形OPQの面積を引いて$S(\theta)$を得る。

$$S(\theta)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\theta}\right)^2\theta-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\theta}\right)^2\sin\theta=\frac{\theta-\sin\theta}{2\theta^2}$$

ⅱ）　$\theta\geq\pi$のとき



扇形OPQに三角形OPQの面積を足して$S(\theta)$を得る。

$$S(\theta)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\theta}\right)^2\theta+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\theta}\right)^2\sin(2\pi-\theta)=\frac{\theta-\sin\theta}{2\theta^2}$$

以上ｉ)ⅱ)より、いずれの場合も答えは次のようになる。

$$\boxed{S(\theta)=\frac{\theta-\sin\theta}{2\theta^2}}$$

（２）１２点

(1)より$S(\theta)$の導関数は以下の通り。

$$S'(\theta)=\frac{1}{2}\cdot\frac{(1-\cos\theta)\cdot\theta^2-(\theta-\sin\theta)\cdot 2\theta}{\theta^4}$$

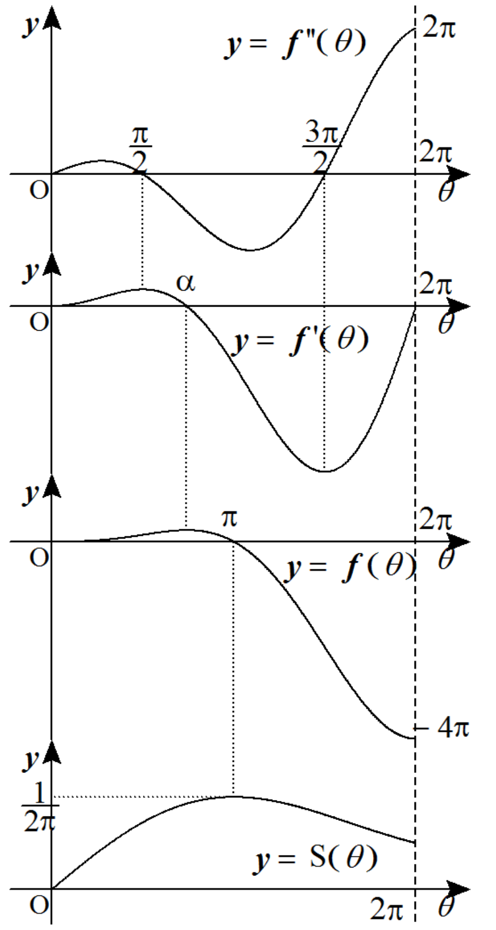
$$=\frac{2\sin\theta-\theta-\theta\cos\theta}{2\theta^3}$$

ここで分子を$f(\theta)$とおくと、これと$S'(\theta)$の符号は一致する。そこでさらに$f(\theta)$について調べるために導関数を調べると以下のようになる。

$$f'(\theta)=2\cos\theta-1-\cos\theta+\theta\sin\theta=\cos\theta-1+\theta\sin\theta$$

$$\therefore f''(\theta)=-\sin\theta+\sin\theta+\theta\cos\theta=\theta\cos\theta$$

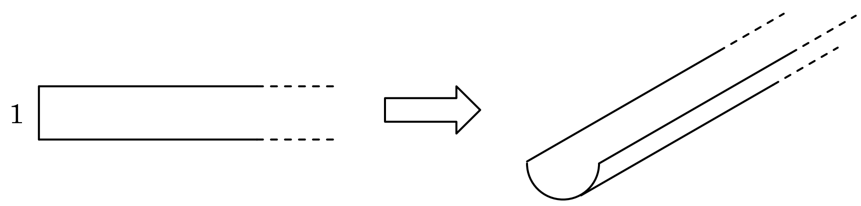
よって$y=f''(\theta)$、$y=f'(\theta)$、$y=f(\theta)$、$y=S(\theta)$のグラフは以下の通り。



ゆえに$S(\theta)$の最大値は$S(\pi)=\boxed{\dfrac{1}{2\pi}}$

予習問題 - 雨どいの作り方

この問題の背景は、いかにして雨どいを効率よく作るか？というところにあります。幅 1 の長方形状の板を用いて雨どいを作る時、どの程度丸めれば一番雨水を運搬できるかを考えてみましょう。



当然雨どいの断面積を考えて、それが一番大きくすればよいですね。するとまさしく本問を解くのと同じことになります。