数列

数学では当たり前のように数を扱っているが、数は計算に使われることがほとんどで、数自体を論じる機会はあまりないのかもしれない。たとえば関数を考えた場合、そこには無数の数が含まれているのであるが、実際はいくつかの値を代入すれば用が済んでしまうことが多い。すると関数では数を扱っている意識は薄れて、むしろグラフの形状とか極限がどうなっているかなどに関心が向いていくだろう。

しかし、グラフの形状や極限の状態の一点に目をやれば、そこには明らかに数があることに気づくものである。もし、グラフの形状を部分部分に分けて見たら、グラフは離ればなれの数で構成されているように見えるだろう。

さて、離ればなれになった数を見続けたとしたら、たとえば

$$7,\ 2,\ 22,\ -1,\ 2,\ 9,\ 10,\ 18,\ 4,\ \ldots$$

のような数の列を目にできるはずである。ただし、これは単に "数の列" であって**数列**ではない。ここで言う数列とは、何らかの規則を持っている数の列のことである。具体的には

$$\begin{aligned}&\text{a)}\quad 3,\ 6,\ 12,\ 24,\ 48,\ 96,\ 192,\ 384,\ 768,\ 1536,\ \ldots\\&\text{b)}\quad 1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 34,\ 55,\ \ldots\end{aligned}$$

は数列である。a) は 3 から始まり 2 倍ずつ増える数列、b) は 1, 1 から始まり直前の 2 数の和の数列である。いずれも 10 番目の数までを示したが、では、20 番目の数は何かと問われたら少しばかり計算を繰り返さなくてはならない。そのようなときの効率的な求め方を知るためにも、もう少し基本的な数列から始めてみよう。

集合としての数列

$$2,\ 5,\ 8,\ 11,\ 14,\ 17,\ 20,\ 23,\ \ldots$$

これは 2 から始まり 3 ずつ増える数列である。数列を構成する 1 つ 1 つの数は**項**と呼び、とくに先頭の項は**初項**と呼ばれる。もし、この数列が 23 で打ち切られるとしたら、23 を**末項**とする有限数列となるが、ここでは末項のない無限数列を考えておこう。

数列はいくつかの数を含むので、数を連呼して数列を示すのは効率的ではない。そこで、たとえば上の数列は、数の集合という意味も含めて

$$\{a_n\} = 2,\ 5,\ 8,\ 11,\ 14,\ 17,\ 20,\ 23,\ \ldots$$

のような記述を約束しておくと便利である。a がこの数列に与えられた名称と思ってよいだろう。添字の n は、項を特定するために使うことができる値で、たとえば初項を第 1 項として数え始め、以下、第 2 項、第 3 項、... と指定することにすれば、

$$a_1 = 2, \quad a_2 = 5, \quad a_3 = 8, \quad \ldots, \quad a_8 = 23, \quad \ldots$$

のように表すことができてよい。

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	$\cdots$
2	5	8	11	14	17	20	23	$\cdots$

これを一覧表にして眺めてみると、a の添え数と項の値には明らかな関係があることに気づくだろう。項の値は、添え数の 3 倍に 1 足りない。したがって添え数が n ならば、項の値は $3n-1$ であることになる。このことは

$$a_n = 3n - 1$$

であることを意味しているのである。よって、集合としての数列は

$$\{a_n\} = \{3n - 1 \mid n = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \ldots\}$$

なる数の集まりということなのである。

*　　*　　*

数列は $\{a_n\} = \{3n-1 \mid n = 1,\ 2,\ 3\}$ のように表すといっても、純粋に集合 $A = \{3n-1 \mid n = 1,\ 2,\ 3\}$ とは別物であることは注意しなければならない。これらを具体的に数を列挙する方法で書けば

$$\{a_n\} = \{2,\ 5,\ 8\}; \qquad A = \{2,\ 5,\ 8\}$$

であるが、$\{a_n\}$ が 2, 5, 8 の**順番の列**を表すのに対し、A は 2, 5, 8 の**集まり**であるから、$A = \{2,\ 8,\ 5\}$ と書いてもよい。

数列は数がたくさん集まっていても集合ではないのである。そのため一般に数列を表すときは、集合を意識しないように、列挙している数には { } は付けないで

$$\{a_n\} = 3n - 1 \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \ldots) \quad \text{または} \quad \{a_n\} = 2,\ 5,\ 8,\ 11,\ \ldots$$

のような記述をするのであろう。少々紛らわしいが、$\{a_n\}$ と書けば数列全体、a_n と書けば各々の項を意味することに注意されたい。▮

等差数列

さて先の数列 $\{a_n\}$ は、ある項と次の項の間は常に 3 の差がある。このように 2 項間の差が一定である数列は**等差数列**といい、一定の差を**公差**という。したがって $\{a_n\}$ は

初項 2、公差 3 の等差数列で、任意の第 n 項の値は $3n-1$ である

といえる。任意の第 n 項を表す式 $a_n = 3n-1$ を**一般項**という。

ところで、$\{a_n\}$ の一般項が $3n-1$ であることが分かったのは、数列を一覧表で眺めたからであるが、一般的に等差数列はどのような仕組みであろうか。等差数列は、初項 a に順次公差である d を加えていくのであるから

$$\begin{array}{ccccccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & \cdots \\ a & a+d & a+2d & a+3d & a+4d & a+5d & \cdots \end{array}$$

の関係から、明らかに添え数の値と d の係数が 1 違いであることが分かる。すなわち

$$\boxed{\text{初項 } a\text{、公差 } d \text{ の等差数列の一般項 } a_n \text{ は、} a_n = a + (n-1)d}$$

であることがいえる。このことから、先の初項 2、公差 3 の数列は

$$a_n = 2 + (n-1) \cdot 3 = 3n-1$$

であったのである。

* * *

私たちは日常の習慣として、ものを数えるときは、1, 2, 3, ... から始めることだろう。このために数列を初項から並べる場合は、$a_1, a_2, a_3, \ldots$ の順に書くのがふつうの感覚であるから、初項 a、公差 d の等差数列は

$$\begin{array}{ccccccccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & \cdots & a_n & \cdots \\ a & a+d & a+2d & a+3d & a+4d & a+5d & \cdots & a+(n-1)d & \cdots \end{array}$$

という対応になったのである。

しかし、添字の n は、<u>項を特定するために使うことができる値</u>であったことを思い出してほしい。項の順番を示す値ではないのである。そうであれば添え数の使い方を

$$\begin{array}{ccccccccc} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & \cdots & a_n & \cdots \\ a & a+d & a+2d & a+3d & a+4d & a+5d & \cdots & a+nd & \cdots \end{array}$$

のようにしても項の値は特定できる。しかも一般項を表す a_n の式もすっきりしてよい。ただし、代償として a_1 が第 2 項を表すように、添え数と項数が一致しなくなる。数列においては、このような **1 違い**が頻繁に顔を出す。だから、1 違いが起きないように注意するのではなく、1 違いを受け入れて注意深く考える習慣をつけた方がよい。

以上の例が示すように、数列の記述の仕方はかなり柔軟なものと思えるが、混乱の元になりかねない。よって、数列を考えるときは、添え数が表すものが何であるかをきちんと把握しておかなくてはならない。したがって等差数列の一般項を求める公式めいたものは

$$\boxed{\text{初項 } a\text{、公差 } d \text{ の等差数列の一般項 } a_n \text{ は、} a_n = a + (n-1)d \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)}$$

のように、添字 n に与えられる数が何であるかを併記するか

$$\boxed{\text{初項 } a_1\text{、公差 } d \text{ の等差数列の一般項 } a_n \text{ は、} a_n = a_1 + (n-1)d}$$

のように、n の始まりがいくつであるかをほのめかす必要がある。▮

常識頼みの一般項

数学では、曖昧なことから結論を急ぐと、ろくなことにならない例を示そう。次の数列

$$2,\ 5,\ 8,\ 11,\ 14,\ \ldots$$

から、初項 2、公差 3 の等差数列を類推するのは自然なことなので、誰もが $a_n = 3n - 1$ と結論するに違いない。しかし、よく知られたことであるが、これだけの情報しか与えられていなければ

$$a_n = 3n - 1 + (n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)$$

もまた、数列の一般項の類推として正しいのである。

もちろん揚げ足取りには違いないが、数学は曖昧さをできる限り排除すべきという教訓である。この場合は、明確に初項 2、公差 3 の等差数列を求めよ、と述べるか、

$$2,\ 5,\ 8,\ 11,\ 14,\ \ldots,\ 3n-1,\ \ldots$$

のように、一般項を示すべきである。もっとも、これだけでは $3n - 1$ が第 n 項である保証はないので、どこかにそのことを明記しなくはならないだろう。

ただ、数列の提示に際しては、あまり杓子定規なことを言い過ぎても窮屈なので、常識に頼った記述でよしとしている。今後も常識の範囲で考えることにしよう。