

# 電磁気学

岡部 洋一  
放送大学教授 (東京大学名誉教授)

2016年4月5日  
起草: 1997年

アンペールの法則を線積分でなく  $\text{rot}$  と自然に結び付いている面積分により定義した。また実験のできないビオ・サバルの法則からではなく、ソレノイドの磁界から定義した。 $\int d\mathbf{S} \times \mathbf{B} = \mu_0 \int dV \mathbf{J}$ 。ベクトルポテンシャルを重視。単位系についても詳細な解説あり。

1997年:            回転の外積面積分による定義の導入  
1998年11月21日: TeX 化  
1999年3月14日: 電流の作る回転を面積分から導入  
2001年9月17日: TeX + perl 化、および章分割  
2001年12月22日: Web 化  
2002年1月17日: Web 公開  
2008年11月21日: 「電磁気学の意味と考え方」講談社として出版

All Rights Reserved (c) Yoichi OKABE 1997-present.

個人の使用以外のコピーを禁じます。また、再コピーおよび再配布は禁止します。ただし、教育目的に限り、再コピー、再配布は原著者を明示するという条件でのみ許諾します。

リンク先 (クリックできます)

- [電磁気学 \(HTML 版\)](#)
- [電磁気学 FAQ](#)
- [電磁気学 \(議論のページ\)](#)
- [岡部の Web に公開の文書](#)
- [岡部のトップページ](#)



# まえがき

本稿は、自分が電磁気学を修得する際、分かりにくかった部分を、いかに他人に教育するかを意識してまとめたものである。近年、初学の人を対象にした本は、数式をなるべく記載しない傾向にあるが、本書は、ある程度、電磁気学を習得した人を対象としたため、数式はふんだんに現れる。

しかし、数式の持つ意味、特に面積分などの概念については、私自身が、初めて習ったときに、なかなかその意味が理解できなかったため、それらの導入にあたっては、特に丁寧に説明しており、その意味では、初学の人にも十分理解できると信じている。電磁気学をしっかりと勉強したい人には適した書籍と考えている。

また、電磁気学は学生時代の研究対象であり、また教職に就いてからも、いくつか電磁気学の講義を持っていたこともあり、40年以上にわたって、怪しいところは徹底して理解に努めた結果を記載したものであり、同様な疑問を持たれるであろう人に対する解答は可能な限り記載したつもりである。それでも、解消しなかった疑問については、明示した。

本書は、大きく、次のような特徴を持つ。

1. 従来、線積分で表現されていた「回転」の概念を、「発散」と同様に面積分を基礎とするものに改めた。
2. 電流の作成する磁場は、従来、実証の難しいビオ・サバールの法則により表していたが、それを実証の楽なソレノイド（あるいは棒磁石）の作成する磁場を基礎にすることとした。
3. 従来、比較的無視されがちであったベクトルポテンシャルの重要性を感じ、それにかなり重点を置くようにした。

このうち、最後の点については特記したい。

ある程度、電磁気学を習得した人間でもベクトルポテンシャルの意味や重要性はなかなか分かっていないことが多い。スカラーポテンシャルは電場という三次元的ベクトルを一次元的スカラー量で代表できることから、それなりの意味を持っていることが理解できるし、回路理論での重要な量である電圧そのものであるから、日頃から馴染んでいる量である。一方、ベクトルポテンシャルは、三次元ベクトルである磁場を三次元的ベクトルから導出できるだけでうまみがないし、ベクトルであるから表示も難しく、電磁気学でもあまり顔を現さないため、不慣れな量である。

しかし、ベクトルポテンシャルはかなり重要な量である。これは電場や磁場以上に実在する場な

のである。電気磁気学の基本法則にファラデーの電磁誘導の法則があるが、これは時間変化する磁場中にループ状の導体を置くとその両端に電圧が生じるというものである。この磁場変化と誘起電圧の関係は鉄心があっても変わらない。しかし、鉄心があると、磁束の大部分はその中を通過してしまい、肝心のコイルのあるあたりでは磁場はほとんど0のはずである。それではコイルは何を感じて電圧を発生するのであろうか。答えは、鉄心の外部には、磁場はなくても鉄心を取り囲むようなベクトルポテンシャルがあり、コイルはそれを感じるのである。

古典電磁気学ではこれを次のように解釈する。磁場は変化しているので電場が誘起され、これを計算してみると、磁場のほとんどないコイルの部分にも電場が存在し、この積分がちょうど誘起電圧に等しくなるというものである。したがって一定磁場の場合は電場も誘起されず、鉄心のまわりには本当に何もなくなってしまう。しかし、超伝導体の出現により一定磁場の場合にも鉄心のまわりには何かがあると考えないとおかしいということが判明した。超伝導体に限らず、量子力学的サイズの粒子のミクロな運動も鉄心のまわりの何かを感じるのである。それがベクトルポテンシャルである。

このようにベクトルポテンシャルは実在する場であるという意味で明らかに重要な量であるが、他にもいろいろ便利な量である。磁場分布を電流分布から計算する場合、あるいは時間とともに変化する動的な電磁場の解析になくてはならない量である。さらにスカラーポテンシャルと組になって相対論を構成する重要な量である。こうした点から本書では、ベクトルポテンシャルをスカラーポテンシャルと対等に取り扱った電磁気学を論ずるつもりである。対等であるということは他の本に比べかなりベクトルポテンシャルに偏った印象を与えるかも知れないが、上述のように意義のある量であるので、頑張って理解していただきたい。

# 目次

|              |                        |           |
|--------------|------------------------|-----------|
| <b>第 1 章</b> | <b>序論</b>              | <b>1</b>  |
| 1.1          | 電磁気学は何を学ぶ学問か . . . . . | 1         |
| 1.2          | 電場と磁場 . . . . .        | 2         |
| 1.3          | 静電場 . . . . .          | 3         |
| 1.4          | 静磁場 . . . . .          | 4         |
| 1.5          | 動的な場 . . . . .         | 5         |
| 1.6          | ポテンシャル . . . . .       | 6         |
| <b>第 2 章</b> | <b>スカラー場とベクトル場</b>     | <b>8</b>  |
| 2.1          | 面積分 . . . . .          | 8         |
| 2.2          | スカラー場の勾配 . . . . .     | 11        |
| 2.3          | ベクトル場の発散 . . . . .     | 14        |
| 2.4          | デルタ関数 . . . . .        | 18        |
| 2.5          | ベクトル場の回転 . . . . .     | 19        |
| 2.6          | 線積分とストークスの定理 . . . . . | 22        |
| 2.7          | 発散も回転もある場 . . . . .    | 27        |
| <b>第 3 章</b> | <b>電磁場の基本方程式</b>       | <b>28</b> |
| 3.1          | 静電場の性質 . . . . .       | 28        |
| 3.2          | 磁石と電流の等価性 . . . . .    | 31        |
| 3.3          | 静磁場の性質 . . . . .       | 35        |
| 3.4          | 電流の作る磁場 . . . . .      | 43        |
| 3.5          | 動的電磁場 . . . . .        | 46        |
| <b>第 4 章</b> | <b>一次元の電磁気学</b>        | <b>49</b> |
| 4.1          | 静電場 . . . . .          | 49        |
| 4.2          | 静磁場 . . . . .          | 51        |
| 4.3          | 動的な場 . . . . .         | 51        |

---

|               |                                |            |
|---------------|--------------------------------|------------|
| <b>第 5 章</b>  | <b>物質と電磁場</b>                  | <b>53</b>  |
| 5.1           | 導体 . . . . .                   | 53         |
| 5.2           | 誘電体 . . . . .                  | 54         |
| 5.3           | 磁性体 . . . . .                  | 58         |
| 5.4           | 静電磁場の計算 . . . . .              | 64         |
| <b>第 6 章</b>  | <b>ポテンシャル</b>                  | <b>66</b>  |
| 6.1           | スカラーポテンシャル . . . . .           | 66         |
| 6.2           | ベクトルポテンシャル . . . . .           | 68         |
| 6.3           | 動的な場のポテンシャル . . . . .          | 71         |
| 6.4           | ゲージ . . . . .                  | 72         |
| 6.5           | ポテンシャルと回路理論 . . . . .          | 76         |
| <b>第 7 章</b>  | <b>磁場とベクトルポテンシャル</b>           | <b>77</b>  |
| 7.1           | 静電場との相似性 . . . . .             | 77         |
| 7.2           | 直線電流 . . . . .                 | 78         |
| 7.3           | ソレノイド . . . . .                | 80         |
| 7.4           | 微小電流ループ . . . . .              | 81         |
| 7.5           | ベクトルポテンシャルは実在する場か . . . . .    | 82         |
| 7.6           | ファラデーの電磁誘導の法則 . . . . .        | 85         |
| 7.7           | ベクトルポテンシャルの測定 . . . . .        | 87         |
| <b>第 8 章</b>  | <b>力とエネルギー</b>                 | <b>89</b>  |
| 8.1           | ローレンツ力 . . . . .               | 89         |
| 8.2           | 古典的力と量子論的力 . . . . .           | 90         |
| 8.3           | 電気エネルギー . . . . .              | 92         |
| 8.4           | 磁気エネルギー . . . . .              | 95         |
| 8.5           | 運動量の増減と応力テンソル . . . . .        | 97         |
| 8.6           | エネルギーの増減とポインティングベクトル . . . . . | 102        |
| <b>第 9 章</b>  | <b>動的電磁場</b>                   | <b>105</b> |
| 9.1           | $\delta$ 関数励振の解 . . . . .      | 105        |
| 9.2           | 点電荷の発生 . . . . .               | 107        |
| 9.3           | 電磁波の発生 . . . . .               | 115        |
| <b>第 10 章</b> | <b>導体とポテンシャル</b>               | <b>118</b> |
| 10.1          | 導体内でのポテンシャル . . . . .          | 118        |

|               |  |            |
|---------------|--|------------|
| 10.2          | 導体表面でのポテンシャル . . . . .                 | 119        |
| 10.3          | 導体と電荷の作る静的なスカラーポテンシャル . . . . .        | 120        |
| 10.4          | 導体と平行な電流素片の作る静的なベクトルポテンシャル . . . . .   | 122        |
| 10.5          | 導体と垂直な電流素片の作る静的なベクトルポテンシャル . . . . .   | 122        |
| 10.6          | 方形柱ソレノイドの作る磁場 . . . . .                | 124        |
| 10.7          | 導波管中の電磁波 . . . . .                     | 127        |
| 10.8          | 空洞中の電磁波 . . . . .                      | 133        |
| <b>第 11 章</b> | <b>相対性原理</b>                           | <b>134</b> |
| 11.1          | 相対性原理 . . . . .                        | 134        |
| 11.2          | 四元ベクトル . . . . .                       | 136        |
| 11.3          | 計量テンソル . . . . .                       | 140        |
| 11.4          | 電磁気学の相対論 . . . . .                     | 142        |
| 11.5          | 一定速度で移動する電荷の作る電磁場 . . . . .            | 145        |
| 11.6          | リエナール・ウィーヘルトポテンシャル . . . . .           | 146        |
| 11.7          | 誘導起電力 . . . . .                        | 147        |
| 11.8          | 物質のある場合の相対論 . . . . .                  | 148        |
| 11.9          | マクスウェル応力、ポインティングベクトル、電磁エネルギー . . . . . | 149        |
| <b>第 12 章</b> | <b>パラドックス</b>                          | <b>152</b> |
| 12.1          | 平行平板キャパシタに挿入された誘電体に働く力 . . . . .       | 152        |
| 12.2          | 磁場の中心 . . . . .                        | 153        |
| 12.3          | 動く磁石が発生する電場 . . . . .                  | 153        |
| 12.4          | 磁場力の消失 . . . . .                       | 154        |
| 12.5          | ファインマンの作用反作用のパラドックス . . . . .          | 154        |
| 12.6          | ファインマンの角運動量のパラドックス . . . . .           | 155        |
| 12.7          | パフ・パフの角運動量のパラドックス . . . . .            | 156        |
| 12.8          | トロートン・ノーブルのトルクのパラドックス . . . . .        | 156        |
| 12.9          | 霜田の磁石と運動電荷の作用反作用のパラドックス . . . . .      | 157        |
| 12.10         | テレゲンの磁化に働く力のパラドックス . . . . .           | 157        |
| 12.11         | ヒント . . . . .                          | 158        |
| <b>付録 A</b>   | <b>超伝導体とポテンシャル</b>                     | <b>161</b> |
| A.1           | 超伝導体 . . . . .                         | 161        |
| A.2           | Josephson 素子 . . . . .                 | 163        |
| A.3           | 超伝導インダクタンス . . . . .                   | 163        |
| A.4           | フラクソイドの量子化 . . . . .                   | 165        |



---

|             |                                  |            |
|-------------|----------------------------------|------------|
| A.5         | 超伝導回路の解析 . . . . .               | 166        |
| A.6         | 超伝導線路のインダクタンス . . . . .          | 167        |
| <b>付録 B</b> | <b>単位系について</b>                   | <b>170</b> |
| B.1         | 単位に関する一般的手法 . . . . .            | 170        |
| B.2         | 電磁気学における力の量方程式と種々の単位系 . . . . .  | 172        |
| B.3         | マクスウェル方程式の量方程式 . . . . .         | 175        |
| B.4         | 電磁気学の単位の決定 . . . . .             | 177        |
| B.5         | 単位の換算 . . . . .                  | 181        |
| B.6         | 組み立て単位に必要な量方程式 . . . . .         | 183        |
| B.7         | 組み立て単位の換算 . . . . .              | 184        |
| B.8         | 無次元量について . . . . .               | 186        |
| B.9         | 磁荷について . . . . .                 | 188        |
| <b>付録 C</b> | <b>作用積分</b>                      | <b>190</b> |
| C.1         | ラグランジュ・ダランベールの仮想変位の原理 . . . . .  | 190        |
| C.2         | ラグランジュの運動方程式 . . . . .           | 192        |
| C.3         | ラグランジュの未定係数法 . . . . .           | 194        |
| C.4         | 最小作用の原理 . . . . .                | 196        |
| C.5         | 滑車の例 . . . . .                   | 197        |
| C.6         | 電磁気学のラグランジアン . . . . .           | 199        |
| <b>付録 D</b> | <b>ベクトルの公式</b>                   | <b>201</b> |
| <b>付録 E</b> | <b>パラドックスの解答</b>                 | <b>202</b> |
| E.1         | 平行平板キャパシタに挿入された誘電体に働く力 . . . . . | 202        |
| E.2         | 磁場の中心 . . . . .                  | 203        |
| E.3         | 動く磁石が発生する電場 . . . . .            | 204        |
| E.4         | 磁場力の消失 . . . . .                 | 204        |
| E.5         | ファインマンの作用反作用のパラドックス . . . . .    | 205        |
| E.6         | ファインマンの角運動量のパラドックス . . . . .     | 206        |
| E.7         | パフ・パフの角運動量のパラドックス . . . . .      | 207        |
| E.8         | トロートン・ノーブルのトルクのパラドックス . . . . .  | 207        |
| E.9         | 霜田の作用反作用のパラドックス . . . . .        | 209        |
| E.10        | テレゲンの磁化に働く力のパラドックス . . . . .     | 210        |



# 第 1 章

## 序論

本章では、本書で述べる電磁気学の式について、その誘導のあらましを事前に述べておく。本書は、いったんは電磁気学を学んだ人を対象に記載されているが、初学の人でも読めるように記載したつもりである。しかし、初学の人には、本章の式の意味はほとんど分からないであろう。それは気にしなくてよい。というのは、本章は、単に、これから展開される論旨を述べているだけであるからである。

### 1.1 電磁気学は何を学ぶ学問か

電磁気学を学ぶと、面積分、線積分、 $\text{div}$ 、 $\text{rot}$  と、どんどん新しい概念が出てきて、それらを追いかけているうちに、やがて分らなくなって放棄してしまうことが多い。せめてゴールが分れば、もう少し、勉学を続けようという動機付けもできるのであろうが、という感想を持つ人も多いだろう。

物理学はいずれも、同じような構成でできている。例えば、力学は、一定重力場での落下現象といった、簡単に実験できる基本的な事実から類推して、ニュートンの運動方程式を見出す。次は、この式を利用して、もっと複雑な系の問題を解いてみる。円運動、惑星運動、単振動、さらには剛体や流体の運動にまで拡張可能であり、その結果から、ニュートンの運動方程式の正当性が再確認できる。

電磁気学でも同様である。電荷間、磁荷間のクーロンの法則、磁荷と電流の関係、ファラデーの法則といった基礎的事実から類推して、基本方程式を誘導する。これがマクスウェルの方程式である。次は、この式を解いて、もっと複雑な問題、例えば電磁波のような動的な問題にまで拡張し、マクスウェルの方程式の正当性を再確認していく。

電磁気学が力学と大きく異なる点は、マクスウェルの方程式に辿りつくまでに、かなりの手間がかかることである。しかも、基本方程式が一つではなく、数本あることである。このため、これらの方程式の誘導の過程から、どんどん、使える方程式を使って、適用事例を示していつてしまうことが多い。こうした結果、どの本でも通常、マクスウェルの方程式は、ずいぶん後に提示される。

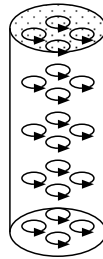


図 1.1 磁石は微小な永久電流ループの集合体である。

すべての方程式が提示されから、それらを使って示されるのは、電磁波ぐらいのものである。こうした、息の長い論述となるため、なかなか最後まで着いてこられる人が多くないのである。

しかし、電磁気学はかなり完璧な学問である。ニュートンの力学以後に現われたアインシュタインの相対性理論でも、まったく矛盾が生じなかったばかりか、むしろ相対性理論の推進役を果たしたという意味で、ぜひとも、全体をつかんでほしい。

## 1.2 電場と磁場

電磁気学 (electro-magnetism) は電荷 (electric charge) 同士に働く力と、磁石 (magnet) の磁極 (magnetic pole) 同士に働く力の解析から形成されていった。前者は電場 (electric field)、後者は磁場 (magnetic field) である。また合わせて電磁場 (electro-magnetic field) という。なお、これらは物理系の呼び方であって、工学系では電界 (electric field)、磁界 (magnetic field)、電磁界 (electro-magnetic field) という。私は工学系なので、電界・磁界と呼びたいところであるが、個人的趣味によって電場・磁場を用いる。分野によって用語が異なるは不幸なことであるが、分野ごとに長い歴史を背負っているのので、簡単には統一できないのが実状である\*1。

電流 (current) も磁場を作り出すことができるし、磁場の電流は力を受ける。現在、磁石は、図 1.1 に示すように、その中にたくさんのループ状の微小電流を持つことが知られているので、結局、磁場は電流と電流に働く力である。

電荷と電荷に働く力を、前者の電荷に着目してみよう。この位置を徐々に変えると受ける力は徐々に変化していく。何となく、後者の電荷がまわりに何らかの影響力を有しており、それを感じているようにみることができる。このような影響のおよぶ範囲を場 (field) と呼ぶ。この立場で、後者の電荷は電場と呼ばれる場を張っていると考え、前者の電荷はそれを測定する手段と考える。測定する電荷を特に区別したいときには、検電荷 (testing charge) と呼ぶ。

電流は電荷の移動であるから、電荷は動いていると磁場の影響を受け、止まっても電場の影響を受けることになる。あちこちに電荷や電流があるとき、そこをある検電荷が動いているときに

\*1 私自身、長いこと用語の制定に関わったので、この難しさはよく理解している。

受ける力は、図 1.2 に示すローレンツ力 (Lorentz force) であり、式で与えると以下のようになっている。

$$\mathbf{F} = Q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (1.1)$$

$\mathbf{E}$  を電場、 $\mathbf{B}$  を磁場と呼ぶ。 $\mathbf{B}$  は厳密には**磁束密度** (magnetic flux density) と呼ばれるが、厳密にいう必要のないときは、単に磁場と呼ぶ。電荷が動くとその移動方向に垂直に力を受けることも不思議であるが、移動方向にかかわらず、移動方向とある磁場ベクトルとの外積で力が決まるのが、さらに興味深い。

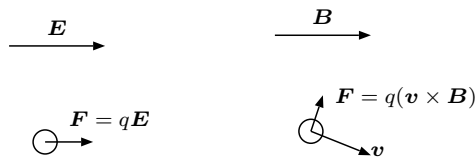


図 1.2 ローレンツ力: 静止している電荷は電場を、動いている電荷は加えて磁場を感じる。

---

二つのベクトル  $\mathbf{A}$  とベクトル  $\mathbf{B}$  の積には二種類の定義がある。一つは**内積** (inner product) または**スカラー積** (scalar product) といい、 $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$  とスカラー量となる積である。二つのベクトルの挟む角度を  $\theta$  として、 $|\mathbf{A}||\mathbf{B}| \cos \theta$  でも計算できる。もう一つは**外積** (outer product) または**ベクトル積** (vector product) といい、 $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \mathbf{i}(A_y B_z - A_z B_y) + \mathbf{j}(A_z B_x - A_x B_z) + \mathbf{k}(A_x B_y - A_y B_x)$  とベクトル量となる積である。二つのベクトルに垂直で、 $|\mathbf{A}||\mathbf{B}| \sin \theta$  の大きさを持つ。取り得る方向は二方向あるが、 $\mathbf{A}$  から  $\mathbf{B}$  に右ネジを回したときに、ネジの進む方向となる。本書では内積、外積という言葉を用いる。

---

電場や磁場はまわりに置かれた電荷や電流が作り出す。ここで、重要な性質がなりたつ。場の原因となる電荷や電流が複数存在するとき、全体の電荷と電流が作り出す電場や磁場は、一つ一つの電荷なり電流が作り出す電場や磁場のベクトルを合成になるのである。これを**重ね合わせの原理** (principle of superposition) という。つまり、電磁気学は、これら場の概念と重ね合わせの原理によって、美しく体系化されているといっても過言ではなかろう。

### 1.3 静電場

電場は電荷により作られ、磁場は電流が作り出す。重ね合わせの原理が成立するから、一つの電荷が作る電場、一つの微小な長さの電流が作る磁場が分かれば、任意の個数の電荷、あるいは電流の作る電磁場を計算することができる。

まず、静止した電荷  $Q$  の作る電場は次の**クーロンの法則** (Coulomb law) で与えられる。 $\epsilon_0$  は**電気定数** (electric constant) と呼ばれる定数である。

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}}{r^3} \quad (1.2)$$

この式から、 $\mathbf{E}$  の発散と回転について、それぞれ積分型と微分型を求めると、次のきれいな形が得られる\*2。

$$(\mathbf{E} \text{ の発散の積分形}) \quad \oint_S d\mathbf{S} \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V dV \rho \quad (1.3)$$

$$(\mathbf{E} \text{ の発散の微分形}) \quad \operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho \quad (1.4)$$

$$(\mathbf{E} \text{ の回転の積分形}) \quad \oint_S d\mathbf{S} \times \mathbf{E} = 0 \quad (1.5)$$

$$(\mathbf{E} \text{ の回転の微分形}) \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = 0 \quad (1.6)$$

なお、 $\rho$  は電荷密度である。また、 $\oint_S$  とは、体積  $V$  を囲む閉曲面  $S$  での面積分を示している。

## 1.4 静磁場

磁場は、もともと磁石間に働く力から定義された。磁極には、電荷に対応する**磁荷** (magnetic charge)  $Q_m$  が存在し、それが**磁荷のクーロンの法則** (Coulomb law of magnetic charge) にしたがう力を及ぼしあう。片方の磁荷が作る磁場は以下の式で表される。 $\mu_0$  は**磁気定数** (magnetic constant) と呼ばれる定数である。

$$\mathbf{H} = \frac{Q_m}{4\pi\mu_0} \frac{\mathbf{r}}{r^3} \quad (1.7)$$

$\mathbf{H}$  は磁場の強さと呼ばれる量であり、当初は、磁場といえば、これを意味したが、現在は  $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$  で与えられる  $\mathbf{B}$  が使われる。

その後、電流も磁場を発生すること、さらに、**図 1.1** に示したように、磁石の中には無数の電流ループが存在し、それらが永久に保持されていることなどが分かってきて、磁場の本質が電流とされたのである。例えば**棒磁石** (bar magnet) に代表される細長い磁石は、両端に正負 (N と S) の磁荷が存在するが、**図 1.3** に示すように、十分に細い有限の長さの**ソレノイド** (solenoid) と呼ばれるコイルと等価になる。ここで、ソレノイドの側面には、ソレノイドの軸を囲むように電流が流れるが、その単位長当たりの電流密度は  $K = Q_m / \mu_0 S$  で与えられる。 $S$  はソレノイドの断面積である。また、電流の方向は、右ネジ (もともと普通のネジ) を、尻尾が負磁荷 (S)、先端が正磁荷 (N) を向くように置き、そのネジを進めるように回転する方向となる。これを**右ネジの関係** (right screw relation) と呼ぶ。

\*2 初学の人にはこれらの式の意味を理解しようとする必要はない。単に流れを追ってほしいことと、学習の進行に合わせ、流れを確認するために利用してほしい。

磁石の場合、磁石の内部の磁場を測定するのはきわめて困難であるが、ソレノイドは中空であるので、それも可能である。その結果、ソレノイドの外部ではN極からS極に磁場ができるのに対し、内部では、S極からN極に向かっていることが判明した。つまり、電気力線は正極から発生して負極で消滅するのに対し、磁力線は電流を取り囲むように発生するのである。式 1.7 にこのソレノイド内の磁場を加えたものから、 $\mathbf{B}$  の回転と発散について、それぞれ積分型と微分型を求めると、次のきれいな形が得られる。

$$(\mathbf{B} \text{ の回転の積分形}) \quad \oint_S d\mathbf{S} \times \mathbf{B} = \mu_0 \int_V dV \mathbf{J} \quad (1.8)$$

$$(\mathbf{B} \text{ の回転の微分形}) \quad \text{rot } \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} \quad (1.9)$$

$$(\mathbf{B} \text{ の発散の積分形}) \quad \oint_S d\mathbf{S} \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (1.10)$$

$$(\mathbf{B} \text{ の発散の微分形}) \quad \text{div } \mathbf{B} = 0 \quad (1.11)$$

なお、ここでも  $S$  は任意の体積  $V$  を囲む閉曲面であり、 $\mathbf{J}$  は電流密度である。

ここで、式 1.8 の回転の積分形\*3であるが、多くの書では、アンペールの法則として、左辺が線積分、右辺が面積分のものが記載されている。しかも、**ビオ・サバルの法則** (Biot-Savart law) による電流素片が作る磁場から誘導する場合が多い。しかし、ビオ・サバルの法則自体、理論的に得られたもので、実験との対応がとりづらいことから、本書では、ソレノイドの作る磁場から誘導した。

## 1.5 動的な場

あと二つの重要な法則は、動的なものである。まず、磁場が変化するとき、そのまわりを取り囲む配線上に**起電力** (electro-motive force) が生ずるというもので、次の**ファラデーの法則** (Faraday

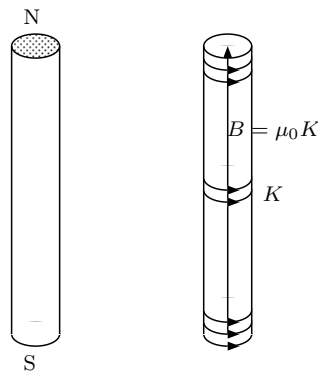


図 1.3 磁石は等価なソレノイドに置き換えることができる。

\*3 この式は著者が自力で誘導したものであり、大変気に入っている。

law) で与えられる。

$$\oint_C d\mathbf{r} \cdot \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_S d\mathbf{S} \cdot \mathbf{B} \quad (1.12)$$

ここで  $S$  は任意の閉曲線  $C$  によって囲まれた曲面である。この法則は、最初は配線の存在する場合に確認されたが、やがて、配線の無い空間にも電場が発生し、それが上式を満たすことが確認された。この法則を考慮し、電場の回転は修正され、式 1.5 および式 1.6 には磁場の影響が組み込まれる。

$$(\mathbf{E} \text{ の回転の積分形}) \quad \oint_S d\mathbf{S} \times \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_V dV \mathbf{B} \quad (1.13)$$

$$(\mathbf{E} \text{ の回転の微分形}) \quad \text{rot } \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (1.14)$$

最後の法則として、電流については電荷の減少につながるという**電流連続の法則** (current continuity law) が成立する。

$$(\mathbf{J} \text{ の発散の積分形}) \quad \oint_S d\mathbf{S} \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_V dv \rho \quad (1.15)$$

$$(\mathbf{J} \text{ の発散の積分形}) \quad \text{div } \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (1.16)$$

これに矛盾しないようにするためには、磁場の回転を修正する必要がある、式 1.8 および式 1.9 は次式のようになる。

$$(\mathbf{B} \text{ の回転の積分形}) \quad \oint_S d\mathbf{S} \times \mathbf{B} = \mu_0 \int_V dV \left( \mathbf{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \quad (1.17)$$

$$(\mathbf{B} \text{ の回転の微分形}) \quad \text{rot } \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (1.18)$$

式 1.18 の右辺に現れる電場の時間微分  $\varepsilon_0 \partial \mathbf{E} / \partial t$  は、**変位電流** (displacement current) と呼ばれ、**マクスウェル** (Maxwell) が理論的に導入したものである。

$\mathbf{E}$ 、 $\mathbf{B}$  の発散、回転を与える微分型の四つの式は、**マクスウェル方程式** (Maxwell equations) と呼ばれ、電磁気学の基礎方程式である。

## 1.6 ポテンシャル

以上で、電磁気学の基本方程式の概要について述べたが、量子力学が発展するにつれ、実は電場・磁場よりも、**ポテンシャル** (potential) (**スカラーポテンシャル** (scalar potential) と**ベクトルポテンシャル** (vector potential)) のほうが本質的であることが判明してきた。そういった意味では、すべてをポテンシャルを基礎にして書きたいところであるが、ポテンシャルの効果の実験的検証が直接的出ないこともあり、従来の書のように、まず電場・磁場について記述し、その後、ポテンシャルとの関連を付けてから、改めてポテンシャルからの導入を行うこととする。



スカラーポテンシャルを  $\phi$ 、ベクトルポテンシャルを  $\mathbf{A}$  と書くと、場の源との関係は次のように与えられる。

$$\left(\nabla^2 + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \phi = -\frac{1}{\varepsilon_0} \rho \quad (1.19)$$

$$\left(\nabla^2 + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{J} \quad (1.20)$$

また、これらの関係以外に**ローレンツゲージ** (Lorenz gauge) と呼ばれる次式が、成立する必要がある。

$$\operatorname{div} \mathbf{A} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (1.21)$$

## 第2章

# スカラー場とベクトル場

電磁場のように、質点や物質にかかる力などが、観測位置の移動につれ緩やかに変化するような場合<sup>\*1</sup>、力などの**場** (field) が存在するという。本章では、このような場の数学的な取り扱いについて学ぶ。電位のように、各点でスカラー量により定義される場を、**スカラー場** (scalar field) という。また、電場や磁場のように、各点でベクトルにより定義される場を、**ベクトル場** (vector field) という。

### 2.1 面積分

スカラー場には勾配、ベクトル場については発散、回転といった重要な概念がある。これらの概念の導入にはいずれも閉曲面表面に沿う面積分が重要な役割を演ずる。

**面積分** (surface integral) とは次のような概念である。例えば、地表の単位面積当たり受ける太陽光のエネルギーが簡単な関数  $f$  で与えられるものとする。 $f$  は、地球を中心とした極座標の  $\theta$ 、 $\phi$  の関数とするのがよいだろう。このとき地球全体で受ける太陽光のエネルギーの総和を求めるといわれたら、**図 2.1** のように、地球の表面全体を十分小さな面積  $\Delta S_i$  で分割し、各面積ごとのエネルギー  $\Delta S_i f$  を求め、それを合計すればよい。

$$\sum_i \Delta S_i f \quad (2.1)$$

ここで、 $\Delta S_i$  を十分小さくしたときの極限を次式で表す。

$$\int dS f \quad (2.2)$$

これが面積分である。つまり、面積分の  $\int$  は本来  $\sum$  のことであり、 $dS$  は  $\Delta S_i$  のことであると理解してもらいたい。通常、積分というと大きく二つの理解の仕方がある。一つは、ここに示した

---

<sup>\*1</sup> 場の発生源である電荷や電流のあるところでは急変したり発散したりすることがある。

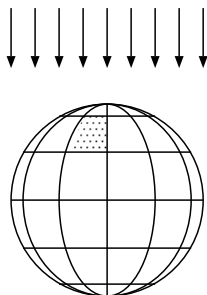


図 2.1 地球全体の受ける太陽光エネルギーは、各微小面積の受けるエネルギーの総和で得られる。

ような「総和の極限」という理解である。通常の積分である **リーマン積分** (Riemann integral) も、微小区間  $\Delta x$  を  $f$  に掛けて合計した  $\sum_i \Delta x_i f_i$  の極限と定義されている。

もう一つの理解の仕方は積分演算という考え方である。つまり、 $x^n$  から  $x^{n+1}/(n+1)$  を作り出すように、関数から別の関数を作り出す演算であるという理解の仕方である。これは、積分に段々慣れてくるとでき上がる概念であるが、面積分をこの概念のように理解しようとすると、意味不明になる。面積分を理解するにはあくまでも「総和の極限」と解釈してほしい。したがって、積分を記載する際、よく見られるように、 $\int f dS$  のように積分記号と  $dS$  で関数を囲む形にする必要はなく、順番は問題ではない。

---

地球に当たる光の全エネルギーを計算してみよう\*2。太陽の方向を極座標の軸方向とすると、光の強度は、緯度  $\theta$  (頭頂を  $0^\circ$  とする) が増える程、減っていくことから、 $f = I_0 \cos \theta$  で与えられる。また、経度方向  $d\phi$ 、緯度方向  $d\theta$  で囲まれた面積は、ほぼ  $dS = a^2 \sin \theta d\theta d\phi$  で与えられるから、全エネルギーは、これらの積を合計して、 $\int I_0 \cos \theta a^2 \sin \theta d\theta d\phi$  で計算できる。ただし、光は  $0 < \theta < \pi/2$  の範囲でしか当たらないことを、考慮する必要がある。この積分は簡単に実行でき、 $= 2\pi a^2 I_0 \int \cos \theta \sin \theta d\theta = \pi a^2 I_0 \sin^2 \theta \Big|_0^{\pi/2} = \pi a^2 I_0$  となる。つまり、 $I_0$  に地球の断面積を掛けた結果となる。

---

もう一つ別の例を挙げよう。それは浮力の計算である。液体中の物体には圧力がかかっている。その合力が浮力となるのである。例えば、深さによらず一定の圧力  $p$  を受けている物体を考えよう。この場合にも、物体の表面  $S$  を微小面積  $\Delta S_i$  に分割する。各面積の受ける力は  $-\Delta S_i p$  となる。ここで  $\Delta S_i$  は、大きさ  $\Delta S_i$  で、方向が物体の内から外を向き各面要素に垂直なベクトルである。浮力はこれらのベクトルの合力となる。

$$-\sum_i \Delta S_i p \quad (2.3)$$

---

\*2 以後、太線と細線で囲まれた領域は、流れを掴むだけの人は、読み飛ばしてもらっても構わないコラムである。

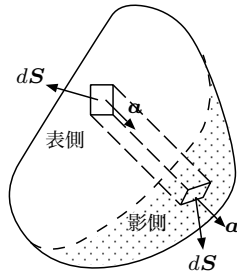


図 2.2 任意のベクトル  $\mathbf{a}$  と平行な光線により、二つの微小面積が対応する。

この総和は極限として次のような面積分として表される。

$$-\oint_S d\mathbf{S} p \quad (2.4)$$

ここで  $\oint$  に見られるように積分記号に  $\circlearrowleft$  を付けたのは、閉曲面すべての面要素に対する総和を意味する。こうした面積分概念は「総和の極限」として考えると理解しやすいが、演算子として考えると、絶対に理解できない。電磁気学に出てくるさまざまな面積分が理解できなくなる最大の原因も、ここにあるので、あくまでも「総和の極限」という立場で理解してほしい。なお、 $\oint$  のサフィックスは、ある体積を囲む閉曲面を指す。

ちなみに、 $p$  が一定の場合には、 $p$  を面積分の外に追い出せるが、残る面積分は大きさ 0 のベクトルとなる。

$$\oint_S d\mathbf{S} = \mathbf{0} \quad (2.5)$$

つまり、一定圧力中の浮力は  $\mathbf{0}$  となる。

式 2.5 の証明は簡単である。この結果があるベクトル  $\mathbf{a}$  になったと仮定してみよう。両辺に  $\mathbf{a}$  自身を内積の形で掛ける。まず、右辺は  $a^2$  となる。一方、左辺の  $\mathbf{a} \cdot d\mathbf{S}$  は、 $a dS \cos \theta$  となる。ここで  $\theta$  は二つのベクトルのなす角度である。つまり、図 2.2 の四角柱の断面積の  $a$  倍になる。ただし、 $\theta$  が  $\pi/2$  以下であると正、以上であると負となる。ところで、ある微小面積に着目し、それを  $\mathbf{a}$  に平行な光線で照らすと、一般に、図 2.2 に見られるように、光線は閉曲面と二箇所で交わる。つまり、光の当たる表側と影側の、二つの対応する微小面積が存在することになるのであるが、この二つの微小面積における  $\mathbf{a} \cdot d\mathbf{S}$  は、断面積の  $a$  倍になるが、表側では負、影側では正となり、ちょうど打ち消し合って 0 となる。したがって、式 2.5 の左辺は、表側も裏側も含むため、0 となり、 $a^2 = 0$  が誘導される。この結果、 $\mathbf{a}$  は零ベクトルとなる。

次に、高さとともに圧力の変化する液体中での物体にかかる浮力を計算してみよう。 $p = p_0 + \rho g z$

と  $z$  方向に変化しているとしよう。その場合の浮力は次式で与えられる。

$$-p_0 \oint_S d\mathbf{S} - \rho g \oint_S d\mathbf{S} z \quad (2.6)$$

このうち、第一項は式 2.5 に示したように  $\mathbf{0}$  となる。第二項は面積分部分が物体の体積となることが示される。

$$\oint_S d\mathbf{S} z = \mathbf{k}V \quad (2.7)$$

ただし、 $\mathbf{k}$  は  $z$  方向の単位ベクトルである。結局、「浮力は物体の排除する液体の重量に等しくなる」という**アルキメデスの法則** (Archimedes law) が導かれる。

これを証明するには、まず、閉曲面を図 2.3 のように、 $xy$  面と平行な面で輪切りにする。右辺は厳密には分割を無限に薄くした極限となるのだが、 $\lim$  の記号は省略した。以後の議論でも、特に必要ない限り、 $\lim$  の記号は省略する。

$$\oint_S d\mathbf{S} z = \sum_{i=1}^n \int_{S_i} d\mathbf{S} z_i = \sum_{i=1}^n z_i \int_{S_i} d\mathbf{S} \quad (2.8)$$

各輪切り一枚ごとの側面の面積分  $\int d\mathbf{S}$  を求めるのであるが、各輪切り全体の面積分を行うと最初に述べたように  $0$  となるはずである。

$$\int_{S_i} d\mathbf{S} + \mathbf{k}A_{i+1} - \mathbf{k}A_i = \mathbf{0} \quad (2.9)$$

ここで、 $A_i$  は  $i$  番目の輪切りの底面の面積である。

この関係を使い、側面の面積分を面積差に置き換えることができる。さらに変形すると証明が完了する。

$$\begin{aligned} \oint_S d\mathbf{S} z &= \sum_{i=1}^n z_i \mathbf{k} (A_i - A_{i+1}) = \mathbf{k} \left( \sum_{i=0}^{n-1} z_{i+1} A_{i+1} - \sum_{i=1}^n z_i A_{i+1} \right) \\ &= \mathbf{k} \sum_{i=1}^{n-1} (z_{i+1} - z_i) A_{i+1} = \mathbf{k}V \end{aligned} \quad (2.10)$$

いうまでもなく  $x$  や  $y$  の重みについても同様の結果が得られる。式 2.5 や式 2.7 などは、今後もしばしば利用される大事な式である。

## 2.2 スカラー場の勾配

面積分の応用として、スカラー場  $\phi$  の**勾配** (gradient) について述べよう。勾配とは、スカラー場が考えている領域で平均として、どちらの方向に強くなっていくかを示すものである。前述の圧

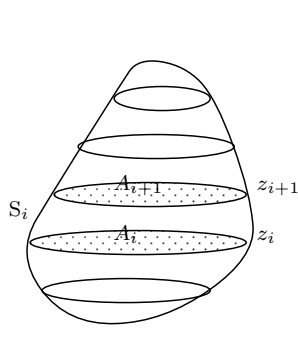


図 2.3  $z$  方向にだけ変化するスカラー場の面積分は、 $xy$  平面に平行なスライスで行う。

力場もスカラー場の一例であったが、圧力を面ベクトルで積分した結果は、圧力に勾配がある場合にのみ浮力という力が現れた。そこで、次式のように面積分をスカラー場  $\phi$  の重みを付けて実行してみよう。

$$\oint_S d\mathbf{S} \phi \quad (2.11)$$

すると、 $\phi$  の大きいところの  $d\mathbf{S}$  が強調される。つまり積分結果は  $\phi$  の小さい辺りから大きい辺りへ向くベクトルとなる。その結果はスカラー場の勾配の程度を表すことになる。これを**勾配積分** (gradient integral) と呼ぼう。

この定義を利用すると、次式により、任意の点のまわりの小さな体積領域  $\Delta V$  の局所的な勾配を定義することができる。勾配積分が  $\Delta V$  に比例することから、勾配積分を  $\Delta V$  で除している。この式で定義される量は  $\phi$  の *grad* (gradient)、もしくは単に勾配ともいう。

$$\text{grad } \phi \equiv \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \oint_S d\mathbf{S} \phi \quad (2.12)$$

スカラー場  $\phi$  が比較的緩やかに変化する場合、この式は次式の微分により計算することができる。これを  $\nabla \phi$  と書く。

$$\text{grad } \phi = \nabla \phi = \mathbf{i} \frac{\partial \phi}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial \phi}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial \phi}{\partial z} \quad (2.13)$$

$\nabla$  (**ナブラ**, nabla) は、ベクトル表示されたベクトル微分演算子である。

$$\nabla \equiv \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} \quad (2.14)$$

これを  $\phi$  に左から形式的にベクトルとして掛け、そこで得られた形を見ると、微分形と同じになることから、しばしば便利に用いられる表示法である。当然のことながら、純粋なベクトルではないので、 $\phi \nabla$  と書くことはできない。

スカラー場  $\phi$  が比較的緩やかに変化し、かつ領域が小さい場合には、この積分を一次の近似の範囲内で簡単に計算することができる。まず領域の付近で  $\phi$  をテイラー展開する。

$$\phi = \phi_0 + \frac{\partial\phi}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial\phi}{\partial y}(y - y_0) + \frac{\partial\phi}{\partial z}(z - z_0) + O^2 \quad (2.15)$$

ここで、 $\partial\phi/\partial x$  などは展開の係数であり、現在考えている範囲では一定値としてよい。

上式を一次の近似の範囲で勾配積分してみよう。一定値の積分は 0 であり、 $x$ 、 $y$ 、 $z$  に比例する部分はそれぞれ  $iV$ 、 $jV$ 、 $kV$  になるので、次式が得られる。

$$\oint_S d\mathbf{S} \phi = V \left( \mathbf{i} \frac{\partial\phi}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial\phi}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial\phi}{\partial z} \right) + O^2 \quad (2.16)$$

つまり、勾配積分の結果は閉曲面の形によらず、囲む領域の体積に比例する。

例として、水中の圧力のように、 $z$  方向に徐々に強くなるスカラー場を考えてみよう。

$$\phi = \phi_0 + \phi_z z \quad (2.17)$$


式 2.13 を用いて、この  $\text{grad}$  を求めると確かに  $z$  方向を向いており、スカラー場の面積分が勾配の程度を表していることが理解できよう。

$$\text{grad} \phi = \mathbf{k} \phi_z \quad (2.18)$$

また、電磁気学でよく現れる代表的なスカラー場として  $\phi = 1/r$  があるが、これを上式に代入してみると、次式が得られる。

$$\begin{aligned} \text{grad} \left( \frac{1}{r} \right) &= \mathbf{i} \frac{\partial(r^{-1})}{\partial x} + \mathbf{j} \cdots + \mathbf{k} \cdots \\ &= \mathbf{i} \left( -r^{-2} \frac{x}{r} \right) + \mathbf{j} (\cdots) + \mathbf{k} (\cdots) = -\frac{\mathbf{r}}{r^3} \end{aligned} \quad (2.19)$$

この右辺のベクトルは、**クーロンの法則** (Coulomb law) などに現れる、原点を中心とした放射状で距離の二乗に反比例する大きさを持つベクトル場になる。一般に、このような放射状で二乗に反比例するベクトル場は**クーロン場** (Coulomb field) と呼ばれ、電磁気学ではもっとも頻繁に出現するベクトル場である。

次に大きな閉曲面上での面積分を計算してみよう。囲まれた領域を  2.4 のように賽の目に切ると、各微小領域では式 2.12 が成立している。この式の左右を入れ替え、両辺を  $dV$  倍して全領域で合計すると、右辺は  $\text{grad} \phi$  の体積積分になる。一方、左辺の面積分は境界面で互いに打ち消し合い、最表面の面積分だけが生き残るから、次の積分定理が得られる。

$$\oint_S d\mathbf{S} \phi = \int_V dV \text{grad} \phi \quad (2.20)$$

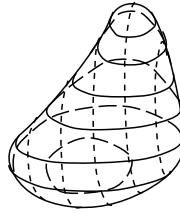


図 2.4 閉局面で囲まれた領域を賽の目に切る。

この式を**スカラー場のガウスの定理** (Gauss theorem of scalar field) と呼ぼう。

この式を含め、次節以後に現れる面積分を体積積分に結び付ける公式は、一般に**ガウスの定理** (Gauss theorem) と呼ばれ、同じような手順を、ベクトル場の発散積分や回転積分に対して適用することで、発散や回転の微分形を求めることができる。

なお、grad については、もう一つ大事な性質が存在する。grad  $\phi$  の微分形の定義の両辺に、微小変位  $d\mathbf{r} = i dx + j dy + k dz$  をスカラー的に掛ける。すると右辺はちょうど  $\phi$  の全微分の定義になる。

$$d\mathbf{r} \cdot \text{grad } \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \phi}{\partial y} dy + \frac{\partial \phi}{\partial z} dz = d\phi \quad (2.21)$$

したがってこれを積分することにより、積分路の終点と始点の  $\phi$  の差が得られる。

$$\int_P^Q d\mathbf{r} \cdot \text{grad } \phi = \phi(Q) - \phi(P) \quad (2.22)$$

このように線積分でも、面積分と同様に、線積分要素  $d\mathbf{r}$  とベクトル量の内積をとって、それを足し合わせることで、線積分という概念が定義されるのである。この他、ベクトル量との外積を足し合わせるとか、スカラー量を掛けて足し合わせる線積分も存在する。

## 2.3 ベクトル場の発散

ベクトル場として流体の各点の流速のようなものを考えよう。ある面を通過して単位時間当たり、どれだけ流れ出していくかは、ベクトルの面垂直成分と面積を掛ければ計算できる。このように、ベクトル場に対して、場を流れのように見なし、それがあある領域からどのくらい流れ出ているかを示す概念を**発散** (divergence) と呼ぶ。ベクトル場に対して、これと同じ計算をしたものを発散積分という。考えている面上で、ベクトル場が出たり入ったりするときには、面全体を十分小さな微小面積に分割し、各微小面積で計算した結果を、合計すればよい。つまり、ベクトルの面垂直成分を考え、それを面全体で積分すればよい。

$$\oint_S d\mathbf{S} \cdot \mathbf{A} \quad (2.23)$$

これを**発散積分** (divergence integral) と呼び、ベクトル場の発散の程度を示すものとする。例えば、クーロン場  $\mathbf{r}/r^3$  は、原点を中心に、外向きに光輪のように配列しているので、発散積分は正



となり、正の発散があることになる。

$\text{grad } \phi$  と同様に、一点の近傍の局所的発散の程度を次のように求めることができる。この式で定義される量は  $\mathbf{A}$  の *div* (divergence)、もしくは単に発散とも呼ばれる。

$$\text{div } \mathbf{A} \equiv \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \oint_S d\mathbf{S} \cdot \mathbf{A} \quad (2.24)$$

ベクトル場が比較的緩やかに変化する場合、この式は次の微分により計算することができる。これを  $\nabla \cdot \mathbf{A}$  と書く。

$$\text{div } \mathbf{A} = \nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad (2.25)$$

ベクトル演算子  $\nabla$  と  $\mathbf{A}$  の形式的な内積をとることにより、右辺の式の形が得られるので、これを  $\nabla \cdot \mathbf{A}$  と記載するが、あくまでも演算子であるので、 $\mathbf{A} \cdot \nabla$  と書くことはできない。

ベクトル場が比較的緩やかに変化し、かつ領域が小さい場合には、この発散積分を一次の近似で計算することができる。まず領域の付近で  $\mathbf{A} = iA_x + jA_y + kA_z$  をテイラー展開する。

$$\begin{aligned} \mathbf{A} = i \left[ A_{x_0} + \frac{\partial A_x}{\partial x} (x - x_0) + \frac{\partial A_x}{\partial y} (y - y_0) + \frac{\partial A_x}{\partial z} (z - z_0) \right] \\ + j [\dots] + k [\dots] + O^2 \end{aligned} \quad (2.26)$$

$d\mathbf{S} \cdot \mathbf{A}$  を一次の近似の範囲で積分してみよう。一定値の面積分は  $\mathbf{0}$  であり、 $x$  や  $y$  や  $z$  に比例する部分は、 $iV$ 、 $jV$ 、 $kV$  になるから、次のようになる。

$$\oint_S d\mathbf{S} \cdot \mathbf{A} = V \left( \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) + O^2 \quad (2.27)$$

ただし、 $i$ 、 $j$ 、 $k$  の異なるもの同士の内積は  $\mathbf{0}$  にした。ここでも、積分の結果は閉曲面の形によらず、囲む領域の体積に比例する。

スカラー場と同様に、大きな閉曲面上での発散積分を計算することができる。囲まれた領域を賽の目に切ると、各微小領域では上式が成立している。これを  $dV$  として全領域で合計すると、左辺は  $\text{div } \mathbf{A}$  の体積積分になる。一方、右辺の発散積分は境界面で互いに打ち消し合い、最表面の面積分だけが生き残るから、次の面積分と体積積分を結び付ける式が得られる。

$$\oint_S d\mathbf{S} \cdot \mathbf{A} = \int_V dV \text{div } \mathbf{A} \quad (2.28)$$

これは、厳密には**ベクトル場のガウスの内積定理** (Gauss inner product theorem of vector field) と呼ぶべきものであるが、三つのガウスの定理のなかでは、この定理がもっとも知られており、以後、単に**ガウスの定理** (Gauss theorem) というと、これを指すものとしよう。

例として、クーロン場、 $\mathbf{r}/r^3$  の発散積分  $\oint_S d\mathbf{S} \cdot \mathbf{r}/r^3$  を考えてみよう。このベクトル場は、電荷のような何らかの源が原点に置かれており、その結果、そこから放射状の方向を取り、原点からの距離の二乗に反比例する大きさを持っている。この積分の結果は立体角を利用して次のようになることが知られている。

$$\oint_S d\mathbf{S} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r^3} = 4\pi \quad (2.29)$$

証明は、通常、ややトリッキーな方法によりなされ、立体角を利用する。発散積分の  $d\mathbf{S} \cdot \mathbf{r}/r^3$  なる項は  $dS \cos \alpha/r^2$  になる。ただし、 $\alpha$  は、二つのベクトル  $d\mathbf{S}$  と  $\mathbf{r}$  のなす角度である。そこで  $d\mathbf{S} \cdot \mathbf{r}/r^3$  は、 $d\mathbf{S}$  を原点の方向から見た（つまり  $\mathbf{r}$  の方向から見た）面積  $dS \cos \alpha$  を、 $r^2$  で除したものになる。つまり、[図 2.5](#) に見られるように、 $d\mathbf{S}$  を見た立体角になっている。立体角とは、この四角錐が、原点を中心とし半径1の球面に作る面積のことである。もし、閉曲面が原点を囲んでいるときには、全閉曲面を見込む立体角の総和は  $4\pi$  となるから、前式 [2.29](#) が成立する。

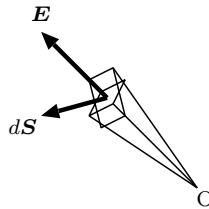


図 2.5 閉局面上の面要素を見込む立体角。

一方、閉曲面が点電荷を囲んでいないときには、点電荷から閉曲面の裏側を見る場合と、表側を見る場合の二つの場合が発生する。いずれも見込む立体角は同じ値となるが、表側については  $d\mathbf{S} \cdot \mathbf{r}$  が負となるため、負の立体角となる。このため二つの場合を加えると 0 となる。ひだが重なる閉曲面など、もっと複雑な場合でも、立体角の正負をきちんと考えることにより、閉曲面が電荷を囲めば上式が成立し、囲まなければ 0 となることが導かれる。

しかし、この発散積分の手順も、次のように内積面積分の定理を用いると、著しく機械的、かつ簡単になる。まず場の  $\text{div}$  を求めてみよう。

$$\begin{aligned} \text{div} \left( \frac{\mathbf{r}}{r^3} \right) &= \frac{\partial(xr^{-3})}{\partial x} + \frac{\partial(yr^{-3})}{\partial y} + \frac{\partial(zr^{-3})}{\partial z} \\ &= \left( r^{-3} - 3xr^{-4} \frac{x}{r} \right) + \dots + \dots \\ &= 3r^{-3} - 3(x^2 + y^2 + z^2)r^{-5} = 0 \end{aligned} \quad (2.30)$$

ただし、原点では被微分関数が  $\infty$  となるので、0 とは断定できないので注意が必要である。

ここで、目的の任意の閉曲面上での発散積分を考えよう。まず閉曲面が原点を囲まない場合は、その内部の空間に内積面積分の定理を適用すると、 $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$  より左辺は 0 となる。これより、 $S$  が原点を囲まない場合に対し、次式がただちに導かれる。

$$\oint_S d\mathbf{S} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r^3} = 0 \quad (2.31)$$

次に閉曲面が原点を囲む場合を考えよう。まずこの閉曲面の中に、**図 2.6** に示すように、原点を中心とする小さな球面を考える。閉曲面の囲む空間から球の囲む空間を除外したいわば殻状の空間に対して、内積面積分の定理を適用してみよう。そこでは  $\operatorname{div}$  は 0 であるので、左辺の体積積分は 0 となる。一方、右辺の面積分はこの殻空間を囲む全表面となるので、閉曲面上での発散積分と球面上での発散積分を加えたものになる。しかし、球面上では  $d\mathbf{S}$  は殻空間の外向き、つまり原点の方向を向いている。これを通常の原因から外向きの  $d\mathbf{S}$  に定義し直すと、符号が反転する。

$$\oint_S d\mathbf{S} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r^3} - \oint_{\text{球面}} d\mathbf{S} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r^3} = 0 \quad (2.32)$$

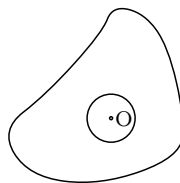
この結果、閉曲面上での発散積分は球面上での発散積分と一致する。

第二項の球面上の積分はきわめて簡単に計算できる。というのは、球面上では  $d\mathbf{S}$  と  $\mathbf{r}$  の方向は完全に一致しており、球の半径を  $a$  とすると、 $d\mathbf{S} \cdot \mathbf{r}/r^3 = dS a/a^3 = dS/a^2$  となる。したがって、 $S$  が原点を囲む場合に対し、次のようになる。

$$\begin{aligned} \oint_S d\mathbf{S} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r^3} &= \oint_{\text{球面}} d\mathbf{S} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r^3} = \oint_{\text{球面}} dS \frac{1}{a^2} \\ &= \frac{1}{a^2} \oint_{\text{球面}} dS = \frac{1}{a^2} 4\pi a^2 = 4\pi \end{aligned} \quad (2.33)$$

ここで  $\oint_{\text{球面}} dS$  は球の表面積  $4\pi a^2$  となることを利用している。この式と前式から閉曲面だけの発散積分が  $4\pi$  になることが、ただちに導かれる。

このように、ベクトル場  $\mathbf{r}/r^3$  の発散積分を、内積面積分の定理で体積積分に置き換えると、原点付近だけが特別であり、あとの空間の寄与はまったくないことが理解できよう。したがって、閉曲面が原点を囲むか囲まないかだけが重要であり、発散積分の結果が閉曲面の形に依存しないことが分かる。このように閉曲面上の面積分が、源付近だけの特異性によって決定されるようなことは、電磁気でたびたび現れる現象である。



**図 2.6** 原点を小さな球面で囲む。

クーロン場の  $\text{div}$  を求めておこう。本節で示したように、原点以外では  $\text{div}$  は 0 である。問題は原点における  $\text{div}$  である。式 2.33 から分かるように、原点を囲む積分は、体積によらず一定であるので、これを体積で割って得られる  $\text{div}$  は無限大に発散してしまう。

$$\text{div} \left( \frac{\mathbf{r}}{r^3} \right) = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \oint_S d\mathbf{S} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r^3} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{4\pi}{\Delta V} \rightarrow \infty \quad (2.34)$$

この処理法については、ある一点でのみ無限大となり、その点を除くいたるところで 0 となり、かつ全世界で体積積分すると 1 となるデルタ関数と呼ばれる関数を導入することにより、解決することができるが、詳細は次節で述べる。

要は、クーロン場は、原点を除くあらゆるところで、 $\text{div}$  が 0、つまり原点以外では発散のない比較的簡単な場であることが分かる。

## 2.4 デルタ関数

ある点でだけ無限大となり、その他のあらゆる点で 0 となり、かつ、全世界で体積積分すると 1 となる関数を、**ディラックのデルタ関数** (Dirac  $\delta$  function) あるいは単に**デルタ関数** (delta function) と呼ぶ。

三次元空間での関数を議論する前に、一次元空間での**ディラックのデルタ関数** (Dirac  $\delta$  function) を考えてみよう。一次元空間で、まず、**図 2.7** に示すように、原点の前後  $a$  の領域内だけ、 $1/a$  の値を持ち、その外はすべて 0 の不連続関数  $f(x)$  を考えてみる。この関数を  $x$  で積分して面積を求めてみると、その積分結果は明らかに 1 である。そこで、 $L \rightarrow 0$  としてみると、原点では  $f(0) \rightarrow \infty$  となるが、原点を除くあらゆる点で  $f(x) = 0$  である。こうした極限でしか定義されないものを、関数といってよいかどうかといった問題は残るが、明らかに所望の性質を持っている。こうした関数  $f(x)$  を  $\delta(x)$  と記載する。原点以外の点  $x_0$  で特異性を持つデルタ関数を定義するには、 $\delta(x - x_0)$  を使えばよい。

ここでは不連続関数を用いたが、例えば連続関数  $2a/[\pi(x^2 + a^2)]$  で、 $a \rightarrow 0$  としたのも、同じ性質を持っており、 $\delta(x)$  の別の定義となっている。さらにガウス関数 (正規分布) なども利用できる。このような関数を探すのは容易であり、要は積分して有限になり、 $x$  軸方向に圧縮すると、原点付近以外に大きな値を持たないような関数でさえあればよい。積分結果を 1 にするには、適切

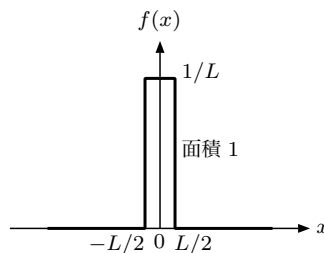


図 2.7  $L \rightarrow 0$  とすると、一次元空間でのデルタ関数が得られる。

な正規化を行うだけでよい。

三次元空間におけるデルタ関数は、半径  $a$  の球の内部で  $1/V$  の値を持ち、外部では 0 となる関数の極限により定義することができる。ここで、 $V$  は球の体積  $4\pi a^3/3$  である。いうまでもなく、この関数の体積積分は 1 である。また  $a \rightarrow 0$  により、原点以外は 0 となる。この三次元空間におけるデルタ関数を  $\delta(\mathbf{r})$  と書く。この場合も、連続関数  $a/[\pi(r^2 + a^2)]^2$  の極限によっても、定義することもできる。また、原点以外の点  $\mathbf{r}_0$  に特異性のあるデルタ関数は  $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$  で定義できることも、一次元の場合と同様である。この三次元空間におけるデルタ関数を、以後、**点状デルタ関数** (point delta function) と呼ぼう。

さて前節最後の式 2.34 に示した  $\text{div}(\mathbf{r}/r^3)$  を見てみよう。まず、この式は原点では無限大となるが、それ以外のあらゆる点で 0 である。さらに、この式を体積積分としてみると、 $4\pi$  となることが分かる。

$$\int_V dV \text{div}\left(\frac{\mathbf{r}}{r^3}\right) = \int_S d\mathbf{S} \cdot \left(\frac{\mathbf{r}}{r^3}\right) = 4\pi \quad (2.35)$$

したがって、次式のように記載できることが分かる。

$$\text{div}\left(\frac{\mathbf{r}}{r^3}\right) = 4\pi\delta(\mathbf{r}) \quad (2.36)$$

次章に示すように、点状デルタ関数は、点電荷を扱う際に、しばしば用いられる。

**線状デルタ関数** (line delta function) も定義することができる。これは、円柱のような領域に対して定義された関数で、長さは一定で断面積だけ縮めることにより得られる。同じく断面積上で積分すると 1 になる関数である。円柱の長さを短かめに定義し、これを軸方向に繋ぎ合わせることで、任意曲線の存在する部分にだけ特異性のある場合を扱うことができるようになる。次章で述べるように、線電荷や電流などを扱う際、便利であり、 $\delta_L(\mathbf{r}, l)$  と記載することとしよう。このデルタ関数は、 $\mathbf{r}$  が  $\mathbf{0} \pm l/2$  の線分内にあるときだけ値を持つ。

**面状デルタ関数** (surface delta function) も定義することができる。これは、厚さ  $a$  の板状の領域内だけ  $1/a$  の値をとり、その外部では 0 となる関数を定義し、板の厚さだけ 0 に縮めることにより得られる。この関数も、厚さ方向に積分すると 1 となる。板の面積を小さめに定義し、これをジグソーパズルのように繋ぎ合わせることで、任意曲面の存在する部分にだけ特異性のある場合を扱うことができるようになる。次章で述べるように、面電荷や面電流などを扱う際、便利であり、 $\delta_S(\mathbf{r}, S)$  と記載しよう。線状デルタ関数と同様に、 $\mathbf{r}$  が原点を通過する  $S$  面内にあるときだけ値を持つ。

## 2.5 ベクトル場の回転

ベクトル場の**回転** (rotation) について述べよう。回転とはベクトルが渦状に並んでいることを指す。地球のような閉曲面に沿って、ベクトル場が面の接線方向に絡み付いて、ちょうど偏西風のように回っているとすると、このベクトル場は明らかに地軸を軸とする渦上の流れを構成してい

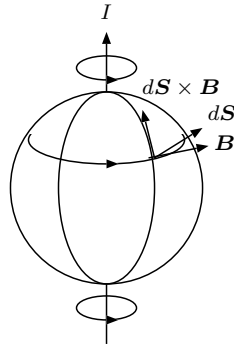


図 2.8 面ベクトルと直線電流の作る磁場ベクトルとの外積は、面内で頭頂点を向く。

る。もっと複雑な場合にも、次のような計算をすれば、閉曲面全体で合計した渦の軸方向と強さを求めることができよう。

閉曲面の上のある面要素を考える。そこで面の法線ベクトルとベクトル場の外積をとると、その方向は回転軸の方向となり、ベクトルの接線方向の強さにもなっている。ちょうど、力のモーメントのようなベクトルとなる。これを面要素の重みを付けて合計すれば、閉曲面全体をとりまく渦の方向と強さになろう。外積があちこちを向いて全体として合計すると  $\mathbf{0}$  になるときは、渦はなかったというふうに考える。流れの中に中心だけ固定したピンポン玉を入れたようなもので、渦があればピンポン玉は、その渦にしたがって回転を始めるというアナロジーが、分かりやすいかも知れない。

領域の周辺での回転の程度は次式で計算できる。

$$\oint_S d\mathbf{S} \times \mathbf{A} \quad (2.37)$$

これを**回転積分** (rotation integral) と呼ぼう。この場合、外積が使われているため、もし  $d\mathbf{S}$  と  $\mathbf{A}$  の順を入れ替えて記載する場合には、負号を付けねばならない。

例えば、直線上、下から上へ流れる電流の作る磁場は、電流路を取り囲む円周に沿ったベクトル場になる。これを電流路上の一点を中心とする球面上で回転積分をしてみると、図 2.8 に見られるように、どの外積も球面に沿うベクトルになるが、球面から電流が流れ出す点、つまり球の頭頂点を向いている。これを積分すると上向きのベクトルとなる。つまり、回転が存在し、その右ネジの進む方向のベクトルが得られる。

一点の近傍の局所的回転の程度を次のように求めることができる。この量は  $\mathbf{A}$  の *rot* (rotation)、もしくは単に回転とも呼ばれる。

$$\text{rot } \mathbf{A} \equiv \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \oint_S d\mathbf{S} \times \mathbf{A} \quad (2.38)$$

領域が小さく、ベクトル場が緩やかに変化している場合には、この式を次の微分により求めること

ができる。これを  $\nabla \times \mathbf{A}$  と記載する。

$$\text{rot } \mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{i} \left( \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) + \mathbf{j} \left( \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \mathbf{k} \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \quad (2.39)$$

$\nabla \times \mathbf{A}$  と同様に、ベクトル演算子  $\nabla$  と  $\mathbf{A}$  の形式的な外積をとると、微分形が得られるので、これを  $\nabla \times \mathbf{A}$  と記すが、 $-\mathbf{A} \times \nabla$  と書くことはできない。

発散積分のときと同様に、領域の付近で  $\mathbf{A} = \mathbf{i}A_x + \mathbf{j}A_y + \mathbf{k}A_z$  をテイラー展開する。 $d\mathbf{S} \times \mathbf{A}$  を一次の近似の範囲で積分すると、一定値の面積分は  $\mathbf{0}$  であり、 $x$  や  $y$  や  $z$  に比例する部分は  $\mathbf{i}V$ 、 $\mathbf{j}V$ 、 $\mathbf{k}V$  になるから、次のようになる。

$$\begin{aligned} \oint_S d\mathbf{S} \times \mathbf{A} \\ = V \left[ \mathbf{i} \left( \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) + \mathbf{j} \left( \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \mathbf{k} \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \right] \\ + \mathcal{O}^2 \end{aligned} \quad (2.40)$$

ただし、 $\mathbf{i}$ 、 $\mathbf{j}$ 、 $\mathbf{k}$  の外積の計算は実行してある。

発散の場合とまったく同様に、回転の程度を、大きな閉曲面上での回転積分により計算することができる。

$$\oint_S d\mathbf{S} \times \mathbf{A} = \int_V dV \text{rot } \mathbf{A} \quad (2.41)$$

厳密にはベクトル場のガウスの外積定理 (Gauss outer product theorem of vector field) とでも呼ぶべきものであろうが、以後、簡単にガウスの外積定理 (Gauss outer product theorem) と呼ぼう。

例えば、クーロン場 (Coulomb field)  $\mathbf{r}/r^3$  の場合には、次のようになる。

$$\oint_S d\mathbf{S} \times \frac{\mathbf{r}}{r^3} = \mathbf{0} \quad (2.42)$$

まず、クーロン場の rot を計算してみよう。

$$\begin{aligned} \text{rot } \frac{\mathbf{r}}{r^3} &= \mathbf{i} \left[ \frac{\partial(zr^{-3})}{\partial y} - \frac{\partial(yr^{-3})}{\partial z} \right] + \mathbf{j} \cdots + \mathbf{k} \cdots \\ &= \mathbf{i} \left( -3zr^{-4} \frac{y}{r} + 3yr^{-4} \frac{z}{r} \right) + \mathbf{j} \cdots + \mathbf{k} \cdots = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (2.43)$$

この式は、少なくとも、被微分関数が  $\infty$  となる原点を除いては、必ず成立する。式 2.32 に示したように、任意の閉曲面での発散積分は、原点を囲む球殻上の積分に帰することができる

た。その際の条件は、原点以外での  $\text{div}$  が 0 であることであつた。これと同様に、原点以外での  $\text{rot}$  が 0 であるので、任意の閉曲面に対する回転積分は、原点を囲む球殻上の積分と等しくなる。さて球面上での回転積分であるが、 $d\mathbf{S} \times \mathbf{A}$  は  $d\mathbf{S}$  と  $\mathbf{r}$  がいつでも同方向であるため、 $\mathbf{0}$  となる。したがって、球殻上の回転積分は明らかに  $\mathbf{0}$  となり、任意の閉曲面での回転積分も  $\mathbf{0}$  となる。

別例として、直線電流の作る磁場を考えよう。磁場のベクトルは、電流路からの距離を  $R$  とするとき、電流路を囲む円の円周方向を向き、大きさは比例係数を除いて  $1/R$  となる。図 2.8 に示すように、球面上でのこのベクトルの回転積分を実行してみよう。球の半径を  $r$  とすると次のようになる。

$$\oint_{\text{球面}} dS \frac{\sin \theta}{R} = 2\pi L \quad (2.44)$$

なお、電流路の長さ  $2r$  を  $L$  と置いた。このように、右辺はこの体積中に存在する電流路の長さに比例する。

場のベクトルと  $d\mathbf{S}$  の外積は、図のように、球面に沿って頭頂点の方向を向いている。二つのベクトルが直交していることから、外積には角度補正は必要としないが、外積ベクトルの結果の総和を求めるときには、電流路の成分を求めてから和をとる必要がある。

$$\oint_{\text{球面}} dS \frac{\sin \theta}{R} = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} r^2 \sin \theta d\theta d\phi \frac{\sin \theta}{r \sin \theta} = 2\pi (2r) = 2\pi L \quad (2.45)$$

同じ回転積分を、別の手法で計算することもできる。クーロン場の発散積分と同様に、電流路を囲む半径  $a$  の筒状の領域と、その部分を除いた領域の二つの積分の和に置き換えることができる。除いた部分の積分は、このベクトル場の  $\text{rot}$  が  $\mathbf{0}$  であるので、 $\mathbf{0}$  となる。筒状の領域の積分は、表面で外積がすべて同じ値の上向きで  $dS/a$  の値を持つベクトルとなることから簡単に計算できる。 $1/a$  に筒状の領域の表面積を掛けた大きさ  $2\pi(2r) = 2\pi L$  のベクトルとなり、上記の結果と一致する。

## 2.6 線積分とストークスの定理

いままでは面積分について述べて来たが、線積分についても同様な議論が可能である。以下のように、ほとんどの議論が面積分と同じように進行する。まず、線積分とは次のような概念である。図 2.9 のように、ある閉曲線に沿って回ることを考える。その上を微小な区間で分割する。その微小区間の長さを大きさとし、回る方向と同じ向きを向いたベクトルを  $d\mathbf{r}$  で表す。これに適当な重



み、例えば場所で値が決まる関数のような重みを付け、合計したものが線積分である。実際に、重みを一定にして線積分を行うと、その結果は閉曲線の形状によらずに  $\mathbf{0}$  となる。

$$\oint_C dr = \mathbf{0} \quad (2.46)$$

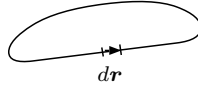


図 2.9 閉曲線に沿って線積分を行う。

---

この証明も面積分のときと同じようにすることができる。まず、この結果があるベクトル  $\mathbf{a}$  になったとしよう。両辺に  $\mathbf{a}$  方向の単位ベクトル  $\mathbf{n}$  をスカラー的に掛ける。まず、右辺は  $a$  となる。一方、左辺の  $\mathbf{n} \cdot d\mathbf{r}$  は  $d\mathbf{r}$  を  $\mathbf{n}$  に平行なある直線に射影した大きさになる。閉曲線状で位置が移動していくと、射影された点はこの直線上を一往復することになる。つまり二重に射影されるが、片方の射影結果は正になるのに対し、もう片方の射影結果は負となり、結果として全合計結果は  $0$  となる。つまり右辺は  $\mathbf{0}$  となる。

---

もう一つ今後の議論のために重要な線積分がある。  $x$  を重みとした線積分であるが、これを考える場合は、ほとんど平面と見なせるような微小な領域  $S$  を囲んだ閉曲線とする。結果は閉曲線の形状によらず、閉曲線の囲む領域の面積のベクトルを微小ということで、  $d\mathbf{S}$  と記載するとき、以下のように与えられる。

$$\oint_C dr x = d\mathbf{S} \times \mathbf{i} \quad (2.47)$$

いうまでもなく  $y$  や  $z$  の重みについても同様の結果が得られる。

---

これを証明するには、まず、閉曲線に囲まれた領域を、図 2.10 のように  $yz$  面と垂直な多数の面で小片に分割する。

$$\oint_C dr x = \sum_{i=1}^n \int_{C_i} dr x_i = \sum_{i=1}^n x_i \int_{C_i} dr \quad (2.48)$$

各小片ごとの線積分  $\int dr$  は、対応する二つの積分要素の和とする。この値を求めるのであるが、各細い小片を囲む線積分全体を求めると、最初に述べたように  $\mathbf{0}$  となるはずである。

$$\int_{C_i} dr_i + nL_{i+1} - nL_i = \mathbf{0} \quad (2.49)$$

ここで、  $L_i$  は  $i$  番目の小片の左側の切片の長さである。また  $\mathbf{n}$  は右側の切片の向く方向の単位ベクトル、つまり  $d\mathbf{S} \times \mathbf{i}$  方向の単位ベクトルである。この関係を使い、各線積分を切

片長の差に置き換えることができる。さらに変形すると証明が完了する。

$$\begin{aligned} \oint_C dr x &= \sum_{i=1}^n x_i \mathbf{n} (L_i - L_{i+1}) = \mathbf{n} \left( \sum_{i=0}^{n-1} x_{i+1} L_{i+1} - \sum_{i=1}^n x_i L_{i+1} \right) \\ &= \mathbf{n} \sum_{i=1}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) L_{i+1} = \mathbf{n} dS = d\mathbf{S} \times \mathbf{i} \end{aligned} \quad (2.50)$$

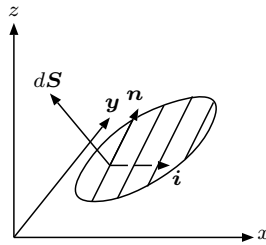


図 2.10 閉曲線に囲まれた領域を  $x$  軸に沿って千切りにする。

これらを利用すると、この微小領域で僅かに変動しているスカラー場に対して、次式が成立することが証明できる。

$$\oint_C dr \phi = d\mathbf{S} \times \text{grad } \phi \quad (2.51)$$

証明は、次式を代入することで、容易にできる。

$$\phi = \phi_0 + \frac{\partial \phi}{\partial x} (x - x_0) + \frac{\partial \phi}{\partial y} (y - y_0) + \frac{\partial \phi}{\partial z} (z - z_0) + O^2 \quad (2.52)$$

さらに以上の結果を利用して大きな曲面状の領域を囲む閉曲線に対して、次の式を誘導することができる。

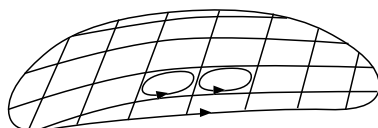
$$\oint_C dr \phi = \int_S d\mathbf{S} \times \text{grad } \phi \quad (2.53)$$

この式をスカラー場のストークスの定理 (Stokes theorem of scalar field) と呼ぼう。以下、線積分と面積分を結び付ける式は、一般にストークスの定理 (Stokes theorem) と呼ばれている。

例えば、 $\phi = 1$  とすると、次式が得られる。

$$\oint_C dr = \mathbf{0} \quad (2.54)$$

この式の誘導にあたって、まず大きな曲面を、**図 2.11**に見られるように小さな領域に分割する。各領域では上の関係が成立するが、これを寄せ集めると、左辺の合計で、隣接する小領域の間の線積分は互いに打ち消し合うから、結局、縁の閉曲線の積分だけが生き残る。一方右辺は、面積分になるので、上式が成立することとなる。



**図 2.11** 閉曲線で囲まれた領域を分割する。

同様に線積分要素とベクトル場の内積から、次の式が導かれる。

$$\oint_C dr \cdot \mathbf{A} = d\mathbf{S} \cdot \text{rot } \mathbf{A} \quad (2.55)$$

これを大きな曲面を囲む閉曲線に拡張すると、次の式が誘導される。

$$\oint_C dr \cdot \mathbf{A} = \int_S d\mathbf{S} \cdot \text{rot } \mathbf{A} \quad (2.56)$$

この関係は**ベクトル場のストークスの内積定理** (Stokes inner product theorem of vector field) と呼ぼう。いくつかのストークスの定理で、これがもっともよく知られているため、以後、単に**ストークスの定理** (Stokes theorem) といえ、これを指すものとする。

この内積線積分の定理は、回転の程度を線積分でも表現できることを示している。地球の赤道のような閉曲線を考えよう。この閉曲線に沿って、ベクトル場がちょうど偏西風のように回っているとすると、このベクトル場をはるかかなたから見ると、明らかに西から東への渦状の流れを構成している。もっと複雑な場合にも、次のような計算をすれば、閉曲線全体で合計した渦の強さを求めることができよう。まず閉曲線に右回転か左回転かの向きを決める。次にその上のある微小線要素を考えよう。そこで線要素の接線ベクトルとベクトル場の内積をとると、その値が正ならば閉曲線方向の回転に寄与し、負ならば逆方向の回転に寄与することが分かる。したがって、これに線要素の長さの重みを付けて合計すれば、閉曲線に沿った渦の強さが得られる。不幸にして内積があちこちを向いて全体として合計すると 0 になるときは、渦はなかったというふうに考える。

このストークスの定理は、ポテンシャルという概念とも深く関わっている。任意の点  $O$  を原点として、そこから別の任意の点  $P$  まで、力  $A$  を線積分していった値が経路に寄らず一定になるとき、その積分結果の符号反転したものを**ポテンシャル** (potential) という。また、このような力を  $A$  を**保存力** (conservative force)、ポテンシャルを**保存場** (conservative field) という。

$$\phi(P) = - \int_O^P dr \cdot \mathbf{A} \quad (2.57)$$

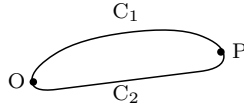


図 2.12 閉曲線を二つの積分路に分割する。

このようなときに、図 2.12 に示すように、点 O から点 P までの経路を  $C_1$ 、別の経路を  $C_2$  として、点  $O \rightarrow C_1 \rightarrow$  点  $A \rightarrow C_2 \rightarrow$  点  $O$  なるループ状の経路を  $C$  とすると、次の式が得られる。

$$\oint_C d\mathbf{r} \cdot \mathbf{A} = \int_{C_1} d\mathbf{r} \cdot \mathbf{A} + \int_{C_2} d\mathbf{r} \cdot \mathbf{A} = -\phi(P) + \phi(P) = 0 \quad (2.58)$$

ここで、 $C_2$  に沿う点 P から点 O までの線積分を、逆向きの  $C_2$  に沿う点 O から点 P までの線積分に置き換える際、符号が反転することを利用している。この結果から、どのような閉曲線に沿って回転積分しても、その結果が 0 のとき、そのベクトルは保存的であるといえる。

$\phi(P)$  が原点からの積分経路によらず、一義的に与えられるということは、任意の点のポテンシャルが一義に決定されることを示している。また次式が成立する。

$$\mathbf{A} = -\text{grad } \phi \quad (2.59)$$

この証明は、点 P の座標を  $\mathbf{r}_0$  として、その近傍のポテンシャルを  $\phi$  のテーラー展開を利用して表すと、次のように書けるはずである。

$$\phi(\mathbf{r}) = \phi(\mathbf{r}_0) + d\mathbf{r} \cdot \text{grad } \phi \quad (2.60)$$

一方、次式が成立する。

$$\phi(\mathbf{r}) - \phi(\mathbf{r}_0) = - \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} d\mathbf{r} \cdot \mathbf{A} = -d\mathbf{r} \cdot \mathbf{A} \quad (2.61)$$

これらを比較することにより、証明が完了する。

つまり、ポテンシャル  $\phi$  が与えられていると、それから力  $\mathbf{A}$  を求めることもできる。ここで、ストークスの定理と**勾配** (gradient) の概念が、繋がりを持つことが理解できよう。ちなみに、勾配の節でも述べたように、 $\mathbf{r}/r^3$  で与えられるクーロン場は保存力であり、そのポテンシャルは  $1/r$  となる。

電流の作る磁場の渦は、回転場であるので、内積線積分は 0 とならない。電流路と鎖交するどんな閉曲線に対しても、いつも一定の内積線積分結果を与えるというのが、**アンペールの法則** (Ampere law) である。

さらに線積分要素とベクトル場の外積から、次の式が導かれる。

$$\oint_C d\mathbf{r} \times \mathbf{A} = -(d\mathbf{S} \times \nabla) \times \mathbf{A} = \text{grad}(d\mathbf{S} \cdot \mathbf{A}) - d\mathbf{S} (\text{div } \mathbf{A}) \quad (2.62)$$

第二式は、例のごとくベクトル演算子  $\nabla$  を単純なベクトルのように見なし、形式的に外積を二回つた形となることを示している。ただし、演算子なので、順番を変えてはいけない。最後の式は、第二式のすべての項を成分ごとに分解し、それを再合成すると得られる。これを大きな曲面を囲む閉曲線に拡張すると、次式が得られる。

$$\oint_C d\mathbf{r} \times \mathbf{A} = - \int_S (d\mathbf{S} \times \nabla) \times \mathbf{A} = \int_S [\text{grad}(d\mathbf{S} \cdot \mathbf{A}) - d\mathbf{S} (\text{div } \mathbf{A})] \quad (2.63)$$

この式はベクトル場のストークスの外積定理 (Stokes outer product theorem of vector field) とでも呼ぶべきものであるが、以後は単にストークスの外積定理 (Stokes outer product theorem) といおう。

## 2.7 発散も回転もある場

物質が絡む電磁気学で登場するのが、発散も回転もあるベクトル場である。力の場ではなく、分極、磁化といった現象を表すのに使われる。図 2.13 に示すように、ある領域だけ、一定のベクトル場があり、その外部は 0 となっているものを考える。どんな形状でもよいが、一例として、(a) の円柱と (b) の球を扱ってみよう。

この一定のベクトルを  $\mathbf{A}$  としておこう。いずれの場合も、場のベクトルが発生する下端のほうで、正の発散があり、消失する上端のほうで、負の発散があることは明白であろう。しかもそれら発散は、ベクトル場が突然なくなることから、それらの点での  $\text{div}$  は無限大となる。端の付近を、面に平行に置かれた小さな板状の領域で覆って、発散積分を計算してみると、 $\text{div}$  は面状デルタ関数であり、(a) では面密度  $A$ 、(b) では面密度  $A \cos \theta$  ( $\theta$  は極座標の頭頂角) となることが理解できよう。

この場は、やっかいなことに回転も存在する。側面付近を小さな板状の領域で囲って、その上で回転積分を実行してみると、 $\text{rot}$  は、 $\mathbf{A}$  と平行な中心軸を右ネジの進む方向とするネジの回転方向を向いたベクトルであり、かつ、面状デルタ関数であり、(a) では面密度  $A$ 、(b) では面密度  $A \sin \theta$  となることが理解できよう。

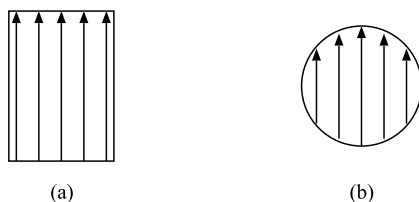


図 2.13 発散も回転もある場の断面図。(a) 円柱、(b) 球。

## 第3章

# 電磁場の基本方程式

前章で述べたベクトル場の性質を使って、電場や磁場ベクトル場の性質について議論しよう。

### 3.1 静電場の性質

電場は、**クーロンの法則** (Coulomb law) に従い、電荷が原点にある場合、距離の二乗に反比例し、原点から発散する方向を持つベクトル場である。

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}}{r^3} \quad (3.1)$$

ここで、 $\epsilon_0$  は**電気定数** (electric constant) であり、 $1/(4\pi \times 9 \times 10^9) = 8.85 \times 10^{-12} [\text{F/m}]$  である。

電場の特長は、発散はあるが回転のないことである。まず、任意の形状の閉曲面の上で、点電荷が原点に一つだけある場合の発散積分を計算してみよう。

$$\oint_S d\mathbf{S} \cdot \mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \oint_S d\mathbf{S} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r^3} \quad (3.2)$$

前章の式 2.29 より、右辺の積分は、閉曲面が電荷を囲めば  $4\pi$  となるから、**ガウスの法則** (Gauss law) と呼ばれる次式が成立する。前章で示した面積分と体積積分を結ぶ数学の恒等式群のことも似た呼び方をするが、電磁気学では、クーロンの法則から誘導されたこの式のことをそう呼ぶ。

$$\oint_S d\mathbf{S} \cdot \mathbf{E} = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad (3.3)$$

一方、閉曲面が点電荷を囲んでいないときには、式 2.31 より 0 となることが導かれる。

閉曲面内にいくつか電荷があるときには、電場はそれぞれの電荷の作る電場のベクトル加算の結果となるから、発散積分の結果も、個々の電荷の発散積分の総和となる。結果的に、上式の右辺の  $Q$  として閉曲面内の総電荷を考えればよいこととなる。電荷が点電荷の集合ではなく、空間に拡がって分布するときには、**電荷密度** (charge density)  $\rho$  を用いて次式のように表すことができる。

$$\oint_S d\mathbf{S} \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V dV \rho \quad (3.4)$$

この左辺は、ガウスの定理  $\oint_S d\mathbf{S} \cdot \mathbf{E} = \int_V \operatorname{div} \mathbf{E}$  により  $\operatorname{div} \mathbf{E}$  の体積積分になる。右辺も体積積分であるから、積分記号を外すと、**ガウスの法則の微分形** (differentail form of Gauss law) と呼ばれる次式が得られる。

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho \quad (3.5)$$

---

積分記号をいきなりはずすのは乱暴かもしれない。厳密には、 $\operatorname{div} \mathbf{E}$  や  $\rho$  がほぼ一定に見えるまで積分領域を十分小さくして、左右の体積積分を体積との積にしてしまう。この両辺を体積で割れば、上式が得られる。

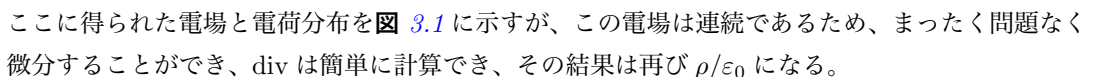
---

この表現で点電荷がある場合は、第2章の式 2.36 にしたがって、前章 2.4 節で述べた点状デルタ関数を使って表すことができる。まず、点電荷の代わりに、半径  $a$  程度広がった電荷分布の作る電場を考え、その  $\operatorname{div}$  を計算してみよう。例えば、半径  $a$  の球内で、 $\Delta V = 4\pi a^3/3$  とするとき、一定の電荷密度  $\rho = Q/\Delta V$  を持って広がっている電荷を考える。いうまでもないことであるが、 $a \rightarrow 0$  で、 $\rho = Q\delta(\mathbf{r})$  となる。

$$\rho = \begin{cases} \frac{Q}{\Delta V} & (\text{inside sphere}) \\ 0 & (\text{outside sphere}) \end{cases} \quad (3.6)$$

対称性から考え、電場の方向は電荷分布の中心から放射状で、かつ中心対称となる。球内では、半径  $r$  内に存在する総電荷は  $Q(r/a)^3$  となるので、ガウスの定理より、電場の大きさは、これを表面積の  $\varepsilon_0$  倍である  $4\pi\varepsilon_0 r^2$  で割った値となる。また、球外では、総電荷が  $Q$  と一定になることだけが異なる。この結果、得られる電場は次式で与えられる。

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \begin{cases} \frac{\mathbf{r}}{a^3} & (\text{inside sphere}) \\ \frac{\mathbf{r}}{r^3} & (\text{outside sphere}) \end{cases} \quad (3.7)$$

ここに得られた電場と電荷分布を  3.1 に示すが、この電場は連続であるため、まったく問題なく微分することができ、 $\operatorname{div}$  は簡単に計算でき、その結果は再び  $\rho/\varepsilon_0$  になる。

さて、電場の右辺は、 $a \rightarrow 0$  で球内の領域がなくなるため、通常点電荷の作る電場となる。一方、 $\operatorname{div} \mathbf{E} = \rho/\varepsilon_0$  となるため、極限で、右辺はデルタ関数となり、次のように表すことができる。

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{Q}{\varepsilon_0} \delta(\mathbf{r}) \quad (3.8)$$

このようにクーロン場は、電荷の存在するところを除くあらゆるところで、 $\operatorname{div}$  が0、つまり発散のない場であることが分かる。この式は、前章 2.4 節式 2.36 から、ただちに求めることができる。

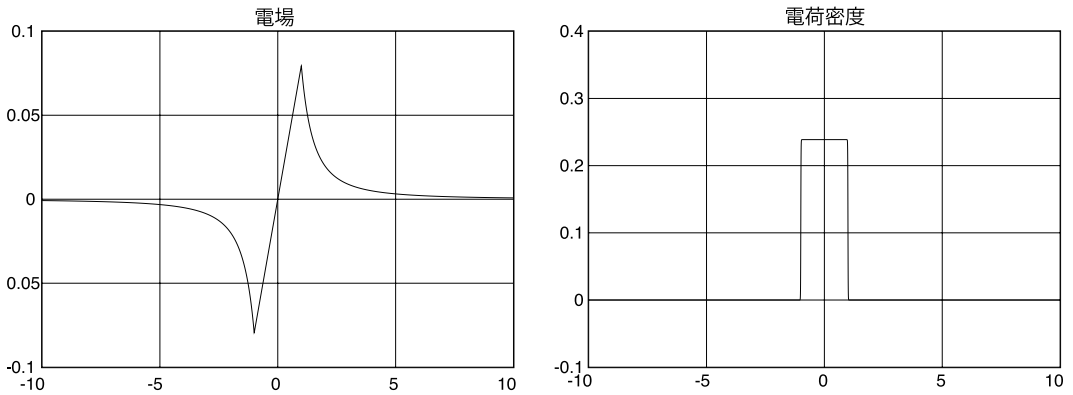


図 3.1 特異性を緩めた電場と電荷密度 ( $a = 1$ )。

原点以外の  $\mathbf{r}'$  に電荷がある場合には、 $\delta(\mathbf{r})$  のところを、 $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$  に置き換えるだけでよい。点電荷がたくさんある場合には、この右辺の点電荷の値  $Q$  と位置  $\mathbf{r}'$  を変えたものを合計すればよい。このように、電場の源である電荷の存在しているところだけが特異になる。

次に、一つの電荷が作る電場の回転積分を計算してみよう。

$$\oint_S d\mathbf{S} \times \mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \oint_S d\mathbf{S} \times \frac{\mathbf{r}}{r^3} \quad (3.9)$$

この右辺の積分は式 2.42 より、閉曲面が電荷を囲むか否かに関わらず、 $\mathbf{0}$  となる。

電荷がたくさんあっても、また電荷が空間に分布して存在していても、次の式が成立する。

$$\oint_S d\mathbf{S} \times \mathbf{E} = \mathbf{0} \quad (3.10)$$

左辺はガウスの外積定理により  $\text{rot } \mathbf{E}$  の体積積分になる。したがって、積分記号を外すと、いたるところで、次式が成立することが示される。

$$\text{rot } \mathbf{E} = \mathbf{0} \quad (3.11)$$

このように、電場はいたるところ回転の存在しない場である。発散についても、 $\text{div } \mathbf{E}$  は電荷がない限り  $0$  であり、きわめて素直な場である。電荷を囲む任意の閉曲面で発散積分が存在するのは、電荷のあるところだけの発散が、外部からも観測されるに過ぎない。

素直な場とは、どんなイメージだろうかという、水の流れがよい対応を与える。圧縮もされず、粘性もない流れは  $\text{div}$  も  $\text{rot}$  も  $0$  である。水は、壁のすぐ傍を除けば、おおむね、この条件を満たすので、水の流れの流線を想像してもらえばよい。つまり、正電荷から湧き出して、負電荷に吸い込まれる流れが、よいイメージを与える。もちろん、正負の電荷が全体として相殺しないときには、均一に無限遠に流れ出ていたり、無限遠から流れ込んできたりする。



なお、各点でベクトル場に沿うように引いた曲線を**指力線** (line of force)、電場の場合には、特に**電気力線** (line of electric force) という。原理的には無数の曲線が引けることになるが、通常はその密度がベクトル場の強さに比例するように間引いて引く。div のないところでは、指力線を連続的な曲線として引くことにより、あらゆる点で、その密度がベクトル場の強さに比例することができる。

---

指力線に沿った任意断面形状の管を考えよう。これにガウスの定理を適用すると、積分結果が 0 の場合、管の断面積とベクトル場の強さの積は一定となることが、簡単に証明できる。これより、指力線の密度はベクトル場の強さと比例することが分かる。

---

この結果、電気力線を見ることにより、それが発生するところが正電荷で、消滅するところが負電荷であることが理解できよう。

## 3.2 磁石と電流の等価性

電場は点電荷の作る場を基に、きれいな理論体系を構築できたが、磁場の場合には何を基にしたらよいのだろうか。若干面倒なのは、磁場の発生源は電流であり、電流は電荷のような点ではなく、三次元空間な形を持ち、かつ各点では、方向も持つものだからである。

磁場源としてよく用いられるものは、**磁荷** (magnetic charge)、**電流素片** (current element)、**微小電流ループ** (micro current loop) の三種類である。これらのうち、歴史的にもっとも古くから使われてきた磁場源は磁荷である。磁荷は電荷と同じように**クーロンの法則** (Coulomb law) にしたがう磁場を発生する。以後、このクーロン場を発生するモデルを、**磁荷モデル** (magnetic charge model) と呼ぼう。不思議なのは、磁荷が単独で観測されることがなく、必ず正負対になって存在することである。そのことさえ気にしなければ、理想的な磁石の片側の**磁極** (magnetic pole) の作る磁場は、磁極から放射状の方向を持ち、静電場と同様の形で与えられる。ただし、 $Q_m$  は磁荷であり、N 極の場合に正、S 極の場合に負とする。

$$\mathbf{H} = \frac{Q_m}{4\pi\mu_0} \frac{\mathbf{r}}{r^3} \quad (3.12)$$

磁荷モデルは静電場との相似性が高く、理論的には扱いやすかったが、そのうち電流が同じような磁場を作り、さらに、磁性体の作る磁場も、内部電流の作る磁場であることが分かってくるにつれ、電流を源と考える必要が増してきた。ここで一つ問題が出てきたのは、磁荷が作る磁場は発散があっても回転のない場であるのに対し、電流が作る磁場は発散がなく回転の存在する場であることである。

しかしながら、磁石の作る磁場と、同じような形状の電流コイルの作る磁場を比較してみると、いずれも磁石外では同じような形をしており、磁石内の場が異なるだけである。このため、磁石外

では  $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$  と、 $\mathbf{H}$  と完全に比例する別の場  $\mathbf{B}$  を導入した。

$$\mathbf{B} = \frac{Q_m}{4\pi} \frac{\mathbf{r}}{r^3} \quad \text{磁石の外部} \quad (3.13)$$

この新しい磁場の概念は、 $\mathbf{B}$  は**磁束密度** (magnetic flux density) と呼ばれる。 $\mathbf{B}$  は  $\mu_0 \mathbf{H}$  とほとんど同じ概念であるが、磁石の内部では  $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$  の関係を満たさないものとするのである。この新しい場の導入により、磁石と電流の作る磁場を完全に統一的に取り扱うことができるようになったのである。今後、磁場と呼ぶときには  $\mathbf{B}$  を指すものとし、 $\mathbf{H}$  は**磁場強度** (strength of magnetic field) といって、区別することとしよう。

さて、電流路は複雑な形があり得るので、その取り扱いにはかなりの困難を生じる。そこで考え出されたのが**電流素片** (current element)  $I d\mathbf{r}'$  という概念である。これは電流路を短い寸法に切離したときの、各領域のことをいう。その電流素片がどんな磁場を作るのかという一種の仮説である。これを**ビオ・サバルの法則** (Biot-Savart law) と呼ぶ<sup>\*1</sup>。

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} d\mathbf{r}' \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad (3.14)$$

この仮説は、直線電流路が電流路を軸とした回転的な磁場を作るという事実と、静電場が距離の二乗に反比例する法則から類推したものであるが、これを実在の電流路に適用すると、あらゆる場合に、観測される磁場を正確に記述できることから、正しいことが予測された。さらに、この式から磁場の持つ種々の性質を誘導でき、その結果から、この法則の正当性が確実に保証されるようになった。しかし、もともと電流素片なるものは単独では存在せず、実験との直接対比が困難であり、どうしても静電場のような明解な説明が困難であるという難点がある。

---

実は、電流素片の先端から等方的に無限遠に向って電流が湧き出し、終端は無限遠から等方的に電流を吸い込んでいるような形にすると、その全体の作る磁場はビオ・サバルの法則と同じ形になることが判明している。これは大きな水槽のようなものの中で実験することで実証可能である。このような電流分布を持つものを繋ぎ合わせると、前の電流素片の先端から湧き出す電流と、後の電流素片の終端が吸い込んでいる電流がキャンセルし合うため、すべてをループ状に繋いだ瞬間、全体の電流ループと同じ形になる。

---

電流素片のもう一つの難点は、回転積分との対応が悪いことである。静電場のときには、閉曲面内に電荷がなければ発散積分は0となり、閉曲面内にあれば0でなくなるという明解な差が生じた。一方、静磁場では回転積分がこれに対応するが、電流素片が閉曲面外あっても回転積分が存在してしまう。こういった点から電荷に対応するような別の源があると分かりがよいことが期待される。

<sup>\*1</sup> 式 3.14 を、任意の経常の閉曲線に沿って  $d\mathbf{r}'$  で線積分したものを、ビオ・サバルの法則と呼ぶ場合もあるが、本

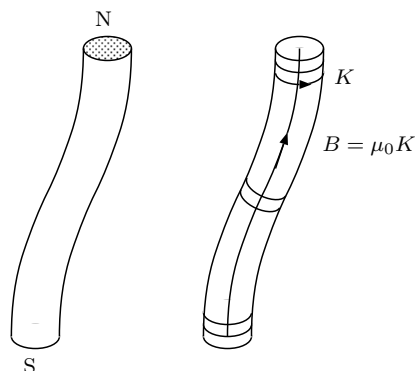


図 3.2 磁石はソレノイドと等価である。

本書で採用する磁場源は、有限長の細い**ソレノイド** (solenoid) である。ソレノイドとは、**図 3.2**に見られるように、円筒表面状にコイルを巻き付けた空心の電磁石である。コイルというと、現実的には導線を螺旋状に巻き付けて作るが、理想的には、十分に細い導線を一卷ごとに巻始めと巻終りが一致するように巻いた単巻コイルを、長軸方向に垂直に稠密に積み重ねたものを想定する。ソレノイドの断面積は非常に小さく、磁極と観測点の距離から見ると、ほぼ点に見なせる程度である必要がある。また、ソレノイドの断面の面積は一定でなければならないが、ソレノイドの長さ方向の形状は直線である必要はなく、図のように曲がってよい。ただ、断面寸法に比べ、十分ゆっくりに曲がっている必要がある。ただし、我々は当面、直線的なソレノイドだけを扱おう。

**棒磁石** (bar magnet) は内部電流が流れており、実はソレノイドと等価である。この際、電流と磁荷の関係は、右ネジを S 極から N 極に向けて置くと、電流はネジを進める方向、つまり右回転方向に流れる。そして、ネジの進行方向から磁場が湧き出すことになる。これを、**右ネジの関係** (right screw relation) という。この関係から、N 極と S 極が必ず対になって現れることも理解できる。

---

実際の磁石の中の電流は、磁性原子の電子スピンや電子軌道などにしたがって、分布して流れているのであるが、それをならして観測できる程度のマクロな視点で見ると、隣接する内部電流は互いに相殺し、結局、もっとも外壁の電流のみが観測できるので、ソレノイドによる等価表現は、かなりよい近似となっている。近似といっても、電磁気学を構築するまでの話であり、電磁気学そのものは精密な理論であるので、それをよりミクロな物理の理解に使う、何ら問題はないことはいうまでもないであろう。

---

電流がすべて磁石の側面を流れているとして、等価性を定量的に議論しよう。磁石の形状を直方

体としてみよう。等しい磁石を横に二つ集めると、それらの作る磁場は、磁荷が二倍になるので、遠方で観測する限り二倍となる。一方、側面電流は、二つの磁石の境界では相殺し合っただけで消え失せるが、最表面ではもともとの電流値と同じである。同様にして、多数の磁石を集めることにより、任意形状の磁石を作ることができるが、その磁場は磁石の個数に比例する。一方、周辺電流は同じであるので、磁極の強さは断面積に比例することが分かる。

次に等しい磁石を縦に繋いでみよう。二つの磁石の境界では、N極とS極が相殺するため、最両端のN極とS極しか残らない。つまり磁荷は変わらない。一方、側面の電流密度も変わらない。そこで前文の考察と合わせて、磁石とソレノイドの関係は、次のように表されることが理解できよう。

$$Q_m = \mu_0 K S \quad (3.15)$$

ここで、 $K$  は磁石の軸方向単位長当たりの電流密度、 $S$  は断面積である。また  $\mu_0$  は、磁荷単位と電流単位を結び付ける**磁気定数** (magnetic constant) と呼ばれる定数であり、その値は  $4\pi \times 10^{-7} [\text{H/m}]$  である。

あるいは、棒磁石でもソレノイドでも、クーロン場を作り出す磁荷は、両端に様に発生すると考えられるので、磁荷密度でいうと次のようになる。

$$\sigma_m = \frac{Q_m}{S} = \mu_0 K \quad (3.16)$$

棒磁石の場合、磁荷はその両極に発生することになるのであるが、等価性から、ソレノイドの場合にも同じ場所に磁荷が発生することになる。しかし、ソレノイドの両端はただの空間であり、何も特別なものが存在している訳ではない。磁場はそこでも連続でなければならない。これは電荷から発散する電場とまったく異なる点である。

実測からも分かることであるが、ソレノイドの内部には、前述した磁荷モデルの作るクーロン場に加え、ソレノイドの長軸に平行に、S極側からN極側に様な場が存在するのである。この場を加えることにより、ソレノイドの両端は特別な場所ではなくなり、磁場は連続的になる。この様な場は次式で与えられる。

$$B = \frac{Q_m}{S} = \mu_0 K \quad (3.17)$$

棒磁石の場合も、内部の磁場は計測不能であるが、ソレノイドと同じ形であると考えるのである。

前章の2.7節に示したように、ソレノイドの内部にだけ存在する様な場は、その先端に負の発散があり、それが、クーロン場の発散をちょうど打ち消すため、発散の総和は0となる。つまり、磁場は連続となるのである。これを**電流モデル** (current model) と呼ぼう。この様子を図3.3に示す。なお、発散はなくなるが、ソレノイド側面に、回転が発生するようになる。

著者はずっと、磁石の端で磁力線に折れ曲がりが発生しそうな気がしていたが、計算してみると、同図のように、すばらしく滑らかであるのである。落ち着いて考えてみれば、このことは、磁荷モデルの作る磁場の上下対称性に着目すれば、自明である。

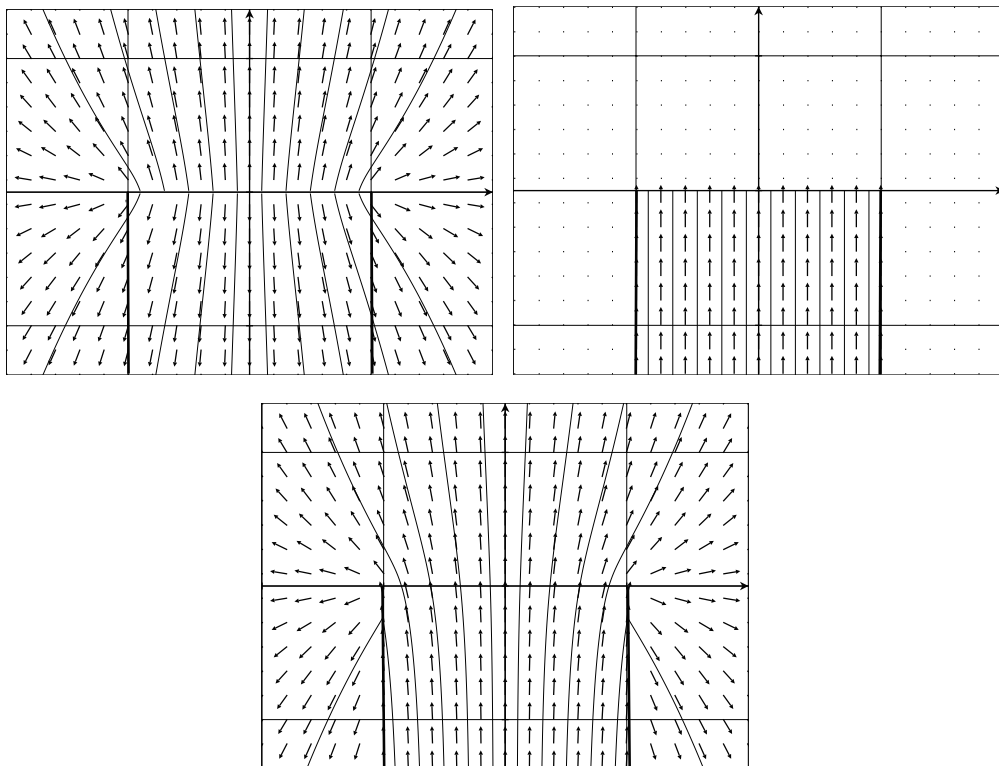


図 3.3 磁石の端での磁荷モデルの磁場 (左上) にソレノイド内の一様磁場 (右上) を加えると、電流モデルの磁場 (下) になる。

---

ソレノイドが曲がっていても、この追加の磁場は、ソレノイドの長軸に沿って発生する。より厳密には、面積  $S$  に一様な拡がった正の磁荷が作るクーロン場と、同じく拡がった負の磁荷が作るクーロン場と、長軸に沿った上記磁場の総和となる。実際にこの総和を計算してみると、棒磁石であろうと、ソレノイドであろうと、ギクシャクとしないきれいに連続した磁場が得られ、実測の磁場とのよい一致を感じることができる。

---

### 3.3 静磁場の性質

まず、微小電流ループの作る磁場の発散積分を求めよう。微小電流ループといってもソレノイドの一種である。ソレノイドは前述のように発散のない磁場しか作らないから、発散積分はいかなる

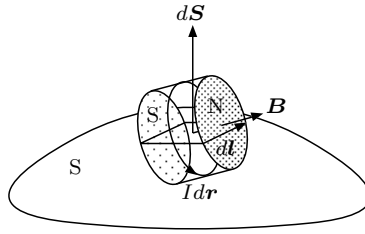


図 3.4 微小電流ループと閉曲面の交差。

場合でも 0 となる。

$$\oint_S d\mathbf{S} \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (3.18)$$

どんな電流ループも微小電流ループに分解することができることから、この式はどんな電流ループ、あるいはどんな磁石が作る磁場に対しても、成立する式である。この式の左辺は  $\text{div } \mathbf{B}$  の体積積分となっているので、体積積分記号を外すとただちに次式が得られる。

$$\text{div } \mathbf{B} = 0 \quad (3.19)$$

このように、磁場の場合は、電場とは逆に、いたるところ発散の存在しない場である。つまり、磁力線が連続となることを示している。磁石でもソレノイドでも、磁極から発生するクーロン磁場の磁力線は、ソレノイド中の一定磁場の磁力線が補っており、磁極での不連続性はないように接続されているのである。これが、電荷の作る電場ともっとも異なる点である。

続いて閉曲面上での回転積分を計算しよう。クーロン場の回転積分は、静電場の場合に計算したように、常に 0 となる。したがって、内部磁場の補正分だけを考えればよい。これが回転積分に寄与するのは、いうまでもなく、この補正磁場が閉曲面に絡んでいるときだけである。つまり、微小電流ループが閉曲面に絡んでいる場合だけを考えればよい。なお、微小電流ループが完全に閉曲面外にあるとき、あるいは完全に閉曲面内にあるときには、回転積分は 0 となる。

図 3.4 のように磁石の両磁極とも、あるいは片側が閉曲面と交差している場合には、回転積分は次のようになる。

$$\oint_S d\mathbf{S} \times \mathbf{B} = \mu_0 I \int_V d\mathbf{r} \quad (3.20)$$

証明は次のようである。その交差領域の面積を  $dS$  とすると、回転積分は次のように計算できる。

$$\oint_S d\mathbf{S} \times \mathbf{B} = d\mathbf{S} \times \mathbf{B} = \frac{t}{\sin \theta} \mu_0 K \sin \theta d\mathbf{l} = \mu_0 I d\mathbf{l} = \mu_0 I \int_V d\mathbf{r} \quad (3.21)$$

ただし、 $t$  は磁石の厚さである。

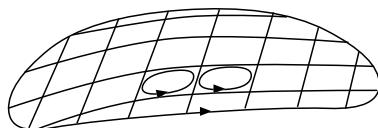


図 3.5 大きな電流ループの作る磁場は、微小電流ループの作る磁場の総和で与えられる。

最後の等号は分かりづらいかも知れない。交差領域の一边  $d\mathbf{l}$  を、閉曲面内の電流路に沿った微小線分ベクトル  $d\mathbf{r}$  の積み重ねたものにより置き換えている。

微小磁石が完全に閉曲面の外部にある場合には、右辺は明らかに  $\mathbf{0}$  となり、前の考察結果と矛盾しない。また完全に内部にあるときには、右辺の線積分は始点と終点が同じになる一周積分となるため、やはり  $\mathbf{0}$  となり、前の考察と矛盾しない。

さらに、ここでは議論を省略するが、微小磁石の片側の磁極のみが閉曲面と交差する場合にも同じ結果が得られる。

図 3.5 に示すように、ある程度広い曲面を囲む閉曲線を考え、この曲面を、小さな領域に分割してみる。そしてその小さな各領域ごとに、すべて同じ値の周回電流が流れているとしてみよう。すると、隣接し合う微小ループの境界では、互いに電流が打ち消し合うので、結局、最外周の電流のみが生き残ることになる。このことから、大きな電流ループは、微小電流ループの集合で表現できることが理解できよう。このことから、大きなループの電流についても、次式が成立する。

$$\oint_S d\mathbf{S} \times \mathbf{B} = \mu_0 I \int_C d\mathbf{r} \quad (3.22)$$

つまり、磁場の回転積分は、電流のうち、閉曲面に囲まれた部分を方向も含めて合計したもので与えられる。これを**アンペールの面積分法則** (Ampere surface integral law) と呼ぶ。重ねて述べるが、磁場の回転積分は、積分を行う閉曲面と電流路が交差するときだけ  $\mathbf{0}$  でない値を持つが、電流路全体が閉曲面内に入っている場合や、全部が閉曲面外に存在する場合は  $\mathbf{0}$  となる。

ここで、一般の電流分布の代表を何故ループにしたのかという疑問に答えておこう。それは電流は常に連続でなければならないからである。どんな電流も必ずぐるっと回って、元の地点に戻ってくるからである。直線電流はそうっていないではないかという反論があるかも知れないが、直線電流は理論上の存在であって、実際に実験しようとする、巨大な戻り線を十分遠方に配置することで実現するしかないのである。

さて、前出の式の右辺は、閉曲面内の電流のベクトルとしての総和になっているが、電流が分布

して流れている場合には電流密度  $\mathbf{J}$  の体積積分となる。

$$\oint_S d\mathbf{S} \times \mathbf{B} = \mu_0 \int_V dV \mathbf{J} \quad (3.23)$$

また、左辺は  $\text{rot } \mathbf{B}$  の体積積分になっている。したがって、体積積分記号を外すとただちに、**アンペールの法則の微分形** (differential form of Ampere law) と呼ばれる次式が得られる。

$$\text{rot } \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} \quad (3.24)$$

この式から一つ重要な法則を導き出すことができる。両辺の  $\text{div}$  をとると、任意のベクトル場の  $\text{div rot}$  は 0 になることから、次式が導かれる。

$$\text{div } \mathbf{J} = 0 \quad (3.25)$$

電流密度ベクトルの  $\text{div}$  が常に 0 ということは、電流が連続であるということを示している。これを、**電流連続の法則** (current continuity law) という。

なお、ビオ・サバールの法則で、 $dr'$  の作る磁場から、アンペールの法則が直接導けないかと予想する読者も多いかと思われる。残念ながら、電流素片の作る磁場からはアンペールの法則は導けないのである。例えば、球面での回転積分をその中心に電流素片を置いて実行してみよう。

$$\frac{\mu_0 I}{4\pi} \int dS \frac{\sin \theta}{r^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} r^2 \sin \theta \, d\theta \, d\phi \frac{\sin \theta}{r^2} = \frac{\pi}{4} \mu_0 I \quad (3.26)$$

期待する右辺は  $\mu_0 I$  であるので、やや少ない値しか得られない。しかも、電流素片の位置を変えてみると、この係数は値が変わるのである。

点電荷は静電場において、きわめて便利な要素であった。点電荷が閉曲面の外にあると、発散積分にはまったく影響を与えないからである。これと比較すると、電流素片はそのような要素になっていない。例えば、球外に半径方向に置かれた電流素片は、球面上に回転的な磁場を作り出す。そのため、回転積分が存在するのである。上の式が期待通りにならないのは、この辺の事情が深く関与している。

ただし、電流素片ではなく、任意の閉曲線に沿ってこれを積分したものの作る磁場については、アンペールの法則が導ける。その導出法については、他書を参考にされたい<sup>\*2</sup>。

電流が分散して流れていないで、線電流 (曲線であってもよい) として流れている場合を考えよう。式 3.24 より明らかなように、電流のないところでは  $\text{rot } \mathbf{B} = \mathbf{0}$  である。電流のあるところでは

\*2 例えば拙書「電気磁気学基礎論」電気学会など。



は、式 3.24 を微小体積  $\Delta V$  に適用し、両辺を  $\Delta V$  で除して  $\Delta V \rightarrow 0$  とすればよい。この結果、左辺は  $\text{rot } \mathbf{B}$  となる。ところが右辺は、この体積を横切る電流の長さを  $\Delta \mathbf{r}'$  として、 $\mu_0 I \Delta \mathbf{r}' / \Delta V$  の極限となる。その点での電流の方向を向くベクトルになるが、その大きさは点電荷の場合のような点状デルタ関数とはならない。詳細の誘導は省くが、 $\Delta \mathbf{r}'$  に垂直な方向にだけ大きな変動をする線状デルタ関数となっており、その平面内で積分すれば 1 となる。ただし、以後、あまり使わないので、この説明に止める。

大事なことは、線電流の存在しているところだけが特異であり、その他の部分では、静電場と同じように、 $\text{div}$  も  $\text{rot}$  も 0 な素直な場であるということである。この場合も、ほぼ水の流れのようであるが、湧き出しも吸い込みもない流れである。その代わりに、線電流の場所が、水であれば渦糸 (vortex filament) と呼ばれる渦の中心となった流れを構成する。水の渦糸は、多くの場合、きわめて細い空洞になっており、その空洞に近いほど、水は高速で流れている。ただし、水の場合には、渦が弱くなってくると、この空洞が崩れてくる。これは、水は理想的な非圧縮、非粘性な流体でないことから生じている。電磁気学では、この空洞の部分が線電流に置き換わっており、しかも、それが崩れて、独立した渦となって存在するようなことはない。

回転の伝統的な表現であるアンペールの線積分法則を、微小電流ループに対して求めてみよう。これも、微小電流ループの優位さを示すことになるのだが、微小電流ループが閉曲線に絡んでいるときだけ、内積線積分に寄与がある。まず、前章で述べたように、微小電流ループの両極の磁荷が発生するクーロン場の線積分は 0 である。したがって、磁石内部の様な補正磁場だけが議論の対象となる。つまり、微小電流ループが閉曲線と絡まないときには、積分に寄与しない。

ここでも、微小電流ループは十分薄いとし、両磁極が閉曲線と交わる場合だけを検討する。ここでは議論を省略するが、仮に電流路の一部だけが交わる場合も結果は同じになる。まずクーロン場は回転がないので、線積分には効いてこない。このため、磁極間の様な磁場の積分だけを行えばよい。また微小電流ループは十分小さいので、積分路はほとんど直線に見えるとして、計算を行う。

$$\oint_S d\mathbf{r} \cdot \mathbf{B} = d\mathbf{r} \cdot \mathbf{B} = \frac{t}{\sin \theta} \mu_0 K \sin \theta = \mu_0 I \quad (3.27)$$

大きな電流ループの場合も、それを構成している微小磁石のうち、閉曲線と交差しているものだけが線積分に寄与するので、 $I$  は閉曲線を通過する全電流として、上と同じ結果が得られる。これがアンペールの線積分法則 (Ampere line integral law) である。

$$\oint_C d\mathbf{r} \cdot \mathbf{B} = \mu_0 I \quad (3.28)$$

同じ法則を別の方法で求めることもできる。式 3.24 で表されるアンペールの法則の微分形を、任意の閉曲線  $C$  で囲まれた曲面上  $S$  で、内積の面積分をしてみよう。

$$\int_S d\mathbf{S} \cdot \text{rot } \mathbf{B} = \mu_0 \int_S d\mathbf{S} \cdot \mathbf{J} \quad (3.29)$$

左辺は、ストークスの定理により、 $\mathbf{B}$  の閉曲線上の線積分に置き換えることができ、同じアンペー

ルの線積分法則が得られる。

$$\oint_C d\mathbf{r} \cdot \mathbf{B} = \mu_0 \int_S d\mathbf{S} \cdot \mathbf{J} = \mu_0 I \quad (3.30)$$

アンペールの面積積分法則もアンペールの線積分法則も、単に**アンペールの法則** (Ampere law) と呼ぶが、多くの書では特に後者を指すことが多い。本書でも、単にアンペールの法則といった場合は、この式 3.30 を指すこととする。なお、閉曲線で囲まれた面を通過する電流をしばしば、閉曲線に**鎖交** (cross-link) する電流と呼ぶ。また、逆に、電流ループを通過する磁束も鎖交と呼ぶ。コイルのように、何回も巻線があると、鎖交は巻数倍になるので、注意してほしい。

### 教育法

ややしつこくなるが、本稿の目的の一つは、磁場の導入教育を変更できないかということにもあるので、私の提案している教育法をまとめておこう。

1. 電流と磁場の関係の基本を、ビオ・サバールの法則にするよりも、磁極のクーロンの法則にしたほうが分かりやすい。ただし、磁石とソレノイドの等価性を利用し、磁石の内部に一樣磁場があることを、きちんと教える。
2. こうすると、磁場の面積分は常に0となることがすぐに誘導でき、磁場の発散が0であることが示される。
3. 回転に関しては、外積面積分でも、線積分でも、クーロン場は寄与せず、一樣磁場の部分だけを計算すればよいので、簡単に計算できる。著者は、rot との対応がよく、電場のガウスの定理との相似性が高い外積面積分のほうを、最初に教えるべきと思っている。

磁場の場合の指力線を、特に**磁力線** (line of magnetic force) という。磁力線は div が0であるため、発生も消滅もなく、全領域で連続であるが、渦糸の位置との関連は薄い。渦糸との関係が深いのは、指力線に直交する面である。これには特に名前が付けられていないが、本書では、**力垂直面** (perpendicular surface to force) と呼ぼう。電気力線の場合には、**等ポテンシャル面** (equi-potential surface) と呼ばれる。磁場の場合には、スカラー的なポテンシャルが定義できないので、等ポテンシャル面なるものはないので、まさに指力線に直交する力垂直面となる。

指力線に垂直な面も、原理的には無数に作成することができるが、通常はその間隔が、ベクトル場の強さに反比例するように間引いて記載する。rot のないところでは、力垂直面を連続的な曲面として並べることにより、あらゆる点で、その間隔がベクトル場の強さに反比例するようにすることができる。

---

二枚の力垂直面を二本の指力線で結び、この指力線と二つの面を通る任意の閉曲線を考える。これにアンペールの線積分の定理を適用すると、積分結果が0の場合、面の間隔とベクトル場の強さの積は一定となることが、簡単に証明できる。これより、力垂直面の密度はベクトル場の強さと比例することが分かる。

---

この結果、力垂直面を見ることにより、それが集中するところに渦糸が存在することが理解できよう。

アンペールの面積分法則の応用として、これから**ビオ・サバールの法則** (Biot-Savart law) を導き出してみよう。本節の最初に述べたように、電流素片だけではなく、素片の先端から湧き出す電流と終端へ吸い込まれる電流の全体が作る磁場を、計算してみる。

---

準備として、放射状電流の放射点を原点とし、 $z$  軸から  $\theta$  だけ離れたところに円があるとて、その円が、全放射状電流のどれだけと鎖交するかを求めておこう。原点を中心にし、この円を通る球を考え、その球が取り囲む球面積を、全球面積で割ってやればよい。球の半径を  $r$  とすると、この面積は次のようにして求められる。

$$\int_0^\theta d\theta \, 2\pi \sin \theta \, r^2 = -2\pi \cos \theta \, r^2 \Big|_0^\theta = 2\pi(1 - \cos \theta) r^2 \quad (3.31)$$

この結果を利用して、 $z$  のところにある半径  $\rho$  の円に、放射状電流がどれだけ鎖交するかを求めると、 $z > 0$  と  $z < 0$  のそれぞれに対し、次のようになる。

$$I \frac{1 - \cos \theta}{2} = I \left( \frac{1}{2} - \frac{z}{2\sqrt{\rho^2 + z^2}} \right) \quad (3.32)$$

$$-I \frac{1 - \cos \theta}{2} = -I \left( \frac{1}{2} + \frac{z}{2\sqrt{\rho^2 + z^2}} \right) \quad (3.33)$$


---

電流素片の方向を  $z$  軸とする。 $z$  軸の任意の点を通り、それに直角な面で、軸から半径  $\rho$  のごく薄い円板を置き、その円板の表面で面積分を実行する。電流が  $z$  軸に対称であることから、磁場は  $z$  軸を中心にした円に沿うように、かつ、電流に対し右ネジの関係の方向に、半径と高さで決まる一定値をとる。円板の上下面での積分は外積が中心方向を向くことから、すべて相殺し、側面の積分だけが生き残る。その値は、円板の厚さ  $t$  が十分薄い場合には磁場と側面積の積となり、 $2\pi\rho Bt$  である。

一方体積中の電流のベクトルの総和は  $z$  軸方向を向くので、電流の  $z$  成分の総和をとる、つまり、この円周に鎖交する電流と厚みの積をとればよいが、これは円板の位置によって異なる。囲み

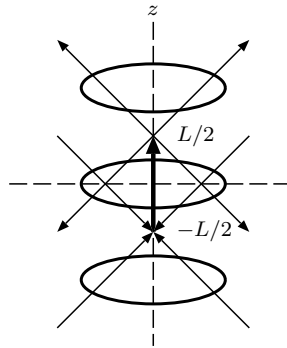


図 3.6 閉曲線と鎖交する放射状電流は立体角で計算できる。

の結果を利用して、図 3.6 のように、 $z = L/2$  に発散電流の放射点、 $z = -L/2$  に発散電流の集束点があって、それらに間に電流素片がある場合に、円に鎖交する総電流を求めると、 $z$  が両放射点より上、または下になっているときには、放射状発散電流と放射状集束電流のみの鎖交量を求めればよいし、間にある場合には、それに加え、電流素片との鎖交量を考える必要がある。

$z > L/2$  の場合には

$$I \left( \frac{1}{2} - \frac{(z - L/2)}{2\sqrt{\rho^2 + (z - L/2)^2}} \right) - I \left( \frac{1}{2} - \frac{z + L/2}{2\sqrt{\rho^2 + (z + L/2)^2}} \right)$$

$L/2 > z > -L/2$  の場合には

$$-I \left( \frac{1}{2} + \frac{(z - L/2)}{2\sqrt{\rho^2 + (z - L/2)^2}} \right) - I \left( \frac{1}{2} - \frac{z + L/2}{2\sqrt{\rho^2 + (z + L/2)^2}} \right) + I$$

$z < -L/2$  の場合には

$$-I \left( \frac{1}{2} + \frac{(z - L/2)}{2\sqrt{\rho^2 + (z - L/2)^2}} \right) + I \left( \frac{1}{2} + \frac{z + L/2}{2\sqrt{\rho^2 + (z + L/2)^2}} \right)$$

さて、 $L$  が  $z$  や  $\rho$  に対し十分小さいとして、以下のように近似する。

$$\frac{1}{\sqrt{\rho^2 + (z - L/2)^2}} = \frac{1}{r} + \frac{zL}{2r^3} \quad (3.34)$$

その結果は、いたるところ同じ形となる。

$$IL \left( \frac{1}{2r} - \frac{z^2}{2r^3} \right) = \frac{IL \sin^2 \theta}{2r} \quad (3.35)$$

この式を  $\mu_0 t$  倍し、円板の側面積  $2\pi \rho t = 2\pi r \sin \theta t$  で割ると、ビオ・サバルの法則の磁場が得られる。

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{IL \sin \theta}{r^2} \quad (3.36)$$

ビオ・サバルの法則とは、この磁場を電流素片だけが作っていると見なしたものである。

同様の結果は、アンペールの線積分法則からも得ることができる。その場合には円板の周辺の位置に積分路を置けばよい。磁場は積分路に鎖交する電流を積分路の長さで割り、さらに  $\mu_0$  倍すればよいから、結果は上記の計算とまったく同じになる。

### 3.4 電流の作る磁場

きわめて微小な電流ループの作る磁場を、きちんと計算しておこう。ただし、この節は、数学的にやや面倒なので、読み飛ばしてもらっても構わない。

3.2 節に示したように、微小電流ループと微小磁石は等価である。これを利用して、まず微小磁石の磁荷モデルによる磁場を求めよう。微小磁石は、長さ  $l'$ 、断面積  $\Delta S'$  の細長い形状とし、両端に正負の磁荷  $Q_m$  と  $-Q_m$  を有しているとしよう。 $l'$  は十分小さなベクトルとし、負磁荷および正磁荷の位置ベクトルを  $\mathbf{r}'$ 、 $\mathbf{r}' + \mathbf{l}'$  とする。なお、源側の座標変数には「'」を付けた。これら磁荷はクーロン場を作るので、磁場は次式のようなになる。

$$\mathbf{B} = \frac{Q_m}{4\pi} \left( \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}' - \mathbf{l}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}' - \mathbf{l}'|^3} - \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right) \quad (3.37)$$

ここで、微小磁石を十分小さくする、つまり  $l'$ 、 $\Delta S'$  をともに十分小さくした極限を考えよう。右辺の前の二項は、 $\mathbf{r}'$  による微分の形をしている。ただし、ベクトルを変数とするベクトル関数の微分であるので、ちょっと工夫が必要であり、次式を利用して変形する。

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(\mathbf{r}' + \mathbf{l}') - \mathbf{f}(\mathbf{r}') &= i(f_x(\mathbf{r}' + \mathbf{l}') - f_x(\mathbf{r}')) + \cdots \\ &= i \left( \frac{\partial f_x}{\partial x'} l'_x + \frac{\partial f_x}{\partial y'} l'_y + \cdots \right) + \cdots \\ &= i(\mathbf{l}' \cdot \nabla') f_x + \cdots = (\mathbf{l}' \cdot \nabla') \mathbf{f} \end{aligned} \quad (3.38)$$

$\nabla$  に「'」が付いているのは、 $\mathbf{r}'$  を微分することを指す。

その結果は次式のようなになる。

$$\mathbf{B} = \frac{1}{4\pi} (\mathbf{p}_m \cdot \nabla') \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad (3.39)$$

ただし、 $\mathbf{p}_m = Q_m \mathbf{l}'$  である。

なお、今後、電流モデルと比較したいため、式 3.15 から得られた関係、 $\mathbf{p}_m = Q_m \mathbf{l}' = \mu_0 K \Delta S' \mathbf{l}' = \mu_0 I \Delta \mathbf{S}' = \mu_0 \mathbf{m}$  を利用して、上式を書き換えておこう。

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} (\mathbf{m} \cdot \nabla') \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad (3.40)$$

ここで、電流に面積ベクトルを掛けて得られる  $\mathbf{m}$  を、**磁気モーメント** (magnetic moment) と呼ぶ。簡単のために  $\mathbf{r}' = \mathbf{0}$  として、この微分計算を実行すると、次式が得られる。

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3(\mathbf{m} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r} - m r^2}{r^5} \quad (3.41)$$

さて、この場は磁荷モデルの結果であるので、発散はあるが、回転のない場である。電流モデルの作る場は、逆に回転はあるが、発散のない場である。そうするためには、磁極間に一樣な磁場を追加する必要がある。このモデルでは磁極は点磁荷であり、また距離は無限に短いとしているので、追加すべき磁場はデルタ関数で与えられることになる。この結果、発散がなく、回転がある微小電流ループの作る磁場は、次式で与えられることになる。

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} (\mathbf{m} \cdot \nabla') \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} + \mu_0 \frac{\mathbf{m}}{l'} b(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (3.42)$$

ここで、第一項は負磁荷に入る放射状の磁場、第二項は、負磁荷から正磁荷に向かう一樣磁場である。この一樣磁場を表すのに、関数  $b(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$  と記載した関数を使っているが、この関数は、負磁荷から正磁荷までを繋ぐ細い領域でだけ、 $1/\Delta S'$  の大きさを有する線状デルタ関数である。

この第二項については、面積だけでなく、長さもきわめて短いことから、点状デルタ関数で表すことができる。関数  $b$  に体積を掛けたものが  $l'$  になることから、第二項の体積積分は  $\mu_0 \mathbf{m}$  倍に収束するので、以下のように変形することができる。

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} (\mathbf{m} \cdot \nabla') \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} + \mu_0 \mathbf{m} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (3.43)$$

上式は、デルタ関数を式 2.36 により、クーロン場の div に置き換えることにより、次のように書き換えられる。

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[ (\mathbf{m} \cdot \nabla') \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} - \mathbf{m} \left( \nabla' \cdot \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right) \right] \quad (3.44)$$

$$\text{grad}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{A} + (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{B} + \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B}) + \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{A})$$

の公式と  $\mathbf{m}$  が一定であること、かつ、 $\nabla' \times [(\mathbf{r} - \mathbf{r}')/|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3] = \mathbf{0}$  を利用すると、次のように変形できる。

$$\mathbf{B} = -\frac{\mu_0}{4\pi} (\mathbf{m} \times \nabla') \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad (3.45)$$

簡単のために  $\mathbf{r}' = \mathbf{0}$  とし、この微分計算を実行すると、次式のようなになる。

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left( \frac{3(\mathbf{m} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r} - m r^2}{r^5} + \mathbf{m} \delta(\mathbf{r}) \right) \quad (3.46)$$

式 3.41 との差は、原点にあるデルタ関数だけとなる。

式 3.40 と式 3.45 の差を際立たせるために、両式に現れる  $(\mathbf{r} - \mathbf{r}')/|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3$  を、 $a$  ぐらいの範囲に緩めた  $(\mathbf{r} - \mathbf{r}')/\sqrt{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2 + a^2}^3$  なる関数に置き換えてみよう。この場合、両者の差は  $(\mu_0/4\pi) \mathbf{m} \text{div} \left[ (\mathbf{r} - \mathbf{r}')/\sqrt{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2 + a^2}^3 \right]$  となる。結果は、図 3.7 に示すように、両者の作る磁場は、十分遠方ではほぼ同じ形になるが、原点付近では、前者は発散があつて回転のない場となり、後者は回転があつて発散のない場となっている。また、両者の差は  $a \rightarrow 0$  でデルタ関数の  $p_m$  倍となる。やはり、前者の場には拡がったデルタ関数を加えないと、電流モデルの磁場としてはおかしいことになる。

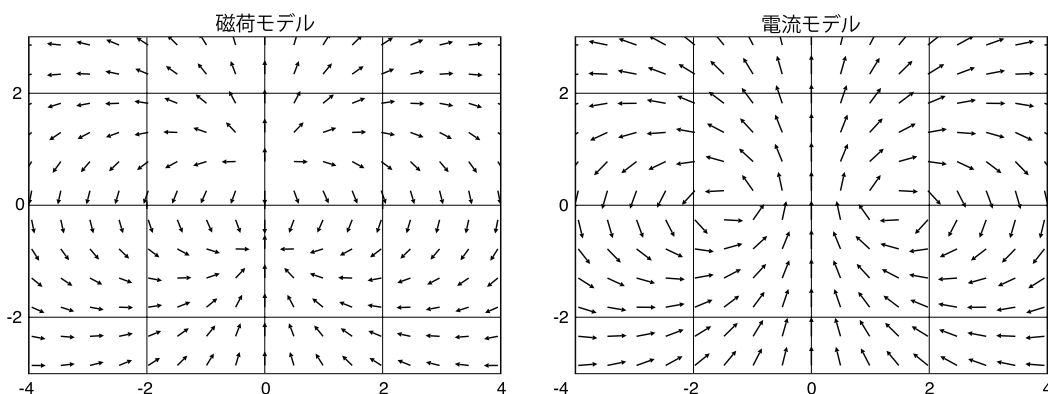


図 3.7 微小磁石の磁荷モデルと電流モデルの作る磁場  $\mathbf{B}$  を真横から見る ( $a = 1$ )。

ここでは、原点付近の構造を知るために、微分が連続な関数で説明を行ったが、次のような微分は不連続であるが、より平易なデルタ関数モデルを使うことも可能である。

式 3.41 は原点での発散や回転の情報が欠損しているが、そこを若干補足すれば、発散も回転も計算できるようになるのである。まず式 3.41 の磁場は面白い性質を持っている。原点を中心とする任意の半径  $a$  の球面で、 $d\mathbf{S}$  と  $\mathbf{B}$  の内積と外積を計算してみると、それぞれ、次のような簡単な形となるのである。

$$\begin{aligned} d\mathbf{S} \cdot \mathbf{B} &= 2 \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{dSm}{a^3} \cos \theta \\ d\mathbf{S} \times \mathbf{B} &= -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{dSm}{a^3} \sin \theta \end{aligned} \quad (3.47)$$

ただし  $\theta$  は極座標の頭頂角である。

そこで、球外の場合は式 3.41 のままとし、球内だけを、 $-\mu_0 \mathbf{m}/4\pi a^3$  と一定ベクトル場に置き換えると、いたるところ回転が消失する。これを、発散あり回転なしの磁荷モデルと見なすのである。次に、電流モデルとして、同様に、球内だけを、 $2\mu_0 \mathbf{m}/4\pi a^3$  の一定ベクトル場に置き換えると、この場合はいたるところ発散が消失し、回転あり発散なしの場が得られる。

この二つの場の差は、 $3\mu_0 \mathbf{m}/4\pi a^3$  となるが、これを体積積分すると、 $\mu_0 \mathbf{m}$  となるから、確かに、デルタ関数  $\mu_0 \mathbf{m} \delta(\mathbf{r})$  となっていることが確認できる。

この磁場のほうが、簡単な形をしているが、これらの関数の  $\text{div}$  や  $\text{rot}$  をとると、面磁荷や面電流になるため、先のような例を示したのである。

さて、式 3.45 で与えられる微小電流の作る磁場を使って、ビオ・サバルの法則を導き出すことができる。前にも述べたように、任意の電流ループは、そのループの囲む曲面を分割することに

より、複数の微小電流ループの集合に置き換えることが可能である。この際、分割された各要素には、大きな電流ループに流れているのと同じ電流が流れているものとする。

この結果、任意の電流ループの作る磁場は以下ようになる。

$$\mathbf{B} = -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_S (d\mathbf{S}' \times \nabla') \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_C d\mathbf{r}' \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad (3.48)$$

この式は、ビオ・サバルの法則の積分形となっている。このように、微小電流ループの作る磁場からも、ビオ・サバルの法則を導くことができるのである。

### 3.5 動的電磁場

定常電流はとぎれることなく流れ、完全なループを構成する。しかし、キャパシタへ流れ込む電流は極板から先へ流れていく道がなく、ループを構成しない。この場合、電荷はどんどん充電されていくので、一定ではなくなる。こうした電荷や電流が変化する場合を、**静的** (static) に対し、**動的** (dynamic) と呼ぶ。この例にあげたような動的な場合には、電流は不連続になることがあるのである。すると困ることが発生する。式 3.30 に示したアンペールの線積分の法則で、閉曲線 C を決めると左辺は一義に決まるのに、右辺の面積分は S の選び方で変化してしまうことになる。例えば S がキャパシタの極板間を通過する場合、磁場が存在しても右辺は 0 になってしまうのである。

そこでアンペールの法則に何らかの訂正が必要となる。マクスウェルの考えたのは次のような補正である。それは不連続な電流に補正項を加え、連続にしようというものであり、電流と電荷の関係を使う。閉曲面から流れ出る電流の総和は、その内部の電荷の減少を引き起こす。

$$\oint_S d\mathbf{S} \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial Q}{\partial t} \quad (3.49)$$

右辺の Q を、ガウスの法則  $\oint_S d\mathbf{S} \cdot \mathbf{E} = Q/\epsilon_0$  を使い、 $\mathbf{E}$  の面積分に変更すると、次式が得られる。

$$\oint_S d\mathbf{S} \cdot \left( \mathbf{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) = 0 \quad (3.50)$$

つまり、 $\mathbf{J}$  は不連続になっても、 $\mathbf{J} + \epsilon_0 \partial \mathbf{E} / \partial t$  は連続量になるので、これをアンペールの定理の右辺に使おうという補正である。この補正量  $\epsilon_0 \partial \mathbf{E} / \partial t$  のことを**変位電流** (displacement current) と呼んだ。抵抗 0 の配線の上では電場はないので、当然変位電流項はなくなる。

この式の微分形は動的な場合の**電流連続の法則** (current continuity law) と呼ぶ。

$$\operatorname{div} \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (3.51)$$

ここで、ガウスの法則の微分形を使って、 $\epsilon_0 \operatorname{div} \mathbf{E}$  を  $\rho$  に書き換えている。

変位電流を加えたときの**アンペールの面積分法則** (Ampere surface integral law) の積分形は次のようになる。

$$\oint_S d\mathbf{S} \times \mathbf{B} = \int_V dV \left( \mu_0 \mathbf{J} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \quad (3.52)$$



つまり、閉曲面に沿った回転積分は、閉曲面に囲まれた体積内の電流と変位電流の総和になるという定理である。 $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$  のほうは変わらないので、磁場は大部分のところで発散も回転もない場であり、電流と変位電流の存在するところでのみ、回転のみが存在する。

左辺を内積面積分の定理により  $\operatorname{rot} \mathbf{B}$  の体積積分に変えると、次式が得られる。

$$\int_V dV \operatorname{rot} \mathbf{B} = \int_V dV \left( \mu_0 \mathbf{J} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \quad (3.53)$$

積分記号をはずすと、**アンペールの法則の微分形** (differential form of Ampere law) が得られる。

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (3.54)$$

以上、電場の時間変化が磁場に及ぼす影響を示したが、磁場が時間変化すると電磁誘導に関する**ファラデーの法則** (Faraday law) により、電場が発生する。この場合電場の閉曲線に沿う積分は磁束の時間変化に比例する。そこで、線積分型の回転積分で表すと、次のように補正する必要がある。

$$\oint_C d\mathbf{r} \cdot \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_S d\mathbf{S} \cdot \mathbf{B} \quad (3.55)$$

ストークスの定理  $\oint_C d\mathbf{r} \cdot \mathbf{E} = \int_S d\mathbf{S} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{E}$  を利用して、上式を微分形に変形すると、次のようになる。

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (3.56)$$

これが**ファラデーの法則の微分形** (differential form of Faraday law) である。

以上のように、動的な電場は、発散も回転もありうる場ということになる。一見、面倒なようであるが、次のように考えると、それほど複雑でもなくなる。電場は大部分のところでは、発散も回転もないが、電荷があると、発散を起こす源となり、磁場の変化があると、回転を起こす源となる。磁場も大部分のところでは、発散も回転もないが、電流があると、回転を起こす源となり、電場の変化があっても、回転を起こす源となる。多くの、典型的な事例では、これら四つの要因は分離できることが多いので、このような考え方は、電磁気学の理解にとって、きわめて有用である。

ここまで、基本方程式として、積分形と微分形の両方を示したが、改めて微分形を示しておこう。以下の微分形は、マクスウェルが定式化したため、まとめて呼ぶときには**マクスウェル方程式** (Maxwell equations) という。

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho \quad (3.57)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (3.58)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \quad (3.59)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (3.60)$$

マクスウェル方程式の各式は、これからもたびたび利用するが、そのたびに、式番で引用するのは分かりづらいので、以後、順に  $\text{div } \mathbf{E}$  式、 $\text{rot } \mathbf{E}$  式、 $\text{div } \mathbf{B}$  式、 $\text{rot } \mathbf{B}$  式と呼ぶことにする。

以上述べたマクスウェル方程式にローレンツ力 (Lorentz force) の式を加えたものが、電磁気学の基本方程式である。なお、電流連続の法則は、 $\text{div } \mathbf{E}$  式を時間で微分したものと、 $\text{div } \mathbf{B}$  式の  $\text{div}$  をとったものから  $\mathbf{E}$  を消去し、さらに  $\text{div rot}$  が 0 になることを利用すると、ただちに得られるため、基本方程式には含めないこととする。

## 第 4 章

# 一次元の電磁気学

$yz$  平面内では均質で、 $x$  軸方向にだけ変化する電磁場は、面積分が単なる差分になってしまうなど、きわめて直感的な理解が得られる。本来ならば、本書の最初の方の章で示すべきであろうが、やはり、マクスウェルの方程式を提示してからの方が、導入が簡単なことと、理解が高まると思い、ここで紹介する。

### 4.1 静電場

一次元の世界では、電荷は  $yz$  面内で一様である。このため、単位電荷に代わるものとして、きわめて薄い  $yz$  面に拡がったシート状の面電荷を考える。これの作る電場は次式で与えられる。

$$\mathbf{E} = \mathbf{i} \frac{1}{2\epsilon_0} \begin{cases} \sigma & x > 0 \\ -\sigma & x < 0 \end{cases} \quad (4.1)$$

$\mathbf{i}$  は  $x$  軸方向の単位ベクトル、また  $\sigma$  は面電荷密度である。

この式より、電荷の作る電場は、電荷の存在する場所では不連続となるが、その他のあらゆる領域で一定となる。今、二枚の  $yz$  平面で囲まれた領域を考えよう。この領域内に電荷が存在しないと、電場はこの領域内で一定となるため、左右の平面で同じ値をとる。しかし、この領域内に電荷が存在すると、上式より左右の平面における電場には差が生じてくる。この差は次式で与えられる。

$$E_x(x_r) - E_x(x_l) = \frac{1}{\epsilon_0} \sigma \quad (4.2)$$

$$E_y(x_r) - E_y(x_l) = 0 \quad (4.3)$$

$$E_z(x_r) - E_z(x_l) = 0 \quad (4.4)$$

あるいはベクトルを用いて格好よく書けば、

$$\mathbf{i} \cdot (\mathbf{E}(x_r) - \mathbf{E}(x_l)) = \frac{1}{\epsilon_0} \sigma \quad (4.5)$$

$$\mathbf{i} \times (\mathbf{E}(x_r) - \mathbf{E}(x_l)) = 0 \quad (4.6)$$

この上式 4.5 は、面電荷が複数ある場合には、次のように変形できる。

$$\mathbf{i} \cdot (\mathbf{E}(x_r) - \mathbf{E}(x_l)) = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_i \sigma_i \quad (4.7)$$

右辺は、この領域内に存在するすべての電荷を加えた総電荷となる。さらに、面電荷が分布して存在するときには、次式のようになる。

$$\mathbf{i} \cdot (\mathbf{E}(x_r) - \mathbf{E}(x_l)) = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_l^r dx \rho \quad (4.8)$$

積分範囲の  $L$  はこの領域内を指す。いずれにせよ、領域両端の電場ベクトルの差は、領域内の総電荷で決まるのである。

式 4.8 は、 $xy$  方向に  $dS$  の断面積を有する十分小さい柱状でも成立する。式 4.8 の両辺に  $dS$  を掛け、さらに  $d\mathbf{S}$  を領域から外へ向うベクトルと定義すると、右端では  $\mathbf{i}dS = d\mathbf{S}$ 、左端では  $-\mathbf{i}dS = d\mathbf{S}$  と書けるので、この式は次のように変形できる。

$$\sum_{i=l,r} d\mathbf{S}_i \cdot \mathbf{E}_i = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V dS dx \rho \quad (4.9)$$

この式と三次元における式 3.4 は、極めて相関性が高いことが分ろう。一次元の場合、 $\text{div}$  はベクトルの  $x$  成分の差分になることを理解して欲しい。

同様に、式 4.6 も次のように変形することができる。

$$\sum_i d\mathbf{S}_i \times \mathbf{E}_i = 0 \quad (4.10)$$

この式と三次元における式 3.10 との相関性もよく理解できよう。一次元の場合、 $\text{rot}$  はベクトルの  $yz$  成分の差分になることを理解して欲しい。

つまり、電磁気学を学ぶ上での最初の障壁である面積分は、一次元における領域両端における差を一般化したものである。三次元になると、領域端が平面ではなくなり、一般的には閉曲面になってしまうこと、また、そこでは電場  $\mathbf{E}$  が一定ではなく、色々変化するので複雑な表現になるのである。

式 4.8 を  $\Delta x$  の厚さの微小領域に適用してみよう。 $x_l = x$ 、 $x_r = x + \Delta x$  とすると、この領域中の  $\rho$  をほぼ一定であるとして、次式が得られる。

$$\mathbf{i} \cdot (\mathbf{E}(x + \Delta x) - \mathbf{E}(x)) = \frac{1}{\varepsilon_0} \Delta x \rho \quad (4.11)$$

辺々を  $\Delta x$  で割って  $\Delta x \rightarrow 0$  とすると、次式が得られる。

$$\mathbf{i} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x} = \frac{\partial E_x}{\partial x} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (4.12)$$

これが、三次元の場合のマクスウェルの  $\text{div } \mathbf{E}$  式に対応することは明かであろう。

同様に、式 4.6 を狭い領域に適用すると、次式が得られる。

$$\mathbf{i} \times \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x} = -\mathbf{j} \frac{\partial E_z}{\partial x} + \mathbf{k} \frac{\partial E_y}{\partial x} = 0 \quad (4.13)$$

これが、三次元の場合のマクスウェルの  $\text{rot } \mathbf{E}$  式の静的な場合に対応することも明かであろう。

## 4.2 静磁場

直流電流は静磁場を作り出すが、これが  $x$  軸方向に流れると、 $x$  軸を囲むような磁場発生するため  $yz$  面方向に一様という仮定が崩れてしまう。このため、直流電流は  $yz$  面内にしか流れない。それも、 $J_y$  も  $J_z$  も至るところ一定でなければならない。そこで基礎となる電流として、 $yz$  面内に一定方向に流れる面電流を考え、これを  $\mathbf{K}$  としよう。この面電流は、静磁場を作り出す。静磁場は面電流を右ネジに回る方向に発生し、同じく平面的である。式で表すと次のようになる。

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{2} \begin{cases} \mathbf{K} \times \mathbf{i} & x > 0 \\ -\mathbf{K} \times \mathbf{i} & x < 0 \end{cases} \quad (4.14)$$

さて、電荷の場合と同じように、二枚の  $yz$  平面で囲まれた領域を考える。この領域内に電流が存在しないと、二枚の平面内は一定の磁場となるため、左右の磁場には差が生じない。しかし、領域内に電流が存在すると、左右の平面における磁場は異なってくる。その差は次式で与えられる。

$$\mathbf{i} \cdot (\mathbf{B}(x_r) - \mathbf{B}(x_l)) = 0 \quad (4.15)$$

$$\mathbf{i} \times (\mathbf{B}(x_r) - \mathbf{B}(x_l)) = \mu_0 \mathbf{K} \quad (4.16)$$

式 4.16 より、さらに  $yz$  方向の電流が分布して流れている場合の式が誘導できる。

$$\mathbf{i} \times (\mathbf{B}(x_r) - \mathbf{B}(x_l)) = \mu_0 \int_l^r dx \mathbf{J} \quad (4.17)$$

これらの式も、三次元の場合の式 3.18、および式 3.23 などに対応することも明かであろう。

さらに、これらの式から微分形も得られる。

$$\mathbf{i} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial x} = \frac{\partial B_x}{\partial x} = 0 \quad (4.18)$$

$$\mathbf{i} \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial x} = -\mathbf{j} \frac{\partial B_z}{\partial x} + \mathbf{k} \frac{\partial B_y}{\partial x} = \mu_0 \mathbf{J} \quad (4.19)$$

これらの式も、三次元の場合のマクスウェルの  $\text{div } \mathbf{B}$  式、および  $\text{rot } \mathbf{B}$  式の静的な場合に対応することも明かであろう。

## 4.3 動的な場

静的な場に対する方程式を、動的な場に対する方程式に補正するには、ファラデーの電磁誘導の法則とマクスウェルの変位電流を含めればよい。その手法は、三次元の場合とまったく同じである。

ファラデーの法則を入れると、式 4.6 が次のように変形される。

$$\mathbf{i} \times (\mathbf{E}(x_r) - \mathbf{E}(x_l)) = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (4.20)$$

同様に変位電流を含めると、式 4.17 が次のように変形される。

$$\mathbf{i} \times (\mathbf{B}(x_r) - \mathbf{B}(x_l)) = \mu_0 \int_l^r dx \left( \mathbf{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \quad (4.21)$$

さらに、これらの微分形を求めると、一次元の場合のマクスウェル方程式が得られる。

$$\begin{aligned} \mathbf{i} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x} &= \frac{\partial E_x}{\partial x} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \\ \mathbf{i} \times \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x} &= -\mathbf{j} \frac{\partial E_z}{\partial x} + \mathbf{k} \frac{\partial E_y}{\partial x} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \mathbf{i} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial x} &= \frac{\partial B_x}{\partial x} = 0 \\ \mathbf{i} \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial x} &= -\mathbf{j} \frac{\partial B_z}{\partial x} + \mathbf{k} \frac{\partial B_y}{\partial x} = \mu_0 \mathbf{J} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \end{aligned} \quad (4.22)$$

これらの式を各成分にわけて、まとめ直してみよう。最初は  $E_x$  と  $B_x$  に関する式である。

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho \quad (4.23)$$

$$B_x = \text{const} \quad (4.24)$$

$$0 = J_x + \varepsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial t} \quad (4.25)$$

$E_y$  と  $B_z$  はいつも独立した組になっている。

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = -\frac{\partial B_z}{\partial t} \quad (4.26)$$

$$\frac{\partial B_z}{\partial x} = -\mu_0 \left( J_y + \varepsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t} \right) \quad (4.27)$$

同様に、 $E_z$  と  $B_y$  はいつも独立した組になっている。

$$\frac{\partial E_z}{\partial x} = \mathbf{j} \frac{\partial B_y}{\partial t} \quad (4.28)$$

$$\frac{\partial B_y}{\partial x} = \mu_0 \left( J_z + \varepsilon_0 \frac{\partial E_z}{\partial t} \right) \quad (4.29)$$

面積分という概念が一次元の差分の拡張であること、また、第 12 章でいくつかのパラドックスを示すが、こうした複雑な問題に対して定量的な考察を試みるには、一次元の世界が極めて便利であることから、あえて一次元の電磁気学を紹介した。

## 第5章

# 物質と電磁場

電磁気に影響を与える物質とは、導体、誘電体、磁性体の三種類である。これらが存在すると、どのような影響があるか、また、これらをどのようにあつかうかについて、説明する。もともと、物質があっても、電磁気学の基本法則は何ら変わらない。特に誘電体や磁性体は、外部から電場や磁場を与えると、物質中に電荷や電流が誘起されるが、これら物質中の電荷や電流をいちいち意識したくないという立場から、これらを、場への補正として取り込む立場があるので、注意が必要である。一方、導体は、電場に比例して電流の流れる材料であるが、その電流は意識されて議論されることが多い。

### 5.1 導体

**導体** (conductor) とは電場を与えると電流の流れる材料である。通常の導体では電子の移動を妨げる不純物が多く、電子は力に比例して加速され、一瞬にして力に比例する臨界速度で走るようになる。つまり、 $\mathbf{v} = \mu_m \mathbf{F} / Q$  となる。ここでは、 $\mu_m$  は透磁率ではなく、移動度と呼ばれる定数である。したがって、 $n$  を導体中の電子密度として、ローレンツ力  $\mathbf{F} = Q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$  の両側に  $\mu_m / Q$  を掛けると、 $\mathbf{v} = \mu_m (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$  が得られる。

$nQ\mathbf{v} = \mathbf{J}$  であることを考慮し、 $\sigma = \mu_m nQ$  と置くと、

$$\mathbf{J} = \sigma \left( \mathbf{E} + \frac{\mathbf{J} \times \mathbf{B}}{nQ} \right) \quad (5.1)$$

が得られる。通常、金属中では  $n$  はきわめて大きいため、第二項はほとんど効かない。そこで次のように近似できる。

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \quad (5.2)$$

$\sigma$  は**導電率** (conductivity) と呼ばれる。ただし、半導体などの材料では  $n$  が小さく、第二項は無視できず、**ホール効果** (Hall effect) と呼ばれる電気伝導に磁気関与する効果が現れる。

導体はホール効果が無視できる場合でも、導電率によって、面白い応答をする。均質な導体内の

電磁場を考えよう。この場合、次式が成立する。

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \quad (5.3)$$

この式の  $\text{div}$  をとり、左辺の  $\text{div } \mathbf{J}$  を  $-d\rho/dt$  で置き換える。また、右辺の  $\text{div } \mathbf{E}$  をガウスの法則の微分形を用いて  $\rho/\varepsilon_0$  で置き換えて、まとめ直すと次式が得られる。

$$\frac{d\rho}{dt} + \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \rho = 0 \quad (5.4)$$

この方程式を解くと、電荷はいたるところで次のように減衰していくことが分かる。

$$\rho = \rho(0) e^{-\sigma t/\varepsilon_0} \quad (5.5)$$

大変不思議なことに、電荷が伝わっていくような様子が見えず、その場で、誘電緩和時間と呼ばれる  $\varepsilon_0/\sigma$  程度の時間で減衰していくかに見える。このような現象を**誘電緩和** (dielectric relaxation) と呼ぶ。実は電荷は、電荷の多いところから少ないところへ逃げていくのであるが、少ないところの電荷ももっと少ないところへ逃げていくので、全体が一様に減衰していくのである。

したがって、十分時間が経つと、 $\rho = 0$  としてよい。つまり、電荷は導体の表面だけに存在するとしてよい。さらに、 $\sigma$  が十分大きいと、 $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$  の関係から、有限の  $\mathbf{J}$  を達成するためには  $\mathbf{E}$  は限りなく小さくなる。

導体は  $\sigma$  の非常に大きな材料であるから、この誘電緩和は一瞬にして起こることとなる。また、 $\mathbf{J}$  が有限になるためには  $\mathbf{E}$  がほとんど 0 でなければならなくなる。逆に、 $\mathbf{E} = 0$  を仮定すると、まず、 $\text{div } \mathbf{E} = \rho/\varepsilon_0$  より、導体の内部では

$$\rho = 0 \quad (5.6)$$

が得られる。この結果は誘電緩和の最終値と同じ結論である。

さらにマクスウェル方程式の  $\text{rot } \mathbf{E}$  式である  $\text{rot } \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B}/\partial t$  の左辺が 0 となるから次式が得られる。

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0 \quad (5.7)$$

つまり、磁場が時間変動しないという**磁場凍結** (freezing of magnetic field) の原理が導かれる。さらに、マクスウェル方程式の  $\text{rot } \mathbf{B}$  式を時間微分したものに  $\mathbf{E}$  や  $\mathbf{B}$  の条件を代入することにより、 $\partial \mathbf{J}/\partial t = 0$  が誘導できる。なお、超伝導体中では  $\mathbf{B} = 0$  が成立するが、これは超伝導体が単なる抵抗 0 の導体ではないことを示している。

## 5.2 誘電体

まず、**誘電体** (dielectric material) とは電氣的に中性の材料であるが、電場をかけると、内部の電荷がわずかに移動することにより、全体では相変わらず中性であるが、部分的には電荷が発生す



るような材料である。このような材料は正電荷と負電荷を組にして考えるとよい。電場のない場合は、正電荷と負電荷が各点で正確に重なっており、電荷がまったく見えないが、電場をかけると、これらが各点でわずかに分離すると理解する。こうした現象を**分極** (polarization)、発生した電荷を**分極電荷** (polarization charge) という。

このとき、組をなす電荷の電気量を  $Q$  とし、負電荷から正電荷に向かうベクトルを  $l$  とするとき、 $p = Ql$  を**電気モーメント** (electric moment) という。また、 $p$  に  $\delta_L(\mathbf{r}, l)$  なる線状デルタ関数を掛けて、この線分上にだけ  $p$  が存在できるようにした  $P = p\delta_L(\mathbf{r}, l)$  を分極ベクトルという。

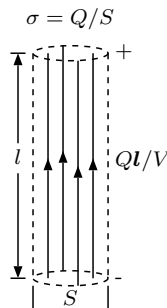
この存在領域を少し太くして、**図 5.1** に示すように、断面積  $S$  の円柱とすると、理解しやすいかも知れない。この円柱の体積を  $V$  とするとき、分極ベクトルは、この円柱内だけで値  $Ql/V$  なる一定値となり、円柱外では 0 である。第 2 章 2.7 節で示したように、こうした円柱状の一様ベクトル場は、その頭端に負の発散が、また尾端に正の発散があり、それらの値は  $Ql/V = Q/S$  である。ただし、負の発散側に正電荷があるので、電荷は発散の符号反転したものとなることに注意してほしい。円柱の断面積を限りなく小さくすると、これら発散の体積積分は、それぞれ  $\pm Q$  となる\*1。

実際には、誘電体にはこのような対が無数にある。したがって、通常、**分極ベクトル** (polarization vector)  $P$  は、**図 5.2** のように、これらを集めたものになる。

$$P = \sum_i Q_i l_i \delta_L(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i, l_i) = \sum_i \mathbf{p}_i \delta_L(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i, l_i) \tag{5.8}$$

ここで、 $\mathbf{r}_i$  は各電気モーメント  $\mathbf{p}_i$  の存在する場所である。この定義にしたがうと、 $P$  は位置の関数であり、ほとんどのところで 0 であるが、各電気モーメントの正負を結ぶ直線上でのみデルタ関数的に大きな値を持つベクトル場のような概念である。

マクロの立場では、電気モーメントのつぶつぶが見えない程度の広い範囲で平均化することにより、もっと滑らかな概念にすることが可能である。このため、この式の両辺を適切なやや大きな体



**図 5.1** 一つのマクロな電気モーメントに対する分極ベクトル。

\*1 分極ベクトルは、必ずしも負電荷から正電荷へ向かう直線で定義する必要はない。始点と終点が一様すれば、任意の曲線でも構わない。

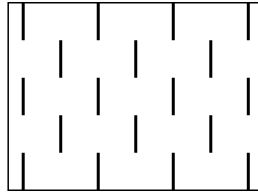


図 5.2 分極ベクトルの例。実線で示した直線領域にのみ、上向きのベクトル場が存在している。

積で体積積分し、両辺をその体積で除してみよう。

$$\mathbf{P} = \frac{1}{V} \int dV \sum_i \mathbf{p}_i \delta_L(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i, \mathbf{l}_i) = \frac{1}{V} \sum_i \mathbf{p}_i = n \langle \mathbf{p} \rangle \quad (5.9)$$

ここで、 $n$  は単位体積当たりのモーメントの個数、 $\langle \mathbf{p} \rangle$  は電気モーメントのベクトルの平均値である。多くの場合、 $\mathbf{p}$  は、ある程度の範囲で同じ値をとることが多いので、その場合には平均の記号は不要となる。

逆に電極分極ベクトル  $\mathbf{P}$  が与えられていて、分極電荷を求めたい場合には、 $\mathbf{P}$  の定義から明らかのように、次式により計算することができる。

$$\rho_p = -\operatorname{div} \mathbf{P} \quad (5.10)$$

マクロな立場の場合、分極ベクトルは滑らかなベクトル場となるため、分極電荷は領域の縁にのみ発生する。

クーロンの法則に基づく電場は、我々が意識して置いた電荷を**自由電荷** (free charge)  $\rho_f$  および分極の結果現れる分極電荷  $\rho_p$  の合計である**全電荷** (all charge)  $\rho = \rho_f + \rho_p$  により形成される。

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} (\rho_f + \rho_p) = \frac{1}{\varepsilon_0} (\rho_f - \operatorname{div} \mathbf{P}) \quad (5.11)$$

この結果、

$$\operatorname{div}(\varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) = \rho_f \quad (5.12)$$

の式が得られる。なお、 $\rho_p$  は物質に束縛されているため、自由電荷に対し、**束縛電荷** (bounded charge)  $\rho_b$  とも書かれる。

次式で**電束密度** (electric flux density)  $\mathbf{D}$  を定義する。

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \quad (5.13)$$

電束密度を使うと、式 5.12 は次のように書き直すことができる。

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho_f \quad (5.14)$$

これにより、電束密度は自由電荷を湧き出し、吸い込みとするベクトル場であることが分かる。

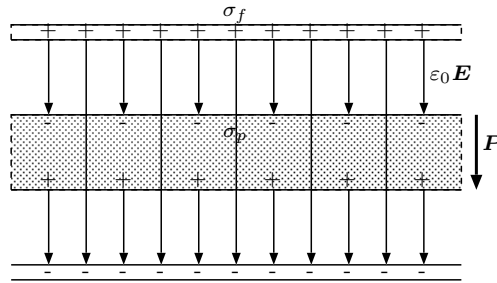


図 5.3 キャパシタ内の誘電体における分極は、電場の方向に発生する。

多くの材料は、 $\mathbf{P}$  が  $\epsilon_0 \mathbf{E}$  に比例するという**線形応答** (linear response) をする。さらに、マクロな均質媒質を仮定すると、次式が成立する。

$$\mathbf{P} = \chi_p \epsilon_0 \mathbf{E} \tag{5.15}$$

この  $\epsilon_0 \mathbf{E}$  に対する  $\mathbf{P}$  の比例係数  $\chi_p$  を、**電気感受率** (electric susceptibility) という。  $\chi_p$  は一般に正数である。

この場合、 $\mathbf{D}$  も  $\mathbf{E}$  に比例する。

$$\mathbf{D} = (1 + \chi_p) \epsilon_0 \mathbf{E} \tag{5.16}$$

この  $\mathbf{E}$  に対する  $\mathbf{D}$  の比例係数  $\epsilon = (1 + \chi_p) \epsilon_0$  を、**誘電率** (permittivity) という。  $\epsilon$  は  $\epsilon_0$  以上の正数となる。

線形応答する均質な材料中では、材料中に自由電荷がない場合、 $\text{div } \mathbf{D} = 0$  となる。この結果、 $\text{div } \mathbf{P} = 0$  が成立する。つまり、分極電荷は材料中に現れず、材料表面にしか現れない。

例えば、図 5.3 に示すように、厚さに対し、十分広い電極面積を持つ平行平板キャパシタの中に、電極と平行に厚みよりやや薄い誘電体を挿入した場合、対称性より、電場も電束密度も、キャパシタの内部では、電極に対し、垂直なベクトルとなる。自由電荷は両極板にしか存在しないが、分極電荷は誘電体表面にのみ発生する。まず、 $\mathbf{D}$  は自由電荷のところでは、発生、消滅が起こらないから、 $\mathbf{D}$  の大きさは  $D = \sigma_f$  となる。 $\sigma_f$  は、自由電荷の面密度である。下向きを正とすると  $D = \sigma_f$  となる。この結果、誘電体のない電極間空間では  $\epsilon_0 E = D = \sigma_f$  となる。

一方、誘電率  $\epsilon$  の誘電体中では、比誘電率を  $\epsilon_r = \epsilon / \epsilon_0$  として、 $\epsilon_0 E = D / \epsilon_r = \sigma_f / \epsilon_r$  と、絶対値は空間中の電場より弱くなる。また、誘電体中の分極は  $P = D - \epsilon_0 E = (1 - 1/\epsilon_r) \sigma_f$  となる。 $\mathbf{P}$  は誘電体内で一定であるが、空間では突然 0 となるため、 $\text{div } \mathbf{P}$  で与えられる分極電荷は面状デルタ関数となる。つまり、誘電体下面で面密度  $\sigma_p = P = (1 - 1/\epsilon_r) \sigma_f$  となる。誘電体表面の両側の電場の発散は、この面密度と一致する。

なお、 $\sigma_f$  を固定して、 $\epsilon_r$  を大きくしていくと、 $\mathbf{D}$  は変化しないため、 $\mathbf{E}$  は誘電体中でほぼ 0 となり、ほとんど導体のような性質を持つてくる。このため、両電極間の電位差はきわめて少なくな

る。逆に電位差を固定すれば、きわめて多量の自由電荷を溜めることができることになる。これが**キャパシタ** (capacitor) の原理である。キャパシタは**コンデンサ** (condensator) とも呼ばれる。

図に示したような構造では、誘電体の厚みを  $d_d$ 、その他の空間の厚みを  $d_v$  とすると、両極間の電位差は次式で与えられる。

$$\phi = \frac{(d_d/\varepsilon_r) + d_v}{\varepsilon_0} \sigma_f \quad (5.17)$$

また、電位差に対する自由電荷の比を**キャパシタンス** (capacitance) と呼ぶ。この場合、電極面積  $S$  とすると、キャパシタンス  $C$  は次式で与えられる。

$$C = \frac{\varepsilon_0 S}{(d_d/\varepsilon_r) + d_v} \quad (5.18)$$

$\varepsilon_r$  が大きいと、 $C$  がどんどん増えていき、さらにその傾向は、 $d_v$  が少ないほど効果的であることが分かる。

### 5.3 磁性体

**磁性体** (magnetic materials) は、我々が意識して置いた**自由電流** (free current) 以外に、材料中に無数の微小電流ループのあるような材料である。このような内部電流が存在することを**磁化** (magnetization) と呼ぶ。磁化が永久に存在するときは磁石になり、外部磁場によって誘起されるときには常磁性体になる。この無数の微小電流ループを**磁化電流** (magnetization current) という。このとき、電流値を  $I$ 、ループにより囲まれた面積ベクトルを  $\mathbf{S}$  とするとき、 $\mathbf{m} = I\mathbf{S}$  を**磁気モーメント** (magnetic moment) という。また、 $\mathbf{m}$  に  $\delta_S(\mathbf{r}, \mathbf{S})$  なる面状デルタ関数を掛けて、この面積上にだけ  $\mathbf{m}$  が存在できるようにした  $\mathbf{M} = \mathbf{m}\delta_S(\mathbf{r}, \mathbf{S})$  を磁化ベクトルという。

存在領域を少し厚くして、**図 5.4** に示すように、厚さ  $l$  の板とすると、理解しやすいかも知れない。この板の体積を  $V$  とするとき、磁化ベクトルは、この板内だけで値  $I\mathbf{S}/V$  なる一定値となり、板外では 0 である。第 2 章 2.7 節で示したように、こうした板状の一様ベクトル場は、その周辺に右ネジ方向の回転があり、その値は  $I\mathbf{S}/V = I/l$  である。板の厚さを限りなく薄くすると、この回転の厚さ方向の積分は、 $I$  となる\*2。

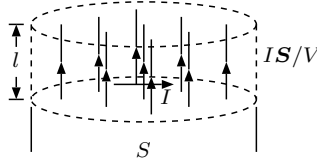


図 5.4 一つのマクロな磁気モーメントに対する磁化ベクトル。

\*2 磁化ベクトルは、必ずしも電流ループに対し平らに張った平面で定義する必要はない。緑さえ電流ループに一致していれば、任意の曲面でも構わない。したがって逆に電流ループが捻れている場合もきちんと定義できる。

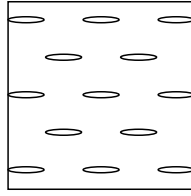


図 5.5 磁化ベクトルの例。実線で示した板状領域にのみ、上向きのベクトル場が存在している。

実際の磁性体にはこのようなループが無数にある。したがって、通常、**磁化ベクトル** (magnetization vector)  $\mathbf{M}$  は、図 5.5 に示すように、これらを集めたものである。

$$\mathbf{M} = \sum_i I_i \mathbf{S}_i \delta_S(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i, \mathbf{S}_i) = \sum_i \mathbf{m}_i \delta_S(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i, \mathbf{S}_i) \quad (5.19)$$

ここで、 $\mathbf{r}_i$  は各磁気モーメント  $\mathbf{m}_i$  の存在する場所である。この定義にしたがうと、 $\mathbf{M}$  は位置の関数であり、ほとんどのところで 0 であるが、各電流ループの囲む面上でのみデルタ関数的に大きな値を持つベクトル場のような概念である。

マクロの立場では、磁気モーメントのつぶつぶが見えない程度の広い範囲で平均化することにより、もっと滑らかな概念にすることが可能である。このため、この式の両辺を適切なやや大きな体積で体積積分し、両辺をその体積で除してみよう。

$$\mathbf{M} = \frac{1}{V} \int dV \sum_i \mathbf{m}_i \delta_S(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i, \mathbf{S}_i) = \frac{1}{V} \sum_i \mathbf{m}_i = n \langle \mathbf{m} \rangle \quad (5.20)$$

ここで、 $n$  は単位体積当たりのモーメントの個数、 $\langle \mathbf{m} \rangle$  は磁気モーメントのベクトルの平均値である。多くの場合、 $\mathbf{m}$  は、ある程度の範囲で同じ値をとることが多いので、その場合には平均の記号は不要となる。

逆に磁化ベクトル  $\mathbf{M}$  が与えられていて、磁化電流を求めたい場合には、 $\mathbf{M}$  の定義から明らかに、次式により計算することができる。

$$\mathbf{J}_m = \text{rot } \mathbf{M} \quad (5.21)$$

マクロな立場の場合、分極ベクトルは滑らかなベクトル場となるため、分極電荷は領域の縁にのみ発生する。

物質のある場合のマクスウェルの方程式であるが、自由電流、磁化電流以外に、誘電体も、分極の際に起こる電荷の移動も瞬時的な**分極電流** (polarization current)  $\mathbf{J}_p$  を流すことを考慮する必要がある。これらの合計である**全電流** (all current)  $\mathbf{J} = \mathbf{J}_f + \mathbf{J}_m + \mathbf{J}_p$  が、アンペールの法則に基づく磁場を発生する。

$$\text{rot } \mathbf{B} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mu_0 (\mathbf{J}_f + \mathbf{J}_m + \mathbf{J}_p) = \mu_0 \left( \mathbf{J}_f + \text{rot } \mathbf{M} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} \right) \quad (5.22)$$

なお、 $\mathbf{J}_m + \mathbf{J}_p$  は物質に束縛されているため、自由電流に対し、**束縛電流** (bounded current)  $\mathbf{J}_b$  とも書かれる。

上式の結果、

$$\operatorname{rot} \left( \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} - \mathbf{M} \right) - \frac{\partial}{\partial t} (\varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) = \mathbf{J}_f \quad (5.23)$$

が得られる。

次式で**磁場強度** (strength of magnetic field)  $\mathbf{H}$  を定義する。

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} \quad (5.24)$$

すると式は、次のように美しく書き換えることができる。

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J}_f + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (5.25)$$

多くの材料は、 $\mathbf{M}$  が  $\mathbf{B}/\mu_0$  に比例するという線形応答をする。さらに、マクロで均質な媒質を仮定すると、次式が成立する。

$$\mathbf{M} = \alpha \mathbf{B}/\mu_0 \quad (5.26)$$

この場合、 $\mathbf{H}$  も  $\mathbf{B}$  に比例する。

$$\mathbf{H} = (1 - \alpha) \mathbf{B}/\mu_0 \quad (5.27)$$

この  $\mathbf{B}$  に対する  $\mathbf{H}$  の比例係数の逆数  $\mu = \mu_0/(1 - \alpha)$  を**透磁率** (permeability) という。

磁性体の場合には、歴史的に、まず自由電流があり、これの作る磁場により磁化電流が誘導され、これが自由電流の作る磁場を強めるという立場をとることが多く、これに対応して、まず  $\mathbf{H}$  があり、これにより  $\mathbf{M}$  が誘導され、強められた磁場が  $\mathbf{B}$  であると理解する。このため、 $\mathbf{H}$  に対する  $\mathbf{M}$  の比例係数  $\chi_m$  を、**磁気感受率** (magnetic susceptibility) という。

$$\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H} \quad (5.28)$$

であるので、

$$\mathbf{B}/\mu_0 = \mathbf{H} + \mathbf{M} = (1 + \chi_m) \mathbf{H} \quad (5.29)$$

が成立する。式 5.27 と比較すると、

$$\chi_m = \frac{\alpha}{1 + \alpha} \quad (5.30)$$

が得られる。通常  $\alpha$  は正数なので、 $0 < \chi_m < 1$  が成立する。ただし、反磁性体と呼ばれる物質では、 $-1 < \alpha < 0$  なる負数となり、 $\chi_m < 0$  が成立する。

線形応答する均質な材料中では、材料中に自由電流がない場合、 $\operatorname{div} \mathbf{H} = 0$  となる。この結果、 $\operatorname{div} \mathbf{M} = 0$  が成立する。つまり、磁化電流は材料中に現れず、材料表面にしか現れない。

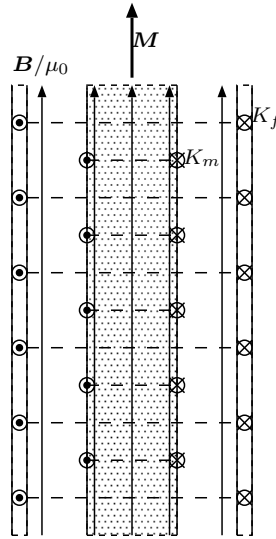


図 5.6 コイル内に置かれた棒状の磁性体における磁化は、常磁性体では磁場の方向を向く。

例えば、図 5.6 に示すように、断面に対し、十分な長さを持つコイル中に置かれた磁性体の場合、対称性より、磁場も磁束密度も、インダクタの内部では、コイル円筒軸のほうを向くベクトルとなる。自由電流はコイルの中にしか流れていないが、磁化電流は磁性体表面にのみ発生する。コイルが十分長いと、コイルの外部の磁場は 0 となるので、自由電流と結び付いている  $H$  の大きさは、コイルの内部で自由電流の面密度  $K_f$  と一致し、 $H = K_f$  となる。方向は図に示すようになる。この結果、磁性体のないコイル内の自由空間では  $B/\mu_0 = H = K_f$  となる。

一方、透磁率  $\mu$  の磁性体中では、比透磁率を  $\mu_r = \mu/\mu_0$  として、 $B/\mu_0 = \mu_r H = \mu_r K_f$  と、自由空間中の  $B$  より強くなる。また、磁性体中の磁化は  $M = B/\mu_0 - H = (\mu_r - 1)K_f$  となる。磁化電流は  $\text{rot } M$  で与えられるが、 $M$  は磁性体内で一定、空間では突然 0 となるため、面状デルタ関数となる。つまり、磁性体表面で、面密度  $K_m = M = (\mu_r - 1)K_f$  の値を持ち、自由電流と同じ方向となるベクトルとなる。

$K_f$  を固定して、 $\mu_r$  を大きくしていくと、 $H$  は変化しないので、磁性体中の  $B$  はきわめて大きくなる。このため、同じ自由電流に対し、きわめて大きな磁束を対応させることができる。もし、自由電流を変化させると、大きな磁束変化が得られ、ファラデーの法則により、コイル両端には大きな電圧変動が発生することになる。これが**インダクタ** (inductor) の原理である。

図に示したような構造では、磁性体の断面積を  $S_m$ 、その他の空間の面積を  $S_v$  とすると、コイルに囲まれた領域に存在する全磁束は次式のようなになる。

$$\Phi = \mu_0(\mu_r S_m + S_v)K_f = \mu_0(\mu_r S_m + S_v)nI \tag{5.31}$$

ただし、 $n$  は単位長当たりの巻数、 $I$  は導線を通る電流である。コイルはこの磁束を  $N$  回巻いて

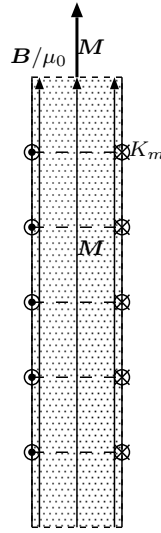


図 5.7 永久磁石の内部磁場は、磁化と同じ方向に発生する。

いるので、導線に鎖交する磁束はこの  $N = nl$  倍となる。

自由電流に対する全鎖交磁束の比を**インダクタンス** (inductance) と呼ぶ。この場合のインダクタンス  $L$  は、次式で与えられる。

$$L = \frac{N\Phi}{I} = \mu_0(\mu_r S_m + S_v) n^2 l = \mu_0(\mu_r S_m + S_v) \frac{N^2}{l} \quad (5.32)$$

$\mu_r$  が大きいと、 $L$  がどんどん増えていくことが分かる。

次に、図 5.7 に示す永久棒磁石を考えよう。永久磁石では、自由電流がなくても、磁化の存在する物質である。 $M$  に対応して、棒磁石の側面に、磁化電流が流れる。この磁化電流が作る磁場を考えると、磁化電流がソレノイドを形成しているので、まさにソレノイドの作る磁場と一致する。棒の長さが十分長いと、外部磁場はほぼ 0 となるため、面電流密度  $K$  の磁化電流に対応した磁場  $B/\mu_0 = K$  が、ソレノイド内部に作られる。

棒の長さが短くなってくると、外にも棒端から溢れた磁場が、ある程度、できるため、アンペールの法則より、内部磁場は、その分、弱くなってくる。厳密な磁場の計算は、一見、困難そうであるが、一様磁場  $B/\mu_0 = K$  がソレノイドの端から端まで存在するとし、それに、両端を発散源とした上下対称に発生する磁場を足せば、計算可能となる\*3。この辺の話は、本章 3.2 節で行った磁石と電流の等価性の議論と同じである。

電束密度  $D$  と磁場強度  $H$  を導入したときのマクスウェル方程式を、示しておこう。このうち

\*3 永久磁石の両極に磁荷があるとして計算された磁場は、残念ながら簡単な関数とはならず、楕円関数の入ったものとなる。



二本は、すでに示したものである。

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho_f \quad (5.33)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (5.34)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \quad (5.35)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J}_f + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (5.36)$$

### $\mathbf{E} - \mathbf{H}$ 対応

式 5.24 を利用して、物質のあるときの方程式の  $\mathbf{B}$  を  $\mathbf{H}$  で書き換えてみよう。

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho \quad (5.37)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = \mathbf{J}_M - \mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \quad (5.38)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \rho_m \quad (5.39)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J}_H + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (5.40)$$

ただし、右辺は、 $\mathbf{P}_m = \mu_0 \mathbf{M}$  として、次のように定義する。

$$\rho = \rho_f - \operatorname{div} \mathbf{P} \quad (5.41)$$

$$\mathbf{J}_M = -\frac{\partial \mathbf{P}_m}{\partial t} \quad (5.42)$$

$$\rho_m = -\operatorname{div} \mathbf{P}_m \quad (5.43)$$

$$\mathbf{J}_H = \mathbf{J}_f + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} \quad (5.44)$$

このうち、 $\mathbf{J}_M$  を**磁流** (magnetic current)、 $\rho_m$  を**磁荷** (magnetic charge)、 $\mathbf{J}_H$  を電流と呼ぶ。式 5.43 に示した磁荷の式は、分極  $\mathbf{P}$  と分極電荷  $\rho_p$  を結び付ける式 5.10 と大変よい対応がとれている。なお、この式の電流は我々の使う物質中の電流と、磁化電流だけ異なることに注意が必要である。

電磁気学を作りあげた当初は、電流よりも磁荷が重要であったこと、さらに式の対称性のよさから、この  $\mathbf{E} - \mathbf{H}$  対応と呼ばれる定式化が主流であった。 $\mathbf{P}_m$  は磁化の昔の定義である。現在は、磁気現象の成因はすべて電流であるとされていること、さらに、前節で述べた磁石が受ける力に問題があること、相対論的に問題があることなどから、本書で採用された  $\mathbf{E} - \mathbf{B}$  対応の定式化が主流である。なお、 $\mathbf{E} - \mathbf{H}$  対応では、 $\mathbf{D}$  と  $\mathbf{B}$  が対応する。このため、 $\mathbf{B}$  は磁束密度とも呼ばれる。

## 5.4 静電磁場の計算

今迄、いくつかの静電磁場の例を示してきたが、これらの例は、ほとんど点対称、線対称といったきわめて対称性の高いものであった。対称性が高いと、静電場の場合にはガウスの法則が使えるし、静磁場の場合にはアンペールの法則が使える。しかし、一般の電磁場の解析は容易ではない。

それでは、与えられた条件での電磁場を計算するには、どの式をどのように使えばよいのであろうか。本節では、静的な電磁場の計算手法について説明する。静的であると、まず、時間微分がすべて0となるので、マクスウェル方程式は、電場と磁場に関し、完全に独立となるので、それぞれ独立に決定できることになる。

物質のない場合の電場計算、つまり、電荷が動くことなく独立に存在する場合には、電場はクーロンの法則を用いて電荷から決定できる。本書に示した少ない例では、ガウスの法則を使って電界を求めているが、こうした作業ができるのは、電荷分布が球状、円柱状、平面状といった対称性のよい場合だけである。一般の形状では、クーロンの法則の法則を使って、各電荷の作る電場をコンピュータによって加算（積分）するしかない。磁場の場合も、対称性のよい場合にはアンペールの法則が利用できるが、一般にはビオ・サバルの法則による各線分の作る磁場を、コンピュータによって加算（積分）するしかない。

物質が存在すると、これらの計算は一層面倒となる。電場の場合には、導体と誘電体に関係する。実は導体は誘電率が無限大の誘電体として扱うことができる。ただし、導体には電荷を帯電させることができる。このため、正負の電気量の差が、導体全体で一定となるという条件が成立する。一方、誘電体では、正負の電気量の差は0となる。いずれにせよ、対称性がよければ、ガウスの定理を利用できるが、一般の場合にはコンピュータを駆使せざるを得ない。

初期状態、つまり計算の前提としては、いくつかの導体上に決まった量の自由電荷が与えられるか、いくつかの導体の電位が与えられるか、これらの複合であることが多い。しかし、電位が与えられている場合でも、まず導体上に適当な量の自由電荷を仮定する。そして、クーロンの法則を利用して、全体の電場を計算する。この最初の計算結果では、導体内に電場が残ったりする。

この計算の結果、導体の電位（どこか代表点の電位）が不適正の場合には、自由電荷を補充/削減する。導体内で電場が残っている場合には、電場の方向へ、電荷移動を行う。また誘電体で内部で電場がある場合には、それに比例して分極ベクトルを生成し、それによる分極電荷を誘電体表面に生成する。そして、全電荷を使って、電場を再計算する。これを繰り返すことで、収束した結果が、求める静電場となる。この計算の仕方は、まさに、実際の電荷が移動して行って、静電場が確定する過程のシミュレーションそのものである。この他にも、いくつかの手法が提案されているが、本質的には、ここに述べたものと同じ作業をしていると理解してよいであろう。

磁場の場合には、導体上の自由電流が与えられている場合がほとんどであり、鎖交磁束が与えられることはほとんどない。仮に鎖交磁束が与えられる場合でも、静電場のやり方に準じて計算すればよい。自由電流が与えられるといっても、導体内の分布状況までが与えられることはないので、

やはり、最初は、自由電流を導体内の適切な位置に仮定する。そして、ビオ・サバルの法則を用いて、全体の磁場を計算する。

この計算の結果、導体内に磁場が残る場合は、ローレンツ力にしたがって、自由電流の位置を導体内で移動する。また、磁性体の内部では、磁場に比例して磁化ベクトルを生成し、それによる磁化電流を磁性体表面に生成する。そして、全電流を使って、磁場を再計算する。これを繰り返すことで、収束した結果が、求める静磁場となる。この計算の仕方は、まさに、実際の電流が移動していった、静磁場が確定する過程のシミュレーションそのものである。

かつて、コンピュータが身近になかったころは、色々手の込んだ複雑な電磁界解析の手法が提案されたが、強力なコンピュータが身近に手に入るようになった現在、こうした計算は、ほとんど、実際に起きている現象をシミュレーションすることで、成されるようになっている。

なお、これ以外の手法としては、電場、磁場の代わりに、スカラーポテンシャル、ベクトルポテンシャルを計算する手法があるが、本質的には、ここに述べたものと、大きな変化はない。

## 第 6 章

# ポテンシャル

電場・磁場の概念に付随して、ポテンシャルという概念が作られた。量子力学が開発された現在では、むしろ、このポテンシャルのほうが本質的であり、電場・磁場は物質のサイズが大きくなってきたときに見える平均的な場であると考えられている。本章ではまず、電場・磁場の概念からポテンシャルの概念を導き出す。

### 6.1 スカラーポテンシャル

静電場の基本方程式は、 $\text{div}$  が電荷密度に比例するという式と、 $\text{rot}$  が  $\mathbf{0}$  になるという式である。このうち、後者の  $\text{rot}$  が  $\mathbf{0}$  になるということは、任意の閉曲線に沿った静電場の線積分が  $0$  となることを意味している。閉曲線上に二点を取り、積分路を二分してみると、それぞれの積分が互いに符号の反転した同じ値になることが分かる。片側の積分路を移動してみても、この事態は変わらず、しかも固定された積分は変化しないことから、その積分結果は前の結果と等しくなる。以上の結果、二点間を結ぶ曲線に沿う静電場の線積分は、曲線の形によらず一定になる。空間のある一点を基準として、各点までの静電場  $\mathbf{E}$  の線積分を実行し、それを符号反転したものを、**静電ポテンシャル** (electro-static potential) という。

$$\phi = - \int_C d\mathbf{r} \cdot \mathbf{E} \quad (6.1)$$

静電ポテンシャル  $\phi$  は場所が決まると値が決まることから、第 2 章で述べたスカラー場の一つであり、**スカラーポテンシャル** (scalar potential) ともいう。次の節でベクトルポテンシャルという概念を導入するが、それとの対比で、以後、スカラーポテンシャルと呼ぶことにする。上式を微小距離に対し適用すると、次式ようになる。

$$d\phi = -(E_x dx + E_y dy + E_z dz) \quad (6.2)$$

これと  $\phi$  の全微分の式を比較することにより、 $E_x$  などが得られる。

$$E_x = -\frac{\partial\phi}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial\phi}{\partial y}, \quad E_z = -\frac{\partial\phi}{\partial z} \quad (6.3)$$

これは、スカラー場の勾配の概念 grad そのものである。

$$\mathbf{E} = -\text{grad } \phi \quad (6.4)$$

これらの式は、 $\phi$  の分布から  $\mathbf{E}$  の分布を求める際、有用である。

両辺の rot をとると、式 6.3 を利用して、次式が得られる。

$$\text{rot } \mathbf{E} = 0 \quad (6.5)$$

つまり、スカラーポテンシャル  $\phi$  を用いて表された  $\mathbf{E}$  が回転のない場になることが理解できよう。もともとスカラーポテンシャルは、このような回転のない場の rot が自動的に 0 になるよう導入された概念である。

スカラーポテンシャル  $\phi$  で表された電場  $\mathbf{E}$  を、電場の div の式へ代入しよう。

$$\text{div}(-\text{grad } \phi) = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho \quad (6.6)$$

div grad を計算すると、結局、次式が得られる。

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = \nabla^2 \phi = -\frac{1}{\varepsilon_0} \rho \quad (6.7)$$

この式は、**ポアソンの式** (Poisson equation) と呼ばれている。

電荷分布  $\rho$  が知られているときに、これからスカラーポテンシャル分布  $\phi$  を、直接求めることも可能である。まず、点電荷  $Q$  の作るスカラーポテンシャルを求める。点電荷の作る電場は、クーロンの法則で与えられる  $1/r^2$  に比例する形である。これを適当な定点（無限遠点を選択）を基準にして  $r$  まで積分する。

$$\phi = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r} \quad (6.8)$$

これを**クーロンポテンシャル** (Coulomb potential) という。一般に  $1/r$  に比例するポテンシャルを、**クーロン型ポテンシャル** (Coulomb type potential) という。

次に電荷分布  $\rho$  の作るスカラーポテンシャルを考える。空間を賽の目に分割し、各微小体積内の電荷の作るスカラーポテンシャルを考えると、上式の  $Q$  を  $dV\rho$  に置き直したものになる。これを合計したものが、分布電荷の作るスカラーポテンシャルである。

$$\phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_V dV \frac{\rho}{r} \quad (6.9)$$

ここで、当然のことながら、体積  $V$  以外には電荷のないことを仮定している。

なお、上式の  $\rho$  を  $\varepsilon_0 \text{div } \mathbf{E}$  により置換した式により、電場分布から線積分でなく体積積分により電位を計算することができる。

$$\phi = \frac{1}{4\pi} \int_V dV \frac{\text{div } \mathbf{E}}{r} \quad (6.10)$$

さらに、 $\phi$  だけにした式は任意の  $\phi$  に対する恒等式になる。

$$\phi = \frac{1}{4\pi} \int_V dV \frac{\nabla^2 \phi}{r} \quad (6.11)$$

この式は特に**ポアソンの定理** (Poisson theorem) と呼ばれている。ここでも、 $V$  以外では  $\nabla^2 \phi = 0$  を仮定している。

## 6.2 ベクトルポテンシャル

静電磁場のマクスウェル方程式には、電荷や電流といった発生源を含まない式 3.58 と 3.59 の二本があるが、これらを自動的に満たすようにできないかということで、ポテンシャルの概念が導入された。この際、利用する重要な事実として「rot が  $\mathbf{0}$  となる場合は、何らかのスカラー場の grad で表現できる」および「div が 0 となる場合は、何らかのベクトル場の rot で表現できる」がある。前節で示したスカラーポテンシャルは、この前者の例である。

まず、任意のベクトル場  $\mathbf{X}$  は次式のように書くことができる。

$$\mathbf{X} = -\text{grad } \phi + \text{rot } \mathbf{A} \quad (6.12)$$

この関係を**ヘルムホルツの定理** (Helmholtz theorem) という。rot(grad  $\phi$ ) = 0 なので「回転のない場はスカラーポテンシャルで記述できる」、div(rot  $\mathbf{A}$ ) = 0 なので「発散のない場はスカラーポテンシャルで記述できる」と表現してもよい。

まず、任意のベクトル場  $\mathbf{X}$  を考えよう。これに対し、やや天下りの的であるが、次のスカラー場とベクトル場を考える。

$$\phi = \frac{1}{4\pi} \int_V dV \frac{\text{div } \mathbf{X}}{r} \quad (6.13)$$

$$\mathbf{A} = (A_x, A_y, A_z) = \frac{1}{4\pi} \int_V dV \frac{\text{rot } \mathbf{X}}{r} \quad (6.14)$$

すると、次式が得られる。

$$\begin{aligned} -\text{grad } \phi + \text{rot } \mathbf{A} &= \frac{1}{4\pi} \int_V dV \frac{-\text{grad}(\text{div } \mathbf{X}) + \text{rot}(\text{rot } \mathbf{X})}{r} \\ &= -\frac{1}{4\pi} \int_V dV \frac{\nabla^2 \mathbf{X}}{r} = \mathbf{X} \end{aligned} \quad (6.15)$$

ここで、二番目の等号は  $\text{rot rot}$  が  $\text{grad}(\text{div}) - \nabla^2$  に変形できることを利用した。また、最後の等号は、 $x, y, z$  各成分ごとにポアソンの定理を適用した。したがって、式 6.13 と 6.14 を用いて、ヘルムホルツの定理が証明できたことになる。

ただし、ここではポアソンの定理を適用しているから、積分体積  $V$  以外では  $\nabla^2 \mathbf{X} = 0$  となることを前提としている。つまり、場の発生源はすべてこの体積  $V$  内に存在していることを仮定している。場の発生源がこの体積外にも存在するときには、成立しない。例えば、点電荷の作るクーロン電場を考える。ただし  $V$  としては、点電荷を除く領域を考えよう。そこでは、 $\text{div } \mathbf{E} = 0$  と  $\text{rot } \mathbf{E} = \mathbf{0}$  が成立するが、同定理を形式的に適用すると、 $\mathbf{E} = 0$  が得られる。それはもちろん間違っている。また、直線電流の作る磁場では、電流の位置を除くと、 $\text{rot } \mathbf{B} = \mathbf{0}$  が成立するので、 $\mathbf{B}$  は何らかのスカラーポテンシャルの勾配になるはずであるという主張を聞くことがあるが、これも同様な意味で間違っている\*1。

ヘルムホルツの定理で、 $\phi$  はスカラーポテンシャル、 $\mathbf{A}$  はベクトルポテンシャルと呼ばれる。これに以下の恒等式を加味する。

$$\text{rot}(\text{grad } \phi) = \mathbf{0} \quad (6.16)$$

$$\text{div}(\text{rot } \mathbf{A}) = 0 \quad (6.17)$$

これより、「任意のベクトル場は、スカラーポテンシャルの  $-\text{grad}$  で表される回転のない場と、ベクトルポテンシャルの  $\text{rot}$  で表される発散のない場に分解できる」ということがいえる。また、上には  $\phi$  や  $\mathbf{A}$  の具体的な求め方も示してある。ただ、 $\phi$  や  $\mathbf{A}$  の形にはかなりの自由度があり、ここに示したのは単なる一例であることを了解しておいてほしい。

\*1 黒川: IEEE AP, pp. 1315-1321 (2001).

前節で説明したように、静電場は回転のない場であり、したがってスカラーポテンシャル  $-\phi$  の grad で与えられる。動電場は回転もある場であるから、若干の修正が必要となるが、その前に磁場について述べておこう。磁場は静磁場、動磁場を問わず div が 0 である。このことは、磁場が何らかのベクトルポテンシャル  $\mathbf{A}$  の rot で表現できることを意味している。

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A} \quad (6.18)$$

また、この式からただちに次式が得られる。

$$\text{div } \mathbf{B} = 0 \quad (6.19)$$

これより、ベクトルポテンシャルを用いて表された磁場  $\mathbf{B}$  の div が、自動的に 0 となることが理解できよう。

$\mathbf{B}$  の分布から  $\mathbf{A}$  の分布を求める一つの方法は、体積積分で行うのが一つのやり方である。具体的には式 6.12 で  $\phi = 0$  として  $\mathbf{X}$  を  $\mathbf{B}$  と考える。すると式 6.14 より、次式が得られる。

$$\mathbf{A} = \frac{1}{4\pi} \int_V dV \frac{\text{rot } \mathbf{B}}{r} \quad (6.20)$$

なお、ついでに、この式から次の二つの式が得られる。

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V dV \frac{\mathbf{J}}{r} \quad (6.21)$$

$$\mathbf{A} = \frac{1}{4\pi} \int_V dV \frac{\text{rot}(\text{rot } \mathbf{A})}{r} \quad (6.22)$$

もう一つの方法であるが、 $\mathbf{E}$  の分布から線積分を用いて、ほとんど自動的に  $\phi$  の分布を求めたように、 $\mathbf{B}$  の局所的分布から計算できると便利である。それはさほど容易な仕事ではない。一つの理由は、 $\mathbf{B}$  と  $\mathbf{A}$  を結び付ける式の積分形にある。

$$\int_S d\mathbf{S} \cdot \mathbf{B} = \oint_C d\mathbf{r} \cdot \mathbf{A} \quad (6.23)$$

この式はベクトルポテンシャルの線積分が、その積分路に鎖交する磁束に一致するという重要な法則を示しているが、右辺が線積分で与えられ、電場の場合のようにポテンシャルそのものとならない点が問題である。もう一つの理由は、後に述べるように、 $\mathbf{A}$  に大きな自由度があるからである。しかし、局所的な磁場を積分してポテンシャルを求める手法は皆無ではない。

代表的なものを二つあげておく。まず、第一の手法は、いたるところで  $A_z = 0$  と仮定してしまうものである。すると、式 6.18 より、 $B_x = -\partial A_y / \partial z$  となるから、点 P での  $A_y = -\int dz B_x$  となる。この積分の経路は点 P の  $xy$  面への垂線の足から点 P までとする。また、この積分の際、積分定数は 0 と仮定してしまう。 $A_x$  は、 $B_y = \partial A_x / \partial z$  と  $B_z =$



$\partial A_y / \partial x - \partial A_x / \partial y$  を同時に満たす必要がある。前者から、 $A_x = \int dz B_y + f(x, y)$  となる。今度は  $z$  の偏微分で消え去ってしまう「 $x$  と  $y$  だけの関数」を後の調整のために残しておく。後者の式へ、いままでに得られた  $A_x$  と  $A_y$  の式を代入すると、 $B_z = B_z - B_z(0) - \partial f / \partial y$  が得られる。ただし、ここで  $\text{div } \mathbf{B} = 0$  を利用した。また、 $B_z(0)$  とは  $xy$  面上での  $B_z$  の値である。これより  $f = -\int dy B_z(0)$  となる。この積分路は  $x$  軸上の点から先に述べた点  $P$  の足までである。

$$\begin{aligned} A_x &= -\int_{(x,0,0)}^{(x,y,0)} dy B_z + \int_{(x,y,0)}^{(x,y,z)} dz B_y \\ A_y &= -\int_{(x,y,0)}^{(x,y,z)} dz B_x \\ A_z &= 0 \end{aligned} \quad (6.24)$$

これらの  $\text{rot}$  をとると  $\mathbf{B}$  になることは容易に確かめられるであろう。

第二の手法は、同様な計算を極座標で行うものである。この場合、 $\mathbf{A}$  の  $r$  方向の成分を 0 とする。極座標での  $\text{rot}$  や  $\text{div}$  の表現は複雑であるので、ここではその結果のみを示す。

$$\mathbf{A} = \frac{1}{r} \int_0^P dr \mathbf{B} \times \mathbf{r} \quad (6.25)$$

なお、積分路は原点  $O$  から点  $P$  までの直線とする。 $w = 0, \dots, 1$  なる媒介変数として、 $\mathbf{r}$  を  $(xw, yw, zw)$ 、 $dr$  を  $r dw$  と置き、上式の  $\text{rot}$  をとると、 $\mathbf{B}$  になることが証明できる。

このように、ベクトルポテンシャルの決定にはかなりの自由度がある。これは、 $\mathbf{A}$  の選び方に、 $\text{div}$  を自由に決めてよいという大きな自由度があるからであるが、それについては後の節で詳しく述べる。

## 6.3 動的な場のポテンシャル

一般的なベクトル場の考察にしたがえば、 $\text{div}$  も  $\text{rot}$  も 0 でない動的な電場は、スカラーポテンシャルとベクトルポテンシャルの和で表される。しかし、スカラーポテンシャルだけで表現できる静電場との差は磁場に関係しているので、これを利用する。まず磁場は動的な場合でも  $\text{div}$  が 0 であることから、ベクトルポテンシャル  $\mathbf{A}$  の  $\text{rot}$  で表すことが可能である。

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A} \quad (6.26)$$

この式をマクスウェル方程式の  $\text{rot } \mathbf{E}$  の式へ代入してみよう。

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{\partial(\text{rot } \mathbf{A})}{\partial t} \quad (6.27)$$

移項して  $\text{rot}$  をまとめると次式が得られる。

$$\text{rot} \left( \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) \quad (6.28)$$

$\text{rot}$  が  $\mathbf{0}$  のベクトル場はスカラー場の  $\text{grad}$  で与えられるから、これを  $-\text{grad } \phi$  で表そう。

$$\mathbf{E} = -\text{grad } \phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (6.29)$$

この式はマクスウェル方程式の  $\text{rot } \mathbf{E}$  の式を自動的に満たすことになる。

次に、これらポテンシャルをマクスウェル方程式の  $\text{div } \mathbf{E}$  式および  $\text{rot } \mathbf{B}$  式と関連づけよう。これらの方程式には、場の源である電荷や電流が入っていることが特徴である。ポテンシャルで表現された電場と磁場をこれらの方程式に代入すると、ポテンシャルの満たすべき以下の方程式が得られる。

$$\nabla^2 \phi + \frac{\partial}{\partial t} \text{div } \mathbf{A} = -\frac{1}{\varepsilon_0} \rho \quad (6.30)$$

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \text{grad} \left( \text{div } \mathbf{A} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) = -\mu_0 \mathbf{J} \quad (6.31)$$

次節において、これらの方程式の簡略化を行ってみよう。

## 6.4 ゲージ

先にも述べたように、ベクトルポテンシャルの決定にはかなりの自由度がある。これは、 $\mathbf{A}$  の選び方に、その  $\text{div}$  を自由に決めてよいという大きな自由度があるからである。実際、 $\text{div } \mathbf{A}$  は、次のような方法により、自由に変更することができる。

$\mathbf{A}'$  を次式のように定義してみよう。

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \text{grad } \chi \quad (6.32)$$

両辺の回転をとると、 $\text{rot}(\text{grad } \chi) = 0$  だから、

$$\text{rot } \mathbf{A}' = \text{rot } \mathbf{A} \quad (6.33)$$

これより、 $\mathbf{A}'$  は  $\mathbf{A}$  と同じ磁場を与える別のベクトルポテンシャルとなっている。しかし、 $\text{div } \mathbf{A}'$  は前とは同じ値にはならない。

$$\text{div } \mathbf{A}' = \text{div } \mathbf{A} + \nabla^2 \chi \quad (6.34)$$

したがって、 $\text{div } \mathbf{A}'$  は、 $\chi$  の選び方により、自由に変更できることになる。

$\chi$  を与えると、動的な場合、電場にも  $\chi$  の影響があるので、電場のほうのつじつまも合わせなければならぬ。そこで、 $\mathbf{A}$  とともに  $\phi$  も同時に変更するように約束しておけば、つじつまが合う

ことになる。具体的には  $\phi'$  を次のように変更すればよい。

$$\phi' = \phi - \frac{\partial \chi}{\partial t} \quad (6.35)$$

このように、 $\chi$  に関する自由度を利用すると、前節最後の二式を簡単にすることができる。こうした  $\chi$  の選び方を変えることを**ゲージ** (gauge) という。もともと、ゲージとは物差という意味である。物の長さには物差のあて方でその値が変わることはないという普遍性を持っている。物理学の世界では、このように見方を変えることを**ゲージ変換** (gauge transformation)、見方を変えても値の変わらないことを**ゲージ不変性** (gauge invariance) などという。ベクトルポテンシャルに  $\text{grad } \chi$  を、スカラーポテンシャルに  $-\partial\chi/\partial t$  を同時に与えることは、ゲージ変換であり、また、その結果、電場も磁場も変化しないことが、ゲージ不変性である。

### 6.4.1 クーロンゲージ

もっとも単純なゲージは、ベクトルポテンシャルを発散のないように選ぶものである。

$$\text{div } \mathbf{A} = 0 \quad (6.36)$$

この結果、前節の二式は次のようになる。

$$\nabla^2 \phi = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho \quad (6.37)$$

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \mathbf{J} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \text{grad } \phi \quad (6.38)$$

一見して分かるように、第一式がきわめて簡単な形、静電場のときのポアソン方程式そのものになっていて、**クーロンゲージ** (Coulomb gauge) と呼ばれる。電荷分布と電流分布が与えられているときに、これらポテンシャルを求めるには、まず式 6.37 を解いて  $\phi$  を求め、次にこの結果を式 6.38 へ代入して  $\mathbf{A}$  を求めるという手順となる。一見やさしそうであるが、ここで得られた  $\text{div } \mathbf{A} = 0$  になるように調整しなければならない。

### 6.4.2 ファラデーゲージ

スカラーポテンシャルを 0 とするゲージを選ぶこともできる。つまり電場がベクトルポテンシャルの時間微分だけで決まるというゲージである。名前は知らないが、この関係は、もともとファラデーの電磁誘導の式から導かれているので、本書では、仮に**ファラデーゲージ** (Faraday gauge) とでも呼んでおこう。

何らかのゲージで  $\phi$  が計算できたとして、その後、次式を満たすように  $\chi$  を選ぶのである。

$$\phi - \frac{\partial \chi}{\partial t} = 0 \quad (6.39)$$

こうすると前節の二式は次のようになる。

$$\frac{\partial(\operatorname{div} \mathbf{A})}{\partial t} = -\frac{1}{\varepsilon_0} \rho \quad (6.40)$$

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = \operatorname{grad}(\operatorname{div} \mathbf{A}) - \mu_0 \mathbf{J} \quad (6.41)$$

このゲージの可能性が示されたので、以後はゲージの変更ということではなく、直接これら二式を解くこととなる。一見、 $\mathbf{A}$  を定める式が二つあるので、大変そうであるが、まず、式 6.40 を時間積分して、 $\operatorname{div} \mathbf{A}$  を求める。それを式 6.41 右辺に代入すると、式 6.41 の右辺は、電荷の時間積分と電流だけで決定されるので、実は  $\mathbf{A}$  に関する源付き波動方程式になっている。この解のうち、式 6.40 の条件を満たすものだけを採用することになる。

固定電荷があると、 $\mathbf{A}$  がどんどん増加していってしまうので、どちらかという、直流解析よりは交流解析に優れている。さらに、電荷や電流のない空間の場合には、右辺が 0 となるため、一定周波数における導波管や空洞共振器の計算に最適である。具体的計算は第 10 章に示す。

### 6.4.3 ローレンツゲージ

もっと  $\phi$  と  $\mathbf{A}$  の対称性をよくする目的で導入されたのが、**ローレンツゲージ** (Lorenz gauge)<sup>\*2</sup> である。これは  $\operatorname{div} \mathbf{A}$  を次のように選ぶ。

$$\operatorname{div} \mathbf{A} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \quad (6.42)$$

これにより、式 6.31 の  $\operatorname{grad}$  の中を 0 にしようという試みである。この式を**ローレンツ条件** (Lorenz condition) という。この結果、式 6.30 と式 6.31 は次のようになる。

$$\nabla^2 \phi - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -\frac{1}{\varepsilon_0} \rho \quad (6.43)$$

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \mathbf{J} \quad (6.44)$$

明らかに  $\phi$  と  $\mathbf{A}$  の対称性はきわめてよい。対称性がよいばかりでなく、 $\phi$  と  $\mathbf{A}$  が分離されているので、方程式を解くのも容易である。しかし、当然のことながら、 $\phi$  と  $\mathbf{A}$  はローレンツ条件を満たさなければならない。

一見、大変そうであるが、ローレンツ条件は電流連続の式と酷似している。つまり、電流連続の式を満たす電荷と電流が同じ条件下で作り出すポテンシャルは自動的にローレンツ条件を満たすのである。ローレンツゲージは、後に述べるように、相対性原理ともきちんとした対応がとれており、今後特に断らない限り、ポテンシャルとしてはこのローレンツゲージを採用するものとする。

<sup>\*2</sup> ローレンツゲージやローレンツ条件のローレンツは Lorenz であり、ローレンツ力やローレンツ変換の Lorentz ではない。私も長い間、勘違いしていて、本書の初版も間違っ表記されているが、読者から指摘いただいた。ここに感謝を表したい。

これらの式の右辺を 0 と置いたものは、**波動方程式** (wave equation) と呼ばれる形をしており、 $\mathbf{A}$  や  $\phi$  が次式で与えられる速さで伝播する解を持つことが知られている。

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \quad (6.45)$$

この  $c$  を計算してみると**光速** (light velocity) の値となる。詳細については後述するが、このことから、マクスウェルは電磁波と光が周波数が異なるだけで同じものであることを推論し、さらにその後、この推論が正しいことが数々の実験により裏付けられている。以後、必要に応じ、 $\varepsilon_0 \mu_0$  を  $1/c^2$  に置き換えるものとする。上記の三式を  $c$  を用いて書き換えておこう。

$$\operatorname{div} \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \quad (6.46)$$

$$\nabla^2 \phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -\frac{1}{\varepsilon_0} \rho \quad (6.47)$$

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \mathbf{J} \quad (6.48)$$

これらの下二式を以後、**ポテンシャルの波動方程式** (wave equation of potentials) と呼ぼう。

なお、ゲージを定めると  $\phi$  と  $\mathbf{A}$  は一意に決まりそうであるが、そう簡単でもない。例えば先に示した  $\chi$  による項を加えたポテンシャルを考えよう。 $\chi$  による補正を加えたら、ローレンツゲージではなくなりそうであるが、新しいポテンシャルをローレンツゲージの式に代入してみると、次式が得られる。

$$\nabla^2 \chi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} = 0 \quad (6.49)$$

つまり、この式を満たす  $\chi$  であれば、やはりローレンツゲージである別の解を作り出すことができるのである。

ローレンツゲージでのポテンシャルの式は非常に対称性がよいが、ちょっとした書換えを行うとさらに見た目の対称性もよくなる。

$$\operatorname{div} \mathbf{A} + \frac{\partial(\phi/c)}{\partial(ct)} = 0 \quad (6.50)$$

$$\nabla^2(\phi/c) - \frac{\partial^2(\phi/c)}{\partial(ct)^2} = -\mu_0(c\rho) \quad (6.51)$$

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial(ct)^2} = -\mu_0 \mathbf{J} \quad (6.52)$$

さらに、

$$\mathbf{E}/c = -\operatorname{grad}(\phi/c) - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial(ct)} \quad (6.53)$$

$$\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A} \quad (6.54)$$

このようにすると、 $dx, dy, dz$  と  $d(ct)$ 、 $\mathbf{A}$  と  $\phi/c$ 、 $\mathbf{J}$  と  $c\rho$ 、 $\mathbf{B}$  と  $\mathbf{E}/c$  のそれぞれの単位も同じになるのである。こうした対応を知っていると、相対性原理が読みやすくなる。

## 6.5 ポテンシャルと回路理論

ここで、回路理論における電流や電位の概念が、電磁気学とどのように関わっているかを述べておこう\*3。回路理論には**キルヒホフの電流則** (Kirchhoff current law) (Kh- $I$ ) と**キルヒホフの電圧則** (Kirchhoff voltage law) (Kh- $\phi$ ) が基本にある。Kh- $I$  は、任意の点に流れ込む電流の総和が0という法則である。 $\mathbf{J}_K$  をキルヒホフの電流の密度とすると、次式が成立する。

$$\oint_S d\mathbf{S} \cdot \mathbf{J}_K = 0 \quad (6.55)$$

連続の条件は次のように書くこともできる。

$$\operatorname{div} \mathbf{J}_K = 0 \quad (6.56)$$

ところが、動的な場合、電磁気学における電流の  $\operatorname{div}$  は0とならない。明らかに異なる概念である。一方、マクスウェル方程式の  $\operatorname{rot} \mathbf{B}$  式の  $\operatorname{div}$  をとってみると、変位電流を加えた電流の  $\operatorname{div}$  は0となっている。

$$\mathbf{J}_K = \mathbf{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (6.57)$$

このことから、「回路理論における電流は変位電流を含む」と結論できる。

Kh- $\phi$  は、任意のループに沿って電位差を合計していくと0になるという法則である。キルヒホフの電位差に対応する電場を  $\mathbf{E}_K$  で表すと、次式が成立していることになる。

$$\oint_C d\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}_K = 0 \quad (6.58)$$

微分形で表すと、次のように書ける。

$$\operatorname{rot} \mathbf{E}_K = 0 \quad (6.59)$$

ところが、電磁気学における電場の  $\operatorname{rot}$  は動的な場合、マクスウェル方程式の  $\operatorname{rot} \mathbf{E}$  式より、 $-\partial \mathbf{B} / \partial t$  であって0ではない。やはり、明らかに異なる概念である。そこでこの  $\mathbf{B}$  を  $\operatorname{rot} \mathbf{A}$  に置き換え、左辺に移動し、 $\operatorname{rot}$  をまとめてみると、電磁気学的な電場に  $\partial \mathbf{A} / \partial t$  を加えたものの  $\operatorname{rot}$  は0となることが分かる。

$$\mathbf{E}_K = \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\operatorname{grad} \phi \quad (6.60)$$

このことから、「回路理論における電場は、ベクトルポテンシャルを含む」こと、また「回路理論における電位はスカラーポテンシャル  $\phi$  そのものである」と結論できる。

\*3 この節は、当時学生であった齋藤 宏文氏 (現宇宙開発研究機構教授) の質問に対して考察したものである。

## 第7章

# 磁場とベクトルポテンシャル

ベクトルポテンシャルは多くの書で、とかく小さく扱われがちであるが、この章では、大事な概念であることを示すとともに、より直感的に理解できるように、いくつかの具体的な例を示す。

### 7.1 静電場との相似性

前章でも述べたように、電荷密度  $\rho$  はスカラーポテンシャルを作る。

$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V dV \frac{\rho}{r} \quad (7.1)$$

**面電荷** (surface charge) の場合は面積分、**線電荷** (line charge) の場合は線積分、**点電荷** (point charge) の場合はよく知られた積分のない  $Q/4\pi\epsilon_0 r$  の形になることはいうまでもないであろう。

同様に電流が源となってベクトルポテンシャルが発生するが、その様子は電荷がスカラーポテンシャルを発生するのときわめて似ている。事実、ベクトルポテンシャルの式を三つの成分に分けると、それぞれの式はスカラーポテンシャルの式と同じ形をしている。唯一異なるのは  $1/\epsilon_0$  が  $\mu_0$  になっていること、また、源が単位体積当たりの電荷密度の代わりに単位面積当たりの**電流密度** (current density) になっていることである。このことから、源が電流密度の場合は、それを電荷密度だと思って静電場の解を求め、その解の定数を変換すればよい。

この類推から、電流密度  $\mathbf{J}$  の作る**ベクトルポテンシャル** (vector potential) を求めることができる。

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V dV \frac{\mathbf{J}}{r} \quad (7.2)$$

つまり、**クーロン型ポテンシャル** (Coulomb type potential) となっている。また、電荷のときと同じように、**面電流** (surface current) の場合は面積分、**線電流** (line current) の場合は線積分で与えられる。

上式から分かるように、微小電流の作るベクトルポテンシャルは、電流の方向と同じ向きを向き、距離とともに減衰する場である。この基本的な概念をよく掴んでいると、電流分布からベクトルポテンシャルの概略の分布が推定できるようになるので、以下の例で慣れていただきたい。

なお、上記積分をするというのがベクトルポテンシャルの原理的な計算法であるが、これから示すいくつかの問題のように、対称性のよい場合は、静電場の計算のように、ガウスの定理を利用するのが便利ことが多い。

## 7.2 直線電流

$z$  軸に沿って流れている直線状の直流電流  $I$  の作る磁場を考えてみよう。この磁場は、アンペールの周回積分の法則を用いて簡単に求めることができる。しかし、練習のために、ベクトルポテンシャルから計算してみよう。

電流ベクトルを  $x$ 、 $y$ 、 $z$  の三成分に分解してみると、明らかに  $z$  成分しか持たない。ベクトルポテンシャルの各成分は、電流の対応成分からしか形成されないから、 $A_z$  しか誘起されない。

まず、 $1/r$  型のポテンシャルの積分という形で、 $A_z$  を計算してみよう。観測点の座標を  $(x, y, z)$  とし、さらに  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  とする。また発散を避けるために、電流路の長さを  $-L$  から  $L$  に限っておく。

$$\begin{aligned}
 A_z &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-L}^L dl \frac{1}{\sqrt{(l-z)^2 + r^2}} \\
 &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \log \left[ \sqrt{(l-z)^2 + r^2} + (l-z) \right] \Big|_{-L}^L \\
 &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \log \frac{\sqrt{(L-z)^2 + r^2} + (L-z)}{\sqrt{(L+z)^2 + r^2} - (L+z)} \\
 &\doteq \frac{\mu_0 I}{2\pi} \log \frac{2(L-z) + r^2/2(L-z)}{r^2/2(L+z)} \\
 &\doteq \frac{\mu_0 I}{2\pi} \log \frac{2L}{r} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \log \frac{2L}{r} \tag{7.3}
 \end{aligned}$$

ここで、最初の近似では  $L \pm z$  に対し  $r$  が十分小さいとして平方根を近似し、次の近似では、 $L$  に対し  $r$  や  $z$  が十分小さいとしている。

本来  $L$  は  $\infty$  であるべきであるが、こうすると解が発散してしまう。もともと、無限に長い電荷では、発散するのは当然の結果である。しかし、無限大の電位ではいかんともできないので、今後の議論は、 $L$  が十分大きいものとして、上式のままで進めていくものとする。ここで、まず平方根を  $L+z$  に対し他の項が小さいものとして一次近似し、さらに  $L$  に対し  $z$  を無視した。

上の式は、内積面積分の定理を利用すると、もっと簡単に求めることができる。電流の  $z$  成分は  $z$  軸上だけに  $I$  の一定値を持つから、対応する電荷モデルは  $I$  の線電荷密度を持つ直線状一様電荷となる。まず、これの作る電場を求める。

$$E = \frac{I}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \tag{7.4}$$



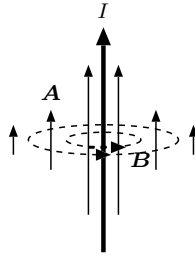


図 7.1 直線電流が作るベクトルポテンシャル（実線）と磁場（破線）の概要。

これを積分すると、スカラーポテンシャルが得られる。

$$\phi = \frac{I}{2\pi\epsilon_0} \log \frac{a}{r} \quad (7.5)$$

この  $\epsilon_0 \rightarrow 1/\mu_0$  とすれば、ベクトルポテンシャル  $A_z$  が得られる。

$$A_z = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \log \frac{a}{r} \quad (7.6)$$

ここで  $a$  は積分の際の基準点の原点から半径距離を表す。先に求めたものと比較すると、 $a$  が  $2L$  になっているだけである。これは長さ  $2L$  の線電流の作る場も、原点近傍では無限長線電流の作る場とほとんど同じであり、その影響がおよそ  $2L$  程度の範囲に広がっていることを示している。いづれにせよ、ポテンシャルは微分して使われるので、 $a$  でも  $2L$  でも、利用の際は関係なくなる。

いうまでもなく、 $A_x$  も  $A_y$  も 0 であり、ベクトルポテンシャルは  $z$  方向を向く。以上のことから、さきに述べたベクトルポテンシャルは電流源の方向を持ち、遠方で減衰する形となることが理解できよう。

ベクトルポテンシャルの rot を計算すると、まわりにできる磁場  $\mathbf{B}$  を求めることができる。

$$\begin{aligned} B_x &= \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{y}{r^2} \\ B_y &= \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{x}{r^2} \\ B_z &= \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} = 0 \end{aligned} \quad (7.7)$$

これをまとめてベクトル表現すると、次のようになる。

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{\mathbf{k} \times \mathbf{r}}{r^2} \quad (7.8)$$

あたり前であるが、これはアンペールの法則から計算したものと一致する。計算したベクトルポテンシャルと磁場の概要を図 7.1 に示す。

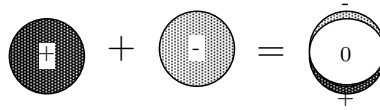


図 7.2 負に帯電した円柱と正に帯電した円柱を少しずらして重ねると、ほぼ  $-\sin \theta$  に比例した電荷分布が実現する。

### 7.3 ソレノイド

無限長のソレノイド (solenoid) を考えよう。ソレノイドは内部に軸方向の磁場が発生するが、外部には磁場がないのが特徴である。しかし、ベクトルポテンシャルは外部にも存在し、それがゆえに外部のみに存在する超伝導体や量子力学的な荷電粒子の運動に影響を及ぼすという、ベクトルポテンシャルの有用性を示すもっともよい例となっている。

$z$  軸方向に長軸を持つ半径  $a$  の無限長円筒を考える。また、その表面を面電流が  $z$  軸右ネジ方向に回転して流れている。単位長当たりの面電流密度を  $K$  とする。まず、電流の各成分を求めてみよう。 $x$  方向の成分は  $-y$  方向で最大、 $+y$  方向で負方向に最大となる。つまり、 $x$  軸からの偏角を  $\theta$  とすると、面電流密度の  $x$  成分は  $-K \sin \theta$  となる。同様に  $y$  成分は  $K \cos \theta$  となる。

ベクトルポテンシャルの  $x$  成分は以上に示した  $-y$  方向に正、 $+y$  方向に負に帯電した円筒の作る電位に対応する。線電荷の作る電位は前節に述べたように  $\log$  で与えられるから、これに  $-\sin$  の重みを付けて積分すればよい訳であるが、この積分はかなり面倒である。そこで、ここではガウスの定理を利用する。図 7.2 に見られるように、まず、正に一樣に帯電した円柱と、負に一樣に帯電した円柱を考える。これら二つの円柱の軸をぴったり重ね合わせると、何も電荷がないのと同じことになるが、負の円柱を  $y$  方向にほんの少しずらすと、 $+y$  方向に負電荷が、また  $-y$  方向に正電荷が少しはみ出す。ずれがきわめて僅かであると、このはみ出した電荷の分布は  $-\sin \theta$  となる。

一樣帯電した円柱の作る電位は、ガウスの定理を利用して簡単に計算することができる。例えば、正に帯電した円柱の作る円柱の内部と外部の電位は次式で与えられる。

$$\phi = \begin{cases} \frac{\rho}{4\epsilon_0} (a^2 - r^2) & (r \leq a) \\ -\frac{a^2 \rho}{2\epsilon_0} \log \frac{r}{a} & (r \geq a) \end{cases} \tag{7.9}$$

ここで  $\rho$  は電荷密度とする。

この結果を利用して正負両円柱の作るポテンシャルを計算する。観測点の座標を  $(x, y, z)$  とし、負円柱のずれ量を  $d$  とする。円柱の内部および外部の電位は次式のようになる。

$$\phi = \begin{cases} \frac{\rho}{4\epsilon_0} [-(x^2 + y^2) + (x^2 + (y - \delta)^2)] & (r \leq a) \\ -\frac{a^2 \rho}{4\epsilon_0} \left[ \log \frac{x^2 + y^2}{a^2} - \log \frac{x^2 + (y - \delta)^2}{a^2} \right] & (r \geq a) \end{cases} \tag{7.10}$$

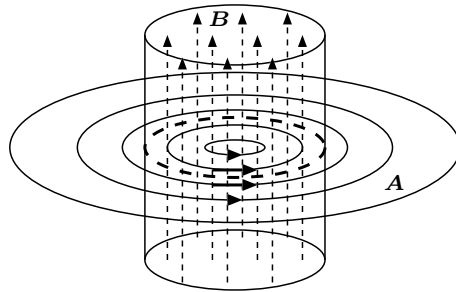


図 7.3 ソレノイドが作るベクトルポテンシャル（実線）と磁場（破線）の概要。

ここで、 $d$  がきわめて小さいとして一次の微小量をとることにし、また  $\rho\delta/\varepsilon_0$  を  $\mu_0 K$  と置き換え、さらに電位をベクトルポテンシャルに変換する。

$$A_x = \begin{cases} -\frac{\mu_0 K}{2} y & (r \leq a) \\ -\frac{\mu_0 K}{2} \frac{a^2 y}{r^2} & (r \geq a) \end{cases} \quad (7.11)$$

同様に、 $x$  方向にずれた正負の一様帯電円柱から次式が得られる。

$$A_y = \begin{cases} \frac{\mu_0 K}{2} x & (r \leq a) \\ \frac{\mu_0 K}{2} \frac{a^2 x}{r^2} & (r \geq a) \end{cases} \quad (7.12)$$

図 7.3 に概形を示すように、ベクトルポテンシャルはやはり、電流と平行するように発生し、かつ電流から遠ざかると減衰していくという一般的性質を持っている。また、ソレノイドの外部にもベクトルポテンシャルが存在することを記憶しておいてほしい。

上記の結果を利用し、 $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$  により、磁場を計算してみると、よく知られた結果が得られる。

$$B = \begin{cases} (0 \quad 0 \quad \mu_0 K) & (r \leq a) \\ (0 \quad 0 \quad 0) & (r \geq a) \end{cases} \quad (7.13)$$

興味深いのはソレノイドの外部にはベクトルポテンシャルがあっても、磁場はまったくないことである。これについては、後に改めて考察する。

## 7.4 微小電流ループ

**微小電流ループ** (micro current loop) の作る磁場も、ベクトルポテンシャルを用いると、簡単に計算することができる。ループは平面的ではあるが、その形状は任意としよう。簡単化のために、ループは  $xy$  平面内の原点付近にあるものとする。流れている電流を  $I$  とし、まず、電流の  $x$  成分に着目する。すると電流と  $x$  軸の角度を  $\theta$  とするとき、 $-I \sin \theta$  となる。

この分布は、前節と同様に、ループに囲まれた形状を持つ正負の二様帯電板を、僅かにずらしたもので実現することができる。面電荷密度を  $\sigma$  とし、負の帯電板を  $+y$  方向に  $\delta$  ずらすと、大部分の領域では正負が中和するが、 $+y$  方向の縁には負電荷が、また  $-y$  方向の縁には正電荷がはみ出す。 $\delta$  が十分小さければ、そのはみ出し量は  $-\sigma\delta \sin\theta$  となり、 $\sigma\delta$  を  $I$  に対応させればよいことが分かる。このことから  $-y$  方向に分極した電気モーメントが、面状に並んでいると見なすことができる。まず、原点に置かれた電気モーメントの作る電位を求める。

$$\phi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + (y - \delta)^2 + z^2}} \right) = -\frac{Q\delta}{4\pi\epsilon_0} \frac{y}{r^3} \quad (7.14)$$

この値は、十分遠方から見ると、電気モーメントの位置が僅かにずれてもほとんど変わらない。そこで、これが面状に並んだ場合は、この  $Q$  を単に合計し、 $\sigma S$  に替えればよい。これから、微小ループの大きさに対し十分遠方での  $A_x$  を求めることができる。同様に  $A_y$  も得られる。

$$\begin{aligned} A_x &= -\frac{\mu_0 IS}{4\pi} \frac{y}{r^3} \\ A_y &= \frac{\mu_0 IS}{4\pi} \frac{x}{r^3} \end{aligned} \quad (7.15)$$

あるいは、ベクトル表示は次のようになる。

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0 IS}{4\pi} \frac{\mathbf{k} \times \mathbf{r}}{r^3} \quad (7.16)$$

この場合も、電流がループ状に流れているため、ベクトルポテンシャルもループ状になっている。なお、遠方でのベクトルポテンシャルは、電流とループの面積だけで与えられ、ループの形状には依存しない。

磁場  $\mathbf{B}$  は、ベクトルポテンシャル  $\mathbf{A}$  の rot をとればよい。

$$\begin{aligned} \mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A} &= \frac{\mu_0 IS}{4\pi} \text{rot} \left( \frac{\mathbf{k} \times \mathbf{r}}{r^3} \right) = \frac{\mu_0 IS}{4\pi} \left[ \mathbf{k} \left( \text{div} \frac{\mathbf{r}}{r^3} \right) - (\mathbf{k} \cdot \nabla) \frac{\mathbf{r}}{r^3} \right] \\ &= \frac{\mu_0 IS}{4\pi} \left[ \mathbf{k}\delta(\mathbf{r}) + \frac{3(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r} - \mathbf{k}r^2}{r^5} \right] \end{aligned}$$

## 7.5 ベクトルポテンシャルは実在する場合か

無限長のソレノイドの外部の磁場は 0 である。ここには本当に何もないのであろうか。光の二スリットによる干渉実験のように、電子ビームを二つのスリットを通し、それぞれがソレノイドのまわりを通るようにしてから合成すると、合成後のビームは元の方向から偏向した方向に進むことが知られている。この現象を **AB 効果** (Aharonov-Bohm effect) と呼ぶ。もちろん、一本のビームのまま、磁場の存在するところを通っても、ローレンツ力を感じて偏向するが、AB 効果の結果も、ほぼ同じだけの偏向を受ける。ソレノイドのまわりには磁場がないはずなので、これはベクトルポテンシャルを感じて偏向するとは、考えられない。

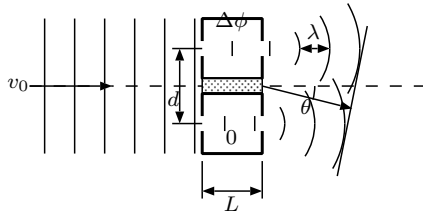


図 7.4 電位の異なる領域を通った電子ビームを合成すると、偏向する。

実は同じようなことが、スカラーポテンシャルでも観測できる。図 7.4 に示すように、スリットで分岐された二つの電子ビームを、それぞれ一様ではあるが互いに異なる電位を持つ領域を通過させてから合成すると、やはり偏向するのである。その偏向角は、電位差を二本のビーム間隔で割った値の電場中を通過した場合と、ほぼ一致する。まず、電子の電荷を  $Q = -e$  としよう。電子の場合  $Q$  は負であるが、以下の議論は電荷の正負に依存しないので、符号が面倒な場合には、正電荷の粒子の議論と思ってもらってももちろん構わない。

これらの現象は量子力学でしか理解できない。量子力学によると、電子ビームは波動的性質を持っており、その波の位相角は電磁場中で、電磁場のない場合に比較して次の量だけ増加することが知られている。

$$\frac{Q}{\hbar} \int (d\mathbf{r} \cdot \mathbf{A} - dt \phi) \quad (7.17)$$

ここで積分は荷電粒子の移動距離と経過時間に対して行う。

この式を利用すると、スカラーポテンシャルのみが存在する場合の電子ビームの偏向角は次のようになる。

$$\tan \theta = -QL\Delta\phi/mv_0^2d \quad (7.18)$$

ただし、 $L$  はスリットの直後に置かれたポテンシャルの異なる領域の長さ、 $d$  はスリットの間隔、 $v_0$  はスリット手前での電子の速度である。このように、偏向角は二つのビームの通過する領域のポテンシャル差だけで決定される。つまり、電場がなくても、ポテンシャル差があるだけで偏向するのである。

---

スリット通過後、 $\tau$  の時間、一定のスカラーポテンシャルのところを通過すると、量子力学的位相は  $-Q\phi\tau/\hbar$  だけ増加する。一方、電子ビームの波長は、運動量を  $p$ 、角波数を  $k$  とすると、**ド・ブロイの関係** (De Broglie relation) より  $p = \hbar k$  なので、 $mv_0 = 2\pi\hbar/\lambda$  となり  $\lambda = 2\pi\hbar/mv_0$  となる。これより両ビームの波頭の位置は  $-(Q\Delta\phi\tau/2\pi\hbar)\lambda = -QL\Delta\phi/mv_0^2d$  だけずれることになる。十分遠方で、合成されたビームはこの波頭の揃う方向で強め合い、あたかもそちらへ曲げられたように振るまう。その方向はビーム間隔  $d$  で波頭の位置の差だけ振られるので、偏向角は  $\tan \theta = -QL\Delta\phi/mv_0^2d$  となり、上記の結果と一致する。

---

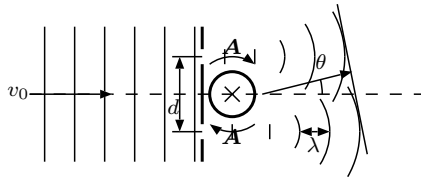


図 7.5 ベクトルポテンシャルの異なる領域を通った電子ビームを合成すると、偏向する。

一方、一様電場中の荷電粒子が受ける古典的力は  $QE$  であるが、この結果加速度は  $QE/m$  となる。長さ  $L$  の区間の滞在時間は  $L/v_0$  であるから、最終的には進行方向直角に  $QLE/mv_0$  の速度を得る。偏向角でいうと  $\tan \theta = QLE/mv_0^2$  となる。これと量子力学の結果を比較すると、 $Ed$  と  $-\Delta\phi$  が対応していることが分かる。念のために、一様電場中の偏向角を量子力学的位相ずれから計算してみても、同じ結果が得られる。

---

電場  $\mathbf{E}$  の方向を  $x$  軸とすると  $\phi = -Ex$  となる。またビームは  $x$  方向にある程度拡がっているとす。式 7.17 より、これから位相遅延は  $QE\tau/h$  となる。つまり  $x$  方向の単位長当たり  $QE\tau/h$  の遅延増加があることになる。波頭の位置ずれに換算すると  $QLE/mv_0^2$  あることになる。これから偏向角は  $\sin \theta = QLE/mv_0^2$  となる。

---

次に図 7.5 に見られるように、ソレノイドのまわりを通過する二本の電子ビームの干渉を調べ、ベクトルポテンシャルの影響を求めると、電場のときと同様にして、 $\Phi$  をソレノイド内の全磁束として、偏向角が次のように得られる。

$$\sin \theta = \frac{Q\Phi}{mv_0d} \tag{7.19}$$

ベクトルポテンシャルのみが存在する場合には、二本のビームの位相差は、式 7.17 より  $(Q/\hbar) \int d\mathbf{r} \cdot \mathbf{A}$  となる。この場合、積分路は両方のビームの通過場所となるが、ほぼソレノイドの周辺一周と考えてもよい。その場合、上記の積分はソレノイド内部の全磁束となるので、位相差は  $(Q/\hbar)\Phi$  となる。これを  $2\pi$  で割り、波長  $\lambda = 2\pi\hbar/mv_0$  を掛けると、波頭のずれ  $Q\Phi/mv_0$  が得られる。これを  $d$  で割ると、偏向角  $\tan\theta = Q\Phi/mv_0d$  が得られる。

一方、一様磁場中の荷電粒子が受ける古典的力は  $Qv_0B$  であるが、この結果、加速度は  $Qv_0B/m$  となる。長さ  $L$  の区間の滞在時間は  $L/v_0$  であるから、最終的には進行方向直角に  $QLB/m$  の速度を得る。偏向角でいうと  $\tan\theta = QLB/mv_0$  となる。これと量子力学の結果を比較すると、 $BLd$  と  $\Phi$  が対応していることが分かる。つまり、二本のビームと磁場の存在領域で囲まれた全磁束が、量子力学の場合にはソレノイド内の全磁束に対応している。念のために、一様磁場中の偏向角を量子力学的位相ずれから計算してみても、同じ結果が得られる。

この計算は一様電場中の電子の波動の計算と同様なので、省略する。なお、上記の議論で、量子力学の計算では放物線軌道で、一方、一様磁場の場合には円軌道のはずであるが、それは二次までの近似で計算しているためである。厳密には双方とも円軌道となる。

このように、量子力学まで立ち入ると、荷電粒子は、スカラーポテンシャルやベクトルポテンシャルを感じて、運動を行っており、ローレンツ力は、電場や磁場がかなりゆっくり変動しているときの近似であることが理解できよう。

## 7.6 ファラデーの電磁誘導の法則

**ファラデーの法則** (Faraday law) にも不思議な現象が発生する。ソレノイドに流れる電流を変えてその作る磁場を変化させると、そのまわりに電場が発生するというものである。しかし、ソレノイドの外には何の磁場もないのに、ソレノイドの外部にも電場が発生するのである。つまり、磁場のない外から内部の変化が分かるのである。

ここで、重要な式を一つ誘導しておこう。磁場とベクトルポテンシャルは回転により結び付けられている。

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A} \quad (7.20)$$

この両辺を任意の閉曲線に沿って線積分すると、次式の関係が得られる。

$$\oint_C d\mathbf{r} \cdot \mathbf{A} = \int d\mathbf{S} \cdot \mathbf{B} = \Phi \quad (7.21)$$

つまり、ベクトルポテンシャルを感じるにより、その閉曲線に鎖交している全磁束を知ることができるのである。

電磁誘導の場合も、外部に存在するベクトルポテンシャルが変化するから、

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (7.22)$$

の式にしたがう電場が観測されると考えれば理解しやすい。念のため、この両辺を任意の閉曲線に沿って線積分すると

$$\oint_C d\mathbf{r} \cdot \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \oint_C d\mathbf{r} \cdot \mathbf{A} = -\frac{\partial}{\partial t} \int d\mathbf{S} \cdot \mathbf{B} = -\frac{\partial \Phi}{\partial t} \quad (7.23)$$

となり、ファラデーの法則が誘導できる。これらの式は、磁場の存在しない外部だけでなく、磁場の存在する内部でも成立する。ファラデーの法則では電場の周回積分や回転しか得られないのに対し、ベクトルポテンシャルを用いると、各点における誘導電場が直接計算できるのである。

なお、磁場中にある導体を動かしていくと、導体上に起電力が発生する。これは、導体の中にある電荷に磁場に起因するローレンツ力が働き、電荷が移動していき、導体に偏在するようになる。このため、電場が発生するが、結局、磁場による力と電場による力とが平衡するところで電荷の移動は停止する。つまり、次式が成立する。

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) = 0 \quad (7.24)$$

これから、導体移動に伴う起電力は次式で与えられる。

$$\mathbf{E} = -\mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (7.25)$$

この電場に基づく電位差は**誘導起電力** (induced electromotive force) と呼ばれ、発電機の原理となっている。この原理もベクトルポテンシャルを使っても、説明できるのであるが、相対性原理を知ってからの方が説明が楽なので、ここではこれ以上の説明を省略する。

ソレノイドのまわりに別のコイルを巻くと、**図 7.6**のように、**変成器** (transformer) を作ることができる。内側のコイルを一次コイル、外側のコイルを二次コイルと呼ぼう。この場合でも、二次コイルの存在するところには磁場がなくても、二次コイルは、ベクトルポテンシャルを介して、一次コイルの作る磁場を感じることができる。特に鉄心があると、磁場はほとんど鉄心中を通過するので、ベクトルポテンシャルの考えを抜きにしては、両者の結合を理解することは不可能である。しかし、結果だけ見ると、ファラデーの法則と一致し、鎖交する磁束の影響が現れることになる。

本物の変成器は有限長であり、かつ鉄心を用いることが多いが、ここでは、議論を簡単にするため、無限長のコイルの長さ  $l$  部分だけを考える。一次コイルの単位長当たりの巻数を  $n_1$  とし、そこに  $I_1$  の電流が流れているとし、二次側も同様とする。面電流密度は  $K_1 = n_1 I_1$ 、および  $K_2 = n_2 I_2$  となる。

さて、二つのコイルの面電流密度が  $K_1$ 、 $K_2$  であると、重ね合わせの理より、一次コイルの内側には  $K_1$ 、 $K_2$  の影響が、また一次コイルと二次コイルの間には  $K_2$  のみ影響が現れる。そこで、一次コイルには、 $\Phi = \mu_0(K_1 + K_2)S_1$  の磁束が通過し、二次コイルには  $\Phi' = \mu_0(K_1 S_1 + K_2 S_2)$



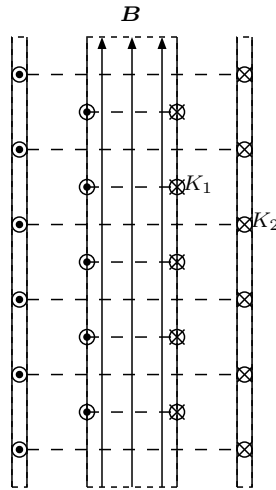


図 7.6 変成器の構成。

の磁束が通過していることになる。面電流密度を電流に置き換え、さらに、式 5.32 に示したように、全鎖交磁束は、これらの巻数倍 ( $N_1 = n_1 l$ 、 $N_2 = n_2 l$ ) であることに着目すると、次式が得られる。

$$\Phi_1 = N_1 \Phi = \mu_0 N_1 (S_1 K_1 + S_1 K_2) = (\mu_0 S_1 n_1^2 l) I_1 + (\mu_0 S_1 n_1 n_2 l) I_2 \quad (7.26)$$

$$\Phi_2 = N_2 \Phi' = \mu_0 N_2 (S_1 K_1 + S_2 K_2) = (\mu_0 S_1 n_1 n_2 l) I_1 + (\mu_0 S_2 n_2^2 l) I_2 \quad (7.27)$$

ここで、四つの比例係数を  $L_1$ 、 $M$ 、 $M$ 、 $L_2$  と書き直すと次式となる。

$$N_1 \Phi_1 = L_1 I_1 + M I_2 \quad (7.28)$$

$$N_2 \Phi_2 = M I_1 + L_2 I_2 \quad (7.29)$$

このうち、 $L_1$ 、 $L_2$  を**自己インダクタンス** (self-inductance)、 $M$  を**相互インダクタンス** (mutual-inductance) と呼ぶ。

## 7.7 ベクトルポテンシャルの測定

変成器の二次コイルを開放にすると、 $I_2 = 0$  なので、 $N_2 \Phi_2 = \mu_0 N_2 K_1 S_1$  の時間微分に相当する電位差が誘起される。これは、一次コイルの作る磁束の  $N_2$  倍である。つまり、磁束と触らない二次コイルを使って、一次コイルの作る磁束を測定することができるということになる。しかし、厳密にいうと、磁束の時間微分が測定可能なのである。磁束が変化すれば、電場が発生し、それを測定しているともいえる。実際、通常の導線を使った変成器の二次コイルでは、コイル自身の持つ抵抗のため、高速で変化する一次側磁束の変化は測定できても、ゆっくりした磁束の変化は測定できず、まして、一次側の直流磁束はまったく測定できない。ファラデーの法則から考えると、まわ

りに発生する電場は、磁束の時間微分に比例するので、当然の結果ともいえる。しかし、二次側に超伝導体のコイルを使うと、磁束そのものを測定することが可能である。

$$\int_{-\infty}^t dt \left( \int_C d\mathbf{r} \cdot \mathbf{E} \right) = \int d\mathbf{S} \cdot \mathbf{B} \quad (7.30)$$

ここには何ら積分定数的な自由度が入っていないことが検証できる。つまり、ファラデーの法則以上のことが成立しているのである。しかも、超伝導体は、磁場のないところを通過しても構わず、まさにベクトルポテンシャルの影響を直接観測しているのである。

$$\int_{-\infty}^t dt \left( \int_C d\mathbf{r} \cdot \mathbf{E} \right) = \int_C d\mathbf{r} \cdot \mathbf{A} \quad (7.31)$$

もう一步進んで、上式の線積分記号を外す、あるいはファラデーの法則を時間で積分すると、次式が得られる。

$$\int_{-\infty}^t dt \mathbf{E} = \mathbf{A} \quad (7.32)$$

つまり、磁場の発生する以前より、各点に電場測定装置を置いて、電場の時間積分を行えば、ベクトルポテンシャルを一意に決定できることになる。あるいは、ベクトルポテンシャルのまったくないところから、電場測定装置を移動してきて、その間の電場の変化を時間積分してもよい。著者はこれでベクトルポテンシャルが直接計測できると信じているのであるが、こうしたことの本が書かれた書をあまり見たことがない。もしかすると、ベクトルポテンシャルに種々の選び方があるのを心配しているのかも知れないが、少なくとも矛盾ない一つの解を測定できることはいうまでもないであろう。ただし、スカラーポテンシャルが共存すると、その分離は容易ではなくなるというか、ゲージの自由度があるため、原理的に分離ができない。

## 第 8 章

# 力とエネルギー

力はローレンツ力だけ理解していれば、かなりのことがわかる。しかし、力に関するパラドックスは多く、それだけ、きちんとした理解が難しいということになる。少しでも深い理解に心掛けてほしい。

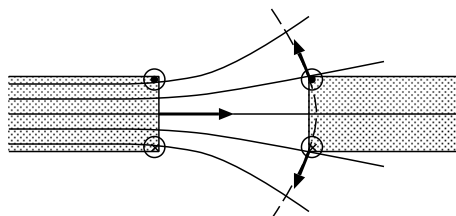
### 8.1 ローレンツ力

電荷や物質に働く力は結局は次式で与えられるローレンツ力 (Lorentz force) に帰着する。

$$\mathbf{F} = Q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (8.1)$$

この結果、電場による力は、 $\mathbf{E}$  の方向に働くので、電気力線を描いておくと、力の方向が見やすくなる。一方、磁場による力は  $\mathbf{B}$  と垂直になるので、磁場の力垂直面を描いておくほうが、見やすくなる。つまり、 $\mathbf{v}$  と垂直で、かつ力垂直面の方向の力を受ける。例えば、[図 8.1](#) に示すように、二つのソレノイドや磁石が同軸に置かれ、かつ N 極と S 極が対向している場合、その先端に働く力は、おおよそ軸に対して垂直方向に拡がり、わずかに相手のほうに傾斜する。このわずかな傾斜のため、互いに引力を及ぼすこととなる。同種の極が対向している場合には、力の方向は [図 8.1](#) と反対になるため、やはりわずかな傾斜により、互いに斥力を及ぼすこととなる。

しかし、例えばちょっと複雑な形状に磁石に働く力を求めようとする、いつもこのように



[図 8.1](#) 磁場による力は破線で示す力垂直面に沿って働く。

$\mathbf{v} \times \mathbf{B}$  から計算するのはかなり面倒である。磁石に働く力などは、むしろ磁荷モデルによるほうが楽である。

そこで、磁石の受ける力の計算などに便利な変形を試みよう。まず微小電流ループに働く力を求めよう。式 2.62 を利用して上式を変形すると、次式が得られる。

$$\mathbf{F} = I \int d\mathbf{r} \times \mathbf{B} = -I(\mathbf{S} \times \nabla) \times \mathbf{B} = -(\mathbf{m} \times \nabla) \times \mathbf{B} \quad (8.2)$$

ここで、 $\mathbf{m} = I\mathbf{S}$  は磁気モーメントと呼ばれる量である。

一方、磁石に働く力を計算する方法として、磁荷  $Q_m$  による方法がある。磁荷モデルのときに、各磁荷に働く力は  $\mathbf{F} = Q_m \mathbf{B} / \mu_0$  で与えられるから、

$$\mathbf{F}_m = \frac{Q_m}{\mu_0} (\mathbf{B}(\mathbf{r} + \mathbf{l}) - \mathbf{B}(\mathbf{r})) = (\mathbf{m} \cdot \nabla) \mathbf{B} \quad (8.3)$$

ただし、以下の関係を利用した。

$$\mathbf{m} = I\mathbf{S} = \frac{Q_m}{\mu_0} \mathbf{l} \quad (8.4)$$

これら二つの力は等しそうであるが、実は若干異なる。これら二つの差をとってみよう。

$$\begin{aligned} (\mathbf{F} - \mathbf{F}_m)_x &= \left( m_z \frac{\partial}{\partial x} - m_x \frac{\partial}{\partial z} \right) B_z - \left( m_x \frac{\partial}{\partial y} - m_y \frac{\partial}{\partial x} \right) B_y \\ &\quad - \left( m_x \frac{\partial}{\partial x} + m_y \frac{\partial}{\partial y} + m_z \frac{\partial}{\partial z} \right) B_x \\ &= -m_x \operatorname{div} \mathbf{B} + m_y (\operatorname{rot} \mathbf{B})_z - m_z (\operatorname{rot} \mathbf{B})_y \\ &= (\mathbf{m} \times \operatorname{rot} \mathbf{B})_x \end{aligned} \quad (8.5)$$

したがって

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_m + \mathbf{m} \times \operatorname{rot} \mathbf{B} \quad (8.6)$$

$\operatorname{rot} \mathbf{B}$  は、磁場を形成している電流のないところでは0なので、両者は一致する。しかし、力を検出する微小磁石の傍に、磁場を形成している電流や変位電流が流れていると両者は等しくなくなる。現在、磁石の根源は電流であることが分かっているので、磁荷モデルはこの時点で、問題を生じる<sup>\*1</sup>。つまり、電流や磁石に働く力を磁荷モデルで計算した場合には、 $\mathbf{m} \times (\operatorname{rot} \mathbf{B})$  を加える必要があることになる。

## 8.2 古典的力と量子論的力

古典的粒子の受ける力は、ローレンツ力で示したように、電場  $\mathbf{E}$  と磁場  $\mathbf{B}$  により、簡明に理解できるが、一方で、量子力学的粒子はスカラーポテンシャルやベクトルポテンシャルを感じると説明した。

<sup>\*1</sup> 12.10 節に、例を示す。

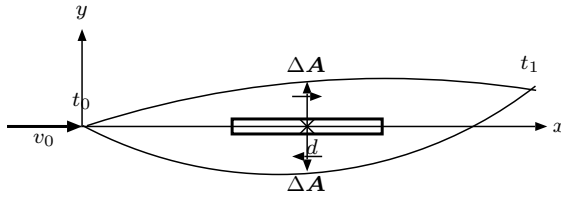


図 8.2 ベクトルポテンシャルの異なる領域を通る二つのビームの干渉縞は移動する。

これら二つの古典力学と量子力学の双方の効果を、一気に説明する手法がある。それは付録 C に示した**最小作用の原理** (principle of minimum action) と呼ばれる手法である。もともとは、束縛力のあるような複雑な力学系の問題を解くために、ラグランジェが発展させた解析力学と呼ばれる手法の一つの表現形であるが、

$$L = \frac{1}{2}m (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) - Q(\phi - v_x A_x - v_y A_y - v_z A_z) \tag{8.7}$$

と定義して、この値を種々の軌道を仮定して時間積分する。

$$S(x(t)) = \int_{t_0}^{t_1} dt L(x(t), \dot{x}(t)) \tag{8.8}$$

この積分を**作用** (action) と呼ぶ。実際の運動は、作用が最小になるような軌道を選ぶというものである。

さて古典力学の場合には、軌道を少し動かしても、この値がほとんど変わらない付近に軌道が選ばれる。一方、量子力学の場合には、異なる複数の軌道に対し、この積分の値が同じ値となるときに、強い干渉が起こることになる。例えば、**図 8.2**にあるように、板状のソレノイドの上下を通る電子ビームを考えよう。ソレノイドの作る磁場の方向を \$z\$ 軸、ビームの進行方向を \$x\$ 方向、ソレノイドの板の面に垂直な方向を \$y\$ 方向としよう。板状のソレノイドのまわりにはベクトルポテンシャルが誘起されるが、その方向は主として \$x\$ 方向である。板の端では \$y\$ 方向のポテンシャルも存在するが、その領域は端付近に限られているので、この議論では無視しよう。

試しの軌道として \$x\$ 方向にソレノイドの上を通る直線と、下を通る直線の二種類を仮定し、それぞれのビームの作用を計算してみよう。まず、上のベクトルポテンシャルが \$-\Delta A\_x\$ だったとしよう。また、そこでは速度がベクトルポテンシャルのなかったときに比較し、\$v\_0 + \Delta v\$ になったとしよう。すると作用積分は次のようになる。

$$\begin{aligned} S &= \int_{t_0}^{t_1} dt \left[ \frac{1}{2}m(v_0 + \Delta v)^2 + Q(v_0 + \Delta v)(-\Delta A_x) \right] \\ &= \int_{t_0}^{t_1} dt \left[ \frac{1}{2}mv_0^2 + v_0(m\Delta v - Q\Delta A_x) + O^2 \right] \end{aligned} \tag{8.9}$$

同様に、下を通ったときの作用積分は、上式の括弧内が \$(m\Delta v + Q\Delta A\_x)\$ と置き換わる。

これらが同じ値となる条件を考えてみよう。そのためには上の軌道では  $\Delta v = (Q/m)\Delta A_x$  とし、下の軌道では  $\Delta v = -(Q/m)\Delta A_x$  としなければならない。つまり、上の軌道ではやや早目、下の軌道ではやや遅目に動くことになる。ベクトルポテンシャルの存在領域の長さ  $l$ 、スリット間隔  $d$  とすると、下の軌道の粒子がスリットに到着したとき、上の軌道の粒子はスリットを乗り越えて、 $l(2\Delta v/v_0) = 2lQ\Delta A_x/mv_0$  だけ先に居ることになる。これら二つの軌道を通る粒子がゴールのスクリーンに同時に到着するには、スリットを出てから下方斜めの方向に動くしかない。その振れ角を  $\theta$  とすると、

$$\sin \theta = \frac{2lQ\Delta A_x}{mv_0d} = \frac{Q\Phi}{mv_0d} \quad (8.10)$$

となり、前出の結果と一致する。

このように、古典力学の運動は量子力学で説明できるが、ポテンシャルが空間的にあまり激しく変化すると、ビームは広い範囲に広がってしまい、古典力学で扱う粒子のようなイメージを持たなくなる。つまり、古典力学の粒子を扱うには、ポテンシャルは緩やかに変化している必要がある。このような条件で粒子の受ける軌道変化を計算すると、結局、運動はポテンシャルの一次変化にだけ依存するようになり、ローレンツ力の与える式になってしまう。つまり、力という概念を議論しようとする、どうしても古典的近似になり、電場、磁場だけが現れ、ポテンシャルは現れなくなってしまふのである。したがって、本章では、以後、マクロに観察されるローレンツ力を使った話を行う。

### 8.3 電気エネルギー

キャパシタに電荷を溜めていく過程を考えよう。キャパシタを充電するには、負極側より正電荷を取り出し、正極側に運ぶ必要がある。ところが、充電が進んでくると、正極側は負極側に対し電位が上がってくるため、この電位差に逆らって、電荷を運ぶのにエネルギーを要するようになってくる。電位差が  $\phi$  のときに  $\delta Q$  の電荷を運ぶには、 $\phi\delta Q$  のエネルギーを使う必要がある。キャパシタンスを  $C$  とすると、 $\phi = Q/C$  が成立するので、 $Q$  だけの電荷を充電するために外部が使うエネルギー  $U$  は次式のようなになる。

$$U = \int_0^Q dQ\phi = \int_0^Q dQ \frac{Q}{C} = \frac{Q^2}{2C} = \frac{Q\phi}{2} = \frac{C\phi^2}{2} \quad (8.11)$$

最後の三式は、同じ量を、色々に変換する方法があることを示している。

この外部が使ったエネルギーは、充電後に電極間を開放にしておくと、そのままキャパシタに蓄えられている。そのことは、後に、例えば両極の間を抵抗で結ぶと、放電に伴って、同量のジュール熱が発生するなどすることから理解できる。これを**電気エネルギー** (electric energy) と呼ぶ。**静電エネルギー** (electro-static energy) と呼ぶ場合も多いが、8.6節で説明するように、動的な場合の電場によるエネルギーも同じ形になるので、あえて、電気エネルギーとする。

図 8.3 に示すように、途中  $x$  の深さまで誘電体の挿入された平行平板キャパシタを考えてみよう。このキャパシタンスを  $C(x)$  とすると、この電気エネルギーは  $U = C(x)Q^2/2$  である。この

誘電体が横向きに受ける力は、 $x$  を変化させたときにどのくらい  $U$  が変化するかから求めることができる。もし  $x$  を増加させたときにエネルギー  $U$  が下がれば、誘電体は吸い込まれるような力を受けることになるので、力は次式で得られる。

$$F = -\left. \frac{\partial U}{\partial x} \right|_Q = -\left. \frac{\partial}{\partial x} \frac{Q^2}{2C(x)} \right|_Q = \frac{Q^2}{2C(x)^2} \frac{dC(x)}{dx} = \frac{\phi^2}{2} \frac{dC(x)}{dx} \tag{8.12}$$

この場合、 $C(x)$  は誘電体の挿入量  $x$  が大きいほど大きな値をとるので、その位置による微分は正である。したがって  $F > 0$  となり、誘電体は引き込まれるという結論になる。なお、誘電体の厚さが、極板間の距離  $H$  にほぼ等しいときの  $C(x)$  は、次式で与えられる。

$$C(x) = \frac{\epsilon_0[\epsilon_r x + (l - x)]W}{H} \tag{8.13}$$

これから  $F$  を求めるのは比較的簡単であるので、読者の演習問題としておこう。

間違えやすい誘導法として、 $\phi = \text{const}$  とする計算法である。

$$F = -\left. \frac{\partial U}{\partial x} \right|_\phi = -\left. \frac{\partial}{\partial x} \frac{C(x)\phi^2}{2} \right|_\phi = -\frac{\phi^2}{2} \frac{dC(x)}{dx} \quad (\text{誤り}) \tag{8.14}$$

この結果は式 8.12 と同じであるが、よく見ると、正負が反転している。つまり、誘電体は同じ力で抜け出る方向の力を受けることになる。しかし、この解析は誤っている。というのは、 $\phi = \text{const}$  としているからである。電位差を一定に保つには定電圧電源が必要である。ここを經由して電荷を運ぶと、電源は仕事をする（される）ことになり、その仕事量をきちんと求めないと、力が計算できないことになるからである。一方、電荷を一定にするには、両極をどこにも接続せず、自由におくだけでよい。このため、外部におけるエネルギー収支を気にしなくてよいので、力を計算するには、 $Q = \text{const}$  として、微分する必要があるのである。

もし、どうしても  $\phi = \text{const}$  の条件で、 $U = C(x)\phi^2/2$  を利用して力を計算したい場合には、定電圧電源の行う仕事を補正すればよい。定電圧電源は  $\int dt(\phi I) = \int dt(\phi dQ/dt) = \int dQ\phi = Q\phi$  の仕事をするので、 $U - Q\phi = C(x)\phi^2/2 - C(x)\phi^2 = -C(x)\phi^2/2 = -U$  を  $\phi = \text{const}$  の条件で微分すればよい。

$$F = -\left. \frac{\partial(-U)}{\partial x} \right|_\phi = \left. \frac{\partial}{\partial x} \frac{C(x)\phi^2}{2} \right|_\phi = \frac{\phi^2}{2} \frac{dC(x)}{dx} \tag{8.15}$$

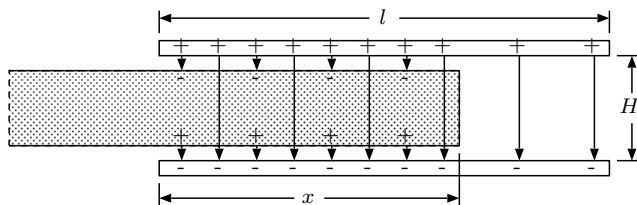


図 8.3 誘電体を途中まで入れたキャパシタは極板間に引き込まれる。

なお、式 8.11 は、当然、一様な誘電体で満たされた平行平板キャパシタにも適用できる。

$$U_t = \frac{Q^2}{2C} = \frac{H}{2\epsilon Wl} Q^2 = \frac{H}{2\epsilon_0 \epsilon_r Wl} Q^2 \quad (8.16)$$

つまり、誘電体のある場合の電気エネルギーは、同じ  $Q$  に対し、真空キャパシタのその  $1/\epsilon_r$  であることが導かれる。一方で、第 5 章で、物質のある場合の電磁気学は、物質中の電荷や電流を明示して表現し、全電荷、全電流が真空中に作る電磁場で説明できるとした。この立場で平行平板キャパシタを見ると、電極上に  $Q$  があり、それに近接して、誘電体上に分極電荷  $-Q_p = -Q(1-1/\epsilon_r)$  が誘引されているので、全電荷は  $Q_t = Q - Q_p = Q/\epsilon_r$  となる。この正負電荷が真空中にあるとすると、電気エネルギーは次のようになる。

$$U = \frac{H}{2\epsilon_0 Wl} Q_t^2 = \frac{H}{2\epsilon_0 \epsilon_r^2 Wl} Q^2 \quad (8.17)$$

つまり、式 8.16 に比べ、さらに  $1/\epsilon_r$  少ないことになる。

この違いはどこに起因するのかをきちんとしておくべきであろう。式 8.11 のエネルギーの計算式の積分要素を見てみよう。見やすいように、 $Q_f = Q$  と書き直してある。また  $\phi(Q_t)$  と記載して、電位が全電荷で決定されていることを明示してある。

$$dU = \phi(Q_t)dQ_f = \phi(Q_t)(dQ_t + dQ_p) = \phi(Q_t)dQ_t + \phi(Q_t)dQ_p \quad (8.18)$$

このうち、第一項は全電荷の移動に伴うエネルギー増であり、式 8.17 で示される純粋な電気エネルギーの増加である。一方、第二項は分極に費されるエネルギーであり、正負電荷を引っ張って分極を起こす際に必要な力学的エネルギーとして蓄積される。つまり、電気エネルギーの通常定義である式 8.16 に示すキャパシタの充電に要するエネルギーには、式 8.17 の全電荷の電気エネルギー以外に、分極するのに使われる力学的エネルギーの増加分が含まれているのである。

純粋に電磁氣的エネルギーを計算する場合には、式 8.17 が正しいが、誘電体の関わる系の力を計算する際は、多くの場合、分極に必要なエネルギーを一々意識するのは大変なので、これが自動的に含まれる式 8.16、つまり電気エネルギーの通常定義を利用するのが得策である。

なお、8.6 節で、それなりの正当性を示すが、 $U$  を誘電体（または間の真空）全体が持つエネルギーと解釈する立場がある。となると、誘電体の単位体積当たりのエネルギーが定義できることになる。

$$u = \frac{U}{HWl} = \frac{1}{2\epsilon} \frac{Q^2}{Wl} = \frac{\sigma^2}{2\epsilon} = \frac{D^2}{2\epsilon} = \frac{DE}{2} \quad (8.19)$$

さらに、誘電率が非線形の場合にも、 $dU = \phi dQ$  から推定して、 $du = E dD$  となり、各点で次の積分を実行することにより、単位体積当たりのエネルギーが得られる。

$$u = \int E dD \quad (8.20)$$



### 8.4 磁気エネルギー

インダクタに電流を流して、磁束を増していく過程を考えよう。インダクタに電流  $I$  を注入すると、磁束  $\phi$  が生成され、ファラデーの法則に基づき、その磁束の変化に伴う電圧  $-d\Phi/dt = -LdI/dt$  が発生する。この電圧に対抗して電流を注入していくので、外部の電源はインダクタに対し、仕事を行っていることが分かる。その結果、インダクタには次式で与えられるエネルギーが蓄積される。

$$U = \int dt \left( I \frac{d\Phi}{dt} \right) = \int d\Phi I = \int d\Phi \frac{\Phi}{L} = \frac{\Phi^2}{2L} = \frac{\Phi I}{2} = \frac{LI^2}{2} \tag{8.21}$$

最後の三式は、キャパシタと同様、同じ量を、色々な表現する方法があることを示している。

この外部が使ったエネルギーは、作業終了後、コイル両端の線を短絡しておく、インダクタに蓄えておくことができる。このことは、後に、例えば短絡の代わりに抵抗に切り替えるなどすると、抵抗より同量のジュール熱が発生するなどすることから、理解できよう。これを**磁気エネルギー** (magnetic energy) と呼ぶ。

図 8.4 に示すように、途中  $x$  の深さまで磁性体の挿入されたソレノイドにより構成されたインダクタを考えてみよう。このインダクタンスを  $L(x)$  とすると、この磁気エネルギーは  $U = L(x)I^2/2$  である。この磁性体が横向きに受ける力は、 $x$  を変化させたときにどのくらい  $U$  が変化するかから求めることができる。もし  $x$  を増加させたときにエネルギー  $U$  が下がれば、磁性体は吸い込まれるような力を受けることになる。

ただし、電流を一定にして  $U$  を微分するには注意が必要である。電流を一定にしてインダクタンスを変化するという事は、鎖交磁束  $\Phi = L(x)I$  を変化させることになる。すると、ファラデーの法則により、起電力  $\phi = -d\Phi/dt$  が発生する。そのため、電流源が仕事をするようになる。この仕事分を補正して、純粋な磁気エネルギーとしたものを使用しないと、正しい力は得られない。定電流源のする仕事は  $\int dt (Id\Phi/dt) = \int d\Phi I = \Phi I$  であるので、これを補正したエネルギー

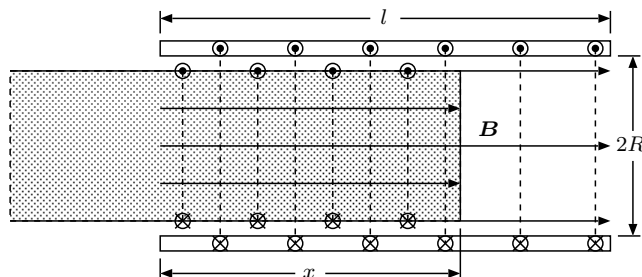


図 8.4 棒状の磁性体を途中まで入れたインダクタ。  $B$  は不連続に描かれているが、実際には各不連続面より四方へ向かう発散があり、それにより連続性が保たれている。

は  $U - I\Phi = L(x)I^2/2 - L(x)I^2 = -L(x)I^2/2 = -U$  を  $I = \text{const}$  の条件で微分すればよい。

$$F = -\left.\frac{\partial(-U)}{\partial x}\right|_I = \left.\frac{\partial}{\partial x} \frac{L(x)I^2}{2}\right|_I = \frac{I^2}{2} \frac{\partial L(x)}{\partial x} \quad (8.22)$$

この場合、 $L(x)$  は磁性体の挿入量  $x$  が大きいほど大きな値をとるので、その位置による微分は正である。したがって  $F > 0$  となり、磁性体は引き込まれるという結論になる。なお、磁性体の半径が、ソレノイドの半径  $R$  にほぼ等しいときの  $L(x)$  は、式 5.32 を参考にすると、次式で与えられる。

$$L(x) = \mu_0[\mu_r x + (l - x)]n^2 S \quad (8.23)$$

$n$  は単位長当たりの巻数である。これから  $F$  を求めるのは比較的簡単であるので、読者の演習問題としておこう。

なお、 $\Phi = \text{const}$  として、 $U$  を微分して力を求める方法は正しい。

$$F = -\left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{\Phi} = -\left.\frac{\partial}{\partial x} \frac{\Phi^2}{2L(x)}\right|_{\Phi} = \frac{\Phi^2}{2L(x)^2} \frac{dL(x)}{dx} = \frac{I^2}{2} \frac{dL(x)}{dx} \quad (8.24)$$

$\Phi = \text{const}$  が外部エネルギーを必要としないことは、次のような考察からも推定できる。インダクタを抵抗 0 の電流ループにより構成し、そこに永久電流を流しておく。ここに、磁性体を入れるとか、外部から磁場を与えるなどの方法で、鎖交磁束の値を変化すると、ファラデーの電磁誘導の法則にしたがって、コイルに沿った電場が誘起される。しかし、もし電場が存在すると、抵抗 0 であるコイルには無限大の電流が流れることになる。実際には、こうしたことは起きないが、それはインダクタに流れる電流が適切に変化することにより、コイルに鎖交する総磁束を変化させないようにするからである。抵抗 0 でインダクタの両端を短絡するのは外部の仕事  $0$  にする一つの方法であるので、外部の仕事  $0$  は、コイルに鎖交する総磁束一定という条件と一致する。

なお、式 8.21 は、当然、一様な磁性体で満たされたソレノイドにも適用できる。

$$U_t = \frac{LI^2}{2} = \frac{\mu n^2 l S I^2}{2} = \frac{\mu_0 \mu_r n^2 l S I^2}{2} \quad (8.25)$$

つまり、誘電体のある場合の電気エネルギーは、同じ  $I$  に対し、真空インダクタのその  $\mu_r$  倍であることが導かれる。一方、自由電流と磁化電流の和である全電流  $I_t = I + I_m = \mu_r I$  が真空中にあるとした場合の、磁気エネルギーは次のようになる。

$$U = \frac{\mu_0 n^2 l S I_t^2}{2} = \frac{\mu_0 \mu_r^2 n^2 l S I^2}{2} \quad (8.26)$$

つまり、式 8.25 に比べ、さらに  $\mu_r$  倍、大きいことになる。

この違いはどこに起因するのかをきちんとしておくべきであろう。式 8.21 のエネルギーの計算式の積分要素を見てみよう。見やすいように、 $\Phi_f = \Phi$  と書き直してある。また  $I(\Phi_t)$  と記載して、電流が全鎖交磁束で決定されていることを明示してある。

$$dU = I(\Phi_t)d\Phi_f = \phi(\Phi_t)(d\Phi_t - d\Phi_m) = I(\Phi_t)d\Phi_t - I(\Phi_t)d\Phi_m \quad (8.27)$$

このうち、第一項は全鎖交磁束の増加に伴うエネルギー増であり、式 8.26 で示される純粋な磁気エネルギーの増加である。一方、第二項は磁化に費されるエネルギーであり、磁化を起こす際に必要な力学的エネルギーとして蓄積される。つまり、磁気エネルギーの通常定義である式 8.25 のインダクタに蓄積されるエネルギーは、式 8.26 の全鎖交磁束の磁気エネルギーから、磁化に使われる力学的エネルギー分を削減する必要があるのである。

純粋に電磁気的エネルギーを計算する場合には、式 8.26 が正しいが、磁性体の関わる系の力を計算する際は、多くの場合、磁化に必要なエネルギーを一々意識するのは大変なので、これが自動的に含まれる式 8.25、つまり磁気エネルギーの通常定義を利用するのが得策である。

なお、8.6 節で、それなりの正当性を示すが、 $U$  を磁性体（または間の真空）全体が持つエネルギーと解釈する立場がある。となると、磁性体の単位体積当たりのエネルギーが定義できることになる。

$$u = \frac{U}{Sl} = \frac{\mu n^2 I^2}{2} = \frac{\mu K^2}{2} = \frac{B^2}{2\mu} = \frac{HB}{2} \quad (8.28)$$

さらに、透磁率が非線形の場合にも、 $dU = Id\Phi$  から推定して、 $du = \mathbf{H}d\mathbf{B}$  となり、各点で次の積分を実行することにより、単位体積当たりのエネルギーが得られる。

$$u = \int \mathbf{H}d\mathbf{B} \quad (8.29)$$

## 8.5 運動量の増減と応力テンソル

以上、一点に集中した電荷や一つの線を通る電流に働く力を議論してきたが、分布した電荷や電流に働く力を議論しよう。運動している分布自由電荷に働くローレンツ力 (Lorentz force) は次式で与えられる。

$$\mathbf{f} = \rho(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) = \rho\mathbf{E} + \rho\mathbf{v} \times \mathbf{B} = \rho\mathbf{E} + \mathbf{J} \times \mathbf{B} \quad (8.30)$$

まず、物質のない場合を考慮しよう。この右辺  $\rho$  と  $\mathbf{J}$  を、 $\text{div } \mathbf{E}$  式および  $\text{rot } \mathbf{B}$  式を利用して、

電磁場により書き換えてみよう。

$$\begin{aligned}
 \mathbf{f} &= \rho \mathbf{E} + \mathbf{J} \times \mathbf{B} \\
 &= \mathbf{E}(\varepsilon_0 \operatorname{div} \mathbf{E}) - \mathbf{B} \times \left( \frac{1}{\mu_0} \operatorname{rot} \mathbf{B} \right) + \mathbf{B} \times \frac{\partial \varepsilon_0 \mathbf{E}}{\partial t} \\
 &= \varepsilon_0 \mathbf{E} \operatorname{div} \mathbf{E} - \varepsilon_0 \mathbf{E} \times \operatorname{rot} \mathbf{E} + \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} \operatorname{div} \mathbf{B} - \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} \times \operatorname{rot} \mathbf{B} \\
 &\quad + \varepsilon_0 \mathbf{B} \times \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \varepsilon_0 \mathbf{E} \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\
 &= \mathbf{i} \left\{ \varepsilon_0 \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( E_x^2 - \frac{1}{2} \mathbf{E}^2 \right) + \frac{\partial}{\partial y} (E_x E_y) + \frac{\partial}{\partial z} (E_x E_z) \right] \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{\mu_0} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( B_x^2 - \frac{1}{2} \mathbf{B}^2 \right) + \frac{\partial}{\partial y} (B_x B_y) + \frac{\partial}{\partial z} (B_x B_z) \right] \right\} \\
 &\quad + \mathbf{j}[\dots] + \mathbf{k}[\dots] - \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) \\
 &= \mathbf{i} \sum_i \frac{\partial T_{ix}}{\partial x_i} + \mathbf{j} \sum_i \frac{\partial T_{iy}}{\partial x_i} + \mathbf{k} \sum_i \frac{\partial T_{iz}}{\partial x_i} - \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t} \tag{8.31}
 \end{aligned}$$

ここで三番目の等号は、 $\varepsilon_0 \mathbf{E}$  と  $\operatorname{rot} \mathbf{E}$  式の外積と、 $\mathbf{B}/\mu_0$  と  $\operatorname{div} \mathbf{B}$  式の内積を利用して変形している。また、 $T_{ij}$  と  $\mathbf{g}$  は次のように定義される。

$$T_{ij} = \varepsilon_0 \left( E_i E_j - \delta_{ij} \frac{\mathbf{E}^2}{2} \right) + \frac{1}{\mu_0} \left( B_i B_j - \delta_{ij} \frac{\mathbf{B}^2}{2} \right) \tag{8.32}$$

$$\mathbf{g} = \varepsilon_0 \mathbf{E} \times \mathbf{B} \tag{8.33}$$

である。 $\delta_{ij}$  は**クロネッカーデルタ** (Kronecker delta) で、次式で定義される。

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases} \tag{8.34}$$

左辺は、分布電荷に働く力であり、分布電荷の持つ単位体積当たりの力学的運動量  $\mathbf{g}_k$  の増加率ともいえるので、以下のように書くことができる。

$$\frac{\partial \mathbf{g}_k}{\partial t} = \nabla \cdot \mathbf{T} - \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t} \tag{8.35}$$

ここで、テンソル (行列)  $T$  は**マクスウェル応力テンソル** (Maxwell stress tensor)、 $\mathbf{g}$  は**電磁場の運動量** (momentum of electro-magnetic field) と呼ばれている。 $T$  がテンソルであるため、 $\nabla \cdot$  は grad でも div でもないことに注意してほしい。 $\nabla \cdot T$  の本当の意味を理解するためには、成分展開の式に立ち返るべきである。

この式の両辺をある体積で体積積分すると、次式が得られる。

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V dV (\mathbf{g}_k + \mathbf{g}) = \oint_S d\mathbf{S} \cdot \mathbf{T} \tag{8.36}$$

これから、力が運動量の増加を引き起こすことが分かるが、力が電磁気的な応力という形で与えられること、運動量には  $\mathbf{g}$  なる電磁気的運動量を含んでいることを理解してほしい。

応力という苦手な人が多いかとも思うが、要は、空間に小さな直方体を切り取ったときに、 $yz$ 面に働く力が  $(T_{xx}, T_{yx}, T_{zx})$  になると理解すればよい。例えば  $T_{xx}$  が正のときは引張力、負のときには圧縮力に定義される。それにしても  $T$  の要素が複雑である。こうしたときには、この行列の固有値問題を解いて、主軸変換するとよい。

まず磁場のない電場の場合のテンソルを主軸変換してみよう。すると、主軸は  $\mathbf{E}$  の方向にあり、その方向の固有値は  $\varepsilon_0 \mathbf{E}^2/2$  となる。また、第二、第三の主軸はこれと直交しており、その方向の固有値は縮退していて、 $-\varepsilon_0 \mathbf{E}^2/2$  となる。これから、 $\mathbf{E}$  の方向に垂直の面は  $\varepsilon_0 \mathbf{E}^2/2$  の引張力を受け、それと垂直ないずれの方向の面も  $\varepsilon_0 \mathbf{E}^2/2$  の圧縮力を受けることが分かる。この理由により、電気力線はその方向に縮もうとし、その垂直方向に膨らもうという力を出すといわれる。

まず、静的な場合を考えよう。電気力線は、電荷を始点や終点にするから、電荷に働く力は、電気力線の引張力で説明できることになる。例えば、導体上の電荷は常に外向きに引力を受けるが、それはこの電気力線の引張力で理解できる。また微小サイズの正電荷が負電荷に引かれる様子は、正電荷表面の電気力線の密度が、負電荷側で高いことから、視覚的に理解できる。

また、導体表面で、同種の電荷同士は横向きに押し合っており、それが故に、電荷は一様に分布するのであるが、それが電気力線の横向きの圧縮力に繋がるのである。

電場のない磁場の場合のテンソルを主軸変換すると、電場の場合と同様に、 $\mathbf{B}$  の方向に垂直の面は  $\mathbf{B}^2/2\mu_0$  の引張力を受け、それと垂直ないずれの方向の面も  $\mathbf{B}^2/2\mu_0$  の圧縮力を受けることが分かる。この理由により、磁力線もその方向に縮もうとし、その垂直方向に膨らもうという力を出すといわれる。

磁力線は電流を囲むように生成されるから、電流に働く力は、磁力線に垂直な圧縮力で説明できることになる。例えば、同方向に流れる電流同士が互いに引かれる様子は、これらが作る磁力線が電流の線の間で疎であり、外部で密であることから、視覚的に理解できる。

電場も磁場もあるときの主軸変換は、きれいな形にはならない。しかし静的な場合には、電荷は電気力線としか関わらず、電流は磁力線としか関わらないので、それぞれ独立な応力により理解できる。

次に、動的な場合を考察しよう。この場合には、 $\mathbf{g}$  の時間微分が効いてくるため、電荷や電流に働く力はマクスウェル応力だけでは説明できなくなる。

積分形の体積をきわめて巨大にしていくと、遠方では場が弱くなっていくため、その表面積分である応力の項は消えていくだろう。残った項は、力と電磁場の運動量の時間微分に関わるものである。通常は、力の体積積分は、**作用反作用の法則** (action-reaction law) で0になることが期待できるが、そうはなっていない。つまり、作用反作用の法則は成立しないのである。その差は、 $\mathbf{g}$  の時間微分により説明できるのである。

力の時間積分は運動量である。このため  $\mathbf{g}$  は電磁場の運動量と呼ばれるのである。この作用反作用の法則の不成立に関して、電磁気学ではきわめて多くのパラドックスが提示されている。その

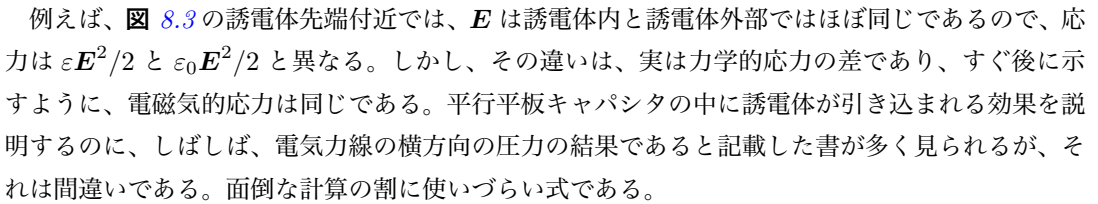
すべてが、この電磁場の運動量を考慮することにより、理解できることを知っていてほしい。

物質があり、特に  $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$ 、 $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$  と線形の場合には、 $\mathbf{f}$  が、自由電荷、自由電流にかかる力とすることにより、物質のない場合の  $\varepsilon_0$ 、 $\mu_0$  を、 $\varepsilon$ 、 $\mu$  に変更するだけで、すべて、真空の場合と同じ式変形が適用できるので、次式が得られる。

$$T_{ij} = \varepsilon \left( E_i E_j - \delta_{ij} \frac{\mathbf{E}^2}{2} \right) + \frac{1}{\mu} \left( B_i B_j - \delta_{ij} \frac{\mathbf{B}^2}{2} \right) \quad (8.37)$$

$$\mathbf{g} = \varepsilon \mathbf{E} \times \mathbf{B} \quad (8.38)$$

ここで注意してほしいのは、これらの式が、誘電体や磁性体に蓄えられるエネルギーを、すべて電磁気エネルギーとして組み込んだ場合の式であることである。したがって、ここで計算された電磁氣的応力にも、力学的応力が組み込まれているを意識しなければならない。

例えば、 8.3 の誘電体先端付近では、 $\mathbf{E}$  は誘電体内と誘電体外部ではほぼ同じであるので、応力は  $\varepsilon \mathbf{E}^2/2$  と  $\varepsilon_0 \mathbf{E}^2/2$  と異なる。しかし、その違いは、実は力学的応力の差であり、すぐ後に示すように、電磁氣的応力は同じである。平行平板キャパシタの中に誘電体が引き込まれる効果を説明するのに、しばしば、電気力線の横方向の圧力の結果であると記載した書が多く見られるが、それは間違いである。面倒な計算の割に使づらい式である。

こうした間違いを起こさないためには、分極電荷や磁化電流をも含むすべての電荷（全電荷）、電流（全電流）に対して計算したマクスウェル応力を使うほうが便利である。電荷や電流として、物質中に誘起される電荷や電流も含むことにすれば、これらは、真空中に存在しているのと同じにあるので、先に示した物質のない場合の取り扱いと同じになる。つまり、 $\rho$  や  $\mathbf{J}$  を全電荷、全電流と思えばよいだけである。その結果、マクスウェル応力と電磁場の運動量は、式 8.32 と式 8.33 で与えられることになる。このマクスウェル応力を使うと、ローレンツ力を計算しなくても、電場や磁場の分布から、誘電体や磁性体に働く力を計算することも可能である。

例えば、誘電体の表面に分極電荷が誘起されていると、 $E_n$  が不連続になることが知られているが、この結果、 $\Delta(E_n^2/2)$  なる力が誘電体表面に働くことが誘導できる。また、平行平板キャパシタの中に誘電体が中途まで入っている場合には、この誘電体の先端付近での圧力は、内外とも  $\varepsilon_0 \mathbf{E}^2/2$  であり、先端を引き込むような応力は発生しない。ちなみに、誘電体が引き込まれるのは、第 12 章で解説するように、誘電体の角付近のエッジ効果による。

---

物質があり、誘電率や透磁率が非線形の可能性があり、かつ、それらに場所依存がある場

合には、式 8.38 に代わるものとして、次のようにして計算できる。

$$\begin{aligned}
\mathbf{f} &= \rho \mathbf{E} + \mathbf{J} \times \mathbf{B} \\
&= \mathbf{E} \operatorname{div} \mathbf{D} - \mathbf{B} \times \operatorname{rot} \mathbf{H} + \mathbf{B} \times \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \\
&= \mathbf{E} \operatorname{div} \mathbf{D} - \mathbf{D} \times \operatorname{rot} \mathbf{E} + \mathbf{H} \operatorname{div} \mathbf{B} - \mathbf{B} \times \operatorname{rot} \mathbf{H} \\
&\quad + \mathbf{B} \times \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} - \mathbf{D} \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\
&= \mathbf{i} \left\{ \left[ \left( E_x \frac{\partial D_x}{\partial x} + D_x \frac{\partial E_x}{\partial x} \right) + \left( E_x \frac{\partial D_y}{\partial y} + D_y \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) + \left( E_x \frac{\partial D_z}{\partial z} + D_z \frac{\partial E_x}{\partial z} \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \left( D_x \frac{\partial E_x}{\partial x} + D_y \frac{\partial E_y}{\partial x} + D_z \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) \right] + [\text{similar magnetic terms}] \right\} \\
&\quad + \mathbf{j} \{ \dots \} + \mathbf{k} \{ \dots \} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \times \mathbf{B} - \mathbf{D} \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\
&= \mathbf{i} \left\{ \left[ \frac{\partial}{\partial x} (E_x D_x - \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + u_e) + \frac{\partial}{\partial y} (E_x D_y) + \frac{\partial}{\partial z} (E_x D_z) \right] \right. \\
&\quad \left. + \left[ \frac{\partial}{\partial x} (H_x B_x - \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} + u_m) + \frac{\partial}{\partial y} (H_x B_y) + \frac{\partial}{\partial z} (H_x B_z) \right] \right\} \\
&\quad + \mathbf{j} [\dots] + \mathbf{k} [\dots] - \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{D} \times \mathbf{B}) \\
&= \mathbf{i} \sum_i \frac{\partial T_{ix}}{\partial x_i} + \mathbf{j} \sum_i \frac{\partial T_{iy}}{\partial x_i} + \mathbf{k} \sum_i \frac{\partial T_{iz}}{\partial x_i} - \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t} \tag{8.39}
\end{aligned}$$

ここで、 $u_e$ 、 $u_m$  は次式で定義される量である。

$$\begin{aligned}
u_e &= \int \mathbf{E} d\mathbf{D} \\
u_m &= \int \mathbf{H} d\mathbf{B} \tag{8.40}
\end{aligned}$$

また、5 番目の等号では、部分積分の公式を用いて、

$$D_x \frac{\partial E_x}{\partial x} = \frac{\partial (E_x D_x)}{\partial x} - E_x \frac{\partial D_x}{\partial x} \tag{8.41}$$

などと変形し、さらに、この右辺第二項を次のように変形している。

$$E_x \frac{\partial D_x}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \int E_x dD_x \right) \tag{8.42}$$

この場合、 $T_{ij}$  と  $\mathbf{g}$  は次のようになる。

$$T_{ij} = E_i D_j - \delta_{ij} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} - u_e) + H_i B_j - \delta_{ij} (\mathbf{H} \cdot \mathbf{B} - u_m) \tag{8.43}$$

$$\mathbf{g} = \mathbf{D} \times \mathbf{B} \tag{8.44}$$

## 8.6 エネルギーの増減とポインティングベクトル

前節で電磁場の運動量の増減に関わる式を誘導したが、力に速度を掛けた式から、電磁場のエネルギーの増減に関わる式を誘導することができる。ローレンツ力の式の両辺に  $\mathbf{v}$  を内積の形で掛けると、磁界の項は消去され、次式が得られる。

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = Q\mathbf{E} \cdot \mathbf{v} \quad (8.45)$$

これから分布電荷に対する式として次式が得られる。

$$\mathbf{f} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} \quad (8.46)$$

物質のない場合、この右辺の  $\mathbf{J}$  を電磁場で置き換えてみよう。

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} &= \mathbf{E} \cdot \left( \frac{1}{\mu_0} \operatorname{rot} \mathbf{B} - \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \\ &= \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{B} + \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{E} - \varepsilon_0 \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ &= -\frac{1}{\mu_0} \operatorname{div}(\mathbf{E} \times \mathbf{B}) - \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\varepsilon_0}{2} \mathbf{E}^2 - \frac{1}{2\mu_0} \mathbf{B}^2 \right) \\ &= -\operatorname{div} \mathbf{S} - \frac{\partial u}{\partial t} \end{aligned} \quad (8.47)$$

ここで、二番目の等号は、 $\mathbf{B}/\mu_0$  と  $\operatorname{rot} \mathbf{E}$  式の内積を利用して変形されている。ただし、 $\mathbf{S}$  と  $u$  は次式で定義される。

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &= \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B} \\ u &= \frac{\varepsilon_0}{2} \mathbf{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0} \mathbf{B}^2 \end{aligned} \quad (8.48)$$

ここで、 $\mathbf{S}$  はポインティングベクトル (Poynting vector) と呼ばれる。また、 $u$  は単位体積当たりの電磁場のエネルギー (energy of electro-magnetic field) である。第一項は電気エネルギー  $u_e$ 、第二項は磁気エネルギー  $u_m$  である。

左辺は分布電荷の持つ運動エネルギー  $u_k$  の単位時間当たりの増加量であるので、次のようにまとめることができる。

$$\frac{\partial u_k}{\partial t} = -\operatorname{div} \mathbf{S} - \frac{\partial u}{\partial t} \quad (8.49)$$

体積積分をとり、適当に移項すると、電流連続の式と似た次式が得られる。

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V dV (u_k + u) = - \oint_S d\mathbf{S} \cdot \mathbf{S} \quad (8.50)$$



これから、ポインティングベクトルの発散積分が、囲んだ体積の内部のエネルギーの減少になることがいえるが、エネルギーには  $u$  なる電磁場エネルギーを含んでいることを理解してほしい。つまり、ポインティングベクトルはエネルギーの流れであり、単位面積当たり、単位時間に流れるエネルギーといえる。

前節と同様に、物質が線形応答する場合は、 $\mathbf{f}$  を自由電荷、自由電流に働く力として、同様な計算ができるので、上式の  $\varepsilon_0$  を  $\varepsilon$ 、 $\mu_0$  を  $\mu$  と置き換えるだけでよい。

ただし、これらのエネルギーなどの値には、媒質に蓄えられる力学的エネルギーなどが含まれていることに注意してほしいことは、前節の場合と同様である。この場合にも、分極電荷や磁化電流などを、すべて真空中に置いた場合の式のほうが使いやすい場合が多い。その計算の結果は、式 8.48 および式 8.48 で与えられる。

なお、前節の各関係式と本節の各関係式は、きわめて似ている。実は、後述する相対性理論を使うと、一つの関係式に統合することができることのみ、指摘しておこう。

ポインティングベクトルと電磁場運動量の定義もきわめて似ている。事実、真空中の両者には、次式の関係が得られる。

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0} \mathbf{g} = c^2 \mathbf{g} \quad (8.51)$$

この比例関係は、後に学ぶ相対性原理より、質量 0 で光速で運動する粒子の流れの場合に常に成立する関係である。つまり、電磁場は質量 0 で光速で運動する粒子流と見なせることを暗示している。

前節と同様、非線形な物質がある場合も、自由電荷、自由電流に対して同じような計算が実行できる。

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} &= \mathbf{E} \cdot \left( \text{rot } \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \\ &= \mathbf{E} \cdot \text{rot } \mathbf{H} + \mathbf{H} \cdot \text{rot } \mathbf{E} - \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} - \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ &= -\text{div}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}) - \left( \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) \\ &= -\text{div } \mathbf{S} - \frac{\partial u}{\partial t} \end{aligned} \quad (8.52)$$

ただし、 $\mathbf{S}$  と  $u$  は次式で定義される。

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &= \mathbf{E} \times \mathbf{H} \\ u &= u_e + u_m \end{aligned} \quad (8.53)$$

また、 $u_e$  と  $u_m$  は次式で定義される。

$$\begin{aligned}u_e &= \int \mathbf{E} d\mathbf{D} \\u_m &= \int \mathbf{H} d\mathbf{B}\end{aligned}\tag{8.54}$$

特に線形な媒質の場合には、次式が成立する。

$$\begin{aligned}u_e &= \frac{\varepsilon \mathbf{E}^2}{2} \\u_m &= \frac{\mathbf{B}^2}{2\mu}\end{aligned}\tag{8.55}$$

つまり、物質のない場合の  $\varepsilon_0$ 、 $\mu_0$  を、 $\varepsilon$ 、 $\mu$  にしただけの式となる。これらの式は、8.3 節の電気エネルギー、および 8.4 節に示した磁気エネルギーの、単位体積当たりの値と一致する。

---

## 第 9 章

# 動的電磁場

ポテンシャルを使うと、動的な電磁場解析のようなどちらかという複雑な問題も、比較的簡単に解くことができる。本章では、一般的な動的電磁場の議論に合わせて、いくつかの例に対する解析結果を示す。

### 9.1 $\delta$ 関数励振の解

$\sigma$  と  $V$ 、および  $\mathbf{J}$  と  $\mathbf{A}$  を結び付ける**ポテンシャルの波動方程式** (wave equation of potentials) から、容易に動的電磁場に対応する解を得ることができる。まずスカラーポテンシャルを導き出そう。静電場の場合に、点電荷の作るポテンシャルを基礎としたように、動的電磁場では、時間とともに値の変化する点電荷の作るポテンシャルを考える。分布した電荷の作り出すポテンシャルは、これらの重ね合わせで求めることができる。

まず、原点に  $Q(t)$  で変化する点電荷が存在したとしよう。これが作り出すポテンシャルは、当然、球対称となる。つまり、 $\phi(r, t)$  で表される。このときラプラシアンも  $r$  だけで表されるはずである。 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  であるから、 $x, y, z$  の微分は次のように  $r$  の微分に置き換えられる。

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial r} \frac{dr}{dx} = \frac{x}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} \quad (9.1)$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{x}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) = \frac{r - x(x/r)}{r^2} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \left( \frac{x}{r} \right)^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} \quad (9.2)$$

$$\nabla^2 \phi = \frac{2}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (r\phi)}{\partial r^2} \quad (9.3)$$

したがって、スカラーポテンシャルの波動方程式は次のように与えられる。ここで、 $r = 0$  以外の部分では  $\rho = 0$  を考慮し右辺は 0 とした。

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2 (r\phi)}{\partial r^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0 \quad (9.4)$$

$$\frac{\partial^2(r\phi)}{\partial r^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2(r\phi)}{\partial t^2} = 0 \quad (9.5)$$

この式を見てみると、 $r\phi$  に対する一次元の波動方程式になっている。この解はよく知られているように  $t \pm r/c$  の任意の関数の合成で与えられる。

$$r\phi = f(t - r/c) + g(t + r/c) \quad (9.6)$$

この式を前式に代入してみると、確かに波動方程式を満たすことはすぐに検証できよう。逆に、波動方程式のいかなる解もこの式で表現できることが知られているが、それについては、微分方程式の一般的な書物に譲ることとしたい。上式より、ただちに次式が得られる。

$$\phi = \frac{f(t - r/c)}{r} + \frac{g(t + r/c)}{r} \quad (9.7)$$

$f$  は中心から外向きへ出ていく進行波、 $g$  は逆に中心に向かって入ってくる後退波である。両方の波が存在すると仮定しても、何も物理的には問題のないことは分かっているが、原因となる電荷が中心にあるので、すべての波動は中心から外向きに伝播していくと考えるほうが分かりやすい。そこで多くの場合、 $f$  のみを採用する。我々もその形で、以後の議論を進めよう。しかし、くれぐれも強調しておくが、 $g$  を含めても、何も矛盾する解とはならない。単に考えづらいただけである。

上記の解を見てみると、静電場と同じような  $1/r$  の距離依存性を持っていることが分かる。また、現象が中心から光速で外向きに伝播していくのが分かる。 $r = 0$  付近の解は、電荷の時間変動にほとんど遅延なく追従するはずであるから、 $Q(t)$  の作る静電場に一致するはずである。このことから次のような解が予想できる。

$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q(t - r/c)}{r} \quad (9.8)$$

これが動的に変化する点電荷の作るスカラーポテンシャルである。つまり、クーロンポテンシャルと同じ形ではあるが、光速の伝播時間だけ遅れたポテンシャルを感じるのである。

電荷が分布して存在するときは、この式から容易に想像できるように、この解を重ね合わせればよい。

$$\phi(r, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int dV' \frac{\rho(r', t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (9.9)$$

ベクトルポテンシャルについても、まったく同様の手法を適用することができる。この場合は、 $\mathbf{J}_x$  が  $\mathbf{A}_x$  を、 $\mathbf{J}_y$  が  $\mathbf{A}_y$  を、 $\mathbf{J}_z$  が  $\mathbf{A}_z$  を同じ原理で作出す。したがって、上記の二式に対応して、次の二式を得る。

$$d\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I(t - r/c) d\mathbf{r}}{r} \quad (9.10)$$

$$\mathbf{A}(r, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int dV' \frac{\vec{J}(r', t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (9.11)$$

これらの式を利用すれば、時々刻々の電荷分布と電流分布が完全に分かっているならば、時々刻々のスカラーおよびベクトルポテンシャルが決定できる。なお、式 9.9 および式 9.11 は、**遅延ポテンシャル** (retarded potential) と呼ばれる。

## 9.2 点電荷の発生

動的なスカラーポテンシャルとベクトルポテンシャルの例として、第 5 章に示した誘電緩和の話を示そう。誘電緩和は明らかに動的な動作にも関わらず、光速というものがまったく現れてこない。これは不思議な現象である。例えば、最初に電荷を配置するとき、電荷を配置したという情報は光速でしか伝わらないはずである。この辺の正確な議論をするには、まさに前節で述べた動的な解析が必要となるのである。この解答はすぐには得られないが、順を追って次節より説明を進めて行こう\*1。

まず、原点に  $t = 0$  で突然  $Q_0$  の電荷が現れ、その後変化しない場合を取り扱おう。突然といっても、過渡的な部分の解析もしたいので、 $\tau$  の時間がかかったとし、 $0 \leq t \leq \tau$  で  $Q(t) = Q_0 t / \tau$  とする。電荷だけが存在するので  $\mathbf{A} = 0$  となり、 $\phi$  のみを計算すればよい。

電荷はクーロン場を発生するが、各観測点で感じるポテンシャルは、 $t < r/c$  ではまだ何も感じないし、それより  $\tau$  の間は電荷の立ち上がりを感じ、さらにそれ以後では定常的なクーロン場を感じることになる。

$$\phi = \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0 r} \times \begin{cases} 0 & \text{for } t \leq r/c \\ \frac{t - r/c}{\tau} & \text{for } r/c \leq t \leq r/c + \tau \\ 1 & \text{for } r/c + \tau \leq t \end{cases} \quad (9.12)$$

同じ式を条件部分のみ書き直すと、時刻  $t$  でスナップショットを撮ったときのポテンシャルの空間分布という形で表現できる。原点近くでは定常的なクーロン場を感じ、やや遠方では電荷の立ち上がりを感じ、 $ct < r$  の遠方ではまだ電荷発生が伝わっていない。

$$\phi = \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0 r} \times \begin{cases} 1 & \text{inside sphere} \\ \frac{t - r/c}{\tau} & \text{spherical shell} \\ 0 & \text{outside sphere} \end{cases} \quad (9.13)$$

ただし、条件を厳密に式で表すと、次のようになっている。

$$\begin{aligned} \text{inside sphere:} & \quad r \leq c(t - \tau) \\ \text{spherical shell:} & \quad c(t - \tau) \leq r \leq ct \\ \text{outside sphere:} & \quad ct \leq r \end{aligned} \quad (9.14)$$

これと  $\mathbf{A} = 0$  を組み合わせると、上式第二行の遷移時間のところで、ローレンツ条件を満たしていない。それは、そもそも電荷だけが突然あるところに出現することはなく、必ずそれに対応す

\*1 この問題提起は東北大学名誉教授川上彰二郎先生からなされ、二人でこれから述べる結論に達したものである。

る電流が流れていなければならず、それが作るベクトルポテンシャルを無視しているからである。これについては次節以後に述べる。

### 9.2.1 対称励振

まず、スカラーポテンシャルは前節に示したものと同じになる。ベクトルポテンシャルを求めるには、まず電流分布を知る必要がある。前小節で述べたように、電荷が突然あるところに出現するには、必ずそれに対応する電流が流れていなければならない。電流が無限遠のあらゆる方向から原点に向かって対照的に流れ込んだ結果、突然原点に電荷が発生したものとしよう。このためには一瞬大電流が流れ込む必要がある。一瞬を  $\tau$  とすると、電流の大きさは  $Q_0/\tau$  となる。この電流は原点対称に分布しているが、その原点から  $r$  離れた点での電流密度は次のようになる。

$$J_r = -\frac{Q_0}{4\pi\tau} \frac{u(t) - u(t-\tau)}{r^2} \quad (9.15)$$

ここで、 $u(t)$  とは、 $t=0$  から 1 になる階段関数であり、右辺の括弧全体で  $0 < t < \tau$  の間だけ存在することを示す。以下、ポテンシャルを求めるところまで、この時間項のことは無視して議論してさしつかえない。

電流源の座標を  $\mathbf{r}'$ 、観測点を  $\mathbf{r}$ 、観測点から電流源を見た座標を  $\mathbf{R}(=\mathbf{r}'-\mathbf{r})$  としよう。電流が観測点に作るベクトルポテンシャルには伝播遅延があるため、観測点からの半径が  $c(t-\tau) \leq R \leq ct$  の球殻状の領域の電流しか影響を与えない。また、この球殻上の電流の効果はベクトルの合算されるため、その  $\mathbf{r}$  方向の成分しか影響してこない。このことを考えて  $\mathbf{A}$  を求めると次のようになる。

$$\begin{aligned} A_r &= -\frac{Q_0}{\tau} \int 2\pi R^2 \sin\theta dR d\theta \frac{1}{4\pi r'^2} \frac{\mu_0}{4\pi R} \frac{r + R \cos\theta}{r'} \\ &= -\frac{\mu_0 Q_0}{8\pi\tau} \int dR d\theta \frac{(r + R \cos\theta) R \sin\theta}{\sqrt{R^2 + 2rR \cos\theta + r^2}^3} \\ &= -\frac{\mu_0 Q_0}{4\pi\tau r^2} \int_{c(t-\tau)}^{ct} dR R [u(R+r) - u(R-r)] \\ &= -\frac{\mu_0 Q_0}{4\pi(2\tau)} \times \begin{cases} 0 & \text{inside sphere} \\ \left\{ 1 - \left[ \frac{c(t-\tau)}{r} \right]^2 \right\} & \text{spherical shell} \\ \left\{ \left( \frac{ct}{r} \right)^2 - \left[ \frac{c(t-\tau)}{r} \right]^2 \right\} & \text{outside sphere and for } \tau \leq t \\ \left( \frac{ct}{r} \right)^2 & \text{outside sphere and for } 0 \leq t \leq \tau \\ 0 & \text{for } t \leq 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (9.16)$$

なお、この定積分は複雑そうなので、数式処理のソフトによって求めた。この解と、式 9.13 で

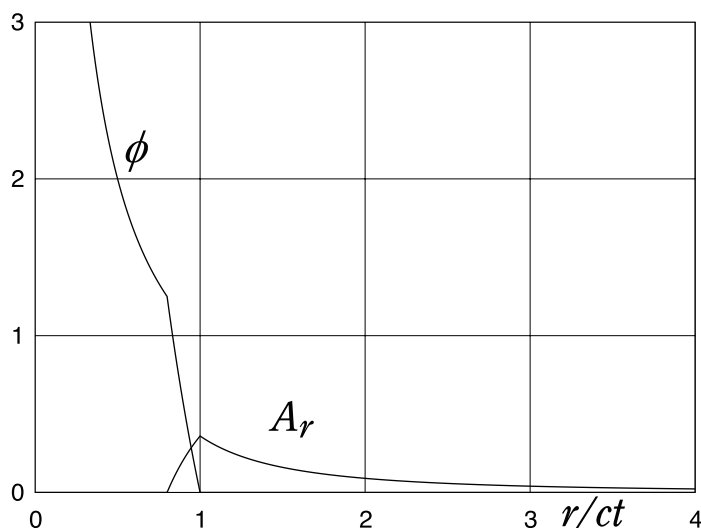


図 9.1 対称励振により発生する対称なポテンシャルの半径方向の変化。

表されるスカラーポテンシャルと組み合わせると、きちんとローレンツ条件を満たしているが、その証明は読者に任せる。これらのポテンシャルを半径方向に計算した結果を、図 9.1 に示す。

ここで得られたスカラーポテンシャルとベクトルポテンシャルから電場や磁場を計算することができる。その結果、まず  $\mathbf{A}$  の放射対称性から  $\mathbf{B} = 0$  となる。また  $\mathbf{E} = -\text{grad } \phi - \partial \mathbf{A} / \partial t$  の計算結果は次のようになる。

$$\mathbf{E} = \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0 r^2} \times \begin{cases} 0 & \text{for } t \leq 0 \\ t & \text{for } 0 \leq t \leq \tau \\ \tau & \text{for } \tau \leq t \end{cases} \quad (9.17)$$

最初の過渡的な時間を除くと、電場は全領域にわたってクーロン型の形をしている。また、過渡的な時間も、最終的な値に全領域が比例的に立ち上がっているだけである。

不思議なことに、電場には光速の効果が現れてこない。これは次のように理解できる。まず最初に、原点に向かう電流を全領域に強制的に流したが、原点での電流連続性から、逆向きに変位電流が流れざるをえなくなる。変位電流は電場の時間微分に比例するので、電場が全領域に発生することになる。その後、電流を止めるが、このときには原点の電荷が作る伝播域内部の電場との連続性から、外部にも同じ形の電場が残存せざるを得ない。つまり、電荷発生後は常に、全領域にクーロン型の電場が存在することになるのである。

さて、全領域に電場が存在するのならば、導体中にそれに比例した電流が流れることになり、結局、見かけ誘電緩和過程には光速が現れないことになるのである。

なお、ここに示すような空間対称性のよい問題に対しては、ローレンツ条件を利用して  $\mathbf{A}$  を計

算するほうが楽である。ローレンツ条件を書き換えると次のような  $\text{div } \mathbf{A}$  に関する式が得られる。

$$\text{div } \mathbf{A} = -\varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad (9.18)$$

つまり、 $-\partial\phi/\partial t$  を電荷のように思って、ガウスの法則により電場を求める手法を利用して、 $\mathbf{A}$  を求めるという方法である。まず  $-\varepsilon_0 \mu_0 \partial\phi/\partial t$  を求めておこう。

$$-\varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} = -\frac{\mu_0 Q_0}{4\pi r \tau} \times \begin{cases} 0 & \text{inside sphere} \\ 1 & \text{spherical shell} \\ 0 & \text{outside sphere} \end{cases} \quad (9.19)$$

この値の半径  $r$  までの体積積分を球面の面積  $4\pi r^2$  で除したものが  $A_r$  となる。この結果は式 9.16 と完全に一致する。

なお、これらの  $\tau \rightarrow 0$  の極限を示すと、次のようになる。

$$\phi = \frac{Q_0}{4\pi \varepsilon_0 r} \times \begin{cases} 1 & \text{inside sphere} \\ 0 & \text{outside sphere} \end{cases} \quad (9.20)$$

$$A_r = -\frac{\mu_0 c^2 Q_0 t}{4\pi r^2} \times \begin{cases} 0 & \text{inside sphere} \\ 1 & \text{outside sphere} \end{cases} \quad (9.21)$$

まとめると、スカラーポテンシャルは、クーロンポテンシャルをほぼ  $r = ct$  の付近まで影響させながら、徐々にその影響域を光速で拡げていく。一方、そのスカラーポテンシャルの裾野を拡げるために、ベクトルポテンシャルが無限遠から、この裾野まで内向きに存在する。このベクトルポテンシャルは一点で観測する限り時間とともに増大し、境界が到達したとたんに消滅する。また境界とともに移動しながら観測していると、その最大値は時間に反比例して減衰していく。最後には無限遠まで拡がったスカラーポテンシャルだけが存在することになる。

誘電緩和の場合には、このようにして注入によりでき上がった電荷が漏れ電流によって、徐々に減衰していく。つまり、対称電流注入の場合、誘電緩和には光速の効果は見えてこない。

## 9.2.2 非対称励振

続いて、非対称に電荷を注入する場合を考えよう。 $z$  軸に沿って、負側から直線電線に沿った電流によって、原点に電荷が注入される場合を取り扱おう。またしても、 $0 \leq t \leq \tau$  の時間、一定電流  $Q_0/\tau$  が流れたものとする。

電荷だけに注目すると、前小節と同じ形をしているので、それが作るスカラーポテンシャルは、式 9.13 と変わらない。一方、電流の作るベクトルポテンシャルであるが、 $z$  軸から円柱座標で  $R$  離れた観測点で、時刻  $t$  に観測されるベクトルポテンシャルは、伝播遅延があるため、そこからの半径が  $c(t - \tau)$  以上でかつ  $ct$  以下に存在する電流だけとなる。今度は電流が直線上にしか存在しないため、その計算はかなり簡単なものになる。

このことを考えて  $\mathbf{A}$  を求めると次のようになる。なお、観測点の  $z$  が十分負の場合を、最初に取り扱おう。電流の流れている  $z$  軸上の源の座標を  $z'$  としておこう。すると、上記の条件は



$c(t - \tau) \leq \sqrt{(z' - z)^2 + R^2} \leq ct$  となるので、 $\sqrt{c^2(t - \tau)^2 - R^2} \leq |z' - z| \leq \sqrt{c^2 t^2 - R^2}$  となる。つまり、電流路の二箇所から影響を受けることになる。なお、 $R$  が大きくなってくると、この二箇所は連続し、さらに  $ct \leq R$  となると、この条件を満たす領域は消滅する。なお、下記の定積分の区間で「,」で複数の区間が書かれているものは、複数の不連続な区間での定積分をまとめて記述したものである。計算上は上付きの値の代入結果を加算し、下付きの値の代入結果を減算すればよい。

$$\begin{aligned}
 A_z &= \frac{\mu_0 Q_0}{4\pi\tau} \int dz' \frac{1}{\sqrt{(z' - z)^2 + R^2}} \\
 &= \frac{\mu_0 Q_0}{4\pi\tau} \times \begin{cases} \log \left( z' - z + \sqrt{(z' - z)^2 + R^2} \right) \Big|_{z - \sqrt{c^2 t^2 - R^2}, z + \sqrt{c^2(t - \tau)^2 - R^2}}^{z - \sqrt{c^2(t - \tau)^2 - R^2}, z + \sqrt{c^2 t^2 - R^2}} & \text{inside cylinder} \\ \log \left( z' - z + \sqrt{(z' - z)^2 + R^2} \right) \Big|_{z - \sqrt{c^2 t^2 - R^2}}^{z + \sqrt{c^2 t^2 - R^2}} & \text{cylindrical shell} \\ 0 & \text{outside cylinder} \end{cases} \\
 &= \frac{\mu_0 Q_0}{4\pi\tau} \times \begin{cases} \log \frac{(ct + \sqrt{c^2 t^2 - R^2}) [c(t - \tau) - \sqrt{c^2(t - \tau)^2 - R^2}]}{(ct - \sqrt{c^2 t^2 - R^2}) [c(t - \tau) + \sqrt{c^2(t - \tau)^2 - R^2}]} & \text{inside cylinder} \\ \log \frac{ct + \sqrt{c^2 t^2 - R^2}}{ct - \sqrt{c^2 t^2 - R^2}} & \text{cylindrical shell} \\ 0 & \text{outside cylinder} \end{cases} \quad (9.22)
 \end{aligned}$$

なお、式中に書かれた各範囲は、 $z \leq 0$  で、かつ原点を囲む球殻を除いた次のような領域である。

$$\begin{cases} \text{inside cylinder:} & R \leq c(t - \tau) \\ \text{cylindrical shell:} & c(t - \tau) \leq R \leq ct \\ \text{outside cylinder:} & ct \leq R \end{cases} \quad (9.23)$$

ただし、この話は観測点が原点に近くなってくると成立しなくなってくる。例えば、原点のすぐ近傍では、電流路の一箇所からしか影響を受けない。丁寧に検討していくと、上記以外に次のよう

ないいくつかの領域に分けられることが分かる。なお、 $r$  は原点からの距離である。

$$\begin{aligned}
 A_z &= \frac{\mu_0 Q_0}{4\pi\tau} \times \left\{ \begin{array}{ll} \log \left( z' - z + \sqrt{(z' - z)^2 + R^2} \right) \Big|_{z - \sqrt{c^2(t-\tau)^2 - R^2}}^{z - \sqrt{c^2 t^2 - R^2}} & \text{inside sphere} \\ \log \left( z' - z + \sqrt{(z' - z)^2 + R^2} \right) \Big|_{z - \sqrt{c^2 t^2 - R^2}, z + \sqrt{c^2(t-\tau)^2 - R^2}}^{z - \sqrt{c^2(t-\tau)^2 - R^2}, 0} & \text{spherical shell, } z \leq 0, \text{ and inside cylinder} \\ \log \left( z' - z + \sqrt{(z' - z)^2 + R^2} \right) \Big|_{z - \sqrt{c^2 t^2 - R^2}}^0 & \text{spherical shell elsewhere above} \\ 0 & \text{outside sphere, } 0 \leq z \end{array} \right. \\
 &= \frac{\mu_0 Q_0}{4\pi\tau} \times \left\{ \begin{array}{ll} \log \frac{c(t-\tau) - \sqrt{c^2(t-\tau)^2 - R^2}}{ct - \sqrt{c^2 t^2 - R^2}} & \text{inside sphere} \\ \log \frac{(\sqrt{z^2 + R^2} - z) [c(t-\tau) - \sqrt{c^2(t-\tau)^2 - R^2}]}{(ct - \sqrt{c^2 t^2 - R^2}) [c(t-\tau) + \sqrt{c^2(t-\tau)^2 - R^2}]} & \text{spherical shell, } z \leq 0, \text{ and inside cylinder} \\ \log \frac{\sqrt{z^2 + R^2} - z}{ct - \sqrt{c^2 t^2 - R^2}} & \text{spherical shell elsewhere above} \\ 0 & \text{outside sphere, } 0 \leq z \end{array} \right. \quad (9.24)
 \end{aligned}$$

まず、 $A_z$  は、すべての境界で連続的な関数となっている。Lorentz 条件の成立を検証しておく。  $\text{div } \mathbf{A} = \partial A_z / \partial z$  であるから、上記  $A_z$  の中で、 $z$  に依存するものを探してみると、spherical shell のところだけである。また  $\partial\phi/\partial t$  も同じ領域にしか存在しない。したがって、その領域だけで検証しておけばよいことになる。

$$\text{div } \mathbf{A} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial\phi}{\partial t} = \frac{\mu_0 Q_0}{4\pi\tau} \left[ \frac{1}{\sqrt{z^2 + R^2} - z} \left( \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}} - 1 \right) + \frac{1}{r} \right] = 0 \quad (9.25)$$

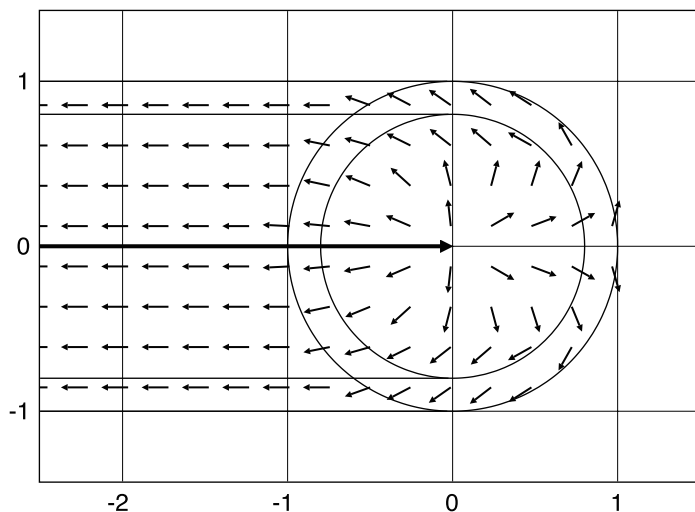


図 9.2 非対称励振により発生する電場は、注入先より注入元へ向う。

電場と磁場は、これらのポテンシャルを利用して簡単に計算することができる。

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E} &= -\text{grad } \phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \\
 &= \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0} \times \left\{ \begin{array}{ll} \left[ \frac{\mathbf{r}}{r^3} - \frac{\mathbf{k}}{c\tau} \left( \frac{1}{\sqrt{c^2(t-\tau)^2 - R^2}} - \frac{1}{\sqrt{c^2t^2 - R^2}} \right) \right] & \text{inside sphere} \\ \left[ \frac{\mathbf{r} t}{r^3 \tau} - \frac{\mathbf{k}}{c\tau} \left( \frac{2}{\sqrt{c^2(t-\tau)^2 - R^2}} - \frac{1}{\sqrt{c^2t^2 - R^2}} \right) \right] & \text{spherical shell, } z \leq 0, \text{ and inside cylinder} \\ \left( \frac{\mathbf{r} t}{r^3 \tau} - \frac{\mathbf{k}}{c\tau} \frac{1}{\sqrt{c^2t^2 - R^2}} \right) & \text{spherical shell, } z \leq 0, \text{ and elsewhere above} \\ \frac{\mathbf{k}}{c\tau} \left( \frac{2}{\sqrt{c^2(t-\tau)^2 - R^2}} - \frac{2}{\sqrt{c^2t^2 - R^2}} \right) & \text{inside cylinder} \\ \frac{\mathbf{k}}{c\tau} \left( -\frac{2}{\sqrt{c^2t^2 - R^2}} \right) & \text{cylindrical shell} \\ 0 & \text{outside above regions} \end{array} \right. \quad (9.26)
 \end{aligned}$$

この電場を図 9.2 に示しておこう。

$$\begin{aligned}
\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A} &= -\mathbf{t} \frac{\partial A_z}{\partial R} = \frac{\mu_0 Q_0}{4\pi\tau} \mathbf{t} \\
&\times \left\{ \begin{array}{l}
\left[ -\frac{1}{[c(t-\tau) - \sqrt{c^2(t-\tau)^2 - R^2}] \sqrt{c^2(t-\tau)^2 - R^2}} \right. \\
\left. + \frac{1}{(ct - \sqrt{c^2 t^2 - R^2}) \sqrt{c^2 t^2 - R^2}} \right] \quad \text{inside sphere} \\
\left[ -\frac{1}{[c(t-\tau) - \sqrt{c^2(t-\tau)^2 - R^2}] \sqrt{c^2(t-\tau)^2 - R^2}} \right. \\
+ \frac{1}{[c(t-\tau) + \sqrt{c^2(t-\tau)^2 - R^2}] \sqrt{c^2(t-\tau)^2 - R^2}} \\
\left. - \frac{1}{(\sqrt{z^2 + R^2} - z) \sqrt{z^2 + R^2}} + \frac{1}{(ct - \sqrt{c^2 t^2 - R^2}) \sqrt{c^2 t^2 - R^2}} \right] \\
\quad \text{spherical shell, } z \leq 0, \text{ and inside cylinder} \\
\left[ -\frac{1}{(\sqrt{z^2 + R^2} - z) \sqrt{z^2 + R^2}} + \frac{1}{(ct - \sqrt{c^2 t^2 - R^2}) \sqrt{c^2 t^2 - R^2}} \right] \\
\quad \text{spherical shell elsewhere above} \\
\left[ -\frac{1}{[c(t-\tau) - \sqrt{c^2(t-\tau)^2 - R^2}] \sqrt{c^2(t-\tau)^2 - R^2}} \right. \\
+ \frac{1}{[c(t-\tau) + \sqrt{c^2(t-\tau)^2 - R^2}] \sqrt{c^2(t-\tau)^2 - R^2}} \\
\left. - \frac{1}{(ct + \sqrt{c^2 t^2 - R^2}) \sqrt{c^2 t^2 - R^2}} + \frac{1}{(ct - \sqrt{c^2 t^2 - R^2}) \sqrt{c^2 t^2 - R^2}} \right] \\
\quad \text{inside cylinder} \\
\left[ -\frac{1}{(ct + \sqrt{c^2 t^2 - R^2}) \sqrt{c^2 t^2 - R^2}} + \frac{1}{(ct - \sqrt{c^2 t^2 - R^2}) \sqrt{c^2 t^2 - R^2}} \right] \\
\quad \text{cylindrical shell} \\
0 \quad \text{outside above regions}
\end{array} \right. \quad (9.27)
\end{aligned}$$

ただし、磁場の  $\mathbf{t}$  は、 $z$  軸を中心とする円の接線方向の単位ベクトルである。

この場合、電荷注入の影響は明らかに光速で伝わっていくのが見られる。注入電流と原点の電荷から発生された電磁場は、それらを中心とし距離  $ct$  の領域にのみ存在している。また、比較的近傍では、当初、クーロン電場に加えて、過渡的な電場や磁場が存在するが、それらは次第に消え去っていく。最後にはクーロン電場のみが生き残ることになる。

もし、全空間がごく低いコンダクタンスを有する媒質で埋められていると、誘電緩和は明らかにこの電磁場の支配領域でしか起きないため、誘電緩和現象には光速の影響が現れる。これが、誘電緩和の謎の答えである。

## 9.3 電磁波の発生

前節で示したように、電荷を電流で注入すると、そのまわりに電磁場が形成され、光速で伝播していく。しかし、注入が終了すると、この電磁場はいずれ定常になってしまう。もし、電流を注入したり、引き抜いたりする作業を、交互に行うと、電磁場が交互に作られ、光速で伝わっていく。特に、電磁場の振幅が、遠方で  $1/r$  に比例して行くときに、これを電磁波と呼ぶ。

定常的に変化する源の作るポテンシャルは、式 9.8、および式 9.10 から、遅延時間  $r/c$  が発生することを考えて、

$$\phi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^{j\omega(t-r/c)}}{r} \quad (9.28)$$

$$d\mathbf{A} = \frac{\mu_0 I d\mathbf{r}}{4\pi} \frac{e^{j\omega(t-r/c)}}{r} \quad (9.29)$$

で与えられる\*2。

### 9.3.1 電気モーメントの作る電磁波

先程の類推から、電気モーメントを考え、その二つの間を結ぶ直線上に交番する電流を流して、電荷注入と引き抜きを行う。正電荷が  $(0, 0, \delta/2)$  に、負電荷が  $(0, 0, -\delta/2)$  にあり、その間を電流が結んでいるものとする。また、モーメントの長さ  $\delta$  は十分小さいとする。電荷を微分すると電流になるので、モーメントの大きさを  $\mathbf{p} = p\mathbf{k}$  とすると、以下のように与えられる。

$$Q(t) = \frac{p}{\delta} e^{j\omega t} \quad (9.30)$$

$$I(t) = \frac{p}{\delta} j\omega e^{j\omega t} \quad (9.31)$$

これらの作るポテンシャルは、定常的であることを考えると、次のような式で計算できる。

$$\begin{aligned} \phi &= \frac{p}{4\pi\epsilon_0\delta} \left\{ \frac{e^{j\omega[t-r(\delta/2)/c]}}{r(\delta/2)} - \frac{e^{j\omega[t-r(-\delta/2)/c]}}{r(-\delta/2)} \right\} \doteq -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} (\mathbf{p} \cdot \nabla) \frac{e^{j\omega(t-r/c)}}{r} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} e^{j\omega(t-r/c)} \left( 1 + \frac{j\omega}{c} r \right) \frac{(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}}{r^3} \end{aligned} \quad (9.32)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \frac{\mu_0 \mathbf{p}}{4\pi\delta} \int_{-\delta/2}^{\delta/2} dz' \frac{j\omega e^{j\omega(t-r(z')/c)}}{\sqrt{(z'-z)^2 + R^2}} \\ &= \frac{\mu_0 \mathbf{p}}{4\pi} \frac{j\omega}{r} e^{j\omega(t-r/c)} \end{aligned} \quad (9.33)$$

\*2 物理系の書では、 $e^{j\omega t}$  などは  $e^{-i\omega t}$  と記載される。したがって、物理系の方は、 $i = -j$  として変換して読んでほしい。

ここで、 $r(z')$  は次のように、観測点から  $z$  軸上  $z'$  にある源点までの距離である。 $r(\delta/2)$ 、 $r(-\delta/2)$  などと同様である。

$$r(z') = \sqrt{(z - z')^2 + R^2} \quad (9.34)$$

これらが作る電場および磁場は

$$\text{grad}[(\mathbf{p} \cdot \nabla)f] = \text{grad}\left[(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}) \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r}\right] = \mathbf{p} \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + (\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}) \mathbf{r} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} \right) \quad (9.35)$$

を用いて、次の形で与えられる。

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= -\text{grad} \phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \text{grad} \left[ (\mathbf{p} \cdot \nabla) \frac{e^{j\omega(t-r/c)}}{r} \right] - \frac{\mu_0 \mathbf{p}}{4\pi} \frac{j\omega}{r} \frac{\partial}{\partial t} e^{j\omega(t-r/c)} \\ &= -\frac{e^{j\omega t}}{4\pi\epsilon_0} \left[ \mathbf{p} + \frac{\mathbf{r}}{r} (\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}) \frac{\partial}{\partial r} \right] \left[ \left( 1 + \frac{j\omega r}{c} \right) \frac{e^{-j\omega r/c}}{r^3} \right] + \frac{\mu_0 \mathbf{p}}{4\pi} \frac{\omega^2}{r} e^{j\omega(t-r/c)} \\ &= -\frac{e^{j\omega t}}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \mathbf{p} \left( 1 + \frac{j\omega r}{c} \right) \frac{e^{-j\omega r/c}}{r^3} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\mathbf{r}}{r} (\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}) \left[ \frac{\omega^2}{c^2} \frac{e^{-j\omega r/c}}{r^2} - 3 \left( 1 + \frac{j\omega r}{c} \right) \frac{e^{-j\omega r/c}}{r^4} \right] \right\} + \frac{\mathbf{p}}{4\pi\epsilon_0} \frac{\omega^2}{c^2 r} e^{j\omega(t-r/c)} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \left( 1 + \frac{j\omega r}{c} \right) \frac{3(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r} - r^2\mathbf{p}}{r^5} + \frac{\omega^2}{c^2} \frac{r^2\mathbf{p} - (\mathbf{p} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}}{r^3} \right] e^{j\omega(t-r/c)} \quad (9.36) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \text{rot} \mathbf{A} = \frac{\mathbf{r}}{r} \times \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial r} \\ &= j\omega \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{r} \times \mathbf{p}}{r} \frac{\partial}{\partial r} \frac{e^{j\omega(t-r/c)}}{r} = j\omega \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{r} \times \mathbf{p}}{r} \frac{e^{j\omega(t-r/c)}}{r^2} \left( -\frac{j\omega r}{c} - 1 \right) \\ &= j\omega \frac{\mu_0}{4\pi} \left( 1 + \frac{j\omega r}{c} \right) \frac{\mathbf{p} \times \mathbf{r}}{r^3} e^{j\omega(t-r/c)} \quad (9.37) \end{aligned}$$

電場  $\mathbf{E}$  を見てみると、 $1/\text{距離}^3$ 、 $1/\text{距離}^2$ 、 $1/\text{距離}^1$  に比例して減衰する項があることが分かる。最初の項のグループはモーメントが作る静電場の式と一致している。次のグループは近接場と呼ばれる。最後のグループは、 $\mathbf{A}$  の時間微分から出てきた項であり、比例係数は  $\mu_0 \mathbf{p}/4\pi$  であったが、これを  $\mathbf{p}/4\pi\epsilon_0 c^2$  に書き換えている。これは電磁波と呼ばれる。これら三種類の電磁場は  $c/\omega = \lambda/2\pi$  であることを考えると、 $\lambda/2\pi$  ぐらいの距離で、互いにほぼ等しくなり、それより遠方では電磁波、近接場、静電場の順に見えなくなっていく。

磁場  $\mathbf{B}$  は、 $1/\text{距離}^2$  と  $1/\text{距離}$  の減衰項から構成されているが、前者はビオ・サバルの法則に対応する微小電流要素の作る静磁場そのものであり、後者は電磁波である。

非常に遠方では、電磁波しか観測されなくなるが、電場は  $z$  方向の成分からのみとなり、磁場は  $z$  軸を周回する方向の成分からのみになる。また、これらの実部を見てみると、ともに  $\cos \omega(t-r/c)$  と、同相で変化し、さらに電場が  $z$  方向を向くとき、磁場が  $z$  軸を周回するのと逆方向を向く。

ポインティングベクトルは、 $\mathbf{E}$  と  $\mathbf{B}$  の実部同士の積から、次のようになる。

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0} \operatorname{Re}(\mathbf{E}) \times \operatorname{Re}(\mathbf{B}) = \mathbf{t} \times \mathbf{k} \left( \frac{p_0}{4\pi} \right)^2 \frac{c}{\varepsilon_0} \left( \frac{\omega}{c} \right)^4 \frac{R}{r^3} \cos^2[\omega(t - r/c)] \quad (9.38)$$

$\mathbf{S}$  は  $1/\text{距離}^2$  に比例し、その方向は常に電場と磁場の外積の方向、つまり  $z$  軸から離れる方向を向く。

### 9.3.2 微小電流ループの作る電磁波

交流電流  $Ie^{j\omega t}$  の流れる電流ループも電磁波を発生する。この電流の作るベクトルポテンシャルは、スカラー場のストークスの定理  $\oint_C \phi d\mathbf{r} = \int d\mathbf{S} \times \operatorname{grad} \phi$  を利用して、次式のようになる。

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \oint_C \frac{\mu_0 I}{4\pi} d\mathbf{r}' \frac{e^{j\omega(t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c)}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_S d\mathbf{S}' \times \operatorname{grad}_{\mathbf{r}'} \frac{e^{j\omega(t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c)}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \\ &\doteq -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_S d\mathbf{S}' \times \operatorname{grad} \frac{e^{j\omega(t - r/c)}}{r} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \mathbf{m} \times \operatorname{grad} \frac{e^{j\omega(t - r/c)}}{r} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} e^{j\omega(t - r/c)} \left( 1 + \frac{j\omega r}{c} \right) \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{r}}{r^3} \end{aligned} \quad (9.39)$$

これらから、ただちに電場と磁場が計算できる。

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \\ &= -j\omega \frac{\mu_0}{4\pi} \left( 1 + \frac{j\omega r}{c} \right) \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{r}}{r^3} e^{j\omega(t - r/c)} \\ \mathbf{B} &= \operatorname{rot} \mathbf{A} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \left[ \left( 1 + \frac{j\omega r}{c} \right) \frac{3\mathbf{r}(\mathbf{m} \cdot \mathbf{r}) - r^2 \mathbf{m}}{r^5} - \frac{\omega^2}{c^2} \frac{\mathbf{r}(\mathbf{m} \cdot \mathbf{r}) - r^2 \mathbf{m}}{r^3} \right] e^{j\omega(t - r/c)} \end{aligned} \quad (9.41)$$

今度は磁場  $\mathbf{B}$  のほうに、 $1/\text{距離}^3$ 、 $1/\text{距離}^2$ 、 $1/\text{距離}^1$  に比例して減衰する項のグループがある。それぞれ、ループの作る静磁場、近接場、電磁波に対応している。電場  $\mathbf{E}$  に現れている  $1/\text{距離}^2$ 、 $1/\text{距離}^1$  の項のグループは近接場、電磁波に対応している。

## 第 10 章

# 導体とポテンシャル

導体のある場合のポテンシャルの解析は思ったより面倒である。恐らく、導体という概念が、相対論などのような時空対称システムに似合わないからであろう。しかし、そういつていても始まらないので、可能な限り、導体をポテンシャルで扱う方法を示そう。

### 10.1 導体内でのポテンシャル

まず、通常の導体中の電場、磁場を考えよう。導体中では、前章でも述べたように次式が成立する。

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \quad (10.1)$$

この式を**電流連続の法則** (current continuity law) の式へ代入しよう。

$$\operatorname{div} \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = \sigma \operatorname{div} \mathbf{E} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \rho + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (10.2)$$

これは、**誘電緩和** (dielectric relaxation) の式である。したがって、十分時間が経つと、 $\rho = 0$  としてよい。つまり、電荷は導体の表面だけに存在するとしてよい。さらに、 $\sigma$  が十分大きいと、 $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$  の関係から、有限の  $\mathbf{J}$  を達成するためには  $\mathbf{E}$  は限りなく小さくなる。

導体は  $\sigma$  の非常に大きな材料であるから、この誘電緩和は一瞬にして起こることとなる。また、 $\mathbf{J}$  が有限になるためには、 $\mathbf{E}$  がほとんど 0 でなければならなくなる。逆に、 $\mathbf{E} = 0$  を仮定すると、まず、 $\varepsilon_0 \operatorname{div} \mathbf{E} = \rho$  より、導体の内部では

$$\rho = 0 \quad (10.3)$$

が得られる。この結果は誘電緩和の最終値と同じ結論である。さらに電磁誘導の式  $\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t$  の左辺が 0 となるから次式が得られる。

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0 \quad (10.4)$$



つまり、磁場が時間変動しないという**磁場凍結** (freezing of magnetic field) の原理が導かれる。さらに、マクスウェル方程式の  $\text{rot } \mathbf{B}$  式を時間微分したものに  $\mathbf{E}$  や  $\mathbf{B}$  の条件を代入することにより、 $\partial \mathbf{J} / \partial t = 0$  が誘導できる。なお、超伝導体中では  $\mathbf{B} = 0$  が成立したが、これは超伝導体が単なる抵抗 0 の導体ではないことを示している。

さて、時間変動する場に対しては  $\partial / \partial t \rightarrow j\omega$  と置くことができる。この場合、ほぼ直流に近い周波数の成分についても  $\mathbf{B} = 0$  が誘導できる。この状態を、特に**準静的** (quasi-static) と呼ぶ。以上の結果から、電荷は導体表面にだけしか存在しないことが分かった。また、準静的な場合には、電流も導体表面にだけしか存在しない。以後、準静的な条件で議論する。

## 10.2 導体表面でのポテンシャル

導体の表面を考えよう。ここで、表面を挟むように置かれた円板状の領域を考える。ここで、電磁誘導の式の積分形を適用してみる。電場の表面垂直方向の成分は外積に効かないこと、導体内の電場は 0 であること、円板は十分薄いことから、その体積積分は限りなく小さくできることを考慮すると、導体外の電場に対し、次の式が得られる。

$$\mathbf{E}_t = 0 \quad (10.5)$$

また、同じ形状の領域に、磁場の発散積分が 0 であることを適用してみると、磁場の表面平行の成分は内積に効かないこと、導体内の磁場は 0 であることから次の式が得られる。

$$B_n = 0 \quad (10.6)$$

これら二つの式が、導体表面付近の空間側の電場磁場が満たすべき条件である。空間中の電磁場に対し、これらの条件は**境界条件** (boundary condition) と呼ばれる。さらに、同じ円板状の領域に電場の発散積分を適用してみると、面電荷密度に関する次の式が得られる。

$$\sigma = \varepsilon_0 E_n \quad (10.7)$$

同様に、磁場の回転積分を求めてみると、面電流密度に関する次の式が得られる。

$$\mathbf{K} = \mathbf{n} \times \frac{\mathbf{B}_t}{\mu_0} \quad (10.8)$$

これらの関係を、[図 10.1](#) に示す。

次に導体内のポテンシャルについて考えよう。このとき次の式が成立する。

$$\mathbf{E} = -\text{grad } \phi - j\omega \mathbf{A} = 0 \quad (10.9)$$

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A} = 0 \quad (10.10)$$

第二式より  $\mathbf{A}$  を適当なスカラー関数  $\phi$  の勾配で表すことができる。

$$\mathbf{A} = \text{grad } \chi \quad (10.11)$$



図 10.1 導体表面付近の電場と面電荷および磁場と面電流。厳密に静的な場合には  $B_0$  という固定磁場が追加される。

これを第一式に代入すると、次式を得ることができる。

$$\phi = -j\omega\chi \tag{10.12}$$

特に準静的もしくは静的な場合には、式 10.9 より  $\text{grad } \phi = 0$  となり、 $\phi = \text{const}$  となる。これらの様子を図 10.2 に示す。

導体表面では、これらのポテンシャルがそのまま、導体外へも接続していくことになるが、 $E_n$ 、 $B_t$  とも導体表面に誘導された電荷分、電流分の不連続を持っている。前者の不連続は  $\partial\phi/\partial n$  の不連続で説明でき、後者の不連続は  $\partial A_t/\partial n$  の不連続で説明できる。

### 10.3 導体と電荷の作る静的なスカラーポテンシャル

導体のそばに電荷を置くと、導体上には正負逆の電荷が分布して誘導される。スカラーポテンシャルは、これらの電荷によって構成されるが、誘導電荷 (induced charge) は、電場が導体表面に垂直になるように配置されなければならない。動的な場合には、電場にはベクトルポテンシャルの効果が入ってくるので、結構面倒なことになるが、静的な場合には導体表面で  $\phi = \text{const}$  となる。

例えば、一個の電荷と無限平面状の導体の作るスカラーポテンシャルを見てみよう。まず、孤立電荷の作るスカラーポテンシャルは次式で与えられる。

$$\phi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - a)^2}} \tag{10.13}$$

ただし、導体は  $xy$  平面にあり、孤立電荷の高さは  $z = a$  とする。

導体上の誘導電荷はこの  $z < 0$  側のポテンシャルを打ち消す必要があるので、誘導電荷が  $z < 0$



図 10.2 導体内のポテンシャル。電場と異なり、ポテンシャルは表面で連続でなければならない。面垂直方向の微分は表面で不連続となる。

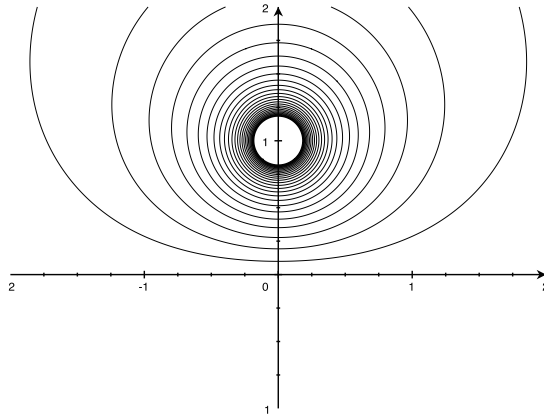


図 10.3 下半分に導体のある場合の点電荷の作るスカラーポテンシャル。あまり値が大きくなる点電荷付近は描画を省いている。

に作るポテンシャルは次の形をしていなければならない。

$$\phi = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - a)^2}} \quad (10.14)$$

誘導電荷は上下対称のポテンシャルを作っているはずなので、 $z > 0$  のポテンシャルはこの式の  $z \rightarrow -z$  とすれば得られる。

$$\phi = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z + a)^2}} \quad (10.15)$$

これらの総和は  $z \leq 0$  で当然 0、また  $z > 0$  では次のようになる。

$$\phi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - a)^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z + a)^2}} \right] \quad (10.16)$$

このポテンシャルを図 10.3 に示す。

この結果より、誘導電荷密度は  $-\epsilon_0 \text{grad } \phi|_{z=0}$  より計算することができる。

$$\sigma = -\frac{Q}{4\pi} \frac{2a}{\sqrt{x^2 + y^2 + a^2}^3} \quad (10.17)$$

当然のことながら、これをこの平面上で積分すると、 $-Q$  となる。

なお、この空間側におけるポテンシャルは、導体を鏡面に見立てたときの鏡像に位置に  $-Q$  の電荷を置き、誘導電荷を 0 としたときのポテンシャルの総和と一致する。こうした計算法は鏡像法と呼ばれる。

## 10.4 導体と平行な電流素片の作る静的なベクトルポテンシャル

無限平面の導体のそばに電流素片を置いた場合を考えよう。まず、電流素片を  $xy$  平面に平行に  $x$  方向に置いた場合を扱おう。当然、この電流素片は  $x$  成分しか持たないから、 $A_x$  しか発生しない。しかも、電流素片の位置に  $+$  成分があるだけなので、点電荷が作るスカラーポテンシャルのように、 $1/r$  に比例する。

$$A_x = \frac{\mu_0 I ds}{4\pi} \frac{1}{r} = \frac{\mu_0 I ds}{4\pi} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z-a)^2}} \quad (10.18)$$

導体上の誘導電流 (induced current) は  $x$  方向のものだけで十分であるので、領域で  $A_y = 0$ 、 $A_z = 0$  であろう。したがって、導体内では  $\text{rot } \mathbf{A} = 0$  の条件より、 $A_x$  は  $x$  のみの関数で、さらに  $\text{div } \mathbf{A} = 0$  より  $A_x = \text{const}$  でなければならない。導体中で  $A_x = 0$  としても特に問題がないので、今後、そのようにする。

このようにすると、前節のスカラーポテンシャルと同様な扱いで、空間側のベクトルポテンシャルを次のように求めることができる。

$$A_x = \frac{\mu_0 I ds}{4\pi} \left[ \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z-a)^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z+a)^2}} \right] \quad (10.19)$$

これから磁場を計算すると、次のようになる。

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I ds}{4\pi} \left[ \frac{(0, a-z, y)}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z-a)^2}^3} + \frac{(0, z+a, -y)}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z+a)^2}^3} \right] \quad (10.20)$$

この場合も、空間側のポテンシャルと磁場は、元の電流素片の鏡像の位置に、逆向きの電流素片を置いたときの重ね合わせの場となっている。つまり、鏡像法が有効である。

得られたベクトルポテンシャルを図 10.4 に示す。図からは読みとりづらいかも知れないが、 $z = 0$  に向って単調に減少してきた  $A_x$  が、 $z \leq 0$  から 0 となる。このように  $\partial A_x / \partial z$  が変化するところには、誘導電流が存在するはずである。あるいは、同じことであるが、 $\mathbf{A}$  から  $z = 0$  近傍の  $\mathbf{B}$  を求めても、導体表面に誘導電流が流れていることが計算でき、その値は次のようになる。

$$K_x = -\frac{I ds}{4\pi} \frac{2}{\sqrt{x^2 + y^2 + a^2}} \quad (10.21)$$

## 10.5 導体と垂直な電流素片の作る静的なベクトルポテンシャル

電流素片が導体に垂直な場合の取り扱いはいさやつかいである。というのは誘導電流が導体平面に沿ってしか流れられないからである。つまり、電流素片の作る  $A_z$  に対し、誘導電流は面対称な

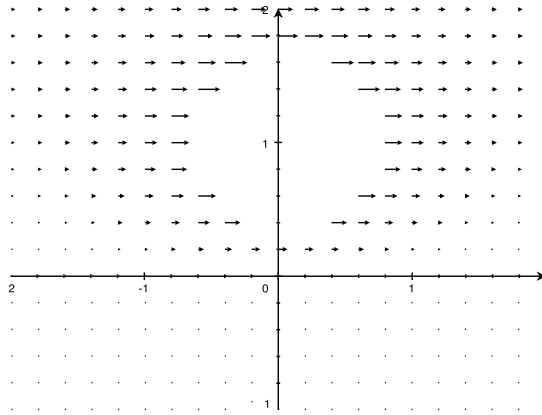


図 10.4 下半分にある導体に平行な電流が作るベクトルポテンシャル。ベクトルの大きさは図 10.3 の  $\phi$  と比例する。

$A_x$ 、 $A_y$  なるベクトルポテンシャルを作り出すからである。まず、電流素片の作る  $A_z$  はいままで  
の取り扱いと同様であり、次のようになる。

$$A_z = \frac{\mu_0 I ds}{4\pi} \frac{1}{r} = \frac{\mu_0 I ds}{4\pi} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - a)^2}} \tag{10.22}$$

これ以外に  $z$  方向を向いた電流成分はないから、この式は空間のみならず、導体の中にも成立する。

導体内には磁場がないはずなので、この  $A_z$  の作る磁場を消去するように  $A_x$ 、 $A_y$  が発生しているはずである。簡単な計算法は、 $\mathbf{A} = \text{grad } \chi$  の式より得られる  $A_z = \partial\chi/\partial z$  を利用し、 $\chi$  を求める。

$$\chi = \int_z dz A_z = -\frac{\mu_0 I ds}{4\pi} \log \left[ (a - z) + \sqrt{x^2 + y^2 + (z - a)^2} \right] \tag{10.23}$$

これから、導体中の  $A_x$ 、 $A_y$  を求めることができる。

$$A_x = -\frac{\mu_0 I ds}{4\pi} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - a)^2} \left[ (a - z) + \sqrt{x^2 + y^2 + (z - a)^2} \right]} \tag{10.24}$$

$$A_y = -\frac{\mu_0 I ds}{4\pi} \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - a)^2} \left[ (a - z) + \sqrt{x^2 + y^2 + (z - a)^2} \right]} \tag{10.25}$$

導体上の電流は、おそらく導体面の上下に対称的なポテンシャルを作るであろうから、空間に作られるポテンシャルは上式の  $-z \rightarrow +z$  とすればよい。

$$A_x = -\frac{\mu_0 I ds}{4\pi} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z + a)^2} \left[ (z + a) + \sqrt{x^2 + y^2 + (z + a)^2} \right]} \tag{10.26}$$

$$A_y = -\frac{\mu_0 I ds}{4\pi} \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z + a)^2} \left[ (z + a) + \sqrt{x^2 + y^2 + (z + a)^2} \right]} \tag{10.27}$$

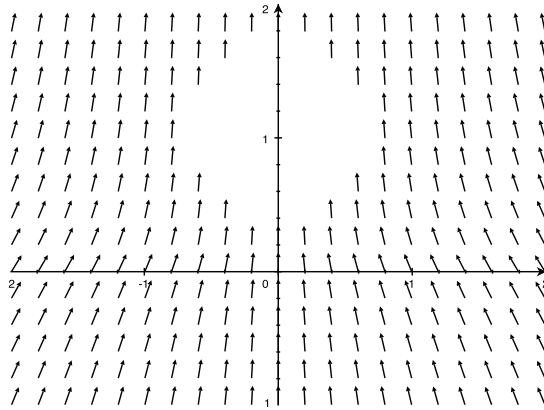


図 10.5 下半分にある導体に垂直な電流が作るベクトルポテンシャル。スカラーポテンシャルと異なり、ベクトルが導体内にも存在する。

これと、もともとの電流素片が作った  $A_z$  の三つを組み合わせると、空間中の電磁場を計算することがきる。

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I ds}{4\pi} (-y, x, 0) \left[ \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z-a)^2}^3} + \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z+a)^2}^3} \right] \quad (10.28)$$

図 10.5 に、このベクトルポテンシャルの計算結果を示す。誘導電流の存在は、この図の場合、一層、見づらくなっているが、 $A_x$  にのみ着目すると、 $z = 0$  付近で内向きに最大となっているので、その辺に誘導電流があることが予想される。 $\partial A / \partial z$  の変化量よりきちんと計算すると、次のようになる。

$$\mathbf{K} = -\frac{I ds}{4\pi} \frac{2(x, y, 0)}{\sqrt{x^2 + y^2 + a^2}^3} \quad (10.29)$$

計算された磁場を見ると、元の電流素片の作る磁場と、それと鏡像の位置に置かれた同じ向きの電流素片の作る磁場の和になっているが、いままでは、鏡像は逆の符号を持っていたのに対し、ここでは同じ向き、つまり同符号である。また、ベクトルポテンシャルのほうは鏡像の作るポテンシャルがない代わりに、平面状の誘導電流の作るポテンシャルが補完している。つまり、いままでの鏡像法のようには処理できないのである。

前節の鏡像法と同様に、元の電流源と逆向きの鏡像を利用した計算法も試みたが、残念ながら、これまでのところ、よい結果は得られていない。

## 10.6 方形柱ソレノイドの作る磁場

断面が円形のソレノイドの代わりに、断面が  $a \times b$  の長方形のソレノイドの作るベクトルポテンシャルを考えよう。電流はこの長方形に沿って流れるので、 $K_x$ 、 $K_y$  しか存在しない。まず、

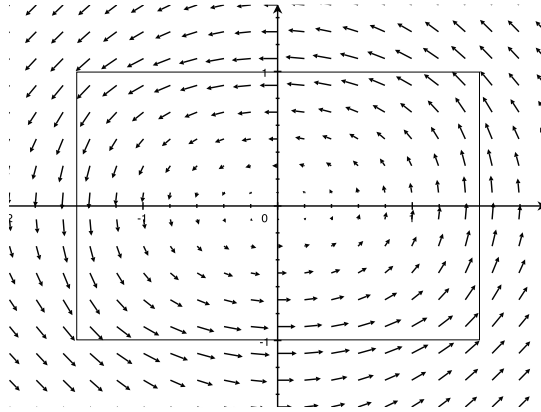


図 10.6 方形ソレノイドの作るベクトルポテンシャルの上面図。

$K_x$  の作るポテンシャルを考えよう。 $K_x$  は  $y = \pm b$  の位置に  $-a$  から  $a$  の区間存在する。 $z$  方向の直線の作るポテンシャルは、直線電荷の作るポテンシャルと同様に  $r$  を直線からの距離として、 $-\log r$  に比例するから、 $A_x$  は次のようになる。また、 $A_y$  も同様にして得られる。

$$\begin{aligned}
 A_x &= \frac{\mu_0 K_x}{4\pi} \int_{-a}^a dx' \log \frac{(x' - x)^2 + (y - b)^2}{(x' - x)^2 + (y + b)^2} \\
 &= \frac{\mu_0 K_x}{4\pi} \left[ 2(b - y) \left( \tan^{-1} \frac{a - x}{b - y} + \tan^{-1} \frac{a + x}{b - y} \right) \right. \\
 &\quad \left. - 2(b + y) \left( \tan^{-1} \frac{a - x}{b + y} + \tan^{-1} \frac{a + x}{b + y} \right) \right. \\
 &\quad \left. + (a - x) \log \frac{(a - x)^2 + (b - y)^2}{(a - x)^2 + (b + y)^2} + (a + x) \log \frac{(a + x)^2 + (b - y)^2}{(a + x)^2 + (b + y)^2} \right]
 \end{aligned} \tag{10.30}$$

$$\begin{aligned}
 A_y &= \frac{\mu_0 K_x}{4\pi} \int_{-b}^b dy' \log \frac{(y' - y)^2 + (x + a)^2}{(y' - y)^2 + (x - a)^2} \\
 &= \frac{\mu_0 K_x}{4\pi} \left[ -2(a - x) \left( \tan^{-1} \frac{b - y}{a - x} + \tan^{-1} \frac{b + y}{a - x} \right) \right. \\
 &\quad \left. + 2(a + x) \left( \tan^{-1} \frac{b - y}{a + x} + \tan^{-1} \frac{b + y}{a + x} \right) \right. \\
 &\quad \left. - (b - y) \log \frac{(a - x)^2 + (b - y)^2}{(a + x)^2 + (b - y)^2} - (b + y) \log \frac{(a - x)^2 + (b + y)^2}{(a + x)^2 + (b + y)^2} \right]
 \end{aligned} \tag{10.31}$$

このベクトルポテンシャルを図 10.6 に示すが、およそ、円柱のソレノイドの作るポテンシャルと酷似しており、長方形に近いところでそれに合うように変形した形となる。

これらから計算した磁場は  $B_z$  のみになり、次のようになる。

$$B_z = \frac{\mu_0 K}{2\pi} \left[ \left( \tan^{-1} \frac{a-x}{b-y} + \tan^{-1} \frac{b-y}{a-x} \right) + \left( \tan^{-1} \frac{a+x}{b-y} + \tan^{-1} \frac{b-y}{a+x} \right) \right. \\ \left. + \left( \tan^{-1} \frac{a-x}{b+y} + \tan^{-1} \frac{b+y}{a-x} \right) + \left( \tan^{-1} \frac{a+x}{b+y} + \tan^{-1} \frac{b+y}{a+x} \right) \right] \quad (10.32)$$

長方形の中にいるときには、すべての  $\tan^{-1}$  の中が正になり、前から二項ずつの和が  $\pi/2$  となるため  $B_z = \mu_0 K$  となる。また長方形外にいるときは、 $\tan^{-1}$  の分母や分子を構成している項のーから三個が負となり、結局、二個の  $\tan^{-1}$  が  $-\pi/2$  となるため、合計は 0 となる。

同じ命題を鏡像法で解いてみよう。四枚のいずれの導体を鏡としてもよいが、ここでは  $xz$  面に平行な二枚の導体を鏡と考えよう。これらの鏡に対し、 $yz$  面に流れる電流の反鏡像を考える。多重反射する結果、 $yz$  面に平行な  $x = a$  を通る無限平面上の  $y$  方向の連続的な面電流と、 $x = -a$  を通る無限平面上の  $-y$  方向の連続的な面電流となる。

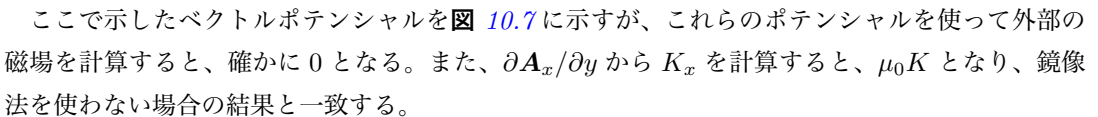
これらの面電流の作るポテンシャルは  $A_y$  だけとなり、簡単に計算できる。

$$A_y = \frac{\mu_0 K}{2} (|x+a| - |x-a|) = \mu_0 K \begin{cases} -a & (x \leq -a) \\ x & (-a \leq x \leq a) \\ a & (a \leq x) \end{cases} \quad (10.33)$$

ソレノイド内部のみに関心がある場合には、これで十分である。その際、鏡面となっている導体上の面電流密度は、磁場の値から推定するのがもっとも簡単である。また、鏡面としなかった導体上の面電流密度は、 $\partial A_y / \partial x$  から計算でき、結果は注入電流と一致する。

ソレノイド外部のポテンシャルについては、 $A_y$  は上記のままである。また  $A_z = 0$  である。 $A_x$  はいままでのように  $A_y$  を  $y$  で積分した  $\chi$  を利用し、それを  $x$  で微分することで得られる。ただし、積分定数は  $x$  の関数でもよいことを利用し、 $A_x$  の連続性を確保している。

$$A_x = \mu_0 K \begin{cases} b & (y \leq -b) \\ -y & (-b \leq y \leq b) \\ -b & (b \leq y) \end{cases} \quad (10.34)$$

ここで示したベクトルポテンシャルを  10.7 に示すが、これらのポテンシャルを使って外部の磁場を計算すると、確かに 0 となる。また、 $\partial A_x / \partial y$  から  $K_x$  を計算すると、 $\mu_0 K$  となり、鏡像法を使わない場合の結果と一致する。

ただし、 $K_x$  も  $K_y$  も、周辺では方形の延長線にまで存在することになっており、やや問題がある。これについては、 $\chi$  をもう少し上手に選ぶなど、今後の改善の余地がありそうであるが、計算はすこぶる速い。

この節の計算で分かるように、鏡像法を使った計算のほうがはるかに簡単である。一般に、導体の存在する系のポテンシャルの計算は次のように行うのが楽そうである。

1. 鏡像法など、何らかの方法を利用して、導体表面で  $\mathbf{E}_t = 0$ 、 $B_n = 0$  となるような空間側のポテンシャルを求める。



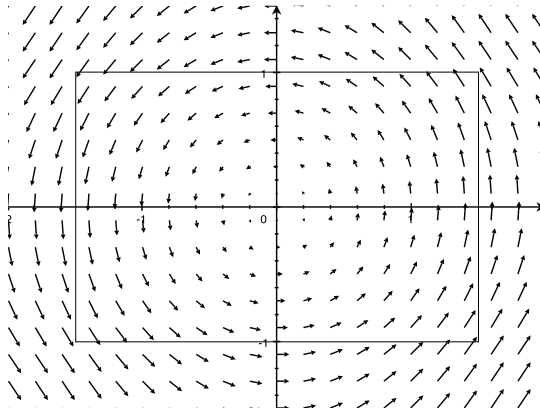


図 10.7 方形ソレノイドの作るベクトルポテンシャルの別解の上面図。

2. 導体内で電磁場が 0 となることを利用して、導体内のポテンシャルを求める。
3. ポテンシャルの勾配の不連続性を利用して、面電荷密度と面電流密度を求める。

あるいは、

1. 鏡像法など、何らかの方法を利用して、導体表面で  $E_t = 0$ 、 $B_n = 0$  となるような空間側のポテンシャルを求める。
2. 導体表面の電磁場から、面電荷密度と面電流密度を求める。
3. 導体があることを無視して、これらの面電荷や面電流が作るポテンシャルを再計算する。

いずれの方法でも、正しいポテンシャルを得ることができるが、前者では、無限遠にも源があるような解となる。一方、後者の場合には、無限遠には源がない十分遠方で 0 となってくれるようなポテンシャルが得られる。

なお、後者の場合でも、無限に長い直線電流や無限に広い平面を流れる電流がある場合には、無限遠に反対向きの対向電流がなければならぬので、対数関数や距離に比例するポテンシャルしか得られない。

## 10.7 導波管中の電磁波

**導波管** (wave guide) と呼ばれる中空の管状の導体の内部には、電磁波を伝搬する能力がある。導体の抵抗がほとんど無視できるときには、電磁波はほとんど減衰せずに伝搬する。伝搬している電磁波の角周波数を  $\omega$  としよう。一般にはいろいろな周波数のものが混ざっていてもよいが、その場合は以下の解析結果を組み合わせればよいだけである。すると、時間微分一回につき、 $j\omega$  を掛けることになる。また導波管方向を  $z$  とし、そちら方向の波の角波数を  $k$  としよう。この場合は  $z$  方向の空間微分一回につき、 $-jk$  を掛けることになる。

前節でも述べたように、まずは導波管内でつじつまの合う解を求めるのがよい。そのためには、ファラデーゲージのベクトルポテンシャルを求めるのが便利である。ファラデーゲージは  $\phi = 0$  であるが、空間中では、これもローレンツ条件を満たすのでローレンツゲージのポテンシャルでもある。

ポテンシャルが満たすべき方程式は  $\phi = 0$  より、次のようになる。

$$\nabla_t^2 \mathbf{A}_t - k^2 \mathbf{A}_t + \frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{A}_t = 0 \quad (10.35)$$

$$\nabla_t^2 A_z - k^2 A_z + \frac{\omega^2}{c^2} A_z = 0 \quad (10.36)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{A}_t - jk A_z = 0 \quad (10.37)$$

また、境界条件は、ファラデーゲージのポテンシャルが電場に比例することから、 $\mathbf{A}_t = 0$ 、さらに  $(\operatorname{rot} \mathbf{A})_n = 0$  である。

一般に、任意のベクトル場は非発散場と非回転場に分けることができる。したがって、 $\mathbf{A}_t$  も非発散場と非回転場に分かることができる。非発散場は  $\operatorname{div} \mathbf{A}_t = 0$  であるので、式 10.37 より  $A_z = 0$  となる。

$A_z = 0$  であると、 $E_z = 0$ 、つまり電場が進行方向垂直成分だけになり、**TE波** (transverse electric wave) と呼ばれる。また、 $\operatorname{rot} \mathbf{A}_t = 0$  であると、磁場が伝播方向垂直となり、**TM波** (transverse magnetic wave) と呼ばれる。さらに、両条件が成立する場合は、電場も磁場も伝播方向垂直となり、**TEM波** (transverse electric magnetic wave) と呼ばれる。

この方法による解析の結果、導波管内面の電荷密度と電流密度が分かると、改めて、面電荷が作るスカラーポテンシャルとベクトルポテンシャルは面電流が作るという、原理原則に基づくポテンシャルが計算できる。時間と  $z$  方向の変動を  $\exp[j(\omega t - kz)]$  と仮定しているので、式 10.35 の形の方程式を満たす解の集合で与えられる。この解は円柱関数と呼ばれる超越関数であり、取り扱いはあまり楽ではない。したがって、本書では、特別な場合を除いて、この原理原則に基づくポテンシャルの計算は行わないこととする。

以下にストリップ線路および方形導波管に対し、具体的に作業してみよう。

### 10.7.1 TEM 波

まず、もっともやさしい TEM 波から議論しよう。TEM 波は方形導波管では発生しないので、 $y = 0, b$  に平行に導体の置かれたストリップ線路で考えよう。もっとも簡単な波は、上下の導体間に  $y$  方向に一様な電場が発生する場合である。

ファラデーゲージのベクトルポテンシャルは電場に比例するので、電場と同じく  $y$  成分のみを持つ。

$$\phi = 0 \quad (10.38)$$

$$\mathbf{A} = \alpha e^{j(\omega t - kz)} (0, 1, 0) \quad (10.39)$$

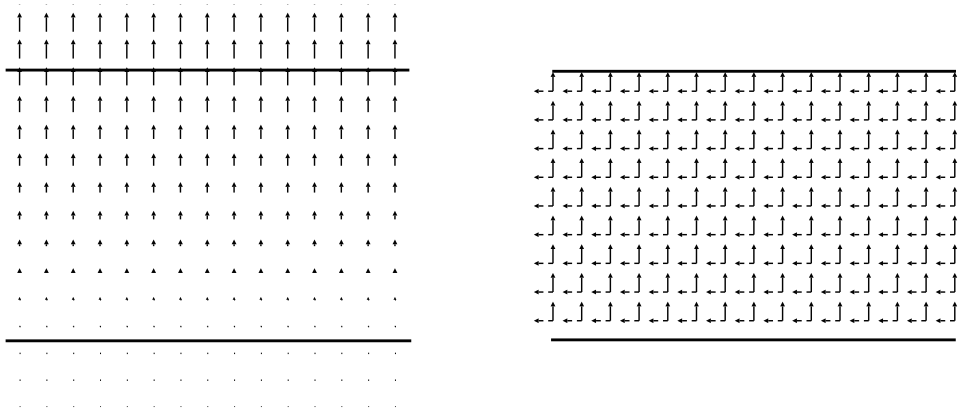


図 10.8 ストリップ線路のベクトルポテンシャルの別解および電磁場（実線ベクトルは電場、破線ベクトルは磁場）。スカラーポテンシャルは描かれていないが、極板に平行に上に高くなっていく。

ここで、 $A_z$  はローレンツ条件を利用して、 $A_t$  から求めた。

$A_y$  が波動方程式を満たしていることから次の式が成立する。

$$\frac{\omega^2}{c^2} = k^2 \tag{10.40}$$

進行波のみを対象にすると、 $\omega = ck$  である。これらから、ストリップ線路内の電磁場を求めると、

$$\mathbf{E} = \alpha e^{j(\omega t - kz)} (0, -j\omega, 0) \tag{10.41}$$

$$\mathbf{B} = \alpha e^{j(\omega t - kz)} (jk, 0, 0) \tag{10.42}$$

導体表面での  $E_n$ 、 $B_t$  より、面電荷密度、面電流密度を計算することができる。ストリップ線路表面に発生する面電荷密度は上面と下面に正負対称に発生するが、下面では次のようになる。

$$\sigma = -j\omega\epsilon_0\alpha e^{j(\omega t - kz)} \tag{10.43}$$

$$K_z = -jk\frac{1}{\mu_0}\alpha e^{j(\omega t - kz)} \tag{10.44}$$

導体内のポテンシャルは、空間の  $A_t$  を導体内まで延長し、そこで、 $\chi$  を求め、それらの微分から計算する。その結果は次のようになる。

$$\chi = \alpha e^{j(\omega t - kz)} y \tag{10.45}$$

$$\phi = -j\omega\alpha e^{j(\omega t - kz)} y \tag{10.46}$$

$$\mathbf{A} = \alpha e^{j(\omega t - kz)} (0, 1, jky) \tag{10.47}$$

以上で、ストリップ線路内の TEM 波のポテンシャルと電磁場の計算は終了する。

電荷があるのにスカラーポテンシャルがないことに不満を感じるかも知れない。その場合には、ここで得られた面電荷と面電流が作るポテンシャルを再計算すると、原理原則に基づくポテンシヤ

ルが計算できる。これらはそれぞれ波動方程式を満たすが、角周波数  $\omega$ 、 $z$  方向の角波数  $k$  を仮定しているので、 $x$  と  $y$  の二階微分のみが生き残る。さらに  $x$  方向に変動のない解を対象としているので  $y$  の二階微分のみが生き残る。これよりこれらのポテンシャルは源のあるところを除いて  $y$  の一次式で与えられることが導かれる。 $y = 0$  と  $y = a$  に存在する源が作り出す対称な場を加えることになるので、

$$\phi = -j\omega\alpha e^{j(\omega t - kz)} \begin{cases} 0 & (y \leq 0) \\ y & (0 \leq y \leq a) \\ a & (a \leq y) \end{cases} \quad (10.48)$$

$$A_z = -jk\alpha e^{j(\omega t - kz)} \begin{cases} 0 & (y \leq 0) \\ y & (0 \leq y \leq a) \\ a & (a \leq y) \end{cases} \quad (10.49)$$

が得られる。図 10.8 に、これらのポテンシャルおよび電磁場を示す。なお、スカラーポテンシャルの等ポテンシャル面は、極板に平行で等間隔となる。他の TE 波、TM 波でも、こうして得られた面電荷、面電流からポテンシャルを再計算することも可能であるが、大変なだけで、余り効果もないので、以後は省略する。

なお、当然のことながらこれらが作る電磁場や面電荷、面電流が前半の議論のものとは一致する。

## 10.7.2 TE 波

同様な手順で、まず電場に比例したファラデーゲージのベクトルポテンシャルから始めよう。 $E_z = 0$  より、 $A_z = 0$  である。したがって  $A_x$  と  $A_y$  のみを求めればよい。これらは、それぞれ波動方程式を満たさなければならないので、 $x$ 、 $y$  方向に正弦波関数の形となる。また境界条件より、 $A_x$  は  $y = 0, b$  で 0、 $\partial A_x / \partial x$  は  $x = 0, a$  で 0 でなければならない。これらの条件から、次の形が得られる。

$$\mathbf{A} = e^{j(\omega t - kz)} \left( \alpha \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}, \beta \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b}, 0 \right) \quad (10.50)$$

ローレンツ条件より  $\alpha(m\pi/a) + \beta(n\pi/b) = 0$  となる。これより、次のように書き替えてよい。

$$\mathbf{A} = \alpha e^{j(\omega t - kz)} \left( -\frac{n\pi}{b} \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}, \frac{m\pi}{a} \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b}, 0 \right) \quad (10.51)$$

もちろん、 $\alpha$  は再定義されている。

$A_x, A_y$  が波動方程式を満たしていることから次の式が成立する。

$$\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 + k^2 \quad (10.52)$$

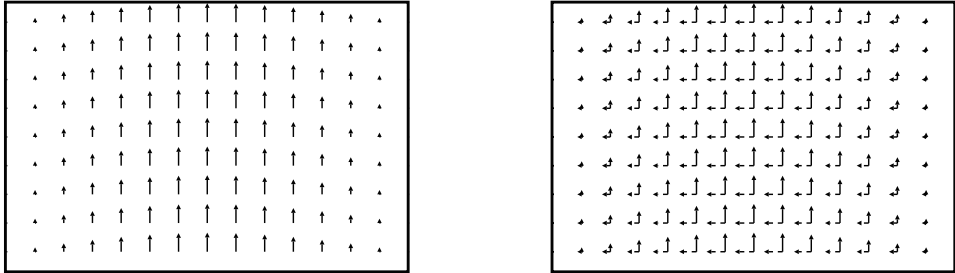


図 10.9 方形導波管  $TE_{10}$  のベクトルポテンシャルおよび電磁場（実線ベクトルは電場、破線ベクトルは磁場）。

また、これらより、導波管内の電磁場を求めることができる。

$$\mathbf{E} = \alpha e^{j(\omega t - kz)} \left( j\omega \frac{n\pi}{b} \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}, -j\omega \frac{m\pi}{a} \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b}, 0 \right) \quad (10.53)$$

$$\mathbf{B} = \alpha e^{j(\omega t - kz)} \left( jk \frac{m\pi}{a} \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b}, jk \frac{n\pi}{b} \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}, \left[ \left( \frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left( \frac{n\pi}{b} \right)^2 \right] \cos \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} \right) \quad (10.54)$$

図 10.9 に、最低モードである  $TE_{10}$  モードのポテンシャルおよび電磁場を示す。

これから、導体表面の面電荷密度と面電流密度を求めることができる。まず下面の値を示す。

$$\rho = -\varepsilon_0 \alpha j \omega e^{j(\omega t - kz)} \frac{m\pi}{a} \sin \frac{m\pi x}{a} \quad (10.55)$$

$$\mathbf{K}_t = \alpha \frac{1}{\mu_0} e^{j(\omega t - kz)} \left( \left[ \left( \frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left( \frac{n\pi}{b} \right)^2 \right] \cos \frac{m\pi x}{a}, 0, -jk \frac{m\pi}{a} \sin \frac{m\pi x}{a} \right) \quad (10.56)$$

上面の値は、 $n$  が偶数のとき反対称、奇数のとき対称となる。

また、左面の値は次のようになる。

$$\rho = \alpha \varepsilon_0 j \omega e^{j(\omega t - kz)} j \omega \frac{n\pi}{b} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (10.57)$$

$$\mathbf{K}_t = \alpha \frac{1}{\mu_0} e^{j(\omega t - kz)} \left( 0, - \left[ \left( \frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left( \frac{n\pi}{b} \right)^2 \right] \cos \frac{n\pi y}{b}, jk \frac{n\pi}{b} \sin \frac{n\pi y}{b} \right) \quad (10.58)$$

右面の値は、 $m$  が偶数のとき反対称、奇数のとき対称となる。

### 10.7.3 TM 波

同じく方形導波管での  $\text{TM}_{mn}$  波は、 $\mathbf{A}$  のすべての成分が存在しうる。境界条件を満たす解は次のようになる。

$$\mathbf{A} = e^{j(\omega t - kz)} \left( \alpha \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}, \beta \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b}, \gamma \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \right) \quad (10.59)$$

$(\text{rot } \mathbf{A})_z = 0$  より、 $A_x$  と  $A_y$  には関係が出てくる。また、ローレンツ条件が成立することから、次の形のみが許される。

$$\mathbf{A} = \frac{\alpha}{j\omega} e^{j(\omega t - kz)} \left( jk \frac{m\pi}{a} \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}, jk \frac{n\pi}{b} \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b}, \left[ \left( \frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left( \frac{n\pi}{b} \right)^2 \right] \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \right) \quad (10.60)$$

もちろん、 $\alpha$  は再定義されている。また分母の  $j\omega$  は以後のほぼすべての計算結果に現れる  $j\omega$  を消すためである。

$A_x$ 、 $A_y$  が波動方程式を満たしていることから次の式が成立する。

$$\left( \frac{\omega}{c} \right)^2 = \left( \frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left( \frac{n\pi}{b} \right)^2 + k^2 \quad (10.61)$$

また、これらより、導波管内の電磁場を求めることができる。

$$\mathbf{E} = \alpha e^{j(\omega t - kz)} \left( -jk \frac{m\pi}{a} \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}, -jk \frac{n\pi}{b} \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b}, - \left[ \left( \frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left( \frac{n\pi}{b} \right)^2 \right] \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \right) \quad (10.62)$$

$$\mathbf{B} = \alpha e^{j(\omega t - kz)} \left( \frac{j\omega}{c^2} \frac{n\pi}{b} \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b}, -\frac{j\omega}{c^2} \frac{m\pi}{a} \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}, 0 \right) \quad (10.63)$$

図 10.10 に、最低モードである  $\text{TM}_{11}$  モードのポテンシャルおよび電磁場を示す。

これから、導体表面の面電荷密度と面電流密度を求めることができる。まず下面の値を示す。

$$\rho = -\varepsilon_0 \alpha j k e^{j(\omega t - kz)} \frac{n\pi}{b} \sin \frac{m\pi x}{a} \quad (10.64)$$

$$\mathbf{K}_t = \alpha \frac{1}{\mu_0} e^{j(\omega t - kz)} \left( 0, 0, -\frac{j\omega}{c^2} \frac{n\pi}{b} \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} \right) \quad (10.65)$$

上面の値は、 $n$  が偶数のとき反対称、奇数のとき対称となる。

また、左面の値は次のようになる。

$$\rho = \alpha \varepsilon_0 j \omega e^{j(\omega t - kz)} j \omega \frac{n\pi}{b} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (10.66)$$

$$\mathbf{K}_t = \alpha \frac{1}{\mu_0} e^{j(\omega t - kz)} \left( 0, 0, \frac{j\omega}{c^2} \frac{m\pi}{a} \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \right) \quad (10.67)$$

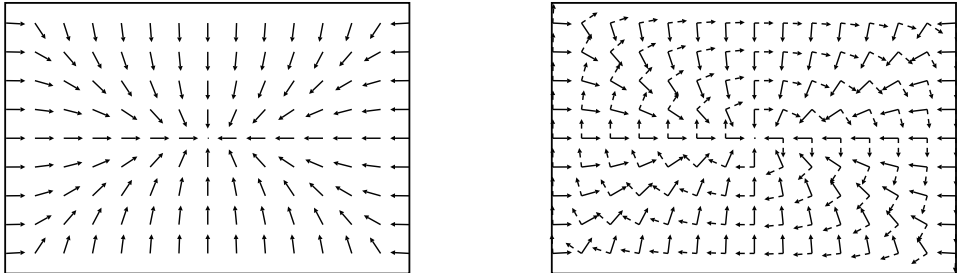


図 10.10 方形導波管  $TM_{11}$  のベクトルポテンシャルおよび電磁場（実線ベクトルは電場、破線ベクトルは磁場）。

右面の値は、 $m$  が偶数のとき反対称、奇数のとき対称となる。どの壁面でも  $K_z$  しかないことに注意してほしい。

## 10.8 空洞中の電磁波

中空の導体で囲まれた領域には電磁波を閉じ込める効果がある。といっても導体には多少の抵抗が存在するから、電磁波は徐々に減衰するし、あらかじめ何かの方法で電磁波を励振させておかなければ減衰する電磁波すら存在できない。実際には空洞に小さな穴を開け、そこから電磁波を入れるが、穴の影響はきわめて小さく、また電磁波の減衰を補うだけのわずかなエネルギーしか入れない。こうした状況下では、導体の抵抗がまったくなく、電磁波は減衰しないものとして取り扱っても問題は生じない。

計算の手法は、導波管中の電磁場と同じである。波長の整数倍、あるいはそれに半波長や  $1/4$  波長を加えたところで、磁場や電場が境界条件を満たす場合、こうした電磁場は永久に存在しうることになる。波長が空洞の長さとうまく合わない場合には、合うように周波数を調整すればよい。具体的な計算は、各自で試みてほしい。

## 第 11 章

# 相対性原理

今迄の章で、電磁気学の基本的な話はすべて終了した。本章の相対性原理の話は、いわば、おまけである。しかし、電磁気学が古典力学から始まった壮大な物理学の中で、唯一、最初から相対性原理とまったく矛盾しない体系であったことを考えると、やはり、この話を除外する訳にはいかない。また、電磁気学が相対性原理を使うと、いかにきれいにまとめられるかも、同時に味わってほしい。

### 11.1 相対性原理

**アインシュタイン** (Einstein) の導出した特殊相対性原理は、二つの互いに一定速度で移動している慣性系間の座標変換の仕方を与えたものであり、次の原理から導出された。

- 光速で直線移動するものは、いずれの座標系で観察しても光速で移動する。(光速不変性)
- 相互の座標変換は空間座標と時間座標の一次変換で与えられる。(線形性)
- 二つの座標系はまったく対等であり、どちらかをより基準的であるということは不可能である。(相対性)

光速不変性は、宇宙をかなりの速度で走っている地球上で、走行方向および走行直角方向のいずれの方向で光の速度を測っても、同じ値が得られた、という実験結果を説明するために導入された。

いま、**図 11.1** に示すように、S 系に対し  $x$  軸方向に等速度  $V$  で走っている  $S'$  系を考える。 $S'$  系座標軸はすべて S 系の座標と平行になっているものとし、また  $t = 0$  および  $t' = 0$  で、両原点は一致しているとする。 $S'$  系で原点から  $x'$  軸方向および  $y'$  軸方向に  $L$  だけ離れた点にそれぞれ鏡を置き、原点から光を発射し、往復時間を測る。すると実験結果から、その値は等しくなる。これを S 系から観測してみよう。まず、S 系での光速は  $S'$  系での光速  $c$  と等しい。 $x'$  軸方向に走る光が  $t$  秒で鏡に到達したとする。この間、鏡は  $Vt$  だけ遠ざかる。したがって、 $ct = L + Vt$ 。これから、行きに要する時間は  $L/(c - V)$ 。同様に、鏡から原点への戻りに要する時間は、原点が近寄ってくるだけ短縮し  $L/(c + V)$ 、合計すると  $2Lc/(c^2 - V^2)$  の時間がかかる。



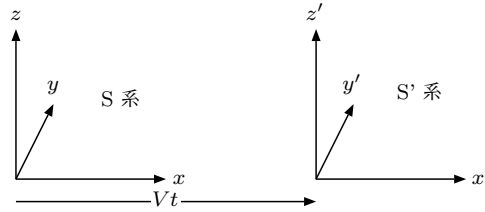


図 11.1 S'系はS系に対し、 $x$ 軸方向に  $V$  の速度で移動している。

$y'$  軸方向に走る光の伝搬時間も  $L/c$  ではない。というのはやはり鏡が移動し、S系で見ると光は斜めに移動する必要があるからである。ピタゴラスの定理より、 $(ct)^2 = L^2 + (Vt)^2$  が成立するから、これから伝搬時間は  $L/\sqrt{c^2 - V^2}$  となる。戻りも原点が移動し斜めに移動する必要があるが、合同な三角形となるから、同じ伝搬時間が得られる。そこでこれらを合計すると  $2L/\sqrt{c^2 - V^2}$  が得られる。しかし、困ったことにこの時間は先に求めた  $x'$  方向の伝搬時間と一致しない。つまり S'系で同時に原点に到着した光が、S系で観測すると、異なる時刻に到着するように見える。

この矛盾を解決するために導入されたのが、距離の短縮という概念である。これは、S'系での距離をS系で観測すると、移動方向に短縮して見えるという概念である。最初にローレンツ (Lorentz) がこの概念を提唱したときには、とんでもない概念であると反論された。しかし、現在は正しい考えであると理解されている。S'系での  $L$  がS系では  $x$  方向にだけ  $L\sqrt{1 - (V/c)^2}$  に短縮すると考えると、 $x'$  方向の伝搬時間が補正され、両者ともちょうど  $2L/\sqrt{c^2 - V^2}$  となる。距離の短縮を認めると、S'系での座標点  $(x', y', z')$  は、S系で観測すると  $(x' + Vt, y', z')$  には見えず、 $(x'\sqrt{1 - (V/c)^2} + Vt, y', z')$  に見えることになる。これを  $(x, y, z)$  と置くことにより、S'系とS系間の座標変換を求めることができる。

一般に S'系とS系間の座標変換は次式で与えられるはずである。

$$x' = Ax + Bt, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = Ct + Dx \quad (11.1)$$

ここで、 $x'$  と  $x$  の間、 $t'$  と  $t$  の間の係数  $A$  と  $C$  が 1 でないかも知れない、 $t'$  に  $x$  の影響が入っているかも知れないというのがアインシュタインの大胆な仮説である。なお、 $y'$  や  $z'$  はそちら方向に移動していないことから自明であるが、仮に  $x'$  と同様な変換を仮定しても、同じ結果が得られる。まず、S'系の原点  $x' = 0$  をS系で観測すると、 $x = Vt$  に見えることから、 $A$  と  $B$  の関係が得られる。さらに逆にS系の原点  $x = 0$  をS'系で観測すると、相対性原理から  $x' = -Vt'$  に見えることから、 $B$  と  $C$  の関係が得られる。これらの結果は  $B = -VA$ 、 $B = -VC$  である。 $A$  を基準にすれば、 $C = A$  が得られる。

$A$  と  $D$  は光速不変の原理から誘導できる。S'系の原点から任意の方向に発射された光は、どちらの方向に発射されても光速で伝搬するから、次の関係が成立する。

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2 t'^2 \quad (11.2)$$

これに変換関係を代入すると、 $x$ 、 $y$ 、 $z$ 、 $t$ の二次式が得られる。

この光の伝搬を S 系で観測してもやはり光速で伝搬するように見えるはずであるから、次式を満たさなければならない。

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2 \quad (11.3)$$

これら  $x$ 、 $y$ 、 $z$ 、 $t$ の二式は当然一致すべきである。

係数同士を比較すると、 $A$ 、 $B$ 、 $C$ 、 $D$ に関わる三つの関係式が得られる。先の関係式と連立させることにより、これらの定数の値が決定できる。なお、 $A$ の符号に正負の可能性が残るが、 $V = 0$ で  $(x', y', z', t')$ は  $(x, y, z, t)$ と等しくなるはずであるから、 $A$ は正である。こうして得られた次の変換式は**ローレンツ変換** (Lorentz transform) と呼ばれる。

$$x' = \gamma(x - \beta ct), \quad y' = y, \quad z' = z, \quad ct' = \gamma(ct - \beta x) \quad (11.4)$$

ただし、 $\beta$ 、 $\gamma$ は今後度々出現する次のような係数である。

$$\beta = \frac{V}{c} \quad (11.5)$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (11.6)$$

ローレンツ変換の**逆変換** (reverse transform) は、**順変換** (forward transform) から簡単に求められる。

$$x = \gamma(x' + \beta ct'), \quad y = y', \quad z = z', \quad ct = \gamma(ct' + \beta x') \quad (11.7)$$

## 11.2 四元ベクトル

相対論的座標変換では、三次元空間における回転で、 $x$ と $y$ が混ざるように、空間と時間が混ざってくる。このような場合には、ベクトルの概念を使うと便利である。当然、時間成分を加えた**四元ベクトル** (four-vector) となる。ただし、時間成分は、空間成分とはやや異なる扱いを受け、変換も異なることに注意したい。

力学におけるベクトルの代表は位置ベクトルである。これに対応する四元ベクトルは  $(x, y, z, ct)$  である。 $(\mathbf{r}, ct)$ とも表す。時間項が  $c$ 倍されているのは、空間と同じ次元になって、空間座標との対応がよくなるからである。これをまとめて  $x^n$ と記載する。また、基準系に対し移動している方の系  $(x', y', z', ct')$ の座標をまとめる際は、ギリシャ文字を使って  $x'^n$ としよう。

上付きのサフィックスはべき乗の意味ではなく、このベクトルが、すぐ後に説明される反変ベクトルと呼ばれるものであるからである。また、 $d\mathbf{r}$ など太字で書いた量は、古典的な三次元のベクトルとする。

一般には  $x = 0$ 、 $t = 0$ が必ずしも  $x' = 0$ 、 $t' = 0$ に対応していなくても相対論は成立するので、前節の式 11.4 の変換式には定数のずれが入りうる。しかしその場合でも、位置ベクトルの微小量

に対しては同じ変換式が成立する。位置ベクトルの微小量  $dx^n$  と  $dx^\nu$  を次式のように定義する。左辺は本来 ( $dx^n | n = 1, \dots, 4$ ) などと記載すべきであろうが、簡単に ( $dx^n$ ) などと省略した。

$$(dx^n) = (dx, dy, dz, cdt) \quad (11.8)$$

$$(dx^\nu) = (dx', dy', dz', cdt') \quad (11.9)$$

すると、これらの間には式 11.4 の変換式が成立する。

$$dx^\nu = \sum_n u_n^\nu dx^n \quad (11.10)$$

ここで

$$u_n^\nu = \frac{\partial x^\nu}{\partial x^n} \quad (11.11)$$

である。

なお、四元の世界では、通常の行列やベクトル表示をせず、成分を記載することが多いので、これらの積が現れる都度、 $\sum$  の記号が出現し、うっとうしくなる。このため、上下に同じサフィックスが現れたときには、 $\sum$  の記号がなくても、そのサフィックスに関する合計をするものと約束する。なお、分数の分母に上 (下) 付き変数がある場合は、分数全体の下 (上) 付きとみなす。これを**アインシュタイン規約** (Einstein convention) という。例えば式 11.10 は次式のようになるが、 $n$  が上下にあるため、 $\sum_n$  が省略されていることになる。

$$dx^\nu = u_n^\nu dx^n \quad (11.12)$$

この**変換係数** (transform coefficient)  $u_n^\nu$  を**反変順変換係数** (contravariant forward transform coefficient) と呼び、 $\nu$  行  $n$  列の行列で書くと、次のようになる (以後、上下にサフィックスがある場合には、上のサフィックスを行、下のサフィックスを列とする)。

$$(u_n^\nu) = \left( \frac{\partial x^\nu}{\partial x^n} \right) = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\gamma\beta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\gamma\beta & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \quad (11.13)$$

このように座標変換の際、 $u_n^\nu$  によって変換されるベクトルを、**反変ベクトル** (contravariant vector) と呼ぶのである。また、反変ベクトルは  $A^\nu$  のように、サフィックスを上につける約束になっている。

これに対し、後に紹介されるある種のベクトルは、 $u_n^\nu = \partial x^n / \partial x^\nu$  によって座標変換される。この変換係数は  $dx^\nu$  を  $dx^n$  へ逆変換する際に用いられるものであり、**反変逆変換係数** (contravariant reverse transform coefficient) と呼ぶ。逆変換係数で変換されるベクトルは共変ベクトルと呼び、 $A_\nu$  のように、サフィックスを下につける約束になっている。この行列の成分を求めてみると、順

変換行列の  $-\gamma\beta$  のところだけが符号反転し、 $+\gamma\beta$  となるだけである。

$$(u_\nu^n) = \left( \frac{\partial x^n}{\partial x^\nu} \right) = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & \gamma\beta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \gamma\beta & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \quad (11.14)$$

改めて、四元ベクトルとは順変換係数で変換される反変ベクトルや逆変換係数で変換される共変ベクトルのことである。

逆変換行列  $(u_\nu^n)$  は順変換行列  $(u_n^\nu)$  の逆行列になっている。これは  $\partial x^n / \partial x^m = \delta_m^n$  であることと、この式の左辺が、 $x^\nu$  を媒介変数として次のように変形できることから、明かである。

$$\frac{\partial x^n}{\partial x^m} = \frac{\partial x^n}{\partial x^\nu} \frac{\partial x^\nu}{\partial x^m} = u_\nu^n u_m^\nu \quad (= \delta_m^n) \quad (11.15)$$

速度の四元ベクトルを考えよう。もともと、 $v_x = dx/dt$  などと定義されているが、これをそのまま第四成分に拡張すると  $v_t = d(ct)/dt = c$  となって、第四成分だけ定数となってしまい、何かがおかしい。 $(dx, dy, dz, d(ct)) = (d\mathbf{r}, d(ct))$  は確かに四元ベクトルになっているが、分母の  $dt$  はローレンツ変換不変ではないからである。そこで  $dt$  にきわめて近い概念で、かつ  $dt$  とは高速で僅かに異なるローレンツ変換不変の概念である世界時  $ds$  なる概念が、分母として使われる。

$$ds = \sqrt{dt^2 - (dx^2 + dy^2 + dz^2)/c^2} = \sqrt{1 - \beta_v^2} dt \quad (11.16)$$

平方根の中は、微小距離の「絶対値の二乗」であるので、ローレンツ変換不変量であることは容易に理解できよう。なお、上式で  $\beta_v = v/c$  である。 $\beta$  は座標変換の際の座標間の速度  $V$  に対応するものであるが、質点の速度  $v$  に対応するものについては  $\beta_v$  を用いることとした。同様に、 $\gamma$  は座標変換の際の座標間の速度  $V$  に対応するものであるが、質点の速度に対応しては  $\gamma_v = 1/\sqrt{1 - \beta_v^2}$  を定義する。

粒子の速度  $v$  が光速に比べ十分遅い場合には、 $ds \doteq dt$  となる。四元ベクトル  $dx^n$  を、変換不変量であってかつ  $dt$  にきわめて近い概念である  $ds$  で割ることにより、速度の四元ベクトルである**四元速度** (four-vector velocity)  $v^n$  を定義する。

$$(v^n) = \left( \frac{dx^n}{ds} \right) = \left( \frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}, \frac{d(ct)}{ds} \right) = \gamma_v(\mathbf{v}, c) \quad (11.17)$$

四元速度に、静止質量  $m$  を掛けたものは、**四元運動量** (four-vector momentum)  $p^n$  と呼ばれる。

$$(p^n) = m(v^n) = m\gamma_v(\mathbf{v}, c) \quad (11.18)$$

四元運動量の空間成分は、低速では古典的運動量に一致する。第四成分は、 $p_t = mc^2 + (1/2)mv^2 + \dots$  となるが、低速では固定分  $mc^2$  の差はあるものの、運動エネルギーに一致する。このため、この項は質点のエネルギーと考えられる。また、固定分、つまり静止時のエネルギー  $mc^2$  は原子爆弾の概念の基礎となった有名な式でもある。

$v^n$  が四元ベクトルなら、その微小量も四元ベクトルである。したがって、四元速度をさらに  $s$  で微分することにより、四元ベクトルである**四元加速度** (four-vector acceleration)  $a^n$  が定義できる。

$$(a^n) = \left( \frac{dv^n}{ds} \right) = \left( \frac{d^2x^n}{ds^2} \right) \quad (11.19)$$

$\mathbf{F}$  を古典的な力として、ニュートンの運動方程式は  $d\mathbf{p}/dt = \mathbf{F}$  などと書ける。これから、相対論における運動方程式も  $dp^n/ds = F^n$  となることが予想できる。 $(F^1, F^2, F^3)$  は低速で  $\mathbf{F}$  に一致する四元力の空間成分であり、より厳密には  $(F^1, F^2, F^3) = \gamma_v \mathbf{F}$  である。また古典力学では、 $E$  を質点のエネルギーとして、 $dE/dt = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$  が成立するので、四元運動量の第四項がエネルギーに対応することを考慮して、 $dp^4/ds = \gamma_v \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}/c$  が誘導できる。つまり、運動方程式

$$m \frac{\partial v^n}{\partial s} = F^n \quad (11.20)$$

を満す**四元力** (four-vector force)  $F^n$  は、次式で定義される。

$$(F^n) = \gamma_v (\mathbf{F}, \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}/c) \quad (11.21)$$

続いて、反変ベクトルの例として、任意のスカラー関数  $f$  の空間微分  $\nabla f$  に対する四元空間微分演算子の変換を調べてみよう。 $S'$  系での  $(\nabla' f, \partial f/\partial(ct'))$  は次のように書ける。

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x'} &= \frac{\partial x}{\partial x'} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial(ct)}{\partial x'} \frac{\partial f}{\partial(ct)} = \gamma \left( \frac{\partial f}{\partial x} + \beta \frac{\partial f}{\partial(ct)} \right) \\ \frac{\partial f}{\partial y'} &= \frac{\partial y}{\partial y'} \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z'} &= \frac{\partial z}{\partial z'} \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial f}{\partial(ct')} &= \frac{\partial x}{\partial(ct')} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial(ct)}{\partial(ct')} \frac{\partial f}{\partial(ct)} = \gamma \left( \frac{\partial f}{\partial(ct)} + \beta \frac{\partial f}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (11.22)$$

ここで、 $\partial x/\partial x'$  などの計算にはローレンツ逆変換を利用している。この結果を見ると、 $(d\mathbf{r}, d(ct))$  などとは異なり、ローレンツ逆変換を受けることが分かる。

$$\partial_\nu f = u_\nu^n \partial_n f \quad (11.23)$$

ここにあるように、 $\partial/\partial x^\nu$  などは、しばしば  $\partial_\nu$  などと略記される。このようにローレンツ変換で逆変換を受けるベクトルを、**共変ベクトル** (covariant vector) と呼び、 $\partial_n$  や  $\partial_\nu$  のように下付きサフィックスを付ける。

$$(\partial_n) = \left( \frac{\partial}{\partial x^n} \right) = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial(ct)} \right) = \left( \nabla, \frac{\partial}{\partial(ct)} \right) \quad (11.24)$$

$$(\partial_\nu) = \left( \frac{\partial}{\partial x^\nu} \right) = \left( \frac{\partial}{\partial x'}, \frac{\partial}{\partial y'}, \frac{\partial}{\partial z'}, \frac{\partial}{\partial(ct')} \right) = \left( \nabla', \frac{\partial}{\partial(ct')} \right) \quad (11.25)$$

### 11.3 計量テンソル

**計量テンソル** (metric tensor)  $g_{nm}$  と呼ばれる行列を導入しよう。これは、この空間における不変量である長さ (厳密にはその 2 乗) を定義する行列である。三次元空間における長さは  $dx^2 + dy^2 + dz^2$  で与えられるが、残念ながら、これはローレンツ変換に対して不変量ではない。これにちょっと補正した  $-ds^2$  が不変量である。

$$-ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - d(ct)^2 \quad (11.26)$$

これを  $g_{nm}x^n x^m$  のように書いて、係数を計量テンソルと呼ぶのである。

$$(g_{nm}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (11.27)$$

変換後の座標系における  $g'_{\nu\mu}$  は次式が成立することから、この行列と同じ形になる。

$$-ds^2 = dx'^2 + dy'^2 + dz'^2 - d(ct')^2 \quad (11.28)$$

これらを使うと、任意の反変ベクトル  $A^n$  から共変ベクトル  $A_n$  を誘導することができる。

$$A_n = g_{nm}A^m \quad (11.29)$$

こうした作業を**降階** (lowering) と呼ぶ。

$A_n = g_{nm}A^m$  が共変ベクトルであることは、 $A_\nu = g_{\nu\mu}A^\mu$  が  $A_n$  を逆座標変換したものと一致することで確認できる。

$$A_\nu = g_{\nu\mu}A^\mu = g_{\nu\mu}u_m^\mu A^m = u_\nu^n g_{nm}A^m = u_\nu^n A_n \quad (11.30)$$

ここで三番目の等号は、具体的な行列の掛算により、 $g_{\nu\mu}u_m^\mu = u_\nu^n g_{nm}$  が成立することから導かれる。

同様に、式 11.27 と同じ要素を持つ計量テンソル  $g^{nm}$  も定義され、これにより、次式のように共変ベクトルから反変ベクトルを得ることもできる。

$$A^n = g^{nm}A_m \quad (11.31)$$

これを**昇階** (raising) という。

なお、**テンソル** (tensor) とは、座標変換した場合、順変換係数や逆変換係数の組み合わせだけで変換される行列のことである。行も列も順変換係数で変換される行列を**反変テンソル** (contravariant tensor)、ともに逆変換係数で変換される行列を**共変テンソル** (covariant tensor)、行が順変換係数で列が逆変換係数で変換される行列などを**混合テンソル** (mixed tensor) と呼ぶ。また、テンソルについても、計量テンソル  $g_{nm}$  や  $g^{nm}$  を用いて、サフィックスを上下することができる。

計量テンソル自身もテンソルという名前から想像できるように、テンソルである。 $g^{nm}$  は反変テンソル、 $g_{nm}$  は共変テンソルであり、いずれも計算してみると、式 11.27 の行列と同じとなる。実は、計量テンソルは世界時の不変原理を行列で表現したものである。相対論における変換行列は、世界時の不変原理が保たれるように選ばれた変換であるので、変換後のテンソルは、当然、元と同じ形になるのである。

$g^{nm}$  を降階するか、 $g_{nm}$  を昇階することで、混合テンソルが  $g_m^n$  が得られるが、これは下記の式からわかるように、降階して昇階する作業となり、結果として、何もしないことになるので、対角要素のみすべて 1 のクロネッカーデルタに等しい。

$$g_m^n = g^{nl} g_{lm} = \delta_m^n \quad (11.32)$$

次に四元ベクトル同士の内積を定義しておこう。三次元の内積は  $\sum_n A_n B_n$  で与えられたが、四元ベクトルの内積は  $A^n B_m$  で定義される。もちろん、総和記号は略されている。この際、反変ベクトルと共変ベクトルの組み合わせであることに注意してほしい。ベクトルの要素で書くと、 $A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z - A_t B_t$  である。このようにすると、この値は座標変換に対し、不変量となる。同様に  $A_n B^n$  も不変量である (実は  $A^n B_n$  と一致する)。このように、サフィックスが上下に組み合わせると、不変量となるが、反変ベクトル同士、あるいは共変ベクトル同士の積は不変量とはならないので、内積とはいわない。

これらの値が不変量であることは次のようにして証明できる。

$$A^\nu B_\nu = (u_n^\nu A^n) (u_\nu^m B_m) = A^n (u_n^\nu u_\nu^m) B_m = A^n \delta_n^m B_m = A^n B_n \quad (11.33)$$

アインシュタイン規約をふんだんに使っているので、注意してほしい。なお、四元ベクトルの自身との四元内積を、「長さ」あるいは「絶対値」の二乗と呼ぶ。逆に、任意のベクトルとある四元ベクトルとの内積が不変量であるとき、この任意のベクトルが四元ベクトルであることもいえる。証明は各自、行ってみてほしい。

内積を反変ベクトルのみで定義しようとすると、 $B_n = g_{nm} B^m$  であるため  $g_{nm} A^n B^m$  となり、 $g_{nm}$  の絡んだ定義となる。

四元ベクトルの内積がローレンツ変換不変量であることから、いくつかのことがいえる。例えば四元速度の長さの二乗は  $(dx/ds)^2 + \dots - (d(ct)/ds)^2 = (dx^2 + \dots - d(ct)^2)/ds^2 = -c^2 ds^2/ds^2 = -c^2$  となる。また四元運動量の長さの二乗は  $-(mc)^2$  となる。つまり、 $(p^4)^2 = (mc)^2 + (p^1)^2 + (p^2)^2 + (p^3)^2$  が成立する。これは  $E$  を粒子の相対論的エネルギー、 $\mathbf{p}$  を相対論的運動量として、しばしば  $(E/c)^2 = (mc)^2 + (\mathbf{p})^2$  と書かれる。特に  $m = 0$  のとき、 $E^2 = c^2 \mathbf{p}^2$  と

なるが、先に 8.5 節と 8.6 節で、電磁場のエネルギーの流れ  $\mathbf{S}$  と運動量  $\mathbf{g}$  の間に  $\mathbf{S} = c^2 \mathbf{g}$  の関係が成立することを示したが、それとの対応から、電磁場は静止質量 0 の粒子に対応すると理解されている。

四元速度の長さの不変性の式  $g_{nm}v^n v^m = c^2$  の両辺を  $s$  で微分すると、次の式が誘導できる。

$$g_{nm}v^n \frac{dv^m}{ds} = 0 \quad (11.34)$$

つまり、四元速度と四元加速度の内積は 0 となる。これから四元速度と四元力の内積も 0 となることが証明できる。

$$g_{nm}v^n F^m = 0 \quad (11.35)$$

## 11.4 電磁気学の相対論

ローレンツ力の四元化をしてみよう。

$$\mathbf{F} = Q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

を四元化しようとする、まず  $\mathbf{v}$  が気になる。これを四元速度の成分  $v^1, v^2, v^3$  にするには全体を  $\gamma_v$  倍すればよさそうである。こうすると  $\mathbf{F}$ 、 $\mathbf{v}$  が四元速度になるだけでなく、右辺第一項の  $\gamma_v \mathbf{E}$  も、 $v^4(\mathbf{E}/c)$  と記載できるようになる。

ローレンツ力の式の両辺に  $\mathbf{v}$  を内積として掛けてみよう。

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = Q\mathbf{v} \cdot \mathbf{E}$$

これを  $\gamma_v/c$  倍すると次式のように四元力の時間項となる。

$$F^4 = \gamma_v \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} / c = Q(v^1 E_x / c + v^2 E_y / c + v^3 E_z / c) \quad (11.36)$$

このように、四元力  $F^n$  を  $(\gamma_v \mathbf{F}, \gamma_v \mathbf{F} \cdot \mathbf{v})$  とすると、ローレンツ力は次のようにまとめることができる。

$$F^n = Q B_m^n v^m \quad (11.37)$$

ただし、 $B_m^n$  は**電磁テンソル** (electromagnetic tensor) と呼ばれ、次のように定義される。

$$(B_m^n) = \begin{pmatrix} 0 & B_z & -B_y & E_x/c \\ -B_z & 0 & B_x & E_y/c \\ B_y & -B_x & 0 & E_z/c \\ E_x/c & E_y/c & E_z/c & 0 \end{pmatrix} \quad (11.38)$$

第四行と四元速度の積は、式 11.36 に対応する。また、これから導かれる反変テンソル  $B^{nm} = B_l^n g^{lm}$ 、共変テンソル  $B_{nm} = g_{nl} B_m^l$  も、今後使われるので示しておこう。

$$(B^{nm}) = \begin{pmatrix} 0 & B_z & -B_y & -E_x/c \\ -B_z & 0 & B_x & -E_y/c \\ B_y & -B_x & 0 & -E_z/c \\ E_x/c & E_y/c & E_z/c & 0 \end{pmatrix} \quad (11.39)$$



この場合には第四列のみが符号反転している。

$$(B_{nm}) = \begin{pmatrix} 0 & B_z & -B_y & E_x/c \\ -B_z & 0 & B_x & E_y/c \\ B_y & -B_x & 0 & E_z/c \\ -E_x/c & -E_y/c & -E_z/c & 0 \end{pmatrix} \quad (11.40)$$

この場合には第四行のみが符号反転している。 $B^{nm}$  も  $B_{nm}$  も、反対称テンソルになっていることに注意してほしい。このように、反変テンソル、共変テンソル、混合テンソルと複数存在するのは、やや面倒であるが、第四列か第四行の符号が反転するだけであり、また式の変形に当たっても、 $g$  を掛けるだけで簡単に変更できるので、慣れてほしい。

さて、このテンソルの各成分には電場や磁場の成分が入っているが、電場や磁場は、相対論の世界では、どうしてもベクトルで表現することができず、このように  $4 \times 4$  のテンソルになってしまうのである。この後に現れるポテンシャルが、簡単なベクトルで表されることを考慮すると、ここでも、ポテンシャルのほうが根源的な量であることを、感じざるを得ない。

電磁場を四元テンソルで表したが、マクスウェル方程式を、この電磁テンソルを使って表してみよう。電荷や電流などの源との関連の  $\text{div } \mathbf{E}$  式および  $\text{rot } \mathbf{B}$  式は、次のようになる。

$$\partial_m B^{nm} = \mu_0 J^n \quad (11.41)$$

ただし、 $J^n$  の成分は  $(\mathbf{J}, c\rho)$  である。一方、源の入っていない  $\text{rot } \mathbf{E}$  式および  $\text{div } \mathbf{B}$  式は、やや複雑な表現で与えられる。

$$\partial_l B_{nm} + \partial_n B_{ml} + \partial_m B_{ln} = 0 \quad (11.42)$$

---

やや形式的であるが、この式は**完全反対称テンソル** (antisymmetric tensor) と呼ばれる  $\epsilon^{nmlk}$  を使って、アインシュタイン規約の形で書くことも可能であるが、これが  $4 \times 4 \times 4 \times 4$  のテンソル\*1であることもあり、必ずしも見やすい形ではなため、あくまでも参考のために示す。

$$\epsilon^{nmlk} \partial_m B_{lk} = 0 \quad (11.43)$$

なお、 $\epsilon^{nmlk}$  はサフィックスが  $(1, 2, 3, 4)$  のとき 1、サフィックスがこの偶置換で与えられるときも 1、奇置換になっているときは  $-1$ 、その他では 0 と定義されている。

---

ローレンツ力の座標変換を考えてみよう。この際、速度もローレンツ変換されるが、 $B_m^n$  も変換されるとしないと、うまく行かない。式 11.37 の左から順変換係数を掛けると、左右はローレンツ

---

\*1 実はテンソルは  $4 \times 4$  の行列に限らない。座標変換の際、順変換係数や逆変換係数のいくつかの組み合わせで変換される量は、すべてテンソルである。四元ベクトルは一階 (1st rank)、四元行列は二階、完全反対称テンソルは四階のテンソルである。

変換される。

$$\begin{aligned} F^\nu &= u_n^\nu F^n = Q u_n^\nu B_m^n v^m = Q u_n^\nu B_m^n (u_\mu^m u_l^\mu) v^l \\ &= Q (u_n^\nu B_m^n u_\mu^m) (u_l^\mu v^l) \end{aligned}$$

第三の等号の際、 $B_m^n$  と  $v^m$  の間に  $(u_\mu^m u_l^\mu)$  を入れたが、 $(\partial x^m / \partial x^\mu)(\partial x^\mu / \partial x^l) = \delta_l^m$  であり、さらに  $\delta_l^m v^l = v^m$  となることに注意してほしい。これより、 $B$  に対する変換則が得られる。

$$B_\mu^\nu = u_n^\nu B_m^n u_\mu^m \quad (11.44)$$

この変換則を利用すると、 $B$  の座標変換が計算できる。

$$\begin{aligned} (B_\mu^\nu) &= (u_n^\nu B_m^n u_\mu^m) = (u_n^\nu B_m^n) (u_\mu^m) \\ &= \begin{pmatrix} -\gamma\beta E_x/c & \gamma(B_z - \beta E_y/c) & -\gamma(B_y + \beta E_z/c) & \gamma E_x/c \\ -B_z & 0 & B_x & E_y/c \\ B_y & -B_x & 0 & E_z/c \\ \gamma E_x/c & \gamma(E_y/c - \beta B_z) & \gamma(E_z/c + \beta B_y) & -\gamma\beta E_x/c \end{pmatrix} (u_\mu^m) \\ &= \begin{pmatrix} 0 & \gamma(B_z - \beta E_y/c) & -\gamma(B_y + \beta E_z/c) & E_x/c \\ -\gamma(B_z - \beta E_y/c) & 0 & B_x & \gamma(E_y/c - \beta B_z) \\ \gamma(B_y + \beta E_z/c) & -B_x & 0 & \gamma(E_z/c + \beta B_y) \\ E_x/c & \gamma(E_y/c - \beta B_z) & \gamma(E_z/c + \beta B_y) & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

これより、電磁場の各成分の変換則は次のようになる。

$$\begin{aligned} B'_x &= B_x \\ B'_y &= \gamma(B_y + \beta E_z/c) \\ B'_z &= \gamma(B_z - \beta E_y/c) \end{aligned} \quad (11.45)$$

$$\begin{aligned} E'_x/c &= E_x/c \\ E'_y/c &= \gamma(E_y/c - \beta B_z) \\ E'_z/c &= \gamma(E_z/c + \beta B_y) \end{aligned} \quad (11.46)$$

これらの式は、座標の移動方向とそれに垂直な成分に分けることにより、次のように表すこともできる。

$$\begin{aligned} B'_\parallel &= B_\parallel \\ B'_\perp &= \gamma \left( \mathbf{B} - \frac{\mathbf{v}}{c} \times \frac{\mathbf{E}}{c} \right)_\perp \end{aligned} \quad (11.47)$$

$$\begin{aligned} \frac{E'_\parallel}{c} &= \frac{E_\parallel}{c} \\ \frac{E'_\perp}{c} &= \gamma \left( \frac{\mathbf{E}}{c} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B} \right)_\perp \end{aligned} \quad (11.48)$$

次にポテンシャルの四元化を考えてみよう。式 11.40 の電磁テンソルをポテンシャルで表現すると、次式のようになる。

$$B_{nm} = \partial_n A_m - \partial_m A_n \quad (11.49)$$

ここで、 $A_n$  の成分は  $(\mathbf{A}, -\phi/c)$  である。これを昇階して、式 11.41 に代入すると、次式となる。

$$\partial_m (\partial^n A^m - \partial^m A^n) = \partial^n (\partial_m A^m) - \partial_m \partial^m A^n = \mu_0 J^n \quad (11.50)$$

昇階の結果、 $(A^\nu) = (\mathbf{A}, \phi/c)$  である。ここで、次式の条件が満たされるとすると、上式は簡単になる。なお、この条件は、実はローレンツ条件である。

$$\partial_m A^m = 0 \quad (11.51)$$

簡単になったポテンシャルの式は次のようになる。

$$\partial_m \partial^m A^n = -\mu_0 J^n \quad (11.52)$$

$\partial_\mu \partial^\mu = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2 - \partial^2/\partial (ct)^2$  であるから、この式は、まさに、**ポテンシャルの波動方程式** (wave equation of potentials) を相対論的に記述したものである。ここにいたって、ベクトルポテンシャルとスカラーポテンシャルは独立した概念ではなく、統合された概念になっていることが理解できよう。一方、式 11.42 に代入すると、これは自動的に満たされる。このように、相対論の世界では、場の式よりも、ポテンシャルのほうがより簡明な変換を受ける。前述のように、ポテンシャルのほうがより根源的な場である印象を受ける。実際、電磁場の変換関係を覚えるよりは、ポテンシャルの変換を行い、それから電磁場を誘導することを薦める。

また、 $(A^n) = (\mathbf{A}, \phi/c)$  および  $(J^n) = (\mathbf{J}, c\rho)$  は四元ベクトルを構成し、それぞれ**四元ポテンシャル** (four-vector potential)、**四元電流** (four-vector current) と呼ばれる。座標と同じ変換を受けることも注目してほしい。例えば、 $S'$  系に電荷分布  $\rho'$  のみがあり、それを  $S$  系で見ると、 $\rho = \gamma\rho'$  と大きく見えることになる。なお、これはあくまでも、電荷分布についての記述であり、総電荷量  $Q$  については、相対的に移動している系の長さが  $\sqrt{1-\beta^2} = 1/\gamma$  に短縮して見えるため、不変量となるので、注意してほしい。

## 11.5 一定速度で移動する電荷の作る電磁場

$S'$  系で静止した点電荷の作る電場を、それと相対的に  $V$  の速度で動いている  $S$  系で観測すると、電場および磁場が観測できるが、それらは次のようにして誘導できる。まず、 $S'$  系では、電荷は静止しているので、スカラーポテンシャルだけが存在し、次のようになる。

$$\frac{\phi(x', y', z', t')}{c} = \frac{\mu_0 c Q}{4\pi} \frac{1}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}} \quad (11.53)$$

これを S 系で見ると、スカラーポテンシャルも変換を受けるが、新たに速度と同じ方向のベクトルポテンシャルも現れてくる。この場合は  $A_x$  のみが現れ、 $A_y = 0$ 、 $A_z = 0$  である。

$$\begin{aligned}\frac{\phi(x, y, z, t)}{c} &= \frac{\mu_0 c Q}{4\pi} \frac{\gamma}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}} = \frac{\mu_0 c Q}{4\pi} \frac{\gamma}{\sqrt{\gamma^2(x - Vt)^2 + y^2 + z^2}} \\ A_x(x, y, z, t) &= \frac{\mu_0 c Q}{4\pi} \frac{(V/c)\gamma}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}} = \frac{\mu_0 c Q}{4\pi} \frac{(V/c)\gamma}{\sqrt{\gamma^2(x - Vt)^2 + y^2 + z^2}}\end{aligned}\quad (11.54)$$

この結果、 $A_x$  は  $\phi$  に比例していることが分かる。

$$\mathbf{A}(x, y, z, t) = \frac{\mathbf{V}}{c} \frac{\phi(x, y, z, t)}{c} \quad (11.55)$$

電場、磁場はこれらポテンシャルから計算するのがよい。

$$\frac{\mathbf{E}}{c} = -\nabla \frac{\phi}{c} - \frac{\partial}{c\partial t} \mathbf{A} = \frac{\mu_0 c Q \gamma}{4\pi} \frac{(x - Vt, y, z)}{\sqrt{\gamma^2(x - Vt)^2 + y^2 + z^2}^3} \quad (11.56)$$

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A} = \frac{\mu_0 c Q \gamma (V/c)}{4\pi} \frac{(0, -z, y)}{\sqrt{\gamma^2(x - Vt)^2 + y^2 + z^2}^3} \quad (11.57)$$

この  $\mathbf{B}$  は次のようにしても計算できる。ここで、 $\partial \mathbf{A} / \partial t$  の項は  $\mathbf{V}$  との外積で消えることを利用している。

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A} = \text{rot} \left( \frac{\mathbf{V}}{c} \frac{\phi}{c} \right) = \text{grad} \left( \frac{\phi}{c} \right) \times \frac{\mathbf{V}}{c} = \frac{\mathbf{V}}{c} \times \frac{\mathbf{E}}{c} \quad (11.58)$$

上式で示した電場は  $(Vt, 0, 0)$  を中心にして、放射状の形状をしている。つまり、電荷の現在位置から放射状になっている。また、 $E_x$  は  $E_y$ 、 $E_z$  と比較して、 $1/\gamma$  だけ弱い。つまり、電気力線は  $x$  方向に扁平となっている。なお磁場は  $x$  を軸として回転的である。

## 11.6 リエナール・ウィーヘルトポテンシャル

任意の運動をしている電荷の作るポテンシャルを求めておこう。電荷  $Q$  が  $t'$  のときに出した電磁場は、それから光速  $c$  で伝わっていき、観測点では別の時刻  $t$  に感じることになる。電荷  $Q$  から見た観測点の位置ベクトルを  $\mathbf{R}(t) = \mathbf{r} - \mathbf{r}'(t)$  とすると、

$$ct' + R(t') = ct \quad (11.59)$$

が成立する。

まず、時刻  $t'$  で粒子が静止して見えるような系を考えよう。すると、観測点  $t$  で観測されるポテンシャルは次式で与えられる。

$$\begin{aligned}\frac{\phi}{c} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c} \frac{Q}{R(t')} = \frac{\mu_0 c}{4\pi} \frac{Q}{c(t - t')} \\ \mathbf{A} &= 0\end{aligned}$$

ここで第二の等号は式 11.59 を利用している。次に  $Q$  が速度  $\mathbf{v}$  で動いているように見える系へ変換してみよう。それには上式の  $\phi$  を四元ベクトルとして記載するのがよい方法である。

$$A^\nu = \frac{\mu_0 c}{4\pi} \frac{Qv^\nu}{R - \left(\sum_\mu R_\mu v^\mu\right)} \quad (11.60)$$

ただし、 $R_\mu$  は、四元ベクトル  $(R^\mu) = (\mathbf{r} - \mathbf{r}', c(t - t'))$  を降階したものである。

これを  $\mathbf{A}$  と  $\phi$  に分解して記載すると、次式が得られる。

$$\begin{aligned} \frac{\phi}{c} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Qc}{R - \mathbf{v} \cdot \mathbf{R}/c} \\ \mathbf{A} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Q\mathbf{v}}{R - \mathbf{v} \cdot \mathbf{R}/c} \end{aligned} \quad (11.61)$$

これをリエナール・ウィーヘルトポテンシャル (Lienard-Wiechert potential) といい、任意の軌跡を描いて運動している電荷の作るポテンシャルである。

この例に見られるように、相対論ではしばしば、古典的物理量を変更して、正しく座標変換されるように調整することにより、四元ベクトルや四元テンソルを得ることが多いので、慣れてほしい。

## 11.7 誘導起電力

第 7 章で述べた誘導起電力 (induced electromotive force) とは、導体を磁場中で動かすと、導体上に起電力が発生するという現象であるが、この現象は相対性原理を用いると簡単に理解することができる。磁場があるところ、あるいはその周辺には、ベクトルポテンシャルがある。仮に磁場が時間変動がなく、ベクトルポテンシャルが時間変動していなくても、導体が空間的に変動するベクトルポテンシャル中を移動すると、導体の感じるベクトルポテンシャルは時間的に変動する。

今、 $(x, y, z, t)$  系で固定されたベクトルポテンシャルを考え、そこを  $x$  軸方向に  $V = v$  で走っている導体を考えよう。この導体とともに動いている系の座標を  $(x', y', z', t')$  とする。 $x = \gamma(x' + vt')$ 、 $y = y'$ 、 $z = z'$ 、 $t = \gamma(t' + vx')$  が成立する。走っている導体上では、 $\mathbf{A}'$  も時間変化し、さらに、

S 系では観測されなかった  $\phi'$  も現れてくる。この結果  $\mathbf{E}'$  が観測されるようになる。

$$\begin{aligned}
 E'_x &= -\frac{\partial\phi'}{\partial x'} - \frac{\partial A'_x}{\partial t'} = -\gamma\frac{\partial(\phi - vA_x)}{\partial x'} - \gamma\frac{\partial(A_x - v\phi)}{\partial t'} = \gamma v\frac{\partial A_x}{\partial x'} - \gamma\frac{\partial A_x}{\partial t'} \\
 &= \gamma v\frac{\partial A_x}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x'} + \gamma v\frac{\partial A_x}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x'} + \gamma v\frac{\partial A_x}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x'} \\
 &\quad - \gamma\frac{\partial A_x}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t'} - \gamma\frac{\partial A_x}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t'} - \gamma\frac{\partial A_x}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t'} - \gamma\frac{\partial A_x}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial t'} \\
 &= \gamma^2 v\frac{\partial A_x}{\partial x} - \gamma^2 v\frac{\partial A_x}{\partial x} = 0
 \end{aligned} \tag{11.62}$$

$$\begin{aligned}
 E'_y &= -\frac{\partial\phi'}{\partial y'} - \frac{\partial A'_y}{\partial t'} = -\gamma\frac{\partial(\phi - vA_x)}{\partial y'} - \frac{\partial A_y}{\partial t'} = \gamma v\frac{\partial A_x}{\partial y'} - \frac{\partial A_y}{\partial t'} \\
 &= \gamma v\frac{\partial A_x}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial y'} + \gamma v\frac{\partial A_x}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial y'} + \gamma v\frac{\partial A_x}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y'} \\
 &\quad - \frac{\partial A_y}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t'} - \frac{\partial A_y}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t'} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t'} - \frac{\partial A_y}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial t'} \\
 &= \gamma v\frac{\partial A_x}{\partial y} - \gamma v\frac{\partial A_y}{\partial x} = -\gamma v B_z
 \end{aligned} \tag{11.63}$$

同様に、 $E'_z = \gamma v B_y$  が導かれ、 $\mathbf{E}' = \gamma \mathbf{v} \times \mathbf{B}$  が示される。非相対論的速度の場合には  $\gamma = 1$  と見なせるので、誘導起電力の式と一致する。

## 11.8 物質のある場合の相対論

物質がある場合、式 11.41 の右辺の全電流（および全電荷） $J^m$  は自由電流（および自由電荷） $J_f^i$  と束縛電流（および束縛電荷） $J_b^i$  から構成される。第 5 章より、束縛電流は  $\text{rot } \mathbf{M} + \partial \mathbf{P} / \partial t$ 、束縛電荷は  $-\text{div } \mathbf{P}$  で与えられる。 $J_f^i$  も  $J_b^i$  も四元ベクトルであるが、特に束縛電流は  $\mathbf{M}$  や  $\mathbf{P}$  といった他の量から導かれるものであるので、束縛四元電流は四元テンソルの微分で与えられる可能性が高い。

$\text{div}(\varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) = \rho_f$  (式 5.12)、 $\text{rot}(\mathbf{B} / \mu_0 - \mathbf{M}) - \partial(\varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) / \partial t = \mathbf{J}_f$  (式 5.23) から類推できるように、このテンソルは電磁テンソルと形が似ているはずである。結論を記載すると、まず**磁化テンソル** (magnetization tensor) を式 11.39 に似せて、以下のように定義する。

$$(M^{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & M_z & -M_y & cP_x \\ -M_z & 0 & M_x & cP_y \\ M_y & -M_x & 0 & cP_z \\ -cP_x & -cP_y & -cP_z & 0 \end{pmatrix} \tag{11.64}$$

ここで、各成分中、 $B_n$  には  $M_n$  が対応しているが、 $E_n/c$  には  $-cP_n$  が対応している点に注意してほしい。この磁化テンソルを用いると、 $J_b^n = \partial_m M^{nm}$  となり、次式が誘導される。

$$\partial_m (B^{nm} - \mu_0 M^{nm}) = \mu_0 J_f^n \tag{11.65}$$

なお、本質的な変形ではないが、

$$H^{nm} = \frac{B^{nm}}{\mu_0} - M^{nm} \quad (11.66)$$

により、**副電磁テンソル** (sub-electromagnetic tensor) を定義すると、

$$\partial_m H^{nm} = J_f^m \quad (11.67)$$

とさらに簡単に表現できる。いずれにせよ、rot  $\mathbf{E}$  式と div  $\mathbf{B}$  式は物質の影響を受けないので、式 11.42 はそのまま成立する。

本節でいくつかの四元ベクトルやテンソルを紹介したが、これらはいずれも相対論的座標変換を受ける。例えば、磁化テンソルも電磁テンソルと同じ変換を受ける。したがって、相対的に移動している座標では、次のように変換される。

$$\begin{aligned} M'_{\parallel} &= M_{\parallel} \\ M'_{\perp} &= \gamma \left( M + \frac{\mathbf{v}}{c} \times c\mathbf{P} \right)_{\perp} \end{aligned} \quad (11.68)$$

$$\begin{aligned} c\mathbf{P}'_{\parallel} &= c\mathbf{P}_{\parallel} \\ c\mathbf{P}'_{\perp} &= \gamma \left( c\mathbf{P} - \frac{\mathbf{v}}{c} \times M \right)_{\perp} \end{aligned} \quad (11.69)$$

ここで、分極  $\mathbf{P}$  を動く系から観測してみよう。 $M = \mathbf{0}$  と置くと、 $\mathbf{P}'$  は若干変化するが、新たに  $M' = \gamma(\mathbf{v} \times \mathbf{P})_{\perp} = \gamma\mathbf{v} \times \mathbf{P}_{\perp}$  なる磁化が生じることがわかる。分極により生じた正負の電荷が  $-\mathbf{v}$  の方向へ移動するので、結果的に電流が流れ、磁化となるのである。

次に磁化  $\mathbf{M}$  を動く系から観測してみよう。 $\mathbf{P} = \mathbf{0}$  と置くと、 $M'$  は若干変化するが、新たに  $\mathbf{P}' = -\gamma(\mathbf{v} \times M/c^2)_{\perp} = -\gamma\mathbf{v} \times M_{\perp}/c^2$  なる分極が生じることがわかる。つまり、磁石を動かすと分極が発生することになり、結果として電場が発生することが導かれる。ちょっと意外な結論である。これについては、12.3 節で、改めてその本質について述べる。

## 11.9 マクスウェル応力、ポインティングベクトル、電磁エネルギー

第 8 章に示した電磁場の持つ運動量やエネルギーの概念も、相対論では統一して論じることができる。分布した電荷や電流に働く力  $\mathbf{f}$  は、ローレンツ力を拡張した次式で与えられる。

$$\mathbf{f} = \rho\mathbf{E} + \mathbf{J} \times \mathbf{B} \quad (11.70)$$

8.5 節では、この式より電磁場の運動量を導出することができた。また、ローレンツ力の式と  $\mathbf{v}$  の内積を作ると、次式になる。

$$\mathbf{f} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} \quad (11.71)$$

8.6 節では、この式より電磁場のエネルギーを導出することができた。

これら二つの式を  $\gamma_0$  倍すると、四元ベクトルでまとめることができる。

$$f^n = B_k^n J^l \quad (11.72)$$

この右辺の  $J^l$  を、式 11.41 を利用して場で置き換える。

$$f^n = \frac{1}{\mu_0} B_l^n \partial_m B^{lm} \quad (11.73)$$

すると、この式の右辺は次式のように変形できる。

$$f^n = \partial_m T^{nm} \quad (11.74)$$

ただし、 $T^{nm}$  は次式で定義される。

$$T^{nm} = \frac{1}{\mu_0} \left( B_l^n B^{lm} - \frac{1}{4} g^{nm} B^{ij} B_{ji} \right) \quad (11.75)$$

その証明は以下のようなものである。

$$\partial_m (\mu_0 T^{nm}) = B_l^n \partial_m B^{lm} + B^{lm} \partial_m B_l^n - \frac{1}{4} g^{nm} (B^{ij} \partial_m B_{ji} + B_{ji} \partial_m B^{ij}) \quad (11.76)$$

まず式 11.76 の第一項は  $\mu_0 f^n$  であり、第二項は次のように変形できる。

$$\begin{aligned} B^{lm} \partial_m B_l^n &= g^{nk} B^{lm} \partial_m B_{kl} = \frac{1}{2} g^{nk} (B^{lm} \partial_m B_{kl} + B^{lm} \partial_m B_{kl}) \\ &= -\frac{1}{2} g^{nk} (B^{ij} \partial_i B_{kj} + B^{ij} \partial_j B_{ik}) \end{aligned} \quad (11.77)$$

ここで、この式の二つ目の等号であるが、第一項については  $B^{lm} \rightarrow -B^{ml}$  とし、 $m \rightarrow i$ 、 $l \rightarrow j$  と置き直している。また、第二項については  $l \rightarrow i$ 、 $m \rightarrow j$  と置き直し、さらに  $B_{ki} \rightarrow -B_{ik}$  としている。また式 11.76 の第三項は、次式のように変形できる。

$$\begin{aligned} -\frac{1}{4} g^{nm} (B^{ij} \partial_m B_{ji} + B_{ji} \partial_m B^{ij}) &= -\frac{1}{4} g^{nk} (B^{ij} \partial_k B_{ji} + B_{ji} \partial_k B^{ij}) \\ &= -\frac{1}{2} g^{nk} B^{ij} \partial_k B_{ji} \end{aligned} \quad (11.78)$$

ここで、まず最初の等号で、 $m \rightarrow k$  と置き換える。二番目の等号では、第一項のほうは  $B_{ij}$  の昇階と  $B^{ji}$  の降階を同時に行うことで、 $g$  が残らないようにしている。第二項のほうは  $i$  と  $j$  を入れ替えている。この結果、両項は一致し、 $1/4$  は  $1/2$  となる。したがって、式 11.76 は

$$\partial_m T^{nm} = f^n - \frac{1}{2} g^{nk} B^{ij} (\partial_i B_{kj} + \partial_j B_{ik} + \partial_k B_{ji}) = f^n \quad (11.79)$$

ここで、最後の括弧内は式 11.42 であることを利用して 0 にしている。これで証明は終りである。



式 11.75 の  $B_k^n$  を昇階すると、次式が得られる。

$$T^{nm} = \frac{1}{\mu_0} \left( B^{nk} g_{kl} B^{lm} - \frac{1}{4} g^{nm} B^{ij} B_{ji} \right) \quad (11.80)$$

$T^{nm}$  は四元の応力テンソルと呼ばれる。ここで、 $B$  の各成分を与えて、 $T$  の成分を書き出してみよう。

$$(T^{nm}) = \begin{pmatrix} T_{xx} & T_{xy} & T_{xz} & -cg_x \\ T_{yx} & T_{yy} & T_{yz} & -cg_y \\ T_{zx} & T_{zy} & T_{zz} & -cg_z \\ -S_x/c & -S_y/c & -S_z/c & -(u_e + u_m) \end{pmatrix} \quad (11.81)$$

各成分は  $B_i$  と  $E_i$  の積和で与えられるが、それらは、8.5 節で示した応力テンソル  $T_{ij}$  の各成分および電磁場の運動量  $g_i$ 、8.6 節で示したポインティングベクトルの各成分  $S_i$ 、および電場エネルギー  $u_e$  と磁場エネルギー  $u_m$  の和と一致するため、これらを使って記載した。

なお、 $T^{nm}$  は対称テンソルであり、 $S_i/c = cg_i$  である。これは、式 8.51 に示した  $\mathbf{S} = c^2 \mathbf{g}$  と同じ関係である。さらに、式 11.74 は、式 8.31 および式 8.47 と完全に一致することが示される。これにより、電磁氣的運動量と電磁氣的エネルギーの両概念が統合されたことが理解できよう。

実は、運動量とエネルギーについては、電場磁場で議論を行い、ポテンシャルの出る場がなかった。ポテンシャルの方がより本質的な場であることを説明してきた経緯を考えると、誠に残念である。ぜひ、読者自身も考えてみてほしい。

## 第 12 章

# パラドックス

電磁気学には数多くのパラドックスが提示されている。パラドックスは、提示者自身が答えを知っていて、世の中に挑戦的に提示する場合もあるが、多くの場合、提示者自身が本当に答えが見つからず悩んだ結果であるため、一般に簡単には答えが出せないものが多い。

こうした困難さをバックに、これらを利用して、電磁気学は間違っているのではないかという記述すらある。著者は電磁気学は、極端にマイクロやマクロなサイズにならない限り正しいと信じているため、可能な限り、解答を出してみたいと思っており、あえて、おまけのおまけともいべき章を設けた。なお、パラドックスといっても、著名なかなり難しいものもあれば、かなり自明に近いものもある。ここでは、本書の解説を読めば自明なものも、あえて掲載している。

いずれにせよ、パラドックスの答えを出すことは、大変によいトレーニングになるため、答えを安易に示すのは教育上好ましくないため、本章ではまず問題を提示し、最後の節でヒントのみを提示し、解答は付録に示した。可能な限り、ぜひ、自力で努力してもらいたい。

### 12.1 平行平板キャパシタに挿入された誘電体に働く力

図 12.1 に示すように、平行平板キャパシタに側方から中途まで入れられた誘電体に働く力の計算は、仮想変位による静電エネルギーの変化から算出される。極板には  $Q$  なる一定の電荷が

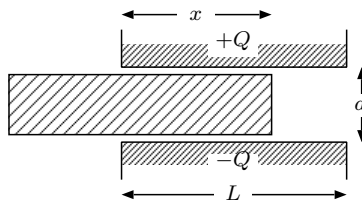


図 12.1 平行平板キャパシタに挿入された誘電体は極板間に引き込まれる。

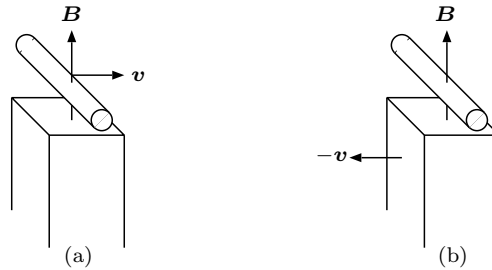


図 12.2 静止磁場中を動く導体と、静止導体に対し磁場が動く場合。

溜っており、極板の横から見た長さを  $L$  とする。極板間に、横から  $x$  まで誘電体が埋め尽くしていたとする。このとき、キャパシタの容量は、 $C = [\epsilon x + \epsilon_0(L - x)] W/d$  である。ただし、極板の奥行を  $W$ 、間隔を  $d$  とした。したがってこのキャパシタに蓄えられている静電エネルギーは  $U = Q^2/2C = Q^2 d/2W [\epsilon x + \epsilon_0(L - x)]$  である。これより、誘電体は  $F = -dU/dx$  なる力で、キャパシタ内に引き込まれるという結果が得られる。

さて問題は、このとき、各点のクーロン力を求めてみると、いずれでも電場は極板に垂直であり横に引き込む成分を持っていない。横向き成分を持っていないのに、何故誘電体は横向きの力を感じるのでしょうか。

問題を簡単にするために、 $\epsilon \rightarrow \infty$  とすると、誘電体中には電場がほとんどなくなるため、誘電体を表面を薄く絶縁された金属に置き換えることができるので、それで考えよ。

## 12.2 磁場の中心

例えば、一様な磁場がある。この磁場が時間的に変化するとしよう。そうすると、ファラデーの電磁誘導の法則にしたがって、任意の閉曲線上の電場の線積分は、それに鎖交する磁束の時間微分となり、0ではなくなる。つまり、少なくともどこかには電場が発生していることになる。この電場の方向はどちらを向くのであろうか。磁場はいたるところ一様であるので、一見、その方向を決定するのは不可能のように思われる。

## 12.3 動く磁石が発生する電場

図 12.2 (a) に示すように、平行磁極の間に磁場と垂直な方向を向く導線を入れ、それを磁場および導線の方向に垂直な方向に動かすと、フレミングの右手の法則にしたがって両端には電位差が発生する。

あるいは、次のように説明してもよい。導体中の電荷にはローレンツ力が働き、その力により電荷は導体端のほうに動かされるが、その結果、端の付近に電荷が蓄積され、新たな電場が形成され

る。電荷の移動が止まるのはこの電場と、もともとの磁場の作るローレンツ力が0となるときである。つまり、 $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$  の線積分だけの電位差が発生する。

さて、視点を変えて、同図 (b) のように、導体のほうを固定し、磁石のほうを動かしてみよう。まず、導体は止まっているから、ローレンツ力は働かない。磁石の端が近付かない限り、磁場は一定であるので、電磁誘導の法則による電場も発生せず、導体上には電位差は発生しないことになる。

## 12.4 磁場力の消失

ファインマン (Feynman) 物理学の書<sup>\*1</sup>にあるパラドックスであるが、図 12.3 に示すように、電流と平行な方向に移動している電荷には、移動方向と垂直な力が働く。この系を S 系としよう。さて、この電荷と一緒に動く系を S' 系としよう。S' 系で見ると、電荷は止まって見えるため、磁場の効果は消失する。つまり、力は消失し、S 系で得た力と矛盾する。

## 12.5 ファインマンの作用反作用のパラドックス

これもファインマン物理学にあるパラドックスであるが、図 12.4 に示すような二個の直交運動する電荷を考える。 $x$  方向に直線運動をしている電荷#1 の正面に、ちょうど別の電荷#2 がきた瞬間を考える。電荷#2 は、電荷#1 の運動方向と直角の  $y$  方向に動いている。両電荷に働く力を求めると、電場による力には作用反作用に法則が成立する。一方、#1 には#2 の作る磁場による力が働くのに対し、#2 にはこうした力は働かず、作用反作用の法則が成立しなくなるが、何故か。

これをもう少し定量的に分析できる形としよう。二点電荷を  $yz$  面に拡がる二枚の電荷シートに置き換えてみても、同様な問題が発生するが、何故か。

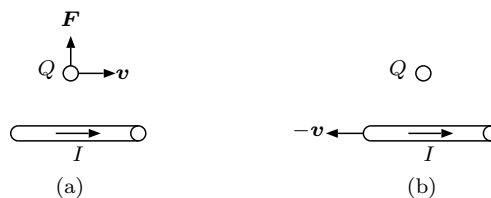


図 12.3 (a) 電荷が動いて見える S 系と、(b) 止まって見える S' 系では、電荷の受ける力が異なるのか。

<sup>\*1</sup> R. P. Feynman, R. B. Leighton & M. Sands, "The Feynman Lectures on Physics", Addison Wesley, 1965. 岩波書店より和訳「ファインマン物理学」がある。

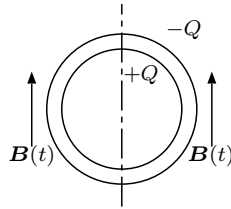


図 12.5 磁場を弱めていくと、二つの球に与えられる角運動量の総和が 0 でなくなる。

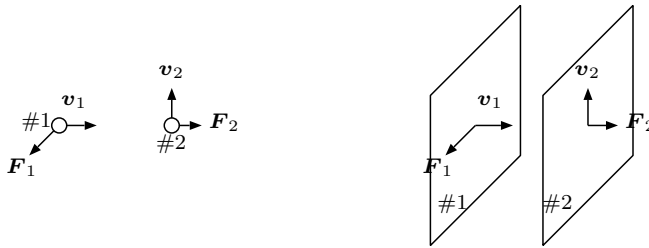


図 12.4 二つの移動電荷に働く力には、作用反作用の法則が成立しない。  
左: 点電荷、右: 面電荷

## 12.6 ファインマンの角運動量のパラドックス

これもファインマン物理学の書にあるパラドックスであるが、円板があり、中心を同じくする円状に点電荷が並べられているとする。また、その円板上に有限長ソレノイドコイルが載っている。最初にコイルに電流を流して、磁場を作っておく。円板をコマのように自由に回転できるようにしておいて、このコイルの電流を切ると、環状の電場が発生し、点電荷がこの電場によって動き始める。問題は、最初コイルの電流が流れているときには角運動量がなかったのが、電流を切ると、角運動量が発生することである。つまり、角運動量が保存されないように見えるが、何故か。

これをもう少し定量的に分析できる形としよう。図 12.5 にあるように、同心の球形の導体を考え、これらの側面に対向するように正負の電荷を蓄えておく。両導体は力学的には互いにずれないように固定されているものとする。これらを囲むように、中心を通る軸を持つソレノイドがあり、あらかじめ外部から一様磁場を与えておく。ある時点からその磁場を零に減じていくと、電磁誘導により環状の電場が発生し、これら正負の電荷に力が働き、それぞれ回転モーメントを作り出す。そのモーメントの総和は 0 とはならないので、角運動量が与えられることになるが、何故か。

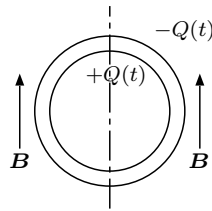


図 12.6 一定磁場のもとで、二つの球に与えられている電荷を変化させると、角運動量の総和が0でなくなる。

## 12.7 パフ・パフの角運動量のパラドックス

前小節のファインマンのパラドックスでは、磁場が変化しているが、電場が変化するモデルも可能である。パフ・パフ (Pugh-Pugh) らが提案したもので、図 12.6 に示すように、前者と同じ構造であるが、今度は磁場は一定であり、蓄積されている電荷のほうから  $Q$  まで一定の速さで変化する。このとき、電荷は内殻の北極のほうから注入されるとする。これに対向して、外殻のほうには逆向きの電流が流れる。このとき、内殻の表面に流れる電流にはローレンツ力が働く。この力の合計は内殻を回転させる方向に角運動量を与えるようなトルクを発生する。一方、外殻に働くトルクを計算すると、これら二つには差があり、結局、二つの球に与えられる角運動量の和は0とはならない。つまり、この差の分、角運動量は保存されないように見えるが、何故か。

なお、もともとのパフ・パフの提案は、外に置かれたソレノイドの代わりに、内殻の内部一杯に一樣に磁化した磁石を置き、その作る磁場を変化させている。このほうが、すべての要素が外殻の内側に存在するため、考えやすいが、球体の作る磁場の値を知らないと、計算できない。球体の作る磁場の値は、色々な著書に出ているため、ぜひ、トライしてほしいが、いずれにしても本質的な差はない。

## 12.8 トロートン・ノーブルのトルクのパラドックス

トロートン・ノーブル (Trouton-Noble) らが提案したパラドックスで、 $z$  軸に対し、 $45^\circ$  に置かれた電気モーメントがある。両端の電荷の間には電気モーメントの軸に平行な引力が働いている。

図 12.7 に示すように、この電気モーメントを  $z$  軸方向に  $-v$  の速度で動いている系から観測すると、電荷が作る電場による力は電気モーメントの軸方向の引力となるが、それ以外に電荷が移動するために発生する磁場がある。この磁場の作る力は  $z$  軸と直角になり、結果として電気モーメントを回すトルクを構成する。

どちらの系における議論が正しいのであろうか。

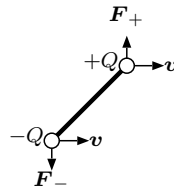


図 12.7 静止している斜めの関係にある二つの電荷の間には斥力しか働かないが、これらが動いて見える系で見ると、移動方向垂直の力が発生する。

## 12.9 霜田の磁石と運動電荷の作用反作用のパラドックス

図 12.8 に示すように、直線運動をしている電荷の正面に、円板状の磁石板が、軸を電荷の運動方向と垂直となるように置かれている。磁石が電荷の作る磁場から受ける力を求めると、磁気モーメントは磁場の多い方向へ引き込まれるから、磁石全体では相殺して 0 となる。一方、電荷は、磁石の作る磁場を感じるので、横向きを感じる。この結果、作用反作用の法則が成立しなくなる。

次に電荷とともに動く系から見ると、磁石は電場の影響は受けないので、力は受けない。一方、静止電荷も磁場の影響は受けないので、力を受けない。この場合は作用反作用の法則は成立するが、磁石の静止して見える系での結果とまったく一致しない。

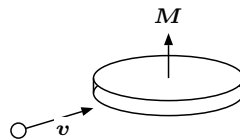


図 12.8 円板状磁石に向かって移動する電荷。

## 12.10 テレゲンの磁化に働く力のパラドックス

テレゲン<sup>\*2</sup>が指摘したパラドックスであり、磁化モデルとして、古くは磁荷分極、現在は磁化電流のモデルがあるが、これらを  $\text{rot } \mathbf{B}$  の存在する磁場中に入れると、図 12.9 に示すように、力の働く方向が逆転する。これについて本書では、8.1 節で述べたように、磁化電流のモデルが正しいとしたが、本当はどちらが正しいのか。

<sup>\*2</sup> B. D. H. Tellegen, "Magnetic Dipole Model", Am. J. Phys., Vol. 30, pp. 650-652, 1962



図 12.9 回転のある磁場中の磁化にかかる力。  
左: 磁荷分極モデル、右: 磁化電流モデル

## 12.11 ヒント

ヒントを読む前に、もう一度、自分で考えてみよう。パラドックスは自分の理解の程度をチェックするのに、きわめてよい手段であるからである。

### 12.11.1 平行平板キャパシタに挿入された誘電体に働く力

電極と誘電体の間に僅かな隙間を入れて、電場がどうなるかを考察してみよう。特に  $\epsilon \rightarrow \infty$  の場合は誘電体を金属に置き換えてもよいので、考察は比較的楽になる。

### 12.11.2 磁場の中心

一様な磁場といっても、どこかにそれを作っている電流があるはずである。磁場が磁石によって作られている場合でも、磁石中の電流を考えれば、同じことである。

### 12.11.3 動く磁石が発生する電場

この問題は、起電力の発生が、電磁誘導による場合と、導体が動く場合の二種類があることをきちんと理解していれば、何らパラドックスではない。磁石に固定した視点では、導体が動く場合であり、逆に磁石を動かす場合には電磁誘導で考えればよい。この導線を含み、磁石の外部を周回する空間に固定された閉曲線を考えると、そこに鎖交する磁束は磁石の移動につれ、明らかに変化する。したがって、この閉曲線に沿って、電場が発生するのは明らかである。ただ、導線のところでは磁場が変化しないため、直感的には理解しづらい。

### 12.11.4 磁場力の消失

このパラドックスは、相対論を使わないと理解できない。電流を構成している正負の分布電荷がどう変換されるかをきちんと計算してみよう。



### 12.11.5 ファインマンの作用反作用のパラドックス

電磁気学では、電磁場が運動量（ポインティングベクトル/ $c^2$ ）を持ったり、エネルギーを蓄積したりするので、そのことを考慮しなければならない。作用反作用の法則は、質点と電磁場の間に成立し、一方、電磁場に働くすべての力の合力は、電磁場の運動量を増加させることになる。したがって、質点に働く力と電磁場の運動量の増加率の総和は0となれば、矛盾はないことになる。

$yz$ 面に広がる二枚の電荷シートの場合、#1の電荷の移動による磁場は、変位電流も含めて全電流  $J_x + \epsilon_0 \partial E_x / \partial t$  が至るところ0になることに注意されたい。実は#1の電荷  $Q$  が  $-\infty$ の空間から  $\infty$ にまで移動する走行時間を  $\tau$  とすると、全電流は  $Q/\tau$  となるが、この値は限りなく小さくなる。

点電荷の場合、厳密なポインティングベクトルの計算は面倒なので、およそどこにポインティングベクトルが発生するかを調べてみよう。点電荷の場合も全電流は大局的にはほぼ0である。しかし、移動電荷のところに微小電流源を置いた場合のような局所的な全電流が流れ、この全電流はビオ・サバル型の磁場を発生する。

#1の発生する電磁場を  $\mathbf{E}_1$ 、 $\mathbf{B}_1$ 、#2の方を  $\mathbf{E}_2$ 、 $\mathbf{B}_2$  とするとき、ポインティングベクトルは  $(\mathbf{E}_1 \times \mathbf{B}_1 + \mathbf{E}_1 \times \mathbf{B}_2 + \mathbf{E}_2 \times \mathbf{B}_1 + \mathbf{E}_2 \times \mathbf{B}_2) / \mu_0$  であるが、第1項と第4項のような自身の電場と磁場の積は、時間に依存せず一定なので無視してよい。第2項と第3項の交差項のみ考慮の対象とせよ。

### 12.11.6 ファインマンの角運動量のパラドックス

一見、前の問題と同じようであるが、この場合には回転が入っている。この回転と一緒に動く座標系を考えれば、作用反作用の法則が理解できそうであるが、特殊相対論でも回転の入った座標変換は、慣性系でなくなるため、示されていない。したがって、ポインティングベクトルの作る角運動量を考えざるを得ない。

### 12.11.7 パフ・パフの角運動量のパラドックス

前問が解ければ、ほとんど同じ手法で計算できる。やはり、ポインティングベクトルの作る角運動量を考えざるを得ない。

### 12.11.8 トロートン・ノーブルのトルクのパラドックス

斜め  $45^\circ$  の両端に置かれた正負の電荷が互いに及ぼす引力を、 $-v$  の速度で動いている  $S'$  系から見てみよう。この際、電磁力として意識せず、通常の力として四元力成分を求め、それを変換してみよう。その変換結果は電場と磁場の計算結果と一致し、トルクが働いているように見える。

つまり、この問題は、電磁力の特殊性に基づくものではなく、普通の力でも起こる相対性理論上の現象なのである。

それでは何故、動いている系ではトルクが発生しているかに見えるのだろうか。トルクの有無はどのような条件で議論せねばならないのかなどを考えてみよう。

### 12.11.9 霜田の作用反作用のパラドックス

いままでの他のパラドックスの解が理解できた人には、ほとんど問題のないパラドックスである。前半はポインティングベクトルで理解できる。後半は、誤った記述であり、電場が生じている。

### 12.11.10 テレゲンの磁化に働く力のパラドックス

現在の磁化電流モデルの正当性を検証しよう。磁化として考えるとちょっと面倒であるが、束縛電流の代わりに自由電流のループに働く力を考えよう。さらに、力の反作用として、ポインティングベクトルの方向を計算して、つじつまが合えば、磁化電流モデルの方が正しい。

## 付録 A

# 超伝導体とポテンシャル

### A.1 超伝導体

**超伝導体** (superconductor) では電子が物質の影響を受けて互いに引力を感じる結果、**クーバー対** (Cooper pair) と呼ばれる電子二つからなる**準粒子** (quasi particle) を構成する。この準粒子は  $1/2$  スピン粒子二個からなるため、偶スピン (多くの金属超伝導体ではスピン 0、高温超伝導体ではスピン 1) の**ボーズ粒子** (boson) として振舞う。特に、十分低温になると**ボーズ凝集** (Bose condensation) を起こし、全体で一つの量子力学的波動関数で記述されるような振舞いを行う。

つまり、次式にしたがう。

$$(E + q\phi)\psi = \frac{(\mathbf{p} + q\mathbf{A})^2}{2M}\psi \quad (\text{A.1})$$

ここで、 $E$  や  $p$  は次のような微分演算子である。

$$E = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \quad (\text{A.2})$$

$$\mathbf{p} = -i\hbar \text{grad} \quad (\text{A.3})$$

さらに、材料中では材料を構成する格子の正電荷を中和するように電子が配置するため、電子密度はほぼ一定 ( $n$ ) となるため、 $\psi$  の振幅は一定になる。このような場合には、 $\psi = |\psi| \exp(i\theta)$  と置くことにより、次式が成立する。

$$E\psi = -\hbar \frac{\partial \theta}{\partial t} \psi \quad (\text{A.4})$$

$$\mathbf{p}\psi = (\hbar \text{grad} \theta)\psi \quad (\text{A.5})$$

これより

$$\begin{aligned} (\mathbf{p} + e\mathbf{A})^2 \psi &= (\mathbf{p} + e\mathbf{A})(\hbar \text{grad} \theta + e\mathbf{A})\psi \\ &= [-i\hbar^2 \nabla^2 \theta - i\hbar \text{div} \mathbf{A} + e\mathbf{A}(\hbar \text{grad} \theta + e\mathbf{A}) + (\hbar \text{grad} \theta + e\mathbf{A})^2] \psi \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

つまり、式 A.1 は

導体の議論をする際、超伝導体を基本にすると理解が楽である。超伝導体の電流を運ぶ粒子に対しては、次式が成立する。

$$\mathbf{p} = 2m\mathbf{v} - 2e\mathbf{A} \quad (\text{A.7})$$

$$E = T - 2e\phi \quad (\text{A.8})$$

ここで、超伝導粒子の質量を  $2m$ 、超伝導粒子の電荷を  $-2e$  とした。また、 $T$  は運動エネルギー、 $E$  は全エネルギーである。一方、超伝導粒子は量子力学の電子のように位相を持つことが知られている。この位相を  $\theta$  とすると、次の式が成立する。

$$\mathbf{p} = \hbar \text{grad } \theta \quad (\text{A.9})$$

$$E = -\hbar \frac{\partial \theta}{\partial t} \quad (\text{A.10})$$

ここで、位相  $\theta$  は、超伝導理論より次の微分方程式と境界条件を満たすことが分かっている。

$$\nabla^2 \theta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = 0 \quad (\text{A.11})$$

$$\mathbf{n} \cdot \text{grad } \theta = 0 \quad (\text{at surface}) \quad (\text{A.12})$$

さて、 $n$  を超伝導粒子の密度とすると、次式が成立する。

$$\mathbf{J} = -2en\mathbf{v} \quad (\text{A.13})$$

$$\rho = -2en \frac{T}{2mc^2} \quad (\text{A.14})$$

これら式から、次の関係が得られる。

$$\mathbf{J} = \frac{2e^2 n}{m} (-\Phi_0 \text{grad } \theta - \mathbf{A}) \quad (\text{A.15})$$

$$\rho = \frac{2e^2 n}{mc^2} \left( \Phi_0 \frac{\partial \theta}{\partial t} - \phi \right) \quad (\text{A.16})$$

ここで、 $\Phi_0$  は**磁束量子** (flux quantum) と呼ばれる物理量で、次式で定義される。

$$\Phi_0 = \frac{\hbar}{2e} \quad (\text{A.17})$$

これらの式を**電流連続の法則** (current continuity law) の式へ代入すると、ポテンシャルが**ローレンツゲージ** (Lorenz gauge) であることが直ちに導かれる。したがって、電磁場を解くには、まず  $\theta$  を解き、さらにこれらの二式と**ポテンシャルの波動方程式** (wave equation of potentials) を連立させることになる。上式をポテンシャルの波動方程式へ代入してみよう。

$$\left( \nabla^2 + \frac{1}{\lambda^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{A} = -\frac{\Phi_0}{\lambda^2} \text{grad } \theta \quad (\text{A.18})$$

$$(\text{A.19})$$

$$\left( \nabla^2 + \frac{1}{\lambda^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \phi = \frac{\Phi_0}{\lambda^2} \frac{\partial \theta}{\partial t} \quad (\text{A.20})$$

$$(\text{A.21})$$

ここで  $\lambda$  は、次式で示される**磁気侵入長** (magnetic penetration depth) と呼ばれる長さである。

$$\lambda = \sqrt{\frac{m}{2\mu_0 e^2 n}} \quad (\text{A.22})$$

$\lambda \rightarrow \infty$  とすると、自由空間の式になるので、超伝導の効果簡単にチェックすることができる。実際の超伝導体では  $1\mu\text{m}$  程度以下のきわめて小さな値である。 $\lambda$  が有限のとき、上式の左辺は減衰型の波動方程式と呼ばれるもので、各ポテンシャルが、超伝導体の表面から  $\lambda$  の特性長で指数関数的に侵入する解を持つことを示す。もちろん、これらの方程式は超伝導体の内部だけで成立する。外部では、もともとのポテンシャルの波動方程式の右辺を 0 とした方程式が成立する。

それでは、実際に解いてみよう。

外部磁場中の円柱

ドーナツ的な円帯の保つ磁場

式 A.15 と A.16 をローレンツゲージのポテンシャルの基本式 A.19 と A.20 へ代入してみると、直ちに次式が得られる。

$$\nabla^2 \rho - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} = \frac{\rho}{\lambda^2} \quad (\text{A.23})$$

$$\nabla^2 \mathbf{J} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{J}}{\partial t^2} = \frac{\mathbf{J}}{\lambda^2} \quad (\text{A.24})$$

電位が異なる場合

次に  $\phi$  と  $\mathbf{A}$  を考えよう。これらは  $\rho$  と  $\mathbf{J}$  および  $\theta$  から求めることができる。 $\theta$  はゲージであるから、適当に選ぶことができるので、いたるところ  $\theta = 0$  であるとする、 $\phi$  と  $\mathbf{A}$  は  $\rho$  と  $\mathbf{J}$  に比例するから、超伝導体中では、やはり表面から  $\lambda$  程度の深さまで指数関数的に減衰していく。このとき、表面でのポテンシャルの値はポテンシャルの深さ方向の勾配の  $\lambda$  倍となる。空間側でのポテンシャルは超伝導体中のポテンシャルと、値も勾配も連続となることから、超伝導体表面付近では同様の性質が成立する。超伝導体の  $\lambda$  は  $1\mu\text{m}$  以下のきわめて小さな値であることから、 $\lambda \rightarrow 0$  とすると、超伝導体表面ではポテンシャルの勾配は存在しても、ポテンシャルの値そのものはほとんど 0 であることが導かれる。

## A.2 Josephson 素子

### A.3 超伝導インダクタンス

超伝導体のインダクタンスを計算する前に、通常の**インダクタンス** (inductance) を計算してみよう。これには電流の作る磁界を計算するのが普通である。磁界はベクトルポテンシャルから計算できるので、実は次の式の第二項を基本としているといえる。

$$\mathbf{p} = M\mathbf{v} + q\mathbf{A} \quad (\text{A.25})$$

この式は一般化運動量と呼ばれる概念の定義である。粒子の全エネルギーは  $U = Mv^2/2 + qV$  で表されるが、速度に基づく運動エネルギー（相対論では  $Mcv_t$  と書かれる）とポテンシャルエネルギーの和で与えられる。同様に、粒子の全運動量は、速度に基づく力学的エネルギーとベクトルポテンシャルの和で与えられる。

多くの材料では上式の第一項は無視できるため、 $\mathbf{p} = q\mathbf{A}$  と表される。一方、 $\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt$  であり、また  $\mathbf{F} = -q \text{grad} V$  であるので、 $\text{grad} V = -\partial\mathbf{A}/\partial t$  が成立する。ここで、 $\mathbf{F} = -q \text{grad} V$  であって、 $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$  ではないことに注意してほしい。そこで、ある回路の枝が導体でできているときには、その枝の両端の電位差はこの左辺を枝に沿って経路積分することで計算することができる。このとき右辺も積分されるので、次式が成立する。

$$\Delta V = -\frac{\partial}{\partial t} \int d\mathbf{r} \cdot \mathbf{A} \quad (\text{A.26})$$

$\Delta V$  は線積分の終点と始点の電位差を示す。負号は、電流の流れる方向に電位が上がっていくという定義をしたからである。

回路理論では電流の流れに逆らって電位が上がると定義しているので、回路理論の電位を用いると、次式 A.27 のようになる。以後、電位の定義は回路理論に準ずるとしよう。らに、右辺のベクトルポテンシャルは、自分自身の電流や他の枝の電流により構成されるので、

$$\Delta V = \frac{\partial}{\partial t} \int d\mathbf{r} \cdot \mathbf{A} = \sum_i L_i \frac{dI_i}{dt} \quad (\text{A.27})$$

のような形となる。 $L_i$  は比例係数である。このうち、自分の電流による寄与分が**自己インダクタンス** (self-inductance) である。また、他の電流の寄与分が**相互インダクタンス** (mutual-inductance) である。

なお、有限の長さの配線が作るベクトルポテンシャルは次式で与えられる。これが**磁気インダクタンス** (magnetic-inductance) としてよく知られている概念である。

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0 \mathbf{J} dv}{4\pi r} \quad (\text{A.28})$$

さて、超伝導体では単位面積当たりの電流密度を大きくすることができる。つまり、第一項の寄与が無視できなくなる場合も少なくない。特に、超伝導エレクトロニクスで、配線の断面積が小さい場合には第一項の影響が大となる。第一項だけがある場合の解析を示しておこう。この場合、第一項は電流密度に置き換えることができる。

$$\mathbf{p} = \frac{M\mathbf{J}}{nq} \quad (\text{A.29})$$

磁気インダクタンスの場合と同様に両辺を時間微分すると、左辺は回路理論の電位を用いて、 $q \text{grad} V$  となるから、次のように置き換えられる。

$$\text{grad} V = \frac{M}{nq^2} \frac{d\mathbf{J}}{dt} \quad (\text{A.30})$$

つまり、単位体積当たり  $M/(nq^2)$  のインダクタンスを持つことが理解できる。これに枝の長さ  $l$  を掛け、電流密度を電流に置き換えると、

$$\Delta V = \frac{M}{nq^2} \frac{l}{S} \frac{dI}{dt} \quad (\text{A.31})$$

全インダクタンスは長さに比例し、断面積に逆比例することが理解できよう。このインダクタンスは**力学インダクタンス** (kinetic-inductance) と呼ばれるが、その成因は何であろうか。これは実は電子の慣性から来ている。電子の質量によって、電子は簡単には速度を帰ることができない。つまり電流を流れ続けさせようという原因となる。これがインダクタンスとして観測されるのである。原因は力学的なものであっても、回路的には自己インダクタンスと何ら変わるところがない。

さて、第一項も第二項も無視できない場合はどうなるのであろうか。

$$\text{grad } V = \frac{M}{nq^2} \frac{d\mathbf{J}}{dt} + \frac{d\mathbf{A}}{dt} \quad (\text{A.32})$$

となる。これより

$$\Delta V = \frac{M}{nq^2} \frac{d}{dt} \int d\mathbf{r} \cdot \mathbf{J} \frac{d}{dt} \int d\mathbf{r} \cdot \mathbf{A} \quad (\text{A.33})$$

が得られる。つまり力学インダクタンスと磁気インダクタンスの合計が得られる。

## A.4 フラクソイドの量子化

超伝導は巨視的量子効果によって、多数の電子を持ちながら一つの量子状態に陥るため Bohr の量子条件のような磁束（厳密にはフラクソイド）の量子化現象が発生する。

一つの量子状態なので  $\Psi(\mathbf{r})$  のように記述することができる。しかも電荷密度は中性条件から  $n$  とほぼ固定になっているので、 $\Psi(\mathbf{r}) = \sqrt{n} \exp(i\theta(\mathbf{r}))$  と記載することができる。そこで  $p = -i\hbar \nabla$  なる演算子をこれに施すと、 $\hbar \nabla \theta \sqrt{n} \exp(i\theta(\mathbf{r})) = \hbar \nabla \theta \Psi(\mathbf{r})$  となる。つまり  $p = \hbar \nabla \theta$  としてよい。例えばループ状の超伝導体を辿って一周すると、位相  $\theta$  は矛盾してはいけなから  $\theta$  の変化は  $2\pi$  の整数倍に限られることになる。これより

$$\int \mathbf{r} \cdot \mathbf{p} = 2n\pi\hbar = nh \quad (\text{A.34})$$

が導かれる。

なお、この式の最後の等号以後は  $\hbar$  の代わりに  $h/2\pi$  を用いることとする。  $q \text{ grad } V = d\mathbf{p}/dt$  より、 $\int dt \Delta V = \int d\mathbf{r} \cdot \mathbf{p}/q$  である。この電圧の時間積分を**フラクソイド** (fluxoid)  $\Phi$  と呼ぼう。

$$\Phi = \int dt V \quad (\text{A.35})$$

これより、上式は次のように置き換えられる。

$$\Delta \Phi = \frac{1}{q} \int d\mathbf{r} \cdot \mathbf{p} = \frac{h}{2\pi q} \Delta \theta \quad (\text{A.36})$$

ここで、 $\Delta\Phi$  や  $\Delta\theta$  は、線積分路の終点と始点における差である。これより

$$\Delta\Phi = n\frac{h}{q} = n\Phi_0 \quad (\text{A.37})$$

である。いうまでもなく  $\Phi_0 = h/q$  である。超伝導体中では電子二個がクーパーペアを作っているので  $\Phi_0 = h/2e = 2 \times 10^{-12} \text{Wb}$  である。これを**磁束量子** (flux quantum) という。英語を見るとフラクソイド量子であるが、日本語では磁束量子と呼んでいる。

もし、フラクソイドの概念を使うならば、前節最後の式は次のように書くことができる。

$$\Delta\Phi = \frac{M}{nq^2} \int d\mathbf{r} \cdot \mathbf{J} + \int d\mathbf{r} \cdot \mathbf{A} \quad (\text{A.38})$$

この線積分を閉ループに対して行えば

$$n\Phi_0 = \frac{M}{nq^2} \int d\mathbf{r} \cdot \mathbf{J} + \Phi_m \quad (\text{A.39})$$

左辺は量子化を示している。また、第二項はベクトルポテンシャルの線積分が、ループを鎖交する磁束  $\Phi_m$  になっていることを利用している。例えば、第二項が支配的な場合には、鎖交磁束が磁束量子の整数倍になる。これが真の意味での磁束の量子化である。また、第一項が支配的な場合には、Bohr の量子条件と呼ばれる力学的運動量の量子条件が得られる。一般にはフラクソイドの量子化となる。

## A.5 超伝導回路の解析

普通の回路では、**キルヒホフの電流則** (Kirchhoff current law) (Kh- $I$ ) と**キルヒホフの電圧則** (Kirchhoff voltage law) (Kh- $V$ ) が基本にある。これらは分岐点での電流の総和が 0 になることと、ループに沿った電位差の総和が 0 になることで表される。

$$\text{Kh-}I: \quad \sum I_i = 0 \quad (\text{分岐点}) \quad (\text{A.40})$$

$$\text{Kh-}V: \quad \sum V_i = 0 \quad (\text{ループ}) \quad (\text{A.41})$$

超伝導回路でも、これらの法則は当然成立するが、超伝導体がループを作っていると、フラクソイドが一定に保たれるという性質がある。しかも、その一定値は磁束量子の整数倍になる。より厳密にいうと、超伝導体およびジョセフソン素子の**フラクソイド** (fluxoid) の総和が量子化される。

電圧を時間積分したものはフラクソイドであるので、要するに Kh- $V$  則を時間積分した**キルヒホフのフラクソイド則** (Kirchhoff fluxoid law) が成立する。

$$\text{Kh-}\Phi: \quad \sum \Phi_i = n\Phi_0 \quad (\text{ループ}) \quad (\text{A.42})$$



この式を時間微分すると Kh-V 則となるので、普通の回路理論と矛盾している訳ではない。なお、電荷のない通常の超伝導体回路の世界では  $\nabla^2 V = 0$  が成立するので、この式より、フラクソイドについても、次式が成立する。

$$\nabla^2 \Phi = 0 \quad (\text{A.43})$$

この式は  $\mathbf{p} = m\mathbf{v} + e\mathbf{A}$  の両辺の div をとって証明できる。右辺第一項は  $\text{div } \mathbf{J}$  に比例するが、これは電流連続の式より 0 となる。右辺第二項は  $\text{div } \mathbf{A}$  に比例するが、これははて...

こうした回路を解析するには、通常の回路解析の電位をフラクソイドに置き換えるだけでよい。次に回路内に適当な数の電源を置く必要がある。そうでないと、すべてが 0 になってしまうからである。これら電源から見たインピーダンスや相互インピーダンスを求めることになる。解くべき変数は、ループの電流、または分岐点のフラクソイドのいずれを選ぶかがある。

ループ電流を変数に選んだ場合、変数の数はループ数  $l$  となる。これにより、各枝の電流が決定できるので、各枝のインピーダンス（の時間積分）を利用して、各枝のフラクソイド差が求められるが、これらには Kh- $\Phi$  則が成立しなければいけない。ループ数の条件があるので、条件数と変数の数が一致し、問題は解けることになる。なお、ループ電流を変数とする限り、Kh-I 則は自動的に満たされる。

分岐点フラクソイド（電位の時間積分値）を変数に選んだ場合、変数の数は分岐点数  $n$  となる。これにより、各枝の両端のフラクソイド差が決定されるので、各枝のインピーダンス（の時間積分）を利用して、各枝の電流が求められる。各分岐点で Kh-I 則が成立していなければならないので、 $n$  個の条件が存在することになり、やはり一義に解くことができる。超伝導インピーダンスを計算するには、この方法が適している。

各枝の電流やフラクソイドを変数にすることも可能であるが、一般に、変数の数が多くなり、実用的ではない。

## A.6 超伝導線路のインダクタンス

いままで述べたことを利用して超伝導線路のインダクタンスを計算してみよう。まず、平行平板線路とする。線路終端のフラクソイドの値は上下で等しいもの (0) とする。また入力端でも上下の各超伝導体内で一定とする。このような条件では  $\nabla^2 \Phi = 0$  の条件より、 $\Phi$  は、上下の各超伝導体内で  $z$  方向にのみ線形に変化し、 $x$  方向には変化しないことが誘導できる。

また、電流もベクトルポテンシャルも線路方向  $z$  軸方向となる。このとき、電流とベクトルポテンシャルを結び付ける式は

$$\frac{d^2 A_z}{dx^2} = -\mu_0 J_z \quad (\text{A.44})$$

である。

また、フラクソイドの量子化の節で述べたように、次の式が成立する。

$$\Phi = \frac{M}{nq^2} \int dr J_z + \int dr A_z \quad (\text{A.45})$$

この式を  $x$  方向で微分すると、

$$0 = \frac{M}{nq^2} \frac{dJ_z}{dx} + \frac{dA_z}{dx} \quad (\text{A.46})$$

もう一度微分し、 $A_z$  と  $J_z$  の式へ代入すると、

$$\frac{M}{nq^2} \frac{d^2 J_z}{dx^2} = \mu_0 J_z \quad (\text{A.47})$$

これから  $J_z$  の  $x$  方向の分布が、上の超伝導体中、ギャップ中、下の超伝導体中と、得られる。

$$J_z = J_0 \exp\left(-\frac{x - h/2}{\lambda}\right) \quad (\text{A.48})$$

$$J_z = 0 \quad (\text{A.49})$$

$$J_z = -J_0 \exp\left(\frac{x + h/2}{\lambda}\right) \quad (\text{A.50})$$

ただし、 $\lambda = \sqrt{M/\mu_0 nq^2}$  である。なお、上下対称性を考慮している。つまり  $x \rightarrow -x$  に対し、 $J_z \rightarrow -J_z$  となることを利用している。これより

$$A_z = -\mu_0 \lambda^2 J_0 \exp\left(-\frac{x - h/2}{\lambda}\right) + Bx + D \quad (\text{A.51})$$

$$A_z = Cx \quad (\text{A.52})$$

$$A_z = \mu_0 \lambda^2 J_0 \exp\left(\frac{x + h/2}{\lambda}\right) + Bx - D \quad (\text{A.53})$$

$$(\text{A.54})$$

ここでも、上下対称性を考慮している。さて、超伝導が十分厚いとすると、境界条件として、 $x \rightarrow \infty$  で  $\partial A_z / \partial x \rightarrow 0$ 、および  $x = \pm h/2$  で  $A_z$  と  $\partial A_z / \partial x$  が連続が成立し、これらの式の  $B$ 、 $D$ 、 $C$  を決定することができる。

$$A_z = -\mu_0 \lambda^2 J_0 \exp\left(-\frac{x - h/2}{\lambda}\right) + \mu_0 \lambda J_0 (h/2 + \lambda) \quad (\text{A.55})$$

$$A_z = \mu_0 \lambda J_0 x \quad (\text{A.56})$$

$$A_z = \mu_0 \lambda^2 J_0 \exp\left(\frac{x + h/2}{\lambda}\right) - \mu_0 \lambda J_0 (h/2 + \lambda) \quad (\text{A.57})$$

$$(\text{A.58})$$

これらの結果を用いて  $\partial \Phi / \partial z$  は、上下の超伝導体中で、次のようになる。

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = \mu_0 \lambda J_0 (h/2 + \lambda) \quad (\text{A.59})$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = -\mu_0 \lambda J_0 (h/2 + \lambda) \quad (\text{A.60})$$

つまり、上下左両端の  $\Phi$  の差は、線路長を  $l$  として

$$\Delta\Phi = \mu_0\lambda J_0(h + 2\lambda)l \quad (\text{A.61})$$

となる。

一方、線路の幅を  $w$  とすると、総電流  $I$  は

$$I = \lambda w J_0 \quad (\text{A.62})$$

これから、インダクタンス  $L = \Delta\Phi/I$  は

$$L = \mu_0 \frac{(h + 2n\lambda)l}{w} \quad (\text{A.63})$$

となる。つまり、通常の線路間ギャップ  $h$  が、両側の超伝導体に磁界が入らず浸みこんだだけ増加したのと、同じ解になっている。

## 付録 B

# 単位系について

現在、国際標準になっているのは、本書で用いた**国際標準単位系** (International Standard units, SI units) である **MKSA 単位系** (MKSA units) である。これ以外の単位系を利用することはだんだん少なくなってきつつあるが、他の単位系にもそれなりに便利さがあり、また歴史的意義もあって、たまに見かけることもある。特に物理天文の分野ではいまだに **CGS 単位系** (CGS units) の一つである **ガウス単位系** (Gauss units) や **ヘビサイドローレンツ単位系** (Heaviside-Lorentz units) (以後、しばしば **ヘビサイド単位系** (Heaviside units) と略す) がしばしば見受けられる。

電磁気学の単位系は、他の物理の単位系に比べ、圧倒的に面倒である。それは、種々の単位系間の単位換算の議論以外に、基本方程式の形そのものも変換されてしまうため、その議論も必要であるからである。本章ではこの両者を明解に理解する方法を提示する。ただし、単位に興味のない人は、読み飛ばしてもらって構わない。

### B.1 単位に関する一般的手法

電磁気学の話の前に、一つ身近な単位系に関する例を挙げよう。地上にある物体の受ける力は

$$F = mg \tag{B.1}$$

で与えられる。重力加速度  $g$  は  $9.8\text{m/s}^2$  であるから、質量  $1\text{kg}$  の物体は  $9.8\text{N}$  の力を受けることになる。

さて、実用的な単位として  $\text{kgW}$  ( $\text{kg}$  重) というのが利用されている。 $1\text{kgW}$  とは  $1\text{kg}$  の質量が受ける重力と同じ大きさの力である。そこで、この単位を使うと、次式が成立する。

$$F = m \tag{B.2}$$

このように、力の単位が変わると、使われる関係式も異なるのである。

まず式 B.1 で、 $F$ 、 $m$ 、 $g$  には数値だけでなく単位も含んでいるとしよう。すると、質量  $10\text{kg}$  の

とき、式 B.1 は次のように書ける。

$$98\text{N} = 10\text{kg} \times 9.8\text{N/kg} \quad (\text{B.3})$$

本当は MKS 単位系なので、重力加速度の単位は  $\text{m/s}^2$  であろうが、ここではこの式だけに閉じて議論をしたいので、あえて「力/質量」の単位を採用した。

$\text{kgW}$  の場合には次のように考えればよいことが想像できよう。

$$10\text{kgW} = 10\text{kg} \times 1\text{kgW/kg} \quad (\text{B.4})$$

式 B.2 のように表されたのは、 $g$  がたまたま 1 だったからである。式 B.2 は数値に対しては成立するが、単位に対しては問題のある式である。このように、数値に対しては成立するが、単位が変わると使えない方程式は**数値方程式** (value equation) と呼ばれる。機械的に代入すると  $1\text{kgW}=1\text{kg}$  となってしまう。

これに対し、式 B.1 は単位まで含めても成立する。このように、単位まで含めて量として成立する式を**量方程式** (quantity equation) という。また、{ 量 } を、その量の数値部分、[ 量 ] を単位部分と記載するので、量={ 量 } [ 量 ] が成立する。例えば  $g=9.8\text{m/s}^2$  の場合、{ $g$ }=9.8、[ $g$ ]= $\text{m/s}^2$  となる。数値は単位系によって変わるので、必要に応じ、{ $g$ }<sub>MKS</sub>=9.8 のように、単位系をサフィックスなどで表示しよう。また { $g$ } =  $g/[g] = g/(\text{m/s}^2)$  などの式が成立する。

なお、量方程式が得られると、その数値部分だけでも等式が成立するし、単位部分だけでも等式が成立する。これを利用して、単位の次元を解析することができる。また、量方程式を利用すると、単位間の換算などは簡単に行うことができる。例えばこの例では、双方とも同じ質量に対する力なので、 $F$  に対してただちに  $10\text{kgW}=98\text{N}$ 、つまり  $1\text{kgW}=9.8\text{N}$  が得られる。またこの両辺を  $\text{kg}$  で割ると、 $g$  に関する恒等式  $1\text{kgW/kg}=9.8\text{N/kg}$  も得られる。

同じ例を用いて CGS 単位系との比較を試みよう。あたり前のことであるが、 $1\text{kg}=1000\text{g}$  であること、重力加速度が  $980\text{cm/s}^2=980\text{dyne/g}$  であることを知らないとい換算はできない。また、同じ物理状態を比較しないと単位の換算は不能である。そこで、 $10\text{kg}$  つまり  $10000\text{g}$  にかかる力を式 B.1 により計算してみる。例のごとく、数値と単位を同時に計算する。

$$9.8 \cdot 10^6 \text{dyne} = 10^4 \text{g} \times 980 \text{dyne/g} \quad (\text{B.5})$$

となる。これより、 $1\text{kgW} = 9.8 \cdot 10^5 \text{dyne}$  であることが導かれる。

これらの例から想像するに、まず種々の単位系で使われる関係式を統一的に包含する量方程式を作成する。この際、ある変数は、単位系によっては 1 であるため、見えない、あるいは式に現れないこともあるので、注意が必要である。こうすることにより、関係式は数値および単位も含めた量方程式となる。また、一つの単位系だけに着目すれば、単位の関係を求めるには、数値を無視してよい、つまり次元解析が可能なることも理解できよう。また単位系間の換算を行うには、同じ物理現象を異なる単位系で記述することにより、可能となる。

電磁気学でも、ここで述べたような問題が原因で、単位を複雑にしている。例えば、我々がそれぞれ学んだ書で使われている式は、他の書では必ずしも同じ形とは限らないのである。例えば、MKSA 単位系では力の式に  $4\pi$  が現れ、マクスウェル方程式には現れないが、ガウス単位系では逆である。このことから、いずれの書の式も式 B.2 のような意味で、数値方程式だったことが理解できよう。まずいずれの単位系でも用いることのできる量方程式を整備することが必要であることを、十分理解してほしい。

## B.2 電磁気学における力の量方程式と種々の単位系

電磁気学においても、単位系を決定するのはいくつかの基本方程式である。歴史的には、磁場は、電流間に働く力以前に、磁石間に働く力から定義された。このころは、磁石内の電流は知られておらず、磁極の場所に磁荷があるとされていた。このため、電荷間の**クーロンの法則** (Coulomb law) に加え、磁荷間のクーロン法則が、基本方程式の一つになっていた。その後、磁場中で電流が力を受けることが分かり、磁場と電流の関係式が基本方程式の一つに参入した。さらに電流同士の力を与える**ビオ・サバルの法則** (Biot-Savart law) が誘導された。この際、電流は次式で定義される。

$$I + \frac{\partial Q}{\partial t} = 0 \quad (\text{B.6})$$

例えば、ガウス単位系ではこれらは次のようになっている。ただし、電流の絡む式では、力は電流の方向に依存するが、ここでは簡単のために、電流は、最大の力を及ぼし合う方向に置かれているとしている。

$$F = \frac{Q_1 Q_2}{r^2} \quad (\text{B.7})$$

$$F = \frac{I_1 \Delta s_1 I_2 \Delta s_2}{c^2 r^2} \quad (\text{B.8})$$

$$F = \frac{m_1 I_2 \Delta s_2}{c r^2} \quad (\text{B.9})$$

$$F = \frac{m_1 m_2}{r^2} \quad (\text{B.10})$$

これと、いままで学んできた MKSA 単位系を比較してみると、 $\epsilon_0$ 、 $\mu_0$ 、 $4\pi$  が入っていないこと、逆に、ところどころ  $c$  が入っていることが大きく異なる。つまり、どちらの方程式群も数値方

程式であって、量方程式ではないのである。そこで、MKSA 単位系との双方を満たす量方程式を探す必要がある。両方を満たすには、少なくとも次のようにせねばならないだろう。

$$F = \frac{\alpha}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{r^2} \quad (\text{B.11})$$

$$F = \frac{\alpha\mu_0}{4\pi} \frac{(I'_1 \Delta s_1)(I'_2 \Delta s_2)}{r^2} \quad (\text{B.12})$$

$$F = \frac{\alpha}{4\pi} \frac{m_1 (I'_2 \Delta s_2)}{r^2} \quad (\text{B.13})$$

$$F = \frac{\alpha}{4\pi\mu_0} \frac{m_1 m_2}{r^2} \quad (\text{B.14})$$

ただし  $I'$  は次式で定義される対称電流である。以後、特に断らない限り、電流という場合には、この対称電流を指すものとする。

$$I' = I/\gamma \quad (\text{B.15})$$

対称電流の場合、電流連続の式は次式のようにになる。

$$I' + \frac{1}{\gamma} \frac{\partial Q}{\partial t} = 0 \quad (\text{B.16})$$

MKSA 単位系では  $\{\alpha\} = 1, \{\gamma\} = 1$  とし、一方、ガウス単位系では  $\{\alpha\} = 4\pi, \{\epsilon_0\} = \{\mu_0\} = 1, \{\gamma\} = \{c\}$  とするのである。実はこれらの量方程式は、ガウス単位系と MKSA 単位系だけでなく、いままで提案されたほぼすべての単位系をカバーする全能な量方程式なのである。

ガウス単位系で  $\{\alpha\} = 4\pi$  として、分母分子で  $4\pi$  が消えるような若干面倒な手法を用いたのは、力の方程式で  $4\pi$  があるほうが、マクスウェル方程式などの微積分形の方程式で  $4\pi$  が消え失せ、きれいな形になることを反映したものである。つまり、 $\{\alpha\} = 1$  の MKSA 単位系のほうがきれいになり、 $\{\alpha\} = 4\pi$  のガウス単位系のほうが  $4\pi$  が各所に現れるのに対応させている。

なお、式 B.11 で  $Q$  を一個除いた部分は電場  $\mathbf{E}$ 、式 B.12 で  $I' \Delta s$  を一個除いた部分は磁場  $\mathbf{B}$ 、式 B.14 で  $m$  を一個除いた部分は磁場強度  $\mathbf{H}$  と呼ばれる。

単位電流を決定するような実験的な場合にはビオ・サバルの法則でなく、これの線積分の結果であるアンペール力 (Ampere force) の式を用いる。これは、十分に長い平行に置かれた二線に電流が流れているときに働く、単位長当たりの引力を示す。

$$f = 2 \frac{\alpha\mu_0}{4\pi} \frac{I'_1 I'_2}{r} \quad (\text{B.17})$$

この場合にも、 $I'$  を一個除いた部分が  $\mathbf{B}$  である。いずれを使っても結論は変わらないが、本書ではアンペールの力を使うこととする。

これら、 $\{\alpha\}$ 、 $\{\epsilon_0\}$ 、 $\{\mu_0\}$ 、 $\{\gamma\}$  の四つの量を決めると電磁気の単位系は完全に決定される。いままで提案されてきた主な単位系について、これらの数値がどうなっているかを歴史的経緯に沿って簡単に紹介しよう。

**電磁単位系 (electromagnetic units)** 電磁気の単位を、最初に、長さ、重さ、時間の力学系単位から絶対的に決めたのは**ウェーバー (Weber)\*1**である。磁気単位系とでも呼ぶべきであろうが、磁場関連の式には一つも係数を含まない、つまり、 $\{\alpha\} = 4\pi$ 、 $\{\mu_0\} = 1$ 、 $\{\gamma\} = 1$  として、単位磁荷、単位電流を決定し、それから電流連続の式から単位電荷を決定した。これらを基本に、他の単位が決定される。*CGS-emu*とも呼ばれ、以後の諸単位系の基本となった。単位電荷は電流から勝手に決まってしまうので、そのときの力を 1dyne とするにはクーロンの法則に 1 でない**電気定数 (electric constant)**  $\{\epsilon_0\} = 1/\{c\}^2$  が入る。ただし、 $\{c\}$  は、以後 CGS 単位系での光速値で約  $3 \cdot 10^{10}$  を意味することとする。

**静電単位系 (electrostatic units)** 電磁単位系の対になる単位系として、**マクスウェル (Maxwell)** の提案した静電単位系、あるいは *CGS-esu* がある。電気単位系と呼ぶべきかも知れないが、これはまず一つも係数を含まない電荷のクーロンの法則から、つまり、 $\{\alpha\} = 4\pi$ 、 $\{\epsilon_0\} = 1$  として、単位電荷を決定し、それから電流連続の式から単位電流を決定した。単位電流は電荷から勝手に決まってしまうので、そのときの力を 1dyne とするにはビオ・サバールの法則に 1 でない**磁気定数 (magnetic constant)**  $\{\mu_0\} = 1/\{c\}^2$  が入る。ただし、 $\{\gamma\} = 1$  とした。また、この磁気定数を使って単位磁荷を決定する。

**ガウス単位系 (Gauss units)** その後、**ヘルムホルツ (Helmholtz)** と **ヘルツ (Hertz)** が磁気系量には電磁単位系、電気系量には静電単位系を用いた単位系を制定した。この結果、 $\{\epsilon_0\} = \{\mu_0\} = 1$  と簡単になるが、逆に、電流連続の式から誘導された電流の作る力には  $\{\gamma\} = \{c\}$  が入ってくる。

**非対称 (asymmetrical)** な電磁単位系や静電単位系と異なり、磁気系の単位と電気系の単位が対等となり、磁荷と電荷、磁場と電場などの単位が等しくなり、**対称 (symmetrical)** である。このため  $\gamma$  を**対称化定数 (symmetrizing constant)** と呼んでおこう。理論的に便利なので、物理の世界で多用された。

**ヘビサイドローレンツ単位系 (Heaviside-Lorentz units)** これまでの単位系はいずれも力の法則に  $4\pi$  が入らず、その結果、逆に発散積分、回転積分、マクスウェル方程式といった微積分の式などには  $4\pi$  が入るようになる。そこで、**ヘビサイド (Heaviside)** が、 $\{\alpha\} = 1$  として、力の法則の分母に  $4\pi$  を入れることにより、微積分の式から  $4\pi$  を追い出した単位系を提唱した。こうした手法を**有理 (rational) 化**という。そこで  $\alpha$  を**有理化定数 (rationalizing constant)** と呼んでおこう。有理でない電磁単位系、静電単位系、ガウス単位系はいずれも**非有理 (irrational)** と呼ばれる。

\*1 ウェーバーは力学系の単位として mm、mg、s を用いたが、その後 cm、g、s を用いるように改訂されたため CGS 単位系とした。



$\{\epsilon_0\} = \{\mu_0\} = 1$  としたため、有理化の代償は、単位磁荷、単位電流、単位電荷に現れ、従来の単位系の量と換算する際に  $\sqrt{4\pi}$  がたくさん入ることになる。このため、従来の単位量との整合性がとれず、この提案は採用されなかったが、理論的には便利であり、特に相対性理論などで多用されている。以後、本書では、**ヘビサイド単位系** (Heaviside units) と略す。

**MKSA 単位系 (MKSA units)** 工業が発展するにつれ、それまでの基本であった **CGS 単位系** (CGS units) から、実用的な世界のサイズにあったより大きな量である m, kg, s を単位を基本とする **MKS 単位系** (MKS units) への移行が起こった。これに合わせ、電磁気の単位系の標準も MKS 単位系へ変更する提案が、**ジオルジ** (Giorgi) によってなされた。提案の骨子は、 $\{\alpha\} = 1$  の有理とするが、従来の単位量との整合性を考慮し、有理化の代償を電気定数、磁気定数に求め、これらに  $4\pi$  を含めようというものである。どちらかというとならば磁気定数  $\mu_0$  の値を簡単にした電磁単位系に近いものとしたため、電磁単位系から培ってきた過去の単位量との整合性がよく、戦後、多少の変更の上、**国際標準単位系** (International Standard units, SI units) として採用されるにいたった。

ヘビサイド単位系と同様に有理であるが、 $\{\gamma\} = 1$  で非対称である。なお、この系の単位量は、CGS 電磁単位系の 10 のべき乗とした **BA 単位系** (British Association unit) と呼ばれるものを引き継いでいる。これは単位電圧を電池の電圧程度 ( $10^8 \text{ emu}$ ) とすると定めたため、各単位量の換算の際のべき数は必ずしもすっきりしていない。

上記の観点から、主な単位系を分類すると、表 B.1 のようになる。

表 B.1 各単位系の特徴と定数の値 (定数の単位については後述する) ( $\{c\}$  は CGS 単位系での光速値約  $3 \cdot 10^{10}$ 、 $\{c\}_M$  は MKS 単位系での光速値約  $3 \cdot 10^8$ )

| 特徴と定数                       | 電磁          | 静電          | Gauss   | Heaviside | MKSA                 |
|-----------------------------|-------------|-------------|---------|-----------|----------------------|
| CGS or MKS                  | CGS         | CGS         | CGS     | CGS       | MKS                  |
| $\{\alpha\}$ (非有理: $4\pi$ ) | $4\pi$      | $4\pi$      | $4\pi$  | 1         | 1                    |
| $\{\gamma\}$ (対称: $\{c\}$ ) | 1           | 1           | $\{c\}$ | $\{c\}$   | 1                    |
| 磁気定数 $\{\mu_0\}$            | 1           | $1/\{c\}^2$ | 1       | 1         | $4\pi 10^{-7}$       |
| 電気定数 $\{\epsilon_0\}$       | $1/\{c\}^2$ | 1           | 1       | 1         | $10^7/4\pi\{c\}_M^2$ |

## B.3 マクスウェル方程式の量方程式

次に力の式から、これらと矛盾しないマクスウェル方程式を誘導しておこう。

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{\alpha}{\varepsilon_0} \rho \quad (\text{B.18})$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{\gamma} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (\text{B.19})$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \quad (\text{B.20})$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \alpha \mu_0 \mathbf{J}' + \frac{\mu_0 \varepsilon_0}{\gamma} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (\text{B.21})$$

ただし、 $\mathbf{J}'$  は対称電流の電流密度である。

電荷や電流の項についての係数は、容易に想像できるように、MKSA 単位系の力の式の  $1/\varepsilon_0 \rightarrow \alpha/\varepsilon_0$ 、 $\mu_0 \rightarrow \alpha\mu_0$  から得られる。

式 B.21 の電場の時間微分の係数は変位電流の考えから得られる。変位電流とは電流連続の式 B.16 の微分形である

$$\operatorname{div} \mathbf{J}' + \frac{1}{\gamma} \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (\text{B.22})$$

と矛盾しないように導入された概念である。この式の  $\rho$  を式 B.18 で置き換え、全体に  $\alpha\mu_0$  を掛けると、

$$\operatorname{div} \left( \alpha \mu_0 \mathbf{J}' + \frac{\varepsilon_0 \mu_0}{\gamma} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) = 0 \quad (\text{B.23})$$

が得られる。この括弧内は式 B.21 の右辺である。確かに式 B.21 の  $\operatorname{div}$  は、左辺が 0 となるので、矛盾しない。

こうした式に矛盾しない形で、ローレンツ力 (Lorentz force) の式も示しておこう。

$$\mathbf{F} = Q \left( \mathbf{E} + \frac{1}{\gamma} \mathbf{v} \times \mathbf{B} \right) \quad (\text{B.24})$$

さらにポテンシャル関連の式は次のようになる。

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \phi - \frac{1}{\gamma} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (\text{B.25})$$

$$\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A} \quad (\text{B.26})$$

$$\nabla^2 \phi - \frac{\varepsilon_0 \mu_0}{\gamma^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -\frac{\alpha}{\varepsilon_0} \rho \quad (\text{B.27})$$

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{\varepsilon_0 \mu_0}{\gamma^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\alpha \mu_0 \mathbf{J}' \quad (\text{B.28})$$

$$\operatorname{div} \mathbf{A} + \frac{\varepsilon_0 \mu_0}{\gamma} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \quad (\text{B.29})$$

ここまでの式を見ると、 $\varepsilon_0$ 、 $\mu_0$  は独立には現れず、 $\varepsilon_0/\alpha$ 、 $\alpha\mu_0$  と  $\alpha$  と組になって現れる。ただし、 $\varepsilon_0\mu_0$  は  $(\varepsilon_0/\alpha)(\alpha\mu_0)$  と書換えられることに注意してほしい。

式 B.21 の電場の時間微分の係数と、電磁誘導の式 B.19 の右辺の係数の積は、電磁波の速度、つまり  $1/c^2$  になることが分かっている。このことから後者の係数は  $1/\gamma$  でなければならない。確かにそうすると次式が成立するが、非対称系であると  $\{\mu_0\}\{\epsilon_0\}$  が  $1/\{c\}^2$  となり、対称系であると  $1/\{\gamma\}^2$  が  $1/\{c\}^2$  となるので、納得できよう。

$$\frac{\mu_0 \epsilon_0}{\gamma^2} = \frac{1}{c^2} \quad (\text{B.30})$$

つまり、 $\epsilon_0/\alpha$ 、 $\alpha\mu_0$ 、 $\gamma$  の三つの定数のうち二つを自由に決めることができる。

また、ポテンシャルの時間の二階微分に付く係数は  $1/c^2$  であり、ローレンツ条件の一時微分の係数は  $\gamma/c^2$  となる。

以上の方程式を使うと、磁荷、電流、電荷、電圧といった電磁気学の**基本単位** (base unit) は決定できるが、後に分かるように、これら二つの自由度の結果、(電流 or 磁束) と (電荷 or 電圧) の二つの単位を自由に選ぶことができ、他の二つはこれらから誘導できることになる。

例えば、電流と電圧を独立に決定することができる。さらに、 $\gamma$  の値は 1 or  $c$  なので、これを 1 と定めると、自由度は一つとなり、例えば MKS 以外に電流だけを定めればすべてが決定されることになる。これが MKSA の第四基本単位が A になる由来である。

## B.4 電磁気学の単位の設定

各単位系の**基本単位** (base unit) の名称について述べよう。MKSA 単位系を構成する基本単位の単位名は、電流の単位 (厳密には対称電流の単位) の A' (Ampere)、磁束の単位 Wb (Weber)、電荷の単位 C (Coulomb)、電圧の単位 V (Volt) の四つである。

その他の単位系で単位の名称が比較的整備されているのはガウス単位系ぐらいであり、電流 Bi (Biot)、磁束 Mx (Maxwell)、電荷 Fr (Franklin)、電圧 statV などの名称を用いている。これに対し、電磁単位系では、すべての単位に CGS-emu と単位系の英文名称と同一でかつ物理量に依存しない単一名称を使う。同様に静電単位系も CGS-esu しか使わない。ヘビサイドローレンツ単位系では、単位の名称すらない。

このため、きわめて間違いが発生しやすいので、本書では、すべての単位系の単位名称に対し、MKSA 単位系の単位名の後に単位系を示すサフィックスを付けて区別することにする。MKSA 単位系には何も付けないが、電磁単位系には ab (absolute)、静電単位系には st (static)、ガウス単位系には gs、ヘビサイドローレンツ単位系には hl なるサフィックスを付ける。例えば MKSA 単位系の C に対し、 $C_{ab}$ 、 $C_{st}$ 、 $C_{gs}$ 、 $C_{hl}$  などと表す。さらに、任意の単位系の単位を表すには、これらの代わりに「 $_$ 」を用い、 $C_$  などとする。なお、ガウス単位系での特別な単位名については、まとめの表で注記することとする。

繰り返しになるが、四つの定数  $\alpha$ 、 $\mu_0$ 、 $\epsilon_0$ 、 $\gamma$  は、本章最初の節で示した重力加速度  $g$  のようなもので、単位系に依存しない同じ量であることに着目してほしい。同じ量であっても、単位系が異なると異なる数値を持っているだけである。したがって、各単位系のすべての単位の大きさを定

め、また、単位系間の単位換算を決定する重要なものである。これら定数の数値はすでに表 B.1 に示したが、単位については以下の解説の中で説明を行う。

まず  $\alpha$  であるが、この単位は本来無次元である。しかし、無次元だからといって、何らかの単位を付けていないと、単位系の換算を単位の次元だけを見て行おうという場合に、著しく混乱を生じるので、unity を意味する  $U_{\perp}$  という単位を付けておく。もちろん MKSA 単位系以外の場合には、他の単位と同様、各単位系のサフィックスを付ける。ガウス単位系では  $\alpha=4\pi U_{gs}$  であるが、MKSA 単位系では  $\alpha=1\pi U$  と記載する。これにより、 $\alpha=4\pi U_{gs}=1U$  と置いて、二つの単位系の単位の関係を得ることが可能となる。

次に  $\gamma$  の単位であるが、これは電気磁気単位系の比を与えるため ratio を意味する  $R_{\perp}$  という単位にしておく。実は  $R_{\perp}$  は非対称系では無次元の 1 であり、対称系では光速であるので、例えばガウス単位系では  $\{c\}cm/s$ 、MKSA 系では無次元の 1 であるが、単位系により異なる単位とすると、例えば  $A=C/m$  (誤り) のような変な結論が導出されたりするので、あくまでも  $R_{\perp}$  のままで議論し、単位の換算率が確定してから最後に、 $R_{\perp}$  を無次元と見なしたり、速さの単位と見なしたりするほうが混乱が少ない。これにより例えば  $\gamma = \{c\}R_{gs}=1R$  などとなる。

本書では、前述のように、 $[I']$ 、 $[Q]$ 、 $[\phi]$ 、 $[\Phi]$  の四つの単位を基本に、これらの関係を論じ、それに有理化定数  $\alpha$  と対称化定数  $\gamma$  の二つの単位  $U_{\perp}$  と  $R_{\perp}$  を加えた六つの単位を基本単位とする。したがって、 $\epsilon_0$  と  $\mu_0$  の単位も、これら基本単位から誘導されたものとなる。基本単位の数が、いやに多いと思うだろうが、実際、MKSA 単位系では全単位系が前四つの量の単位の組み合わせで構成されていることから、この考えを受け入れてほしい。もちろん、これらすべてが独立ではなく、他の単位から誘導できるものが少なくない。この誘導については、その都度、説明を行う。

それでは、電磁単位系を例にして、単位系の構成の仕方について学ぼう。最初なので、やや丁寧に説明する。まず電磁単位系は非有理であるので  $\{\alpha\} = 4\pi$  である。また、 $[\alpha]=U_{ab}$  としよう。以下同様に、この単位系の単位には、すべて  $ab$  のサフィックスを付ける。

$$\alpha = 4\pi U_{ab} \quad (B.31)$$

磁気系の単位はビオ・サバルの法則や平行二線間の力の式 B.17 から、決定していく。これらの式は、量方程式なので、数値の関係を示すのみでなく、単位の関係も示している。これを巧みに利用しながら、決定していくのである。まず電流と磁場の単位を次のように命名する。

$$[I'] = A'_{ab} \quad (B.32)$$

$$[B] = Wb_{ab}/cm^2 \quad (B.33)$$

式 B.17 の右辺から  $I'$  を一つ除いた部分が磁場であるので、単位に関する次式が得られ、この式から  $\mu_0$  の単位が得られる。

$$Wb_{ab}/cm^2 = U_{ab} [\mu_0] A'_{ab}/cm \quad (B.34)$$

また、電磁単位系ではの  $\mu_0$  数値は 1 と定められているので、これから磁気定数の量が決定できる。

$$\mu_0 = 1 \text{Wb}_{\text{ab}} / \text{U}_{\text{ab}} \text{A}'_{\text{ab}} \text{cm} \quad (\text{B.35})$$

しばしば  $\alpha\mu_0$  が組になって現れるが、それが次式のように  $\text{U}_{\text{ab}}$  を含まない形となることも理解できよう。

$$\alpha\mu_0 = 4\pi \text{Wb}_{\text{ab}} / \text{A}'_{\text{ab}} \text{cm} \quad (\text{B.36})$$

もう一つ重要な単位の関係式を誘導しよう。電流と磁場の積が力/距離になることから、次式が得られる。

$$\text{dyne/cm} = \text{A}' \text{Wb/cm}^2 \quad (\text{B.37})$$

この式より、 $\text{dyne cm} = \text{erg}$  を利用して、次式が得られる。

$$\text{A}' \text{Wb} = \text{erg} \quad (\text{B.38})$$

このようにどの単位系でも「電流単位 × 磁束単位 = エネルギー単位」が成立する。つまり、磁束単位は電流単位から誘導できる単位であるが、本書では別の独立した基本単位として扱い、必要に応じ、電流単位との関連を論じることとする。

続いて、磁荷の単位  $[m]$  について議論しよう。電流同士に働く力の式 B.12 と磁荷と電流間に働く力の式 B.13 を比較してみると、磁荷単位はおのずから決まってくる。

$$[m] = \text{Wb}_{\text{ab}} / \text{U}_{\text{ab}} \quad (\text{B.39})$$

ところで、単位電流  $1\text{A}'_{\text{ab}}$  とはどのように定めるのであろうか。それには再び、式 B.17 を利用する。この式の  $I'_1, I'_2$  に  $1\text{A}'_{\text{ab}}$  を代入すると、次のようになる。

$$f = \frac{2 \times 4\pi \text{U}_{\text{ab}} \times 1(\text{dyne}/\text{U}_{\text{ab}} \text{A}'_{\text{ab}}{}^2) \times 1 \text{A}'_{\text{ab}} \times 1 \text{A}'_{\text{ab}}}{4\pi \times 1\text{cm}} = 2\text{dyne/cm} \quad (\text{B.40})$$

このことから「同じ大きさの電流を二つ用意し、それらを平行に間隔  $1\text{cm}$  で置いたとき、両者の間に働く力が  $2\text{dyne/cm}$  になったときの電流を、単位電流  $1\text{A}'_{\text{ab}}$  とする」のである。またその際、電流の存在する部分に発生している磁場が  $2\text{Wb/cm}^2$  である。

次は電気系の単位について述べよう。今度は、クーロンの法則の式 B.30 から、すべてを同様な手順で決定していく。まず電荷と電場の単位を次のように命名する。

$$[Q] = \text{C}_{\text{ab}} \quad (\text{B.41})$$

$$[E] = \text{V}_{\text{ab}}/\text{cm} \quad (\text{B.42})$$

また、式 B.11 の右辺から  $C$  を一つ除いた部分が電場であることを利用して、電気定数が決定できる。

$$\varepsilon_0 = 1/\{c\}^2 \text{U}_{\text{ab}} \text{C}_{\text{ab}} / \text{V}_{\text{ab}} \text{cm} \quad (\text{B.43})$$

ただし、この数値部分は、電磁単位系における定義により決められている。また、 $\varepsilon_0/\alpha$  は、次式のように  $U_{ab}$  を含まない形となる。

$$\varepsilon_0 = 1/4\pi\{c\}^2 U_{ab} C_{ab} / V_{ab} \text{cm} \quad (\text{B.44})$$

同様に次式が成立する。

$$\text{dyne} = C_{ab} V_{ab} / \text{cm} \quad (\text{B.45})$$

この式より、 $\text{dyne cm} = \text{erg}$  を利用して、次式が得られる。

$$C V = \text{erg} \quad (\text{B.46})$$

このようにどの単位系でも「電荷単位 × 電圧単位 = エネルギー単位」が成立する。つまり、電圧単位も電荷単位から誘導できる単位であるが、本書では別の独立した基本単位として扱う。

1 単位の電荷  $1C_{ab}$  は式 B.11 の二つの電荷に  $1C_{ab}$  を代入することで決定できる。

$$\{c\}^2 \text{dyne} = \frac{4\pi U_{ab} \times 1C_{ab} \times 1C_{ab}}{4\pi \times (1/\{c\}^2)(U_{ab} C_{ab}^2 / \text{dyne cm}^2) \times 1\text{cm}^2} \quad (\text{B.47})$$

つまり、「同じ大きさの電荷二つを  $1\text{cm}$  間隔で置いたとき、両者の間に働く力がちょうど  $\{c\}^2 \text{dyne}$  になったときの電荷を単位電荷  $1C_{ab}$  とする」のである。またその際、電荷の存在する部分に発生している電場が  $\{c\}^2 \text{V/cm}$  である。

以上をまとめて一般的な単位系に拡張すると、電流単位を  $A'_-$ 、磁束単位を  $\text{Wb}_-$  とするとき、 $\alpha\mu_0$  は  $\text{Wb}_-/A'_-\text{m}_-$  と、これらの比と長さ単位で表現できる。また、これらの積は  $A'_-\text{Wb}_- = \text{J}_-$  とエネルギー単位になる。ここで、 $\text{m}_-$  と  $\text{J}_-$  は MKS 単位系では  $\text{m}$ 、 $\text{J}$  であるが、CGS 単位系では  $\text{cm}$ 、 $\text{erg}$  である。

また、電荷単位を  $C_-$ 、電圧単位を  $V_-$  とするとき、 $\varepsilon_0/\alpha$  の単位は  $C_-/V_- \text{m}_-$  と、これらの商と長さ単位で表現できる。また、これらの積は  $C_- V_- = \text{J}_-$  とエネルギー単位になる。

この最後の結論は単位間の換算を行う際、きわめて重要である。もともと、読者の大部分は自ら実験を行って単位電荷や単位電流を求めることはなく、ある単位が他の単位系でいうとどれ程の値になるかに関心があるので、ある意味では換算の手法さえ分かればよいと思われる。以上の結果を利用すると、それが簡単にできるのである。その具体的な方法については、次節に示す。

磁気単位と電気単位を結ぶのは  $\gamma$  である。マクスウェル方程式で、 $\gamma$  の現れる  $\text{rot } \mathbf{E}$  式と  $\text{rot } \mathbf{B}$  式を見ると、 $\gamma$  の単位は非対称系では無次元のようであり、対称系では光速のようでもある。つまり、数値が一つ定まらないばかりか、単位すら異なるように見える。ここが電磁気学の単位系のもう一つの困難な点である。 $\gamma$  については、再度議論する。

なお、 $\gamma$  の単位  $R_-$  は、電流連続の式 B.16 から  $C_-/A'_-\text{s}_-$  であることが分かる。また、 $A'_-\text{Wb}_- = \text{J}_-$ 、 $C_- V_- = \text{J}_-$  の関係を利用すると、 $\text{Wb}_-/V_- \text{s}_-$  としてもよい。つまり、電気系の基本単位は  $C_- = R_- A'_-\text{s}_-$ 、 $V_- = \text{Wb}_-/R_- \text{s}_-$  と磁気系の基本単位から誘導できることが分かる。

これらの関係を表 B.2 に図示しておこう。

表 B.2 基本単位の積と商の関係

|   | 電気系            |   | 磁気系             |  | 商                             |
|---|----------------|---|-----------------|--|-------------------------------|
|   | C <sub>-</sub> | ÷ | A' <sub>-</sub> |  | R <sub>-s<sub>-</sub></sub>   |
|   | ×              |   | ×               |  |                               |
|   | V <sub>-</sub> | ÷ | Wb <sub>-</sub> |  | 1/R <sub>-s<sub>-</sub></sub> |
| 積 | J <sub>-</sub> |   | J <sub>-</sub>  |  |                               |

ここでも再び (A'<sub>-</sub> or Wb<sub>-</sub>) と (C<sub>-</sub> or V<sub>-</sub>) の二つを決定すれば、後の二つはこれらから決定されることが分かる。

## B.5 単位の換算

二つの単位系の中の単位の換算の仕方について統一的に扱おう。定数  $\alpha\mu_0$  と  $\varepsilon_0/\alpha$  を MKSA 単位系と任意の単位系で以下のように定める。また、 $\{ \quad \} \{ \quad \}_-$  はそれぞれの単位系での数値を表している。

$$\alpha\mu_0 = \{\alpha\mu_0\} \text{Wb}/\text{A}'\text{m} = \{\alpha\mu_0\}_- \text{Wb}_-/ \text{A}'_-\text{m}_- \quad (\text{B.48})$$

$$\varepsilon_0/\alpha = \{\varepsilon_0/\alpha\} \text{C}/\text{V m} = \{\varepsilon_0/\alpha\}_- \text{C}_-/ \text{V}_-\text{m}_- \quad (\text{B.49})$$

また、積がエネルギーになることから、次の各式が成立する。

$$1\text{A}'\text{Wb}/\text{J} = 1\text{A}'_-\text{Wb}_-/ \text{J}_- \quad (\text{B.50})$$

$$1\text{CV}/\text{J} = 1\text{C}_-\text{V}_-/ \text{J}_- \quad (\text{B.51})$$

各行ごとの積や商をとると、以下の関係式が得られる。

$$1\text{A}' = \sqrt{\frac{\{\alpha\mu_0\} \text{J}/\text{m}}{\{\alpha\mu_0\}_- \text{J}_-/ \text{m}_-}} \text{A}'_- \quad (\text{B.52})$$

$$1\text{Wb} = \sqrt{\frac{\{\alpha\mu_0\}_- \text{J m}}{\{\alpha\mu_0\} \text{J}_-\text{m}_-}} \text{Wb}_- \quad (\text{B.53})$$

$$1\text{C} = \sqrt{\frac{\{\varepsilon_0/\alpha\}_- \text{J m}}{\{\varepsilon_0/\alpha\} \text{J}_-\text{m}_-}} \text{C}_- \quad (\text{B.54})$$

$$1\text{V} = \sqrt{\frac{\{\varepsilon_0/\alpha\} \text{J}/\text{m}}{\{\varepsilon_0/\alpha\}_- \text{J}_-/ \text{m}_-}} \text{V}_- \quad (\text{B.55})$$

これだけで、MKSA 単位系の基本単位量が他の単位系で表すとどれ程になるのかが、即座に計算できることになる。

例えば、ガウス単位系との換算則を求めてみよう。MKSA 単位系では  $\{\alpha\} = 1$ 、 $\{\mu_0\} = 4\pi 10^{-7}$ 、 $\{\varepsilon_0\} = 10^7/4\pi \{c\}_M^2$  であるので、 $\{\alpha\mu_0\} = 4\pi 10^{-7}$ 、 $\{\varepsilon_0/\alpha\} = 10^7/4\pi \{c\}_M^2$  である。これに対

表 B.3 定数と基本単位の換算表 ( $\{c\}$ 、 $\{c\}_M$  は CGS、MKS 単位系での光速値約  $3 \cdot 10^{10}$ 、 $3 \cdot 10^8$ )

| 単位系                      | 電磁               | 静電               | Gauss     | Lorentz                         | MKSA           | 単位   |
|--------------------------|------------------|------------------|-----------|---------------------------------|----------------|--|
| -                        | ab               | st               | gs        | hl                              | なし             |  |
| $\alpha$                 | $4\pi$           | $4\pi$           | $4\pi$    | 1                               | 1              | $U_-$ (無次元)                                    |
| $\gamma$                 | 1                | 1                | $\{c\}$   | $\{c\}$                         | 1              | $R_- = C_- / A'_- .s_-$<br>$= Wb_- / V_- .s_-$ |
| $\alpha\mu_0$            | $4\pi$           | $4\pi / \{c\}^2$ | $4\pi$    | 1                               | $4\pi 10^{-7}$ | $Wb_- / A'_- .m_-$                             |
| $\varepsilon_0 / \alpha$ | $1/4\pi \{c\}^2$ | $1/4\pi$         | $1/4\pi$  | $1 \cdot 10^7 / 4\pi \{c\}_M^2$ |                | $C_- / V_- .m_-$                               |
| 電流 $I'$                  | 1                | $\{c\}$          | 1         | $\sqrt{4\pi}$                   | 10             | $A'_-$   |
| 磁束 $\Phi$                | 1                | $1/\{c\}$        | 1         | $1/\sqrt{4\pi}$                 | $10^{-8}$      | $Wb_-$   |
| 電荷 $Q$                   | 1                | $\{c\}$          | $\{c\}$   | $\sqrt{4\pi} \{c\}$             | 10             | $C_-$  |
| 電位 $\phi$                | 1                | $1/\{c\}$        | $1/\{c\}$ | $1/\sqrt{4\pi} \{c\}$           | $10^{-8}$      | $V_-$  |

して、ガウス単位系では  $\{\alpha\}_{gs} = 4\pi$ 、 $\{\mu_0\}_{gs} = 1$ 、 $\{\varepsilon_0\}_{gs} = 1$  であるので、 $\{\alpha\mu_0\}_{gs} = 4\pi$ 、 $\{\varepsilon_0/\alpha\}_{gs} = 1/4\pi$  である。これらを上の各式に代入し、 $1m=100cm$ 、 $1J=10^7erg$  に留意すると、 $1A'=0.1A'_{gs}$ 、 $1Wb=10^8Wb_{gs}$ 、 $1C=\{c\}/10C_{gs}$ 、 $1V=1/300V_{gs}$  が得られる。

もちろん、上述の議論は、片方を MKSA 単位系に限る必要はない。任意の二つの単位系間の換算で、同じ手法が利用できる。すべての単位系間の換算の結果を表 B.3 に示す。ただし、すべての単位が電磁単位系をかなめに構成されてきたため、その数値を 1 になるようにするほうが、表が簡潔になるので、そのようにした。ドルの換算レートをドル/円でなく、円/ドルで表すようなものである。

この表の数値は基本的に電磁単位系なので、CGS 単位系であることに留意して基本単位の数値を見てみよう。電流と磁束の積、電荷と電圧の積の値は、MKSA 単位系では  $10^{-7}(J)$ 、CGS 単位系では 1 (erg) となっている。

また、電荷/(電流 時間)、磁束/(電圧 時間) の値は MKSA 単位系、静電単位系、電磁単位系でいずれも  $1/\{c\}$ 、ガウス単位系、ローレンツ単位系ではいずれも 1 である。前者はガウス単位系を基準にしているので、CGS 単位系の  $1/\text{光速値}$  である。このことさえ知っていれば、電流の換算値というごく少ない知識から、すべての基本単位の換算値を誘導できる。

実は、どんな単位系でも、力学的な長さ、質量、時間の単位以外に、電気的な単位を最低一つ導入することにより、すべての電磁気学の単位を決めることができるのである(厳密には  $\gamma$  も必要である)。MKSA 単位系の A とは、MKS 単位系に電流単位 A (それと 1 の値を持つ  $\gamma$ ) を付け加えることにより、すべての電磁気学の単位系を構成できることを示している。

練習として、光速、プランク定数(厳密には  $h/2\pi$ )、重力定数(厳密には  $8\pi G$ )、 $\varepsilon_0$ 、 $\mu_0$ 、 $\alpha$ 、をすべて 1 とする**自然単位系** (natural units) について作業をしてみよう。この単位の場合、長さ、質量、時間の単位が MKS 単位系とも CGS 単位系ともすべて異なる。この単位の長さ、質量、時



間の単位を  $m_{pk}$ 、 $kg_{pk}$ 、 $s_{pk}$  としよう。すると以下の関係が成立する。

$$c = \{c\}m/s = 1m_{pk}/s_{pk} \quad (B.56)$$

$$\hbar = \{h\}/2\pi kg \ m^2/s = 1kg_{pk}m_{pk}^2/s_{pk} \quad (B.57)$$

$$8\pi G = 8\pi\{G\}m^3/kg \ s^2 = 1m_{pk}^3/kg_{pk}s_{pk}^2 \quad (B.58)$$

ここで、 $\{c\} = 3 \cdot 10^8$ 、 $\{h\} = 6.6 \cdot 10^{-34}$ 、 $\{G\} = 6.7 \cdot 10^{-11}$  である。

この結果、力学系単位に関して、次の換算則が得られる。

$$1m_{pk} = \sqrt{4\{h\}\{G\}/\{c\}^3}m = 8.1 \cdot 10^{-35}m \quad (B.59)$$

$$1kg_{pk} = \sqrt{\{h\}\{c\}/8\pi\{G\}}kg = 1.08 \cdot 10^{-8}kg \quad (B.60)$$

$$1s_{pk} = \sqrt{4\{h\}\{G\}/\{c\}^5}s = 2.7 \cdot 10^{-43}s \quad (B.61)$$

$$(B.62)$$

電磁気学の単位については、 $\{\alpha\}$ 、 $\{\mu_0\}$ 、 $\{\varepsilon_0\}$ 、に加え、光速値までもが 1 なので、 $\{\gamma\}$  まで 1 になることになる。これ以後の換算については、読者の課題としたい。

## B.6 組み立て単位に必要な量方程式

基本単位を組み合わせて作成される**組み立て単位** (derived unit) については、もう少し多くの式を必要とする。まず、物質が絡む場合には、次のように見える源と物質内の源とを分離する必要がある。

$$\rho = \rho_a - \operatorname{div} \mathbf{P} \quad (B.63)$$

$$\mathbf{J}' = \mathbf{J}'_a + \operatorname{rot} \mathbf{M} + \frac{1}{\gamma} \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} \quad (B.64)$$

これらより電束密度と磁場強度のベクトル場を導入する。電束密度は  $\varepsilon_0 \mathbf{E}$  と同じ単位、磁場強度は  $\mathbf{B}/\mu_0$  と同じ単位とする。

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \alpha \mathbf{P} \quad (B.65)$$

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \alpha \mathbf{M} \quad (B.66)$$

これらを用いると、式 B.18 と式 B.21 は次ようになる。

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \alpha \rho_a \quad (B.67)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \alpha \mathbf{J}'_a + \frac{1}{\gamma} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (B.68)$$

**磁化** (magnetization)  $\mathbf{M}$  については、コメントが必要である。現在は電流が磁場を作るという  $\mathbf{E}$ - $\mathbf{B}$  対応という体系が主流になっているが、かつては磁荷が磁場を作るという  $\mathbf{E}$ - $\mathbf{H}$  対応と

いう体系が主流であった。このため、物質の作る磁場の源も磁荷に立脚した**磁気分極** (magnetic polarization)  $\mathbf{P}_m$  と呼ばれるものが使われた。

現在の磁化は  $\mathbf{H}$  に近い概念であるが (厳密には  $\alpha\mathbf{H}$  の単位)、古い CGS 系の単位はすべて、 $\mathbf{B}$  に近い概念である (厳密には  $\alpha\mathbf{B}$  の単位)。MKSA 単位系でも古い書籍では、こうなっている。同じ磁場源に二つの概念があるのである。 $\mathbf{P}_m = \mu_0\mathbf{M}$  なので、式 B.64 と式 B.66 は次のようになる。

$$\mathbf{J}' = \mathbf{J}'_a + \frac{1}{\mu_0} \text{rot } \mathbf{P}_m + \frac{1}{\gamma} \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} \quad (\text{B.69})$$

$$\mathbf{B} = \mu_0\mathbf{H} + \alpha\mathbf{P}_m \quad (\text{B.70})$$

以上で、組み立て単位は構成できるようになったが、一言補足を述べておきたい。それは電流である。本書では、ポテンシャルの方程式の右辺に、電流と電荷が、まさに同じような形で入るように工夫したが、対称系であるガウス単位系とそれを基礎にしたヘビサイド単位系では、電流の定義が若干異なっている。電流連続の式 B.16 に  $1/c$  が入らないように定義されているのである。

$$I + \frac{\partial Q}{\partial t} = 0 \quad (\text{B.71})$$

この定義の電流は、電気系の電荷から誘導されているので、非対称電流と呼んでおこう。また、いままでの電流  $I'$  との関係は  $I = \gamma I'$  であり、ビオ・サバルの法則を次のようにしたことになる。

$$F = \frac{\alpha\mu_0}{4\pi\gamma^2} \frac{I_1\Delta s_1 I_2\Delta s_2}{r^2} \quad (\text{B.72})$$

この定義は、電磁単位系や静電単位系との相性をよくするが、この代償として、電流の入ったいくつかの方程式の式の対称性が崩れることとなる。一例として、ベクトルポテンシャルの式を示しておこう。ただし、ここの  $\mathbf{J}$  は、前出の  $I'$  に対応する  $\mathbf{J}'$  ではなく、 $I$  に対応するものである。

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{\varepsilon_0\mu_0}{\gamma^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\frac{\alpha\mu_0}{\gamma} \mathbf{J} \quad (\text{B.73})$$

この式を、電荷の関係する式と比較すると、明らかに対称性が崩れている。せっかく対称性のよい単位系を整備したのに、電流が絡む式だけが崩れてしまったのは、昔、磁場を作るのは磁極であり、電流の概念は補助的だった時代の名残である。本書は現代風の電流重視の立場で対称性を維持したいため、 $I$  でなく  $I'$  を磁気系の主要単位である電流としたのである。

## B.7 組み立て単位の換算

いくつかの重要な組み立て単位があるが、いずれも基本単位と力学単位の組み合わせであり、それをわきまえば、簡単に表 B.4 および表 B.5 が完成する。ここでも換算表では電磁単位系の数値を 1 としている。

表 B.4 磁気系組み立て単位の換算表 ( $\{c\}$  は CGS 単位系での光速値約  $3 \cdot 10^{10}$ 、 $3 \cdot 10^8$ )

| 単位系                     | 電磁     | 静電          | Gauss*  | Heaviside       | MKSA†          | 単位‡  |
|-------------------------|--------|-------------|---------|-----------------|----------------|--|
| -                       | ab     | st          | gs      | hl              | なし             |  |
| $\alpha$ (非有理: $4\pi$ ) | $4\pi$ | $4\pi$      | $4\pi$  | 1               | 1              | $U_-$ (無次元)                                  |
| $\gamma$ (対称: $\{c\}$ ) | 1      | 1           | $\{c\}$ | $\{c\}$         | 1              | $R_- = C_- / A'_- s_-$<br>$= Wb_- / V_- s_-$ |
| 磁気定数 $\mu_0$            | 1      | $1/\{c\}^2$ | 1       | 1               | $4\pi 10^{-7}$ | $H_- / U_- m_-$                              |
| 電流 $I'$                 | 1      | $\{c\}$     | 1       | $\sqrt{4\pi}$   | 10             | $A'_-$                                       |
| 磁束 $\Phi$               | 1      | $1/\{c\}$   | 1       | $1/\sqrt{4\pi}$ | $10^{-8}$      | $Wb_-$                                       |
| 磁束密度 $B$                | 1      | $1/\{c\}$   | 1       | $1/\sqrt{4\pi}$ | $10^{-4}$      | $Wb_- / m_-^2$                               |
| ベクトルポテンシャル $A$          | 1      | $1/\{c\}$   | 1       | $1/\sqrt{4\pi}$ | $10^{-6}$      | $Wb_- / m_-$                                 |
| 磁場強度 $H$                | 1      | $\{c\}$     | 1       | $1/\sqrt{4\pi}$ | $10^3 / 4\pi$  | $U_- A'_- / m_-$                             |
| 磁化 $M$                  | 1      | $\{c\}$     | 1       | $\sqrt{4\pi}$   | $10^3$         | $A'_- / m_-$                                 |
| 誘導 $L$                  | 1      | $1/\{c\}^2$ | 1       | $1/4\pi$        | $10^{-9}$      | $H_- = Wb_- / A'_-$                          |
| 透磁率 $\mu$               | 1      | $1/\{c\}^2$ | 1       | 1               | $4\pi 10^{-7}$ | $H_- / U_- m_-$                              |
| 磁荷 $m$                  | 1      | $1/\{c\}$   | 1       | $\sqrt{4\pi}$   | $4\pi 10^{-8}$ | $Wb_- / U_-$                                 |
| 磁位 $\phi_m$ §           | 1      | $\{c\}$     | 1       | $1/\sqrt{4\pi}$ | $10/4\pi$      | $U_- A'_-$                                   |
| 磁気分極 $P_m$              | 1      | $1/\{c\}$   | 1       | $\sqrt{4\pi}$   | $4\pi 10^{-4}$ | $Wb_- / U_- m_-^2$                           |

\* ガウス単位系では、磁束  $Mx$  (Maxwell)、磁束密度  $G$  (Gauss)、磁場強度  $Oe$  (Oersted)、磁位  $Gi$  (Gilbert)、磁気分極  $G$  (Gauss) ともいう。

† 磁束密度は、MKSA 単位系では  $T$  (Tesla) ともいう。

‡  $m_-$ 、 $s_-$ 、 $J_-$  は MKS 単位系では  $m$ 、 $s$ 、 $J$ 、CGS 単位系では  $cm$ 、 $s$ 、 $erg$ 。

§ 磁位とは、磁場強度を距離積分したものである。

基本単位以外によく使われる量は、容量 (キャパシタンス)、誘導 (インダクタンス)、抵抗、電力である。容量単位は  $F_- = C_- / V_-$ 、誘導単位は  $H_- = Wb_- / A'_-$ 、抵抗単位は  $\Omega'_- = V_- / A'_-$  である。容量単位と誘導単位を使うと、電気定数の単位は  $U_- F_- / m_-$ 、磁気定数の単位は  $H_- / U_- m_-$  と記載することができる。

なお、電力については若干の注意が必要である。エネルギー単位は  $J_- = C_- V_-$  のように、電荷と電圧の積で与えられるが、この両辺を時間で除すと、 $J_- / s_- = V_- C_- / s_-$  のような形となる。左辺は仕事率、つまり電力となるが、右辺の  $C_- / s_-$  は必ずしも  $A'_-$  ではない。つまり、電圧  $\times$  電流にはならないのである。あくまでも、電圧  $\times$  電荷の時間微分である。これを電流にするには  $\gamma$  を利用する。その結果、電力は  $W = \gamma \phi I' = \phi I$  となる。

表 B.5 電気系組み立て単位の換算表 ( $\{c\}$ 、 $\{c\}_M$  は CGS、MKS 単位系での光速値約  $3 \cdot 10^{10}$ 、 $3 \cdot 10^8$ )

| 単位系                          | 電磁<br>ab    | 静電<br>st    | Gauss*<br>gs | Heaviside<br>hl      | MKSA<br>なし            | 単位†  |
|------------------------------|-------------|-------------|--------------|----------------------|-----------------------|--|
| $\alpha$ (非有理: $4\pi$ )      | $4\pi$      | $4\pi$      | $4\pi$       | 1                    | 1                     | $U_-$ (無次元)                                  |
| $\gamma$ (対称: $\{c\}$ )      | 1           | 1           | $\{c\}$      | $\{c\}$              | 1                     | $R_- = C_- / A'_- s_-$<br>$= Wb_- / V_- s_-$ |
| 電気定数 $\epsilon_0$            | $1/\{c\}^2$ | 1           | 1            | 1                    | $10^7/4\pi \{c\}_M^2$ | $U_- F_- / m_-$                              |
| 電荷 $Q$                       | 1           | $\{c\}$     | $\{c\}$      | $\sqrt{4\pi}\{c\}$   | 10                    | $C_-$  |
| 非対称-電流 $I$                   | 1           | $\{c\}$     | $\{c\}$      | $\sqrt{4\pi}\{c\}$   | 10                    | $R_- A'_- = A_-$                             |
| 電位 $\phi$                    | 1           | $1/\{c\}$   | $1/\{c\}$    | $1/\sqrt{4\pi}\{c\}$ | $10^{-8}$             | $V_-$  |
| 電場強度 $E$                     | 1           | $1/\{c\}$   | $1/\{c\}$    | $1/\sqrt{4\pi}\{c\}$ | $10^{-6}$             | $V_- / m_-$                                  |
| 電束密度 $D$                     | 1           | $\{c\}$     | $\{c\}$      | $\{c\}/\sqrt{4\pi}$  | $10^5/4\pi$           | $U_- C_- / m_-^2$                            |
| 電気分極 $P$                     | 1           | $\{c\}$     | $\{c\}$      | $\sqrt{4\pi}\{c\}$   | $10^5$                | $C_- / m_-^2$                                |
| 容量 $C$                       | 1           | $\{c\}^2$   | $\{c\}^2$    | $4\pi\{c\}^2$        | $10^9$                | $F_- = C_- / V_-$                            |
| 誘電率 $\epsilon$               | 1           | $\{c\}^2$   | $\{c\}^2$    | $\{c\}^2$            | $(1/4\pi)10^{11}$     | $U_- F_- / m_-$                              |
| 抵抗 $R'$                      | 1           | $1/\{c\}^2$ | $1/\{c\}$    | $1/4\pi\{c\}$        | $10^{-9}$             | $\Omega'_- = V_- / A'_-$                     |
| 非対称-抵抗 $R$                   | 1           | $1/\{c\}^2$ | $1/\{c\}^2$  | $1/4\pi\{c\}^2$      | $10^{-9}$             | $\Omega_- = V_- / R_- A'_-$<br>$= V_- / A_-$ |
| 電力 $\gamma I' \phi = I \phi$ | 1           | 1           | 1            | 1                    | $10^{-7}$             | $W_- = J_- / s_-$                            |

\* ガウス単位系では、電荷 Fr (Franklin)、電圧 statV ともいう。(非対称) 電流は Bi (Bio) ともいう。

†  $m_-$ 、 $s_-$ 、 $J_-$  は MKS 単位系では m、s、J、CGS 単位系では cm、s、erg。

## B.8 無次元量について

どの単位系でも、数値が1になる量がしばしば現れる。こうした量の単位は多くの場合、無次元とされる。しかし、この数値が他の単位系では1以外の値をとることもあり、またこの単位が別の単位系では無次元でない次元を持つこともある。こうした混乱を避けるために、本書では、単位系によって数値が変わる量には何らかの単位を付けた。また、いずれかの単位系で無次元でない次元を持つ量には、必ず共通の次元を持たせ、混乱のないようにした。

前者の例は、例えば  $\alpha$  であるが、単位系によって数値が異なるので、 $U_-$  なる単位を付した。この効果は明らかで、表 B.5 を見ると、電束密度  $D$  と電気分極  $P$  は、MKSA 単位系では同じ数値で寄与するが、単位系によっては  $\alpha$  倍の寄与がある。そこで、 $P$  の単位は  $C_- / m_-^2$  であるが、 $D$  の単位はあくまでも  $U_- C_- / m_-^2$  としておくといい処理をしたのである。しかし、 $U_-$  は基本的に

は無次元量である。

後者の例は、例えば  $\gamma$  であるが、非対称系では無次元の 1 であり、対称系では光速の  $\{c\}$ cm/s か、 $\{c\}$ Mm/s としている。このため  $R_-$  という単位を与えた。例えば統一的に  $R_- = m_-/s_-$  としてしまうと、MKSA 単位系では  $R = C/A$   $s = m/s$  となり、両辺に  $s$  を掛けることにより、 $C/A = m$  というちょっと信じがたい結論が出てきてしまう。やはり、MKSA 単位系では  $R$  は無次元であり、 $C/As = 1$  となつてほしいのである。

逆に  $R_-$  を統一的に無次元としてしまうと、 $C_-/A'_-s_- = 1$  となるが、ガウス単位系のような対称システムでは、場の源である  $C_{gs}/\text{cm}^3$  と  $A'_{gs}/\text{cm}^2$  が同じ単位となつてほしいのが、そうはならなくなる。この場合には  $C_{gs} = A'_{gs} \text{cm}$  が成立してほしいのである。したがって、本書ではあくまでも  $R_-$  とし、換算表が決定してしまった後に、非対称系では無次元の 1、対称系では速さの次元を持つ  $c$  と見なす立場をとった。

最終段階で  $\gamma$  の次元が決まれば、電流連続の式より電荷の単位は電流の単位から導くことができる。例えば、非対称系では  $R_- = 1$  であるから、 $C_- = A'_-s_-$  となる。また、 $A'_- \text{Wb}_- = J_-$  より  $\text{Wb}_- = J_-/A'_-$  が、 $C_- V_- = J_-$  より  $V_- = J_-/C_- = J_-/A'_-s_-$  と四つの基本単位が力学系基本単位と  $A'_-$  だけから決定できることになる。これが MKSA なる言葉の語源である。

一方、対称系では  $R_- = m_-/s_-$  であるから  $R_- = C_-/A_-s_-$  より、 $C_- = A'_-m_-$ 、さらに  $\text{Wb}_- = J_-/A'_-$ 、 $V_- = J_-/C_- = J_-/A_-m_-$  と、やはりすべての単位が力学基本単位と  $A_-$  だけから誘導できる。

$\gamma$  はその他の微分形の方程式の時間微分にも現れる。対称系では  $\gamma = c$  であるので、 $c dt$  による微分と空間微分がともに  $1/\text{長さ}$  の次元を与えることになる。その結果、いくつもの変数が同じ単位次元を持つことになる。まず  $\mu_0 \varepsilon_0 = 1$  より  $(\mu_0, 1/\varepsilon_0)$  が同じ次元を持ち、それより、 $(\mathbf{B}, \mathbf{E})$ 、 $(\mathbf{J}, \rho)$ 、 $(\mathbf{H}, \mathbf{D})$ 、 $(\mathbf{A}, \phi)$  が、それぞれ同じ単位を共有することが導かれる。これらのペアは、先に相対性理論の章で述べたように、四元ベクトルを組むなど、重要な関係を持っている。

以上のように、 $\gamma$  の単位を定めてしまうのは、色々便利なが多いが、単位系によって、 $\gamma$  の単位が異なるのも、換算の際、混乱のもととなるので、本書では、 $\gamma$  の単位を別に  $R$  と定めたのである。

この他の量でも、数値が 1 などの簡単な値が故に、それらの単位を無次元とする単位系がある。単位系ごとにまとめておこう。

**CGS 電磁単位系**  $\alpha = 4\pi$ 、 $\mu_0 = 1$  を無次元とする。式 B.12 より、 $I$  の次元は  $\text{dyne}^{0.5} = g^{0.5} \text{cm}^{0.5} s^{-1}$  となる。電流連続の式より  $[Q] = g^{0.5} \text{cm}^{0.5}$ 。さらに  $[\varepsilon_0] = s^2 \text{cm}^{-2}$  となる。以下同様に、すべての量の単位を CGS の力学系単位だけで表現できる。しかし、べき乗に半整数が入るなど、必ずしも分かりやすい訳ではない。電流の次元を基本単位として追加すれば、かなり分かりやすくなる。

**CGS 静電単位系**  $\alpha = 4\pi$ 、 $\varepsilon_0 = 1$  を無次元とする。式 B.11 より、 $[Q] = \text{dyne}^{0.5} \text{cm} = g^{0.5} \text{cm}^{1.5} s^{-1}$  となる。電流連続の式より  $[I] = g^{0.5} \text{cm}^{1.5} s^{-2}$ 。さらに  $[\mu_0] = s^2 \text{cm}^{-2}$  となる。以下同様に、すべての量の単位を CGS の力学系単位だけで表現できる。しかし、こ

の場合もべき乗に半整数が入り、必ずしも分かりやすい訳ではない。電荷の次元を基本単位として追加すれば、かなり分かりやすくなる。

**ガウス単位系**  $\alpha = 4\pi$ ,  $\varepsilon_0 = 1$ ,  $\mu_0 = 1$  を無次元とする。式 B.12 より、 $[I] = \text{dyne}^{0.5} = \text{g}^{0.5} \text{cm}^{0.5} \text{s}^{-1}$ 、式 B.11 より、 $[Q] = \text{dyne}^{0.5} \text{cm} = \text{g}^{0.5} \text{cm}^{1.5} \text{s}^{-1}$  となる。この結果  $[Q] = [I] \text{cm}$  となるのは、対称系の一般的結論でもある。電流または電荷の次元を基本単位として追加すれば、かなり分かりやすくなる。

**ヘビサイド単位系**  $\alpha = 1$ ,  $\varepsilon_0 = 1$ ,  $\mu_0 = 1$  を無次元とするため、ガウス単位系と同じである。

**MKSA 単位系**  $\gamma = 1$  のみ無次元量とする。 $I$  に次元を与え、それを  $A$  とする。この結果、他の単位はすべて、これと力学単位を使って表現可能である。 $A$  を基本単位に入れたことにより、 $[Q]=A \text{ s}$ 、 $[\phi]=J/A$ 、 $[\Phi]=J/A \text{ s}$  とすべての単位が簡単に表現できる。

くどいようであるが、換算の際はこうした無次元の量にも仮の次元を与え、換算の数値が確定してから、無次元化を果すべきである。

## B.9 磁荷について

本節は、歴史にこだわる方以外は無視していただいてよい。

本章ではそれなりに合理的な説明を行うように努力したが、ちょっと気になるのは、対称電流  $I'$  の導入というやや作爲的な手法であろう。これには歴史的な背景がある。

もともと、磁場の発見は磁石から始まった。しかも、磁石の磁極間には、電荷の間に働くのと同じようなクーロンの法則が成立したのである。このため、初期の電磁気学は電荷と磁荷という概念から作られたのである。その後、電池の発見があり、電流が見出され、電流も磁極に力を与える磁場を発生することが知られるようになった。そして、電流と磁石の等価性が議論され、磁石も根源には電流があるとされるようになり、磁極モデルから電流モデルへの変革が起きたのである。

単位系の制定にも、この影響が出ている。電磁単位系、静電単位系、ガウス単位系、ヘビサイドローレンツ単位系までの磁気系の単位は、磁荷の間に働く力を基本にして作られているのである。電流はあくまでも電荷の微分で定義され、磁荷との相似性を議論された。その際、導入されたのが  $\gamma$  である。一方、MKSA 単位系を制定するときには、電流間に働く力を基本にした。

MKSA 単位系では、磁場として、電流との積が力となる  $B$  を定義したが、古い単位系では、磁荷との積が力となる  $H$  が定義された。しかし、この  $H$  の定義には電流は直接関与せず、磁位なる概念が使われたのである。これを MKSA の  $H$  の単位である  $A/m$  との整合をとるために、 $A'$  なる概念を作り出し、 $A'/m$  としたものである。したがって、 $A'$  は、これらの単位系の  $I$  の単位である  $A$  とは  $\gamma$  の単位  $R$  だけの差異が生じてしまうのである。

厳密な方法は、 $I'$  を一切使わず、断固  $I$  のみを使って議論することである。これは可能であるが、「電流単位 × 磁束単位」がエネルギーにならず、その  $\gamma$  倍になり、「電荷単位 × 電圧単位」に対応しなくなる、ベクトルポテンシャルの式がスカラーポテンシャルの式と対応が悪くなるなど、

電気系単位と磁気系単位の対称性が崩れるという問題が生じる。

本書では、美的観点から、中間的な対称電流という概念を導入したと理解してほしい。

## 付録 C

# 作用積分

### C.1 ラグランジュ・ダランベールの仮想変位の原理

まず剛体なども扱うことを前提に、多数の質点からなる系の静力学を考えよう。各質点では力の総和が 0 になるはずであるから、次の式が成立する。

$$\mathbf{F}_i + \mathbf{R}_i = 0 \quad (i = 1, \dots, \text{質点の総数}) \quad (\text{C.1})$$

ここで、 $\mathbf{F}_i$  は各質点に働く外力であり、 $\mathbf{R}_i$  は、互いに束縛し合う質点間に働く**束縛力** (constraining force) である。

例えば、二つの質点が一定距離になるような**束縛** (constraint) を受けている場合、束縛条件の個数、つまり束縛力の数は一個である。三個の質点が一体として動く場合には、三個の束縛条件が存在する。四個の質点が一体として動く場合には、新たな質点を他の三個に対して固定するために、さらに三個の束縛条件が存在する。以下同様に質点の数が増えるごとに、束縛条件の数は 3 ずつ増えていくので、 $m$  個の質点が一体として動いている場合には、束縛条件の数は  $3m - 6$  ( $m = 2$  の場合は 1) となる。なお  $m$  個の集団の運動を記述するには、その重心の位置と角度の自由度の合わせて 6 個 ( $m = 2$  の場合は 5) の自由度で十分であるので、自由度と束縛条件の数の和は、元の成分の総数  $3N$  になる。

同様に質点が個別にレールのような一次元的なものに束縛されている場合には、質点ごとに二個の束縛条件があることになる。曲面に束縛されているときには、質点ごとに一個の束縛条件があることになる。その他、質点系と質点系が蝶番のように、部分的な束縛条件を満たす場合など、色々な束縛があるが、同様に扱うことが可能である。

上式が成立すれば、これにどんな量を掛けても (元がベクトルであるので、スカラー倍でも内積でも外積でもよい)、また、その結果をいくつ合計しても 0 となるから、次式が成立する。

$$\sum_i (\mathbf{F}_i + \mathbf{R}_i) \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0 \quad (\text{C.2})$$

この場合には、各質点の僅かな変位  $\delta \mathbf{r}_i$  との内積をとって、総和をとっている。なお、変位があれ



ば  $\mathbf{F}_i + \mathbf{R}_i$  は僅かに変化する可能性があるが、その影響は二次の微小量となり無視できる。このように変位に対して、それらの関数が 0 に保たれることを**停留** (stationary) するという。

さて、この変位  $\delta \mathbf{r}_i$  がすべての束縛条件を満たす場合、次の式が成立する。

$$\sum_i \mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0 \quad (\text{C.3})$$

この式は**ダランベールの仮想変位の原理** (d'Alembert principle of virtual displacement) と呼ばれるものである。

その理由は、質点そのものに束縛条件がある場合には  $\mathbf{R}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0$  が成立するし、質点間に束縛条件がある場合には  $\sum_i \mathbf{R}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0$  が成立するからである。後者の場合、例えば二質点に束縛がある場合には  $|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^2$  が一定という関係が成立する。これより、 $(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \cdot (\delta \mathbf{r}_1 - \delta \mathbf{r}_2) = 0$ 、つまり、 $\delta \mathbf{r}_1 - \delta \mathbf{r}_2 = 0$  は、2 質点を結ぶ直線に垂直になる。一方、 $\mathbf{R}_1 = -\mathbf{R}_2$  は二質点を結ぶ直線に平行であるから、 $\mathbf{R}_1 \cdot \delta \mathbf{r}_1 + \mathbf{R}_2 \cdot \delta \mathbf{r}_2 = \mathbf{R}_1 \cdot \delta \mathbf{r}_1 - \mathbf{R}_1 \cdot \delta \mathbf{r}_2 = \mathbf{R}_1 \cdot (\delta \mathbf{r}_1 - \delta \mathbf{r}_2) = 0$  が得られる。

さて、議論に必要な成分の総数  $N$  は、一般には質点数の三倍であるが、一次元空間の質点を議論する場合には、質点数の一倍になるし、二次元空間の質点を議論する場合には、質点数の二倍になる。こうした種々の場合を扱うことを考え、力や変位の成分をバラバラに分けて、その最初から連続的に符番しておこう。例えば位置のベクトルは、 $\mathbf{r}_1$  の三成分を  $x_1, x_2, x_3$  とし、 $\mathbf{r}_2$  の三成分を  $x_4, x_5, x_6$  と記載するのである。力についても同様に符番する。すると、ダランベールの仮想変位の原理の式は次のように書ける。

$$\sum_i^N F_i \delta x_i = 0 \quad (\text{C.4})$$

ここで、 $N$  は質点の位置を表現するために必要な成分の総数で、質点の数に空間の次元数倍したものである。

ラグランジュは、この原理を、動力学にも適用されるように拡張した。動力学の場合には、各質点に、加速度に対応する加速力  $-m_i \ddot{\mathbf{r}}_i$  が追加されたとすれば、静力学と同じに議論できる。ここでも、加速力を成分分けし、改めて符番しよう。一質点の成分に現れる質量はすべて同じ値となるが、成分ごとに強制的に 1 から順に符番することとする。つまり三次元空間の最初の質点の加速力の三成分  $(m_1 \ddot{x}_1, m_1 \ddot{y}_1, m_1 \ddot{z}_1)$  は  $m_1 \ddot{x}_1, m_2 \ddot{x}_2, m_3 \ddot{x}_3$  と表現することとする。すると各質点の成分ごとに次の式が成立する。

$$F_i + R_i - m_i \ddot{x}_i = 0 \quad (\text{C.5})$$

これに任意の変位を掛けたものも、またそれらの総和も 0 となる。

$$\sum_i^N (F_i + R_i - m_i \ddot{x}_i) \delta x_i = 0 \quad (\text{C.6})$$

ここで  $\delta x_i$  を束縛条件にしたがった変位とすると

$$\sum_i^N R_i \delta x_i = 0 \quad (\text{C.7})$$

であるから、次式が成立する。

$$\sum_i^N (m_i \ddot{x}_i - F_i) \delta x_i = 0 \quad (\text{C.8})$$

ダランベールの仮想変位の原理という、この式を指すことが多いが、本書では前掲の静力学の式と区別するために、またラグランジュに敬意を表する意味で、**ラグランジュ・ダランベールの仮想変位の原理** (Lagrange d'Alenbert principle of virtual displacement) と呼ぶことにする。

## C.2 ラグランジュの運動方程式

束縛のある場合、この力学系の自由度  $n$  は  $N$  よりも小さな値となる。その場合、多くのケースで  $x_i$  とは異なる別の変数を利用するほうがよいことが多い。例えば、円運動をしている質点ならば  $\theta$  一つを使えばよいし、互いに等距離に接続された二質点ならば、重心の座標と、二質点を結ぶ直線の方法を示す極座標の二つの角度を使うのが便利である。こうした座標を**一般化座標** (generalized coordinate) と呼び、 $q_j : (j = 1, \dots, n)$  とする。

式 C.8 を書き換えよう。まず第一項は次のように変形できる。

$$\begin{aligned} & \sum_i^N m_i \ddot{x}_i \delta x_i \\ &= \sum_i^N m_i \ddot{x}_i \left( \sum_j^n \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \delta q_j \right) \\ &= \sum_i^N \sum_j^n \left[ \frac{d}{dt} \left( m_i \dot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \right) - m_i \dot{x}_i \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \right) \right] \delta q_j \\ &= \sum_j^n \sum_i^N \left[ \frac{d}{dt} \left( m_i v_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \right) - m_i v_i \left( \sum_k^n \frac{\partial^2 x_i}{\partial q_j \partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial^2 x_i}{\partial q_j \partial t} \right) \right] \delta q_j \\ &= \sum_j^n \sum_i^N \left[ \frac{d}{dt} \left( m_i v_i \frac{\partial v_i}{\partial \dot{q}_j} \right) - m_i v_i \frac{\partial v_i}{\partial q_j} \right] \delta q_j \\ &= \sum_j^n \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} \right] \delta q_j \end{aligned} \quad (\text{C.9})$$

ただし、 $T$  は次のように定義されている。

$$T = \sum_i^N \frac{1}{2} m_i v_i^2 \quad (\text{C.10})$$

二行目から三行目への変形は、 $f'g = (fg)' - fg'$  を利用している。また、四行目と五行目の変形は、

$$\begin{aligned}\frac{\partial v_i}{\partial \dot{q}_j} &= \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \\ \frac{\partial v_i}{\partial q_j} &= \frac{\partial}{\partial q_j} \left( \frac{dx_i}{dt} \right) = \frac{\partial}{\partial q_j} \left( \sum_k^n \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial x_i}{\partial t} \right)\end{aligned}\quad (\text{C.11})$$

の関係を利用する。各右辺が四行目に、各左辺が五行目に現れている。これらの式の誘導から分かるように、 $T$  は見掛けは  $v_i$  の関数であるが、各  $v_i$  は  $q_j$  と  $\dot{q}_j$  で書き換えられていることを前提としている。したがって  $T(q, \dot{q})$  である。

一方、第二項は次のようになる。

$$\sum_i^N F_i \delta x_i = \sum_i^N F_i \left( \sum_j^n \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \delta q_j \right) = \sum_j^n \left( \sum_i^N F_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \right) \delta q_j = \sum_j^n F_j^g \delta q_j \quad (\text{C.12})$$

最後の括弧を  $F_j^g$  としたが、これは**一般化力** (generalized force) と呼ばれている。

以上の結果をまとめると次式が得られる。

$$\sum_j^n \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} - F_j^g \right] \delta q_j = 0 \quad (\text{C.13})$$

$\delta q_j$  は独立に変動できるので、次の式が得られる。

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = F_j^g \quad (j = 1, \dots, n) \quad (\text{C.14})$$

これがラグランジュの導いた方程式であり、ニュートンの運動方程式と等価なものである。

特に保存力場の場合は、 $F_i = -\frac{\partial U}{\partial x_i}$  として、次のように変形できる。

$$\sum_i^N F_i \delta x_i = - \sum_i^N \sum_j^n \frac{\partial U}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \delta q_j = - \sum_j^n \frac{\partial U}{\partial q_j} \delta q_j \quad (\text{C.15})$$

したがって

$$L(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n) = T(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n) - U(q_1, \dots, q_n) \quad (\text{C.16})$$

としてラグランジュの方程式は次のようになる。

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \quad (j = 1, \dots, n) \quad (\text{C.17})$$

この式は特に**ラグランジュの運動方程式** (Lagrange equation of motion)、あるいは**オイラーの微分方程式** (Euler differential equation) と呼ばれる。また、 $L$  は**ラグランジアン** (Lagrangian) と呼ばれる。なお、上に示した  $L$  の表記は長つたらしいので、よく次式のように略記される。

$$L(q, \dot{q}) = T(q, \dot{q}) - U(q) \quad (\text{C.18})$$

なお、電磁気学のローレンツ力 (Lorentz force) のように、速度の影響が入っているような力は、保存力の扱いができず、若干の工夫が必要であり、その手法については後の節に示す。

### C.3 ラグランジュの未定係数法

本節では束縛力の大きさを簡単に求める方法を示そう。ラグランジュ・ダランベールの仮想変位の原理からスタートする。

$$\sum_{i=1}^N (m_i \ddot{x}_i - F_i) \delta x_i = 0 \quad (\text{C.19})$$

ここで、 $\delta x_i$  を  $c = N - n$  個の束縛条件にしたがう変位とした場合、この式は、自由度  $n$  の  $\delta x_i$  の変位に対し停留する。

$c$  個の束縛条件が次のように陰関数で与えられているとしよう。

$$G_k(x_1, \dots, x_N) = 0 \quad (k = 1, \dots, c) \quad (\text{C.20})$$

これから  $\delta x_i$  の変位に対する条件が得られる。

$$\sum_{i=1}^N \frac{\partial G_k}{\partial x_i} \delta x_i = \sum_{i=1}^N g_{ki} \delta x_i = 0 \quad (k = 1, \dots, c) \quad (\text{C.21})$$

ここで  $g_{ki} = \partial G_k / \partial x_i$  と再定義してある。

ここでラグランジュの未定係数法と呼ばれる手法を利用しよう。まずその手法について述べると、まずこれらの束縛条件の微分に任意定数  $\lambda_k$  : ( $k = 1, \dots, c$ ) を掛け、それらを式 C.19 から引いた式を作る。

$$\sum_{i=1}^N \left[ m_i \ddot{x}_i - F_i - \sum_{k=1}^c \lambda_k g_{ki} \right] \delta x_i = 0 \quad (\text{C.22})$$

このように新たに  $c$  個の未知数を導入することにより、変位をまったく自由にする手法が**ラグランジュの未定係数法** (Lagrange method of undetermined multiplier) である。

ラグランジュの未定係数法は次のように表現できる。 $f_i = m_i \ddot{x}_i - F_i$  と置こう。すると、 $N$  次元空間のベクトルで表現した場合、証明すべき命題は次のようになる。

$c$  個の束縛条件の  $i$  成分を  $g_{ki}$  とすると、束縛条件はベクトル  $\mathbf{g}_k$  と  $\delta \mathbf{x}$  の内積が 0、つまりこれらが直交していることを示す。このとき、たまたま  $\mathbf{f}$  と  $\delta \mathbf{x}$  が直交していれば、 $\mathbf{f}$  は  $\mathbf{g}_k$  の線形結合で与えられるというものである。

例えば、 $N = 3$  で、束縛条件が  $c = 2$  とすると、最初の束縛条件で、 $\delta \mathbf{x}$  は  $\mathbf{g}_1$  と垂直な面上になければならなくなる。次の束縛条件で、 $\mathbf{g}_2$  と垂直な別の面上になければならなく

なる。この結果、 $\delta \mathbf{x}$  はこれら二つの面の交線上になければならなくなる。さて、ベクトル  $\mathbf{f}$  がこの交線に垂直ならば、 $\mathbf{f}$  が  $\mathbf{g}_1$  と  $\mathbf{g}_2$  の作る面内に入り、これらの線形結合で与えられるということになる。

証明は次のようになる。 $c$  個の束縛条件が独立であれば、 $g_{ki}$  を行列で表したとき、その rank は  $c$  となる。このとき、列を適宜入れ替えて、左の  $c \times c$  の部分行列の行列式が 0 にならないようにしておく。束縛条件の式から  $\delta x_1, \dots, \delta x_c$  の関わる部分と  $\delta x_{c+1}, \dots, \delta x_N$  の関わる部分とに分ける。

$$\sum_{i=1}^c g_{ki} \delta x_i = - \sum_{i=c+1}^N g_{ki} \delta x_i \quad (\text{C.23})$$

左辺の行列の行列式は 0 でないから、 $\delta x_1, \dots, \delta x_c$  は  $\delta x_{c+1}, \dots, \delta x_N$  の一次結合で表されることになる。これは、 $N$  次元システムで、 $c$  個の束縛があるため、 $N - c$  の自由度があることに対応している。つまり、 $\delta x_{c+1}, \dots, \delta x_N$  は勝手に選ぶことができ、残りはこれらから決定される。

さて、束縛条件を満たす  $\delta x_i$  であれば、次式は必ず成立する。

$$\sum_{i=1}^N \left( f_i - \sum_{k=1}^c \lambda_k g_{ki} \right) \delta x_i = 0 \quad (\text{C.24})$$

ここで、 $\lambda_k$  を次式を満たすように決めよう。

$$f_i - \sum_{k=1}^c \lambda_k g_{ki} = 0 \quad (i = 1, \dots, c) \quad (\text{C.25})$$

これを前式に代入すると、次式が成立する。

$$\sum_{i=c+1}^N \left( f_i - \sum_{k=1}^c \lambda_k g_{ki} \right) \delta x_i = 0 \quad (\text{C.26})$$

ここで、 $\delta x_{c+1}, \dots, \delta x_N$  は任意に選べるので、

$$f_i - \sum_{k=1}^c \lambda_k g_{ki} = 0 \quad (i = c+1, \dots, N) \quad (\text{C.27})$$

が成立する。これと  $\delta x_1, \dots, \delta x_c$  に成立した式を合わせると、次式が導かれる。

$$f_i = \sum_{k=1}^n \lambda_k g_{ki} \quad (i = 1, \dots, N) \quad (\text{C.28})$$

つまり、ダランベールの仮想変位の原理を示す  $n$  個の自由度を持つ式と同じ式に、 $c$  の束縛数の未知数  $\lambda_k$  を係数とする式を加えたことにより、 $N$  個の  $\delta x_i$  をまったく自由に変位できることにな

るのである。すると、前節と同じ手続きで次の式を誘導することができる。

$$\sum_{i=1}^N \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial x_i} - F_i - \sum_{k=1}^c \lambda_k g_{ki} \right] \delta x_i = 0 \quad (\text{C.29})$$

これから、保存場の場合、ラグランジュの運動方程式は次のようになる。

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_i} &= 0 & (i = 1, \dots, N) \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_k} &= 0 & (k = 1, \dots, c) \end{aligned} \quad (\text{C.30})$$

ただしラグランジアン  $L$  は次式で与えられる。

$$L = T(x, \dot{x}) - U(x) + \sum_{k=1}^c \lambda_k G_k(x) \quad (\text{C.31})$$

また束縛力  $R_i$  は次のようになる。

$$R_i = \sum_{k=1}^c \lambda_k g_{ki} = \sum_{k=1}^c \lambda_k \frac{\partial G_k}{\partial x_i} \quad (k = 1, \dots, c) \quad (\text{C.32})$$

本節で示した議論は、デカルト座標系  $x_i$  を基本としたが、一般座標系  $q_j$  で示した運動に、さらなる束縛がある場合でも、まったく同じ議論が成立する。その場合、これらの式の  $x_i$  を  $q_j$  で置き換えた式が成立する。

## C.4 最小作用の原理

最小作用の法則とは次のようなものである。今、ラグランジアン  $L$  に関する次の積分を考える。

$$S(q(t)) = \int_{t_0}^{t_1} dt L(q(t), \dot{q}(t)) \quad (\text{C.33})$$

ここで、運動の軌跡  $q(t)$  は  $q(t_0)$  の値と  $q(t_1)$  の値が定まっているだけで、途中は任意の関数であり、必ずしも、運動の方程式を満たした解とは限っていない。この積分値を**作用** (action) と呼ぶ。

さて、ここから軌跡を  $q(t) + \delta q(t)$  と僅かに動かしてみる。すると作用も僅かに変化する。ここで、重大な事実が存在する。この作用が停留する、つまり軌道を僅かに変えても作用がほとんど変わらないときには、その軌道は運動方程式を満たす。また、逆に運動方程式を満たす軌道の周辺で、軌道を僅かに変えても、作用は停留するというものである。本書では説明を省くが、停留といっても最小値になるので、**最小作用の原理** (principle of minimum action) と呼ぶ。

作用が停留するときに、軌道が運動方程式を満たすことは次のように証明できる。質点がある軌跡から少しずれた軌跡  $q(t) + \delta q(t)$  をとると、軌跡の移動に伴って各点での速度も  $\dot{q}(t) + d(\delta q(t))/dt$

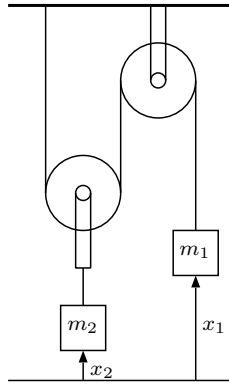


図 C.1 動滑車と静滑車により構成された系。

と変化する。したがって、ずれた軌道での作用と元の軌道の作用の差は次のようになる。

$$\begin{aligned}
 \delta S &= S(q(t) + \delta q(t)) - S(q(t)) \\
 &= \int_{t_0}^{t_1} dt L \left( q(t) + \delta q(t), \dot{q}(t) + \frac{d\delta q(t)}{dt} \right) - S(q(t)) \\
 &= \int_{t_0}^{t_1} dt \left[ \frac{\partial L}{\partial q} \delta q(t) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \frac{d\delta q(t)}{dt} \right] \\
 &= \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q(t) \Big|_{t_0}^{t_1} + \int_{t_0}^{t_1} dt \left[ \frac{\partial L}{\partial q} \delta q(t) - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \delta q(t) \right] \\
 &= \int_{t_0}^{t_1} dt \left[ \frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \right] \delta q(t) \tag{C.34}
 \end{aligned}$$

これが任意の微小軌道変形について、常に 0 となるためには、次式が成立しなければならない。

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0 \tag{C.35}$$

この式は前出のラグランジュの運動方程式そのものである。逆にこの式が成立すれば、作用が停留することも明らかである。なお、上式の  $p = \partial L / \partial \dot{q}$  を**一般化運動量** (generalized momentum) と呼ぶが、速度を  $m$  倍だけした運動量とは若干異なる値となることがあるので、注意が必要である。

## C.5 滑車の例

ここでちょっと例を上げておこう。図 C.1 に示すような天井に一端を固定された紐を、動滑車、静滑車を経由し、 $m_1$  の質量で終端する。動滑車には  $m_2$  なる質量がぶら下がっているとする。二つの質点の高さを  $x_1$ 、 $x_2$  としよう。すると  $x_1 + 2x_2 = \text{const}$  なる束縛条件が成立する。高さの原点を適切に選ぶことにより、この右辺を 0 に調整しよう。

直前に示した方法で、束縛力を求めてみよう。ラグランジアンは次のようになる。

$$L = \frac{1}{2}(m_1\dot{x}_1^2 + m_2\dot{x}_2^2) - g(m_1x_1 + m_2x_2) + \lambda(x_1 + 2x_2) \quad (\text{C.36})$$

これを  $x_1$ 、 $x_2$ 、 $\lambda$  の三変数の関数としてラグランジュの運動方程式を立てると次のようになる。

$$\begin{aligned} m_1\ddot{x}_1 &= -m_1g + \lambda \\ m_2\ddot{x}_2 &= -m_2g + 2\lambda \\ x_1 + 2x_2 &= 0 \end{aligned} \quad (\text{C.37})$$

これらの式から  $x_1$  と  $\lambda$  を消去すると次の式が得られる。

$$(4m_1 + m_2)\ddot{x}_2 = -(m_2 - 2m_1)g \quad (\text{C.38})$$

ちなみに、この式は  $x_2$  を唯一の一般座標とし、 $x_1 = -2x_2$  であることを考慮して束縛条件の入らないラグランジアンを求める。

$$L = \frac{1}{2}(4m_1\dot{x}_2^2 + m_2\dot{x}_2^2) - g(-2m_1x_2 + m_2x_2) \quad (\text{C.39})$$

これをラグランジュの運動方程式に代入して得られる式は、ニュートンの運動方程式とまったく一致する。このニュートンの方程式を解くと、重力が  $-[(m_2 - 2m_1)/(4m_1 + m_2)]g$  になったときの運動と一致する。

再び、C.37 式へ戻ろう。 $x_2$  の満たすべき式が分かると、第三式を用いて、 $x_1$  の満たすべき式が分かる。

$$(4m_1 + m_2)\ddot{x}_1 = 2(m_2 - 2m_1)g \quad (\text{C.40})$$

さらに、これらを第一または二式に代入すると  $\lambda$  に関する式が誘導できる。

$$\lambda = \frac{3m_1m_2}{4m_1 + m_2}g \quad (\text{C.41})$$

これらから、束縛力は次のように得られる。

$$\begin{aligned} R_1 &= \lambda \frac{\partial x_1 + 2x_2}{\partial x_1} = \frac{3m_1m_2}{4m_1 + m_2}g \\ R_2 &= \lambda \frac{\partial x_1 + 2x_2}{\partial x_2} = 2 \frac{3m_1m_2}{4m_1 + m_2}g \end{aligned} \quad (\text{C.42})$$

つまり、 $m_1$ 、 $m_2$  は、紐によりこれらの力で上向きに引かれることになる。 $R_2$  が二倍なのは、紐が二本あるからである。



## C.6 電磁気学のラグランジアン

次式で与えられるローレンツ力は位置だけでなく、速度にも依存する量である。

$$\mathbf{F} = Q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (\text{C.43})$$

したがっていわゆる保存力ではなく、ポテンシャル表示はできない。しかし、ラグランジアンでは表示できるという面白い力である。

まず成分展開し、ポテンシャルで表示しておこう。 $x$ 成分は次のようになる。

$$\begin{aligned} F_x &= Q(E_x + v_y B_z - v_z B_y) \\ &= Q \left( -\frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial t} + v_y \frac{\partial A_y}{\partial x} - v_y \frac{\partial A_x}{\partial y} - v_z \frac{\partial A_x}{\partial z} + v_z \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \\ &= Q \left( -\frac{\partial \phi}{\partial x} - v_x \frac{\partial A_x}{\partial x} - v_y \frac{\partial A_x}{\partial y} - v_z \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial A_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial A_y}{\partial x} + v_z \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \\ &= Q \left( -\frac{dA_x}{dt} + \frac{\partial(v_x A_x + v_y A_y + v_z A_z - \phi)}{\partial x} \right) \\ &= Q \left[ -\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial(v_x A_x + v_y A_y + v_z A_z - \phi)}{\partial v_x} \right) + \frac{\partial(v_x A_x + v_y A_y + v_z A_z - \phi)}{\partial x} \right] \\ &= Q \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial U}{\partial v_x} \right) - \frac{\partial U}{\partial x} \right] \end{aligned} \quad (\text{C.44})$$

ただし、 $U$ は次で定義されているとする。

$$U = Q(\phi - v_x A_x - v_y A_y - v_z A_z) \quad (\text{C.45})$$

他の成分についても同様な形となるので、ラグランジアンは次のようになる。

$$L = T - U = \frac{1}{2}m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) - Q(\phi - v_x A_x - v_y A_y - v_z A_z) \quad (\text{C.46})$$

逆にこれを解くには、まず一般化運動量を求める。 $x$ 成分に着目すると

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial v_x} = mv_x + QA_x \quad (\text{C.47})$$

が得られる。これから運動方程式は

$$\frac{dp_x}{dt} = \frac{\partial L}{\partial x} \quad (\text{C.48})$$

に代入して、

$$m\dot{v}_x + Q \left( \frac{\partial A_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial A_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial A_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial A_x}{\partial z} \right) = -Q \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} - v_x \frac{\partial A_x}{\partial x} - v_y \frac{\partial A_y}{\partial x} - v_z \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \quad (\text{C.49})$$

となる。左辺第二項以降を右辺に移項し、整理するとローレンツ力の  $x$  成分が得られる。

また、相対論的速度の場合には

$$T = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)/c^2}} \quad (\text{C.50})$$

と修正すればよいので、次式のラグランジアンでよい。

$$L = T - U = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)/c^2}} - Q(\phi - v_x A_x - v_y A_y - v_z A_z) \quad (\text{C.51})$$

さらに、

$$L^r = mc^2 - Q(U_t \phi - U_x A_x - U_y A_y - U_z A_z) \quad (\text{C.52})$$

として、

$$\int_{s_0}^{s_1} ds L^r \quad (\text{C.53})$$

なる停留問題にすることもできる。ただし、

$$ds = \sqrt{dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2} \quad (\text{C.54})$$

## 付録 D

# ベクトルの公式

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} \quad (\text{D.1})$$

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -\mathbf{B} \times \mathbf{A} \quad (\text{D.2})$$

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \quad (\text{D.3})$$

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C} \quad (\text{D.4})$$

$$\text{grad}(fg) = f \text{grad} g + g \text{grad} f \quad (\text{D.5})$$

$$\text{div}(f\mathbf{A}) = \mathbf{A} \cdot \text{grad} f + f \text{div} \mathbf{A} \quad (\text{D.6})$$

$$\text{rot}(f\mathbf{A}) = f \text{rot} \mathbf{A} + \text{grad} f \times \mathbf{A} \quad (\text{D.7})$$

$$\begin{aligned} \text{grad}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) &= (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} + (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B} \\ &\quad + \mathbf{A} \times \text{rot} \mathbf{B} + \mathbf{B} \times \text{rot} \mathbf{A} \end{aligned} \quad (\text{D.8})$$

$$\text{div}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot \text{rot} \mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \text{rot} \mathbf{B} \quad (\text{D.9})$$

$$\begin{aligned} \text{rot}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) &= \mathbf{A} \text{div} \mathbf{B} - \mathbf{B} \text{div} \mathbf{A} \\ &\quad + (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B} \end{aligned} \quad (\text{D.10})$$

$$\text{div}(\text{grad} f) = \nabla^2 f \quad (\text{D.11})$$

$$\text{rot}(\text{grad} f) = \mathbf{0} \quad (\text{D.12})$$

$$\text{grad}(\text{div} \mathbf{A}) = \text{rot}(\text{rot} \mathbf{A}) + \nabla^2 \mathbf{A} \quad (\text{D.13})$$

$$\text{div}(\text{rot} \mathbf{A}) = 0 \quad (\text{D.14})$$

$$\text{rot}(\text{rot} \mathbf{A}) = \text{grad}(\text{div} \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} \quad (\text{D.15})$$

## 付録 E

# パラドックスの解答

安易に解答を読んではいけない。ここに解答を示したのは、パラドックスに解答が示されていないが故に、電磁気学が誤っているという非難に対抗するためである。

### E.1 平行平板キャパシタに挿入された誘電体に働く力

$\epsilon \rightarrow \infty$  の場合を考える。この場合には、誘電体中の電場は限りなく弱くなるので、金属に差し替えてもほとんど同じである。そこで、誘電体の代わりに金属をやや薄くし、極板との間にギャップを空けてみよう。

まず、ほとんどのところは、極板に垂直な電場が発生するが、端だけはこれが乱れる。図 E.1 に示す電気力線が、挿入された金属の先端部分と金属が外にはみ出す部分で曲がっているところである。先端部分では、挿入された金属の先端に、明らかに横向きでかつ金属を引き込む電場が働いている。一方、極板側の電場は必ず極板に垂直で横向きの力にはなっていない。逆に金属が外部にはみ出す部分では、金属と極板の位置関係が逆なだけで、ほぼ同じ図となっており、今度は極板は横向きの力を受けるが、金属は横向きの力を受けないという結果が得られる。

この力の大きさをおよそ見積もることができる。先端部分のちょっと内側では等電位面はほぼ平行で等間隔であるが、外側ではほぼ放射状に広がる。先端に対応する極板の位置から  $r$  離れたところの円を考えると、等電位面はほぼ等間隔でこの円を横切ることになる。そこで金属

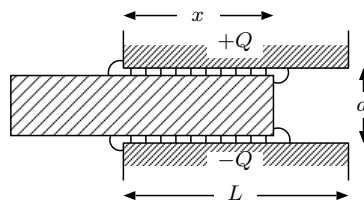


図 E.1 キャパシタの端では電場が乱れている。

の端面での電場は  $E = V/2(\pi r/2) = V/\pi r$  となる。ここで、極板間の電位差を  $V$ 、その半分がギャップにかかっており、それを  $1/4$  円周で割ることで、電場を求めている。端面に働く力は  $\epsilon_0 E^2/2 = \epsilon_0 V^2/2\pi^2 r^2$  を、 $r = a$  から  $\infty$  まで積分することにより得られるので、単位奥行当たりの力は  $F = \epsilon_0 V^2/2\pi^2 a = \epsilon_0 Q^2/2\pi^2 C^2 a$  となる。

一方、仮想変位の原理から求めた力は  $F = (Q^2/2)d(1/C)/dx = \epsilon_0 Q^2/2C^2 a$  であるから、 $\pi^2$ 、つまり十倍程度大きい。これは大きな差と感ずる人も多いだろうが、実際の等電位面は金属の突端でもっと金属寄りを通過し、その結果、金属突端付近で電場はかなり大きくなるので、十分理解できる誤差である。いずれにせよ、挿入された金属の先端部で極板のすぐ近傍にのみ横向きに引っ張る力が存在することが確認できたのである。

なお、挿入金属には先端付近に横向きの力がかかっているが、その付近の極板には面垂直の力はあるものの、横向きの力がかかっていない。作用反作用の法則はどうなっているのだろうと疑問に感じた人がいるかも知れない。実は、極板には、導体が外へ出る付近で、横向きの力がかかっている。

これは、次のように理解できる。挿入金属の突端にかかる力の反作用は、まず極板内のその辺に存在する電荷に働く。この辺りの電荷が力を受けると、電荷は移動を開始するが、その結果、極板内の電荷密度に変化が起こる。これら移動や密度変化はいずれ平衡に達するが、その時点で突端付近に存在した電荷の受けた横向きの力は、他の電荷の力に移動していき、結局、極板縁の電荷にまで伝わる。ということで、あたかも剛体に力がかかったときのように、力は電荷全体に及び、その結果、とんでもない電荷に反作用が働くのである。

次にギャップおよびその周辺の空間に働くマクスウェル応力を見てみよう。この空間の縁はすべて導体であり、電場は空間に垂直であるので、 $\epsilon_0 E^2/2$  なる引力がかかることになる。この引力はギャップ内では、空間を上下に引っ張る形になっているが、より大きな力が金属突端付近と極板縁にかかっている。図 E.1 の空間部分に着目してみると、空間にかかる力はバランスしている。また導体には、この反作用である引力がかかることになる。このように静的な場合のマクスウェル応力とは、結局、導体側の電荷の剛体的集合運動の結果を反映し、一見予想もつかないような形となることが理解できよう。

## E.2 磁場の中心

電流が流れるとベクトルポテンシャルが作られる。それはおおよそ電流に沿って発生し、電流から遠ざかると弱まる傾向がある。例えば、円筒状のソレノイドの作るベクトルポテンシャルは、中心で 0 で、それから半径に比例して大きくなり、ソレノイドの壁で、電流に比例する大きさを持ち、かつ電流の方向を向いたベクトルで表される。誘導電場はその時間微分で与えられるので、誘導電場は先に示したベクトルポテンシャルと同じ方向を向き、電流の減少する程度に比例する。このように、誘導電場を決定することができる。

### E.3 動く磁石が発生する電場

導線が固定で磁石が動いている場合、この導線を含み磁石の外側を周回する空間に固定された閉曲線を考え、その閉曲線に対する電磁誘導で理解すれば、その曲線を通過する磁束が変化するため、確かに起電力が発生する。しかし、導体付近の磁場は均一であり、直感的には理解しがたい。これを理解するには、ベクトルポテンシャルを考えるのがよい。

ベクトルポテンシャルは磁石の縁付近で最大であり、その値は徐々に減少し、やがては逆向きになって、反対側の縁付近で再び逆向きに最大となる。導線はこのベクトルポテンシャルの変動を検知するので、起電力が発生するのである。

もう一つの理解の方法は、相対論的効果である。磁化が動くとき分極が発生するのである。これは次節に述べる電流の相対論的効果と同じものである。磁石内には磁場を作っている（磁化）電流があるはずであるが、それが動くと、相対論にしたがって電荷が発生するのである。発生する電荷は移動方向に流れる電流の場所に発生する。磁石の磁化電流は、磁石の周辺電流で代表させることができる。したがって、それが動くときに発生する電荷も磁石の縁に発生する。それも移動方向に平行な縁に発生する。これが電場を作るのである。

### E.4 磁場力の消失

基準となる S 系では、 $B = I/2\pi\mu_0 r$  なる磁場が存在し、 $v$  で移動している単電荷には、 $F = QvB = \mu_0 QvI/2\pi r$  なる力が働く。さて、電流密度は  $J = I/S$  であるので、S 系における四元電流ベクトルは  $(I/S, 0, 0, 0)$  となる。これを座標変換して、 $v$  で動く  $S'$  系で見ると、 $(\gamma I/S, 0, 0, \gamma vI/cS)$  となり、電荷密度  $\gamma vI/c^2 S$  が見えてくる。この電荷密度の作る電場は  $E = \gamma vI/2\pi\epsilon_0 c^2 r$  となるので、 $S'$  系で静止している単電荷には  $F = QE = \gamma\mu_0 QvI/2\pi r$  なる力が働く。先に述べた力とこの力は  $\gamma$  だけの差しか存在せず、 $v$  が  $c$  に比べて十分小さいときには、完全に一致する。

何故、座標変換されると、中性だった電流の線路に、電荷が現れてくるのであろうか。これについては「ファインマン物理」に書かれている。まず、簡単のために、電流は、動かない固定負電荷と、単電荷と一緒に速度  $v$  を持つ移動正電荷とよりなっているとしよう。S 系では、電荷密度はいずれも  $\rho = I/Sv$  となる。さて、これら分布電荷を  $S'$  系で見ると、まず負電荷は長さのローレンツ収縮のため、電荷密度が上がり、 $\rho_- = I/\gamma Sv$  となる。一方、正電荷は、S 系でローレンツ収縮を起こしてはいるが、 $S'$  系では  $\rho_+ = \gamma I/Sv$  となる。これらの結果、 $S'$  系では  $\rho = (\gamma - 1/\gamma)I/Sv = \gamma vI/c^2 S$  だけの電荷が発生することになる。これは、前半で計算した結果と一致する。

## E.5 ファインマンの作用反作用のパラドックス

図 E.2 に示すような電荷シートの場合であるが、#1 の速度が余り速くなく相対論の効果を考える必要のない場合を扱おう。この場合、両電荷の間の電場は、両電荷の作る電場が相殺し 0 となる。この領域外は、相殺が起きず加算的になり、 $E_x = \sigma/\epsilon_0$  となる。 $\sigma$  は電荷面密度である。また、磁場は#2 が作るものだけとなり、#2 シートの  $-x$  側で  $B_z = \mu_0\sigma v_2$ 、 $x$  側でその符号反転したものとなる。このため、 $\mathbf{g}$  は両シートの外部だけに存在し、単位体積当りの運動量は  $g_y = \mu_0\sigma^2 v_2$  となる。#1 のシートの移動に伴い、外部領域が  $v_1$  の速度で増加していくので、単位  $yz$  面積当りの運動量の増加率は  $dg_y/dt = \mu_0\sigma^2 v_1 v_2$  となる。

さて、電荷シートが電場から受ける力は、互いに斥力となるが、その大きさは等しい。磁場からは#1 のシートだけが力を受け、その単位  $yz$  面当りの値は  $F_y = -\sigma B_z v_1 = -\mu_0\sigma^2 v_1 v_2$  となる。これは明かに運動量の増加率と同じ値で、方向が反対であるので、力と運動量増加率との総和が 0 であることが示される。

点電荷の場合も、概要を示しておこう。電磁場の運動量  $\mathbf{g}$  を構成する各項のうち交差項のみを考える。空間の各点で、電場  $\mathbf{E}_i$  から磁場  $\mathbf{B}_j$  に向く右ネジの方向を丹念に調べていくことになる。

まず、 $\mathbf{E}_1 \times \mathbf{B}_2$  を考えよう。#1 付近では、 $z$  方向を軸として右ネジに循環するような形となり、両電荷の間では  $-y$  方向を向く。#2 を通る  $yz$  面付近に近づくと、徐々に 0 になり、そこで逆転して  $y$  方向となる。#1 が#2 に近寄っていく際、もっとも大きな電磁場の運動量の変化は#1 の場所で発生する。ここでは  $-y$  方向の運動量が#1 の移動に伴なって反転するからである。このため、 $d\mathbf{g}/dt$  は  $y$  方向を向く。

次に  $\mathbf{E}_2 \times \mathbf{B}_1$  を考えよう。これは明かに  $x$  軸対称となる。#1 付近や#2 付近では大きな値になるが、概ね、#2 を囲む球面に沿って、 $-x$  方向から  $x$  方向を向くベクトルになる。この場合には、両電荷が近寄っていく際、運動量の反転のような現象は起きず、大きな運動量の変化はないであろう。

これら電磁場の運動量の増加率に両電荷に働く力を加えたものが 0 になるはずである。詳細の検討はかなりの仕事になるので省くが、少なくとも運動量増加率の大きな成分である  $y$  方向の増加率は#1 に働く  $-y$  方向の力で相殺されそうであるということに納得してほしい。

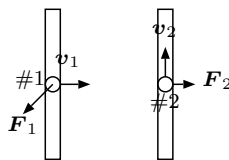


図 E.2 2枚のシート状電荷が互いに及ぼしあう力

## E.6 ファインマンの角運動量のパラドックス

定量的考察のほうが、はっきりした結論が得られるので、それに対する解答を示そう。二つの球体の半径を  $a$ 、 $b$ 、電荷を  $+Q$ 、 $-Q$  とする。また、磁場は  $\tau$  で 0 になるものとし、 $B_z(1-t/\tau)$  で変動するとしよう。すると、ファラデーの電磁誘導の法則から以下の電場が、円周方向に発生する。ただし、 $\rho = r \sin \theta$  である。

$$E_t = \frac{\pi \rho^2 B_z / \tau}{2\pi \rho} = \frac{\rho B_z}{2\tau} \quad (\text{E.1})$$

この電場により、半径  $b$  の球体が受ける力のモーメントは、次式で  $r = b$  としたものになる。

$$N = \int \left( \frac{Q}{4\pi r^2} 2\pi \rho r d\theta \right) \frac{\rho B_z}{2\tau} \rho = \frac{1}{4} r^2 \frac{Q B_z}{\tau} \int \sin^3 \theta d\theta = \frac{1}{3} r^2 \frac{Q B_z}{\tau} \quad (\text{E.2})$$

ただし、 $\int d\theta \sin^3 \theta = 4/3$  である。この結果、外殻と内殻では明らかに力のモーメントの差が発生し、さらに磁場が 0 になるまでに受ける総角運動量は  $\tau$  を掛けることにより、次のようになる。

$$L = \frac{1}{3} (b^2 - a^2) Q B_z \quad (\text{E.3})$$

この際、磁場を作り出すコイルには力のモーメントは働かないのだろうかという疑問が湧く。もしソレノイドに電流を流しておいて、それを突然切断すると、切断箇所に電荷が発生する。その電荷に力の働く可能性はあるのである。しかし、抵抗を経由して電流を 0 にしていくと、電荷は発生しないため、力は働かない。

となると、導体が受けた力のモーメントの反作用は電磁場に与えられるという仮説が有力になる。そこで、ポインティングベクトルの持つ角運動量の変化量を計算しようということになる。最後には電場のみしか残っていないので、最初のポインティングベクトルの持つ角運動量を計算すれば、電磁場が失なった角運動量となる。電磁誘導で作られる電場は回転方向のポインティングベクトルには寄与がないので、電荷の作る電場と初期磁場の作るポインティングベクトルを対象とする。電場は

$$E_n = Q / 4\pi \epsilon_0 r^2 \quad (\text{E.4})$$

であり、磁場は  $B_z$  であるので、ポインティングベクトルは

$$S = E_n B_z \sin \theta / \mu_0 = Q B_z \sin \theta / 4\pi \epsilon_0 \mu_0 r^2 = c^2 Q B_z \sin \theta / 4\pi r^2 \quad (\text{E.5})$$

である。このポインティングベクトルの作るモーメントは

$$S \rho / c^2 = Q B_z \rho \sin \theta / 4\pi r^2 \quad (\text{E.6})$$

なので、これを空隙全体で積分すると、

$$\iint 2\pi \rho r dr d\theta \frac{Q B_z \rho \sin \theta}{4\pi r^2} = \frac{1}{3} (b^2 - a^2) Q B_z \quad (\text{E.7})$$



となって、電磁場の失なった角運動量は、導体に与えられた角運動量と一致する。

## E.7 パフ・パフの角運動量のパラドックス

力は充電電流に対して働くから、まず各点での電流を求めよう。内殻のある緯度での電流はそれより下の総電荷の時間微分で与えられる。まず、ある緯度以下の総電荷は次のようになる。なお、時刻  $t$  における全電荷を  $Qt/\tau$  としておく。また、以下の計算で  $r = a$  とする。

$$\int_{\theta}^{\pi} \frac{Qt}{4\pi\tau r^2} 2\pi\rho r d\theta = \frac{Qt}{2\tau}(\cos\theta + 1) \quad (\text{E.8})$$

この結果、ある緯度を北から南に横切る電流は  $(Q/2\tau)(\cos\theta + 1)$  となる。

これから電流密度を求め、各点でのローレンツ力を求め、力のモーメントを得てからそれを積分すればよいのであるが、球の同じ緯度のものをまとめると、電流そのものと磁場を掛けて、その作る力のモーメントを積分するだけでよいことが分かる。さらにこれを  $\tau$  で積分する、つまり  $\tau$  を掛けると、得られる総角運動量となる。

$$L = \frac{Q}{2} \int (\cos\theta + 1)r d\theta B_z \cos\theta \rho = \frac{1}{3}r^2 QB_z \quad (\text{E.9})$$

$r = b$  と  $r = a$  における総角運動量の差は、次のようになる。

$$L = \frac{1}{3}(b^2 - a^2)QB_z \quad (\text{E.10})$$

この物体が得た角運動量は、前問で得られたポインティングベクトルが得る角運動量で相殺される。

## E.8 トロートン・ノーブルのトルクのパラドックス

S系の原点に静止した  $-Q$  の負電荷、 $(a/\sqrt{2}, a/\sqrt{2}, 0)$  に、 $Q$  の静止した正電荷があるとする。これらの電荷は、これら二点を通る直線に沿って、互いに引き合っている。正電荷の受ける力を  $(-F/\sqrt{2}, -F/\sqrt{2}, 0)$  としよう。負電荷の受ける力は、いうまでもなく、この符号反転したものとなる。

この力の四元成分を求めておこう。まず空間成分は質点が静止しているので、これら三成分と一致する。時間成分は  $u_t F_t = u_x F_x + u_y F_y + u_z F_z$  の関係を用いて計算することができ、四元速度が  $(0, 0, 0, c)$  より  $(-F/\sqrt{2}, -F/\sqrt{2}, 0, 0)$  となる。

これらを S系に対し  $-v$  の速度で動いている S'系で観測すると、正電荷の  $t$  における位置は  $\gamma = 1/\sqrt{1 - (v/c)^2}$  として、次のように変換される。

$$\left( \gamma \left( \frac{a}{\sqrt{2}} + \frac{v}{c} ct \right), \frac{a}{\sqrt{2}}, 0, \gamma \left( ct + \frac{v}{c} \frac{a}{\sqrt{2}} \right) \right) \quad (\text{E.11})$$

$t' = \gamma(ct + va/\sqrt{2}c) = 0$  のときの正電荷の位置を求めると、 $(a/\sqrt{2}\gamma, a/\sqrt{2}, 0)$  となる。

また、四元力は次のように変換される。

$$\left(-\gamma \frac{F}{\sqrt{2}}, -\frac{F}{\sqrt{2}}, 0, -\gamma \frac{v}{c} \frac{F}{\sqrt{2}}\right) \quad (\text{E.12})$$

古典的な力は、質点の速度による補正  $\gamma$  を行って、 $(-F/\sqrt{2}, -F/\sqrt{2}\gamma, 0)$  となる。位置の  $x, y$  成分と力の成分は比例しておらず、形式上、左回りのトルクを発生しているかに見える。

この議論からも分かるように、ここで扱った力は電磁気力とは限っていない一般的なものである。つまり、このパラドックスは電磁気学のものではなく、相対性理論一般のものであることが分かる。

ここでも同時性の問題が存在する。そもそも、作用反作用の法則は、両質点が静止している系で、両質点間に同時に働く力に成立しているのである。したがって、静止系での  $t = 0$  の二質点の位置を移動系に変換した位置で議論するほうが、正しそうである。負電荷の四元座標  $(0, 0, 0, 0)$  を移動系に変換すると、 $(0, 0, 0, 0)$  である。正電荷の四元座標  $(a/\sqrt{2}, a/\sqrt{2}, 0, 0)$  を移動系に変換すると、次のようになる。

$$\left(\gamma \frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{a}{\sqrt{2}}, 0, \gamma \frac{v}{c} \frac{a}{\sqrt{2}}\right) \quad (\text{E.13})$$

明らかに異なる時刻に変換されるが、この異なる時刻の質点間には、作用反作用の法則が成立するのである。

以上のことから、移動している質点間の作用反作用の議論を簡単に行うには、少なくとも片方が静止している座標で議論すべきであることが理解できよう。

静止時の力として、電場による力を考えよう。

$$F = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 a^2} \quad (\text{E.14})$$

これを上に求めた運動中の古典的力に代入してみると

$$-\frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 a^2 \sqrt{2}} \left(1, \frac{1}{\gamma}, 0\right) \quad (\text{E.15})$$

原点に置かれた運動電荷は、上記に示した電場と磁場を発生する。電場は原点から放射状に出ているから、相対論に基づく  $x$  方向の圧縮効果はあるものの、第二の電荷は原点の電荷からの反発力を感じる。さらに、第二の電荷は、速度  $V$  で運動しているから、磁場の影響も受ける。これによる力は  $y$  方向を向く。つまり、二点を通る直線と離れた方向の力を受ける。原点の電荷は、その反作用を受けるので、結果として二つの電荷は偶力を受けることになる。S 系では、回転方向の力はなかったのに、S' 系では回転的な力が働く。これは矛盾ではないかというものである。

ところで、S' 系で第二の電荷の受ける力は次のように与えられる。

$$\mathbf{f}' = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{(x', y', 0)}{\sqrt{x'^2 + y'^2}^3} \quad (\text{E.16})$$

これから、四元力は次のようになる。

$$F'_\mu = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{(x', y', 0, 0)}{\sqrt{x'^2 + y'^2}^3} \quad (\text{E.17})$$

これを S 系に変換する。

$$\begin{aligned} F_\mu &= \left( \Gamma \left( F'_x + \frac{V}{c} F'_t \right), F'_y, F'_z, \Gamma \left( F'_t + \frac{V}{c} F'_x \right) \right) \\ &= \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{(\Gamma x', y', 0, \Gamma(V/c)x')}{\sqrt{x'^2 + y'^2}^3} \\ &= \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{(\Gamma^2(x - Vt), y, 0, \Gamma^2(V/c)(x - Vt))}{\sqrt{\Gamma^2(x - Vt)^2 + y^2}^3} \end{aligned} \quad (\text{E.18})$$

第二の電荷の受けるローレンツ力  $\mathbf{f}$  を計算してみよう。

$$\mathbf{f} = Q(\mathbf{E} + \mathbf{V} \times \mathbf{B}) = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{(\Gamma(x - Vt), y/\Gamma, 0)}{\sqrt{\Gamma^2(x - Vt)^2 + y^2}^3} \quad (\text{E.19})$$

これら二式を比較してみると次式が確認できる。

$$F_\mu = \Gamma f_\mu \quad (\text{E.20})$$

つまり、座標変換された力には、明らかに磁場の効果が入っているのである。

もともと、ここで述べた力は、電磁気学的なものに限っていないことを思い起こしてほしい。静止系において、力が二質点を結ぶ線上に平行であれば、どんな力でもよいのである。磁場のような速度に対し、垂直に働く力は、電磁場に独特なものとして理解されているが、実はきわめて卑近なものだったのである。それならば、何故、他の力ではこのようなものが発見されなかったのであろうか。それは、この効果がきわめて小さいからである。では何故電磁場では発見できたのであろうか。それは、電磁場では正負の電荷があり、電場をほとんど相殺して、磁場の効果だけを観察できる系が簡単に存在するからである。電流とは、正負の電荷がほぼ相殺し、片方の符号の電荷だけが動く系である。その結果、電場は 0 であるが、磁場だけが観測できるのである。

## E.9 霜田の作用反作用のパラドックス

前半の記述は正しい。作用反作用の法則が成立しない分は、ポインティングベクトルで理解できる。このパラドックスの問題点は、定量的考察が難しいことである。円板状磁石でなく、微小磁石で考えると、定量的考察が可能となるが、本稿では計算を省略する。

後半の記述は間違っている。電荷が静止した系では、磁石が移動している。したがって、各点での磁場が変化する。変化する磁場により、ファラデーの法則にしたがって、電場が発生する。静止電荷はこの電場により横向の力を受ける。したがって、後半の場合でも、作用反作用の法則は成立しなくなるが、それはポインティングベクトルで理解することができる。

## E.10 テレゲンの磁化に働く力のパラドックス

$\text{rot } \mathbf{B}$  が存在するという事は、 $\partial \mathbf{E} / \partial t$  があるということである。その方向は、紙面垂直で手前向きである。これと外部から与えられている磁場とで構成される電磁運動量ベクトルの増加率は中央を向く内向きのベクトルとなり、全体積で積分すると自己相殺してしまう。

しかし、磁化電流が作る磁場との外積である電磁運動量ベクトルの増加率は左方向となる。これと、磁化電流に働く力は作用反作用の法則を満すはずであり、磁化電流に働く力には矛盾はない。磁荷分極に働く力は、電磁運動量の増加率と同じ方向になり、矛盾する。

この例も、一次元モデルで考えると正確な理解が得られる。 $y$  方向の磁化が  $x = 0$  から  $x = L$  ままで存在するとしよう。磁化電流  $K$  が、 $x = L$  で  $-z$  方向に、 $x = 0$  で  $z$  方向に流れているとしよう。ちょうど磁化領域と重なる形で、時間とともに増加する電場  $E_z = \alpha t$  が存在するとしよう。これが変位電流となり、 $B_y$  が発生するが、その値は  $x = L$  で  $B_y = \alpha / 2c^2$ 、 $x = 0$  で  $B_y = -\alpha L / 2c^2$  となる。この結果、両側の磁化電流は共に  $x$  方向に同じ大きさの力を受け、その和は単位  $yz$  面当り  $F_x = \alpha KL / c^2$  となる。

一方、磁化電流は、この領域内に  $B'_y = \mu_0 K$  なる磁場を発生するが、これと増加電場の結果、電磁運動量ベクトルの増加率をこの区間で積分した結果は、 $-x$  方向に  $\partial(\epsilon_0 E_z B'_y L) / \partial t \epsilon_0 \mu_0 \alpha KL = \alpha KL / c^2$  となる。この電磁運動量ベクトルの増加率は磁化電流に働く力と見事に相殺し、磁化に働く力は、磁化電流に働く力でよいことが示される。なお、一次元モデルの場合、 $B_y$  は生じないため、磁荷分極には力は働かない。

多くの研究者が、上記の見解であるが、Haus & Penfield<sup>\*1</sup> および細野<sup>\*2\*3</sup> は、 $\epsilon_0 \mu_0 \mathbf{E} \times \mathbf{M}$  なる隠れた運動量があり、その運動量を補正すれば、磁荷分極に働く力の方が正しいとの見解を示している。しかし、もしそうならば、この効果は自由電流のループにも現われるはずであるが、自由電流がローレンツ力からずれる力を受けるという事実は知られていない。ちなみにこのパラドックスの場合、 $\epsilon_0 \mu_0 \mathbf{E} \times \mathbf{M}$  は、 $\epsilon_0 E_z B'_y$  と一致する。

\*1 H. A. Haus & Jr. P. Penfield, "Force on Magnetic Dipole and Electric Current Loop", Quatary Progress Report, Res. Lab. of Electronics, MIT, No. 88, pp. 93-98, 1968

\*2 細野敏夫「磁気双極子の磁極モデルと電流モデルは等価か?」信学論 C, Vol. J80-C-1, No. 12, pp. 545-552, 1997

\*3 細野敏夫, "メタ電磁気学", 森北出版, 1999

# 索引

## ■ A

AB 効果 (Aharonov-Bohm effect) ..... 82  
 action (作用) ..... 91, 196  
 action-reaction law (作用反作用の法則) ..... 99  
 Aharonov-Bohm effect (AB 効果) ..... 82  
 all charge (全電荷) ..... 56  
 all current (全電流) ..... 59  
 Ampere force (アンペール力) ..... 173  
 Ampere law (アンペールの法則) ..... 26, 40  
 Ampere line integral law (アンペールの線積分法則)  
 39  
 Ampere surface integral law (アンペールの面積分法  
 則) ..... 37, 46  
 antisymmetric tensor (完全反対称テンソル) ..... 143  
 Archimedes law (アルキメデスの法則) ..... 11  
 asymmetrical (非対称) ..... 174

## ■ B

bar magnet (棒磁石) ..... 4, 33  
 base unit (基本単位) ..... 177  
 BA 単位系 (British Association unit) ..... 175  
 Biot-Savart law (ビオ・サバルの法則) .. 5, 32, 41,  
 172  
 Bose condensation (ボーズ凝集) ..... 161  
 boson (ボーズ粒子) ..... 161  
 boundary condition (境界条件) ..... 119  
 bounded charge (束縛電荷) ..... 56  
 bounded current (束縛電流) ..... 60  
 British Association unit (BA 単位系) ..... 175

## ■ C

capacitance (キャパシタンス) ..... 58  
 capacitor (キャパシタ) ..... 58  
 CGS units (CGS 単位系) ..... 170, 175  
 CGS-emu ..... 174  
 CGS-esu ..... 174  
 CGS 単位系 (CGS units) ..... 170, 175  
 charge density (電荷密度) ..... 28  
 condenser (コンデンサ) ..... 58  
 conductivity (導電率) ..... 53  
 conductor (導体) ..... 53  
 conservative field (保存場) ..... 25  
 conservative force (保存力) ..... 25  
 constraining force (束縛力) ..... 190  
 constraint (束縛) ..... 190  
 contravariant forward transform coefficient (反変順  
 変換係数) ..... 137  
 contravariant reverse transform coefficient (反変逆変  
 換係数) ..... 137

contravariant tensor (反変テンソル) ..... 141  
 contravariant vector (反変ベクトル) ..... 137  
 Cooper pair (クーパー対) ..... 161  
 Coulomb field (クーロン場) ..... 13, 21  
 Coulomb gauge (クーロンゲージ) ..... 73  
 Coulomb law (クーロンの法則) .. 4, 13, 28, 31, 172  
 Coulomb law of magnetic charge (磁荷のクーロンの  
 法則) ..... 4  
 Coulomb potential (クーロンポテンシャル) ..... 67  
 Coulomb type potential (クーロン型ポテンシャル) .  
 67, 77  
 covariant tensor (共変テンソル) ..... 141  
 covariant vector (共変ベクトル) ..... 139  
 cross-link (鎖交) ..... 40  
 current (電流) ..... 2  
 current continuity law (電流連続の法則) . 6, 38, 46,  
 118, 162  
 current density (電流密度) ..... 77  
 current element (電流素片) ..... 31, 32  
 current model (電流モデル) ..... 34

## ■ D

d'Alembert principle of virtual displacement (ダラン  
 ベールの仮想変位の原理) ..... 191  
 De Broglie relation (ド・ブロイの関係) ..... 83  
 delta function (デルタ関数) ..... 18  
 derived unit (組み立て単位) ..... 183  
 dielectric material (誘電体) ..... 54  
 dielectric relaxation (誘電緩和) ..... 54, 118  
 differential form of Gauss law (ガウスの法則の微分形)  
 29  
 differential form of Ampere law (アンペールの法則の  
 微分形) ..... 38, 47  
 differential form of Faraday law (ファラデーの法則の  
 微分形) ..... 47  
 Dirac  $\delta$  function (ディラックのデルタ関数) ..... 18  
 displacement current (変位電流) ..... 6, 46  
 div (divergence) ..... 15  
 divergence (発散) ..... 14  
 divergence integral (発散積分) ..... 14  
 dynamic (動的) ..... 46

## ■ E

Einstein (アインシュタイン) ..... 134  
 Einstein convention (アインシュタイン規約) .. 137  
 electric charge (電荷) ..... 2  
 electric constant (電気定数) ..... 4, 28, 174  
 electric energy (電気エネルギー) ..... 92  
 electric field (電場) ..... 2

- electric field (電界) ..... 2  
 electric flux density (電束密度) ..... 56  
 electric moment (電気モーメント) ..... 55  
 electric susceptibility (電気感受率) ..... 57  
 electro-magnetic field (電磁場) ..... 2  
 electro-magnetic field (電磁界) ..... 2  
 electro-magnetism (電磁気学) ..... 2  
 electro-motive force (起電力) ..... 5  
 electro-static energy (静電エネルギー) ..... 92  
 electro-static potential (静電ポテンシャル) ..... 66  
 electromagnetic tensor (電磁テンソル) ..... 142  
 electromagnetic units (電磁単位系) ..... 174  
 electrostatic units (静電単位系) ..... 174  
 energy of electro-magnetic field (電磁場のエネルギー)  
 102  
 equi-potential surface (等ポテンシャル面) ..... 40  
 Euler differential equation (オイラーの微分方程式) .  
 193
- F  
 Faraday gauge (ファラデーゲージ) ..... 73  
 Faraday law (ファラデーの法則) ..... 5, 47, 85  
 Feynman (ファインマン) ..... 154  
 field (場) ..... 2, 8  
 flux quantum (磁束量子) ..... 162, 166  
 fluxoid (フラクソイド) ..... 165, 166  
 forward transform (順変換) ..... 136  
 four-vector (四元ベクトル) ..... 136  
 four-vector acceleration (四元加速度) ..... 139  
 four-vector current (四元電流) ..... 145  
 four-vector force (四元力) ..... 139  
 four-vector momentum (四元運動量) ..... 138  
 four-vector potential (四元ポテンシャル) ..... 145  
 four-vector velocity (四元速度) ..... 138  
 free charge (自由電荷) ..... 56  
 free current (自由電流) ..... 58  
 freezing of magnetic field (磁場凍結) ..... 54, 119
- G  
 gauge invariance (ゲージ不変性) ..... 73  
 gauge transformation (ゲージ変換) ..... 73  
 Gauss inner product theorem of vector field (ベクトル場のガウスの内積定理) ..... 15  
 Gauss law (ガウスの法則) ..... 28  
 Gauss outer product theorem (ガウスの外積定理) 21  
 Gauss outer product theorem of vector field (ベクトル場のガウスの外積定理) ..... 21  
 Gauss theorem (ガウスの定理) ..... 14, 15  
 Gauss theorem of scalar field (スカラー場のガウスの定理) ..... 14  
 Gauss units (ガウス単位系) ..... 170, 174  
 generalized coordinate (一般化座標) ..... 192  
 generalized force (一般化力) ..... 193  
 generalized momentum (一般化運動量) ..... 197  
 Giorgi (ジオルジ) ..... 175  
 grad (gradient) ..... 12  
 gradient (勾配) ..... 11, 26  
 gradient integral (勾配積分) ..... 12
- H  
 Hall effect (ホール効果) ..... 53  
 Heaviside (ヘビサイド) ..... 174  
 Heaviside units (ヘビサイド単位系) ..... 170, 175  
 Heaviside-Lorentz units (ヘビサイドローレンツ単位系)  
 170, 174  
 Helmholtz (ヘルムホルツ) ..... 174  
 Helmholtz theorem (ヘルムホルツの定理) ..... 68  
 Hertz (ヘルツ) ..... 174
- I  
 induced charge (誘導電荷) ..... 120  
 induced current (誘導電流) ..... 122  
 induced electromotive force (誘導起電力) .. 86, 147  
 inductor (インダクタ) ..... 61  
 inner product (内積) ..... 3  
 International Standard units, SI units (国際標準単位系) ..... 170, 175  
 irrational (非有理) ..... 174
- K  
 kinetic-inductance (力学インダクタンス) ..... 165  
 Kirchhoff current law (キルヒホフの電流則) 76, 166  
 Kirchhoff fluxoid law (キルヒホフのフラクソイド則)  
 166  
 Kirchhoff voltage law (キルヒホフの電圧則) 76, 166  
 Kronecker delta (クロネッカーデルタ) ..... 98
- L  
 Lagrange d'Alenbert principle of virtual displacement (ラグランジュ・ダランベールの仮想変位の原理) ..... 192  
 Lagrange equation of motion (ラグランジュの運動方程式) ..... 193  
 Lagrange method of undetermined multiplier (ラグランジュの未定係数法) ..... 194  
 Lagrangian (ラグランジアン) ..... 193  
 Liénard-Wiechert potential (リエナール・ウィーヘルトポテンシャル) ..... 147  
 light velocity (光速) ..... 75  
 line charge (線電荷) ..... 77  
 line current (線電流) ..... 77  
 line delta function (線状デルタ関数) ..... 19  
 line of electric force (電気力線) ..... 31  
 line of force (指力線) ..... 31  
 line of magnetic force (磁力線) ..... 40  
 linear response (線形応答) ..... 57  
 Lorentz (ローレンツ) ..... 135  
 Lorentz force (ローレンツ力) 3, 48, 89, 97, 176, 194  
 Lorentz transform (ローレンツ変換) ..... 136  
 Lorenz condition (ローレンツ条件) ..... 74  
 Lorenz gauge (ローレンツゲージ) ..... 7, 74, 162  
 lowering (降階) ..... 140
- M  
 magnet (磁石) ..... 2  
 magnetic charge (磁荷) ..... 4, 31, 63  
 magnetic charge model (磁荷モデル) ..... 31  
 magnetic constant (磁気定数) ..... 4, 34, 174  
 magnetic current (磁流) ..... 63

|  |          |
|--|----------|
| magnetic energy (磁気エネルギー) .....                    | 95       |
| magnetic field (磁場) .....                          | 2        |
| magnetic field (磁界) .....                          | 2        |
| magnetic flux density (磁束密度) .....                 | 3, 32    |
| magnetic materials (磁性体) .....                     | 58       |
| magnetic moment (磁気モーメント) .....                    | 43, 58   |
| magnetic penetration depth (磁気侵入長) .....           | 163      |
| magnetic polarization (磁気分極) .....                 | 184      |
| magnetic pole (磁極) .....                           | 2, 31    |
| magnetic susceptibility (磁気感受率) .....              | 60       |
| magnetic-inductance (磁気インダクタンス) .....              | 164      |
| magnetization (磁化) .....                           | 58, 183  |
| magnetization current (磁化電流) .....                 | 58       |
| magnetization tensor (磁化テンソル) .....                | 148      |
| magnetization vector (磁化ベクトル) .....                | 59       |
| Maxwell (マクスウェル) .....                             | 6, 174   |
| Maxwell equations (マクスウェル方程式) .....                | 6, 47    |
| Maxwell stress tensor (マクスウェル応力テンソル) .....         | 98       |
| metric tensor (計量テンソル) .....                       | 140      |
| micro current loop (微小電流ループ) .....                 | 31, 81   |
| mixed tensor (混合テンソル) .....                        | 141      |
| MKS units (MKS 単位系) .....                          | 175      |
| MKSA units (MKSA 単位系) .....                        | 170, 175 |
| MKSA 単位系 (MKSA units) .....                        | 170, 175 |
| MKS 単位系 (MKS units) .....                          | 175      |
| momentum of electro-magnetic field (電磁場の運動量) ..... | 98       |
| mutual-inductance (相互インダクタンス) .....                | 87, 164  |
| <b>■ N</b>   |          |
| nabla ( $\nabla$ ) .....                           | 12       |
| natural units (自然単位系) .....                        | 182      |
| <b>■ O</b>   |          |
| outer product (外積) .....                           | 3        |
| <b>■ P</b>   |          |
| permeability (透磁率) .....                           | 60       |
| permittivity (誘電率) .....                           | 57       |
| perpendicular surface to force (力垂直面) .....        | 40       |
| point charge (点電荷) .....                           | 77       |
| point delta function (点状デルタ関数) .....               | 19       |
| Poisson equation (ポアソンの式) .....                    | 67       |
| Poisson theorem (ポアソンの定理) .....                    | 68       |
| polarization (分極) .....                            | 55       |
| polarization charge (分極電荷) .....                   | 55       |
| polarization current (分極電流) .....                  | 59       |
| polarization vector (分極ベクトル) .....                 | 55       |
| potential (ポテンシャル) .....                           | 6, 25    |
| Poynting vector (ポインティングベクトル) .....                | 102      |
| principle of minimum action (最小作用の原理) .....        | 91, 196  |
| principle of superposition (重ね合わせの原理) .....        | 3        |
| Pugh-Pugh (パフ・パフ) .....                            | 156      |
| <b>■ Q</b>   |          |
| quantity equation (量方程式) .....                     | 171      |
| quasi particle (準粒子) .....                         | 161      |
| quasi-static (準静的) .....                           | 119      |

**■ R**

|                                      |       |
|--------------------------------------|-------|
| raising (昇階) .....                   | 140   |
| rational (有理) .....                  | 174   |
| rationalizing constant (有理化定数) ..... | 174   |
| retarded potential (遅延ポテンシャル) .....  | 107   |
| reverse transform (逆変換) .....        | 136   |
| Riemann integral (リーマン積分) .....      | 9     |
| right screw relation (右ネジの関係) .....  | 4, 33 |
| rot (rotation) .....                 | 20    |
| rotation (回転) .....                  | 19    |
| rotation integral (回転積分) .....       | 20    |

**■ S**

|   |           |
|---|-----------|
| scalar field (スカラー場) .....  | 8         |
| scalar potential (スカラーポテンシャル) .....                                   | 6, 66     |
| scalar product (スカラー積) .....  | 3         |
| self-inductance (自己インダクタンス) .....                                     | 87, 164   |
| SI units .....  | 170       |
| solenoid (ソレノイド) .....  | 4, 33, 80 |
| static (静的) .....   | 46        |
| stationary (停留) .....   | 191       |
| Stokes inner product theorem of vector field (ベクトル場のストークスの内積定理) ..... | 25        |
| Stokes outer product theorem (ストークスの外積定理) .....                       | 27        |
| Stokes outer product theorem of vector field (ベクトル場のストークスの外積定理) ..... | 27        |
| Stokes theorem (ストークスの定理) .....                                       | 24, 25    |
| Stokes theorem of scalar field (スカラー場のストークスの定理) .....                 | 24        |
| strength of magnetic field (磁場強度) .....                               | 32, 60    |
| sub-electromagnetic tensor (副電磁テンソル) ..                               | 149       |
| superconductor (超伝導体) .....   | 161       |
| surface charge (面電荷) .....  | 77        |
| surface current (面電流) .....   | 77        |
| surface delta function (面状デルタ関数) .....                                | 19        |
| surface integral (面積分) .....  | 8         |
| symmetrical (対称) .....  | 174       |
| symmetrizing constant (対称化定数) .....                                   | 174       |

**■ T**

|  |     |
|--|-----|
| TEM 波 (transverse electric magnetic wave) .. | 128 |
| tensor (テンソル) .....                          | 141 |
| testing charge (検電荷) .....                   | 2   |
| TE 波 (transverse electric wave) .....        | 128 |
| TM 波 (transverse magnetic wave) .....        | 128 |
| transform coefficient (変換係数) .....           | 137 |
| transformer (変成器) .....                      | 86  |
| transverse electric magnetic wave (TEM 波) .. | 128 |
| transverse electric wave (TE 波) .....        | 128 |
| transverse magnetic wave (TM 波) .....        | 128 |
| Trouton-Noble (トロートン・ノーブル) .....             | 156 |

**■ V**

|                                     |       |
|-------------------------------------|-------|
| value equation (数値方程式) .....        | 171   |
| vector field (ベクトル場) .....          | 8     |
| vector potential (ベクトルポテンシャル) ..... | 6, 77 |
| vector product (ベクトル積) .....        | 3     |
| vortex filament (渦糸) .....          | 39    |

## ■ W

wave equation (波動方程式) ..... 75  
 wave equation of potentials (ポテンシャルの波動方程式) ..... 75, 105, 145, 162  
 wave guide (導波管) ..... 127  
 Weber (ウェーバー) ..... 174

## ■ あ

アインシュタイン (Einstein) ..... 134  
 アインシュタイン規約 (Einstein convention) ... 137  
 アルキメデスの法則 (Archimedes law) ..... 11  
 アンペールの線積分法則 (Ampere line integral law) ..... 39  
 アンペールの法則 (Ampere law) ..... 26, 40  
 アンペールの法則の微分形 (differential form of Ampere law) ..... 38, 47  
 アンペールの面積積分法則 (Ampere surface integral law) ..... 37, 46  
 アンペール力 (Ampere force) ..... 173  
 一般化運動量 (generalized momentum) ..... 197  
 一般化座標 (generalized coordinate) ..... 192  
 一般化力 (generalized force) ..... 193  
 インダクタ (inductor) ..... 61  
 インダクタンス (inductance) ..... 62, 163  
 ウェーバー (Weber) ..... 174  
 渦糸 (vortex filament) ..... 39  
 オイラーの微分方程式 (Euler differential equation) ..... 193

## ■ か

外積 (outer product) ..... 3  
 回転 (rotation) ..... 19  
 回転積分 (rotation integral) ..... 20  
 ガウス単位系 (Gauss units) ..... 170, 174  
 ガウスの外積定理 (Gauss outer product theorem) 21  
 ガウスの定理 (Gauss theorem) ..... 14, 15  
 ガウスの法則 (Gauss law) ..... 28  
 ガウスの法則の微分形 (differential form of Gauss law) 29  
 重ね合わせの原理 (principle of superposition) .... 3  
 完全反対称テンソル (antisymmetric tensor) .... 143  
 起電力 (electro-motive force) ..... 5  
 基本単位 (base unit) ..... 177  
 逆変換 (reverse transform) ..... 136  
 キャパシタ (capacitor) ..... 58  
 キャパシタンス (capacitance) ..... 58  
 境界条件 (boundary condition) ..... 119  
 共変テンソル (covariant tensor) ..... 141  
 共変ベクトル (covariant vector) ..... 139  
 キルヒホフの電圧則 (Kirchhoff voltage law) 76, 166  
 キルヒホフの電流則 (Kirchhoff current law) 76, 166  
 キルヒホフのフラクソイド則 (Kirchhoff fluxoid law) 166  
 クーパー対 (Cooper pair) ..... 161  
 クーロン型ポテンシャル (Coulomb type potential) . 67, 77  
 クーロンゲージ (Coulomb gauge) ..... 73  
 クーロンの法則 (Coulomb law) .. 4, 13, 28, 31, 172  
 クーロン場 (Coulomb field) ..... 13, 21  
 クーロンポテンシャル (Coulomb potential) ..... 67

組み立て単位 (derived unit) ..... 183  
 クロネッカーデルタ (Kronecker delta) ..... 98  
 計量テンソル (metric tensor) ..... 140  
 ゲージ (gauge) ..... 73  
 ゲージ不変性 (gauge invariance) ..... 73  
 ゲージ変換 (gauge transformation) ..... 73  
 検電荷 (testing charge) ..... 2  
 降階 (lowering) ..... 140  
 光速 (light velocity) ..... 75  
 勾配 (gradient) ..... 11, 26  
 勾配積分 (gradient integral) ..... 12  
 国際標準単位系 (International Standard units, SI units) ..... 170, 175  
 混合テンソル (mixed tensor) ..... 141  
 コンデンサ (condensator) ..... 58

## ■ さ

最小作用の原理 (principle of minimum action) . 91, 196  
 鎖交 (cross-link) ..... 40  
 作用 (action) ..... 91, 196  
 作用反作用の法則 (action-reaction law) ..... 99  
 ジオルジ (Giorgi) ..... 175  
 磁化 (magnetization) ..... 58, 183  
 磁荷 (magnetic charge) ..... 4, 31, 63  
 磁界 (magnetic field) ..... 2  
 磁化テンソル (magnetization tensor) ..... 148  
 磁化電流 (magnetization current) ..... 58  
 磁荷のクーロンの法則 (Coulomb law of magnetic charge) ..... 4  
 磁化ベクトル (magnetization vector) ..... 59  
 磁荷モデル (magnetic charge model) ..... 31  
 磁気インダクタンス (magnetic-inductance) .... 164  
 磁気エネルギー (magnetic energy) ..... 95  
 磁気感受率 (magnetic susceptibility) ..... 60  
 磁気侵入長 (magnetic penetration depth) .... 163  
 磁気定数 (magnetic constant) ..... 4, 34, 174  
 磁気分極 (magnetic polarization) ..... 184  
 磁気モーメント (magnetic moment) ..... 43, 58  
 磁極 (magnetic pole) ..... 2, 31  
 自己インダクタンス (self-inductance) ..... 87, 164  
 磁石 (magnet) ..... 2  
 磁性体 (magnetic materials) ..... 58  
 自然単位系 (natural units) ..... 182  
 磁束密度 (magnetic flux density) ..... 3, 32  
 磁束量子 (flux quantum) ..... 162, 166  
 磁場 (magnetic field) ..... 2  
 磁場強度 (strength of magnetic field) ..... 32, 60  
 磁場凍結 (freezing of magnetic field) ..... 54, 119  
 自由電荷 (free charge) ..... 56  
 自由電流 (free current) ..... 58  
 準静的 (quasi-static) ..... 119  
 順変換 (forward transform) ..... 136  
 準粒子 (quasi particle) ..... 161  
 昇階 (raising) ..... 140  
 磁流 (magnetic current) ..... 63  
 指力線 (line of force) ..... 31  
 磁力線 (line of magnetic force) ..... 40  
 数値方程式 (value equation) ..... 171  
 スカラー積 (scalar product) ..... 3



|   |            |   |           |
|---|------------|---|-----------|
| スカラー場 (scalar field) .....  | 8          | 電流素片 (current element) .....  | 31, 32    |
| スカラー場のガウスの定理 (Gauss theorem of scalar field) .....                  | 14         | 電流密度 (current density) .....  | 77        |
| スカラー場のストークスの定理 (Stokes theorem of scalar field) .....               | 24         | 電流モデル (current model) .....   | 34        |
| スカラーポテンシャル (scalar potential) .....                                 | 6, 66      | 電流連続の法則 (current continuity law) . . . 6, 38, 46, 118, 162            |           |
| ストークスの外積定理 (Stokes outer product theorem) .....                     | 27         | ド・ブロイの関係 (De Broglie relation) .....                                  | 83        |
| ストークスの定理 (Stokes theorem) .....                                     | 24, 25     | 透磁率 (permeability) .....  | 60        |
| 静的 (static) .....   | 46         | 導体 (conductor) .....  | 53        |
| 静電エネルギー (electro-static energy) .....                               | 92         | 動的 (dynamic) .....  | 46        |
| 静電単位系 (electrostatic units) .....                                   | 174        | 導電率 (conductivity) .....  | 53        |
| 静電ポテンシャル (electro-static potential) .....                           | 66         | 導波管 (wave guide) .....  | 127       |
| 線形応答 (linear response) .....  | 57         | 等ポテンシャル面 (equi-potential surface) .....                               | 40        |
| 線状デルタ関数 (line delta function) .....                                 | 19         | トロトン・ノーブル (Trouton-Noble) .....                                       | 156       |
| 全電荷 (all charge) .....  | 56         | ■ な   |           |
| 線電荷 (line charge) .....   | 77         | 内積 (inner product) .....  | 3         |
| 全電流 (all current) .....   | 59         | ナブラ ( $\nabla$ ) .....  | 12        |
| 線電流 (line current) .....  | 77         | ■ は   |           |
| 相互インダクタンス (mutual-inductance) . . . 87, 164                         |            | 場 (field) .....   | 2, 8      |
| 束縛 (constraint) .....   | 190        | 発散 (divergence) .....   | 14        |
| 束縛電荷 (bounded charge) .....   | 56         | 発散積分 (divergence integral) .....                                      | 14        |
| 束縛電流 (bounded current) .....  | 60         | 波動方程式 (wave equation) .....   | 75        |
| 束縛力 (constraining force) .....                                      | 190        | パフ・パフ (Pugh-Pugh) .....   | 156       |
| ソレノイド (solenoid) .....  | 4, 33, 80  | 反変逆変換係数 (contravariant reverse transform coefficient) .....           | 137       |
| ■ た   |            | 反変順変換係数 (contravariant forward transform coefficient) .....           | 137       |
| 対称 (symmetrical) .....  | 174        | 反変テンソル (contravariant tensor) .....                                   | 141       |
| 対称化定数 (symmetrizing constant) .....                                 | 174        | 反変ベクトル (contravariant vector) .....                                   | 137       |
| ドランベールの仮想変位の原理 (d'Alenbert principle of virtual displacement) ..... | 191        | ビオ・サバールの法則 (Biot-Savart law) . . . 5, 32, 41, 172                     |           |
| 遅延ポテンシャル (retarded potential) .....                                 | 107        | 微小電流ループ (micro current loop) .....                                    | 31, 81    |
| 力垂直面 (perpendicular surface to force) .....                         | 40         | 非対称 (asymmetrical) .....  | 174       |
| 超伝導体 (superconductor) .....   | 161        | 非有理 (irrational) .....  | 174       |
| ディラックのデルタ関数 (Dirac $\delta$ function) .....                         | 18         | ファインマン (Feynman) .....  | 154       |
| 停留 (stationary) .....   | 191        | ファラデーゲージ (Faraday gauge) .....  | 73        |
| デルタ関数 (delta function) .....  | 18         | ファラデーの法則 (Faraday law) .....  | 5, 47, 85 |
| 電荷 (electric charge) .....  | 2          | ファラデーの法則の微分形 (differential form of Faraday law) .....                 | 47        |
| 電界 (electric field) .....   | 2          | 副電磁テンソル (sub-electromagnetic tensor) . . . 149                        |           |
| 電荷密度 (charge density) .....   | 28         | フラクソイド (fluxoid) .....  | 165, 166  |
| 電気エネルギー (electric energy) .....                                     | 92         | 分極 (polarization) .....   | 55        |
| 電気感受率 (electric susceptibility) .....                               | 57         | 分極電荷 (polarization charge) .....                                      | 55        |
| 電気定数 (electric constant) .....                                      | 4, 28, 174 | 分極電流 (polarization current) .....                                     | 59        |
| 電気モーメント (electric moment) .....                                     | 55         | 分極ベクトル (polarization vector) .....                                    | 55        |
| 電気力線 (line of electric force) .....                                 | 31         | ベクトル積 (vector product) .....  | 3         |
| 電磁界 (electro-magnetic field) .....                                  | 2          | ベクトル場 (vector field) .....  | 8         |
| 電磁気学 (electro-magnetism) .....                                      | 2          | ベクトル場のストークスの外積定理 (Stokes outer product theorem of vector field) ..... | 27        |
| 電磁単位系 (electromagnetic units) .....                                 | 174        | ベクトル場のガウスの外積定理 (Gauss outer product theorem of vector field) .....    | 21        |
| 電磁テンソル (electromagnetic tensor) .....                               | 142        | ベクトル場のガウスの内積定理 (Gauss inner product theorem of vector field) .....    | 15        |
| 電磁場 (electro-magnetic field) .....                                  | 2          | ベクトル場のストークスの内積定理 (Stokes inner product theorem of vector field) ..... | 25        |
| 電磁場の運動量 (momentum of electro-magnetic field) .....                  | 98         | ベクトルポテンシャル (vector potential) .....                                   | 6, 77     |
| 電磁場のエネルギー (energy of electro-magnetic field) .....                  | 102        | ヘビサイド (Heaviside) .....   | 174       |
| 点状デルタ関数 (point delta function) .....                                | 19         | ヘビサイド単位系 (Heaviside units) .....                                      | 170, 175  |
| 電束密度 (electric flux density) .....                                  | 56         |   |           |
| テンソル (tensor) .....   | 141        |   |           |
| 点電荷 (point charge) .....  | 77         |   |           |
| 電場 (electric field) .....   | 2          |   |           |
| 電流 (current) .....  | 2          |   |           |

- ヘビサイドローレンツ単位系 (Heaviside-Lorentz units) 170, 174
- ヘルツ (Hertz) 174
- ヘルムホルツ (Helmholtz) 174
- ヘルムホルツの定理 (Helmholtz theorem) 68
- 変位電流 (displacement current) 6, 46
- 変換係数 (transform coefficient) 137
- 変成器 (transformer) 86
- ポアソンの式 (Poisson equation) 67
- ポアソンの定理 (Poisson theorem) 68
- ポインティングベクトル (Poynting vector) 102
- 棒磁石 (bar magnet) 4, 33
- ボーズ凝集 (Bose condensation) 161
- ボーズ粒子 (boson) 161
- ホール効果 (Hall effect) 53
- 保存場 (conservative field) 25
- 保存力 (conservative force) 25
- ポテンシャル (potential) 6, 25
- ポテンシャルの波動方程式 (wave equation of potentials) 75, 105, 145, 162
- ま
- マクスウェル (Maxwell) 6, 174
- マクスウェル応力テンソル (Maxwell stress tensor) 98
- マクスウェル方程式 (Maxwell equations) 6, 47
- 右ネジの関係 (right screw relation) 4, 33
- 面状デルタ関数 (surface delta function) 19
- 面積分 (surface integral) 8
- 面電荷 (surface charge) 77
- 面電流 (surface current) 77
- や
- 誘電緩和 (dielectric relaxation) 54, 118
- 誘電体 (dielectric material) 54
- 誘電率 (permittivity) 57
- 誘導起電力 (induced electromotive force) 86, 147
- 誘導電荷 (induced charge) 120
- 誘導電流 (induced current) 122
- 有理 (rational) 174
- 有理化定数 (rationalizing constant) 174
- 四元運動量 (four-vector momentum) 138
- 四元加速度 (four-vector acceleration) 139
- 四元速度 (four-vector velocity) 138
- 四元電流 (four-vector current) 145
- 四元ベクトル (four-vector) 136
- 四元ポテンシャル (four-vector potential) 145
- 四元力 (four-vector force) 139
- ら
- ラグランジアン (Lagrangian) 193
- ラグランジュ・ダランベールの仮想変位の原理 (Lagrange d'Alenbert principle of virtual displacement) 192
- ラグランジュの運動方程式 (Lagrange equation of motion) 193
- ラグランジュの未定係数法 (Lagrange method of undetermined multiplier) 194
- リーマン積分 (Riemann integral) 9
- リエナール・ウィーヘルトポテンシャル (Lienard-Wiechert potential) 147
- 力学インダクタンス (kinetic-inductance) 165
- 量方程式 (quantity equation) 171
- ローレンツ (Lorentz) 135
- ローレンツゲージ (Lorenz gauge) 7, 74, 162
- ローレンツ条件 (Lorenz condition) 74
- ローレンツ変換 (Lorentz transform) 136
- ローレンツ力 (Lorentz force) 3, 48, 89, 97, 176, 194