7章　場合の数と数列

§2　数列 (p.210〜p.220)

問1

（1）$a_1 = 3 \cdot 1 - 1 = 2$

$a_2 = 3 \cdot 2 - 1 = 5$

$a_3 = 3 \cdot 3 - 1 = 8$

$a_4 = 3 \cdot 4 - 1 = 11$

$a_5 = 3 \cdot 5 - 1 = 14$

よって，**2，5，8，11，14**

（2）$b_1 = \left(-\dfrac{1}{2}\right)^1 = -\dfrac{1}{2}$

$b_2 = \left(-\dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{4}$

$b_3 = \left(-\dfrac{1}{2}\right)^3 = -\dfrac{1}{8}$

$b_4 = \left(-\dfrac{1}{2}\right)^4 = \dfrac{1}{16}$

$b_5 = \left(-\dfrac{1}{2}\right)^5 = -\dfrac{1}{32}$

よって，$\boldsymbol{-\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{4},\ -\dfrac{1}{8},\ \dfrac{1}{16},\ -\dfrac{1}{32}}$

（3）$c_1 = \dfrac{1}{1(1+1)} = \dfrac{1}{2}$

$c_2 = \dfrac{1}{2(2+1)} = \dfrac{1}{6}$

$c_3 = \dfrac{1}{3(3+1)} = \dfrac{1}{12}$

$c_4 = \dfrac{1}{4(4+1)} = \dfrac{1}{20}$

$c_5 = \dfrac{1}{5(5+1)} = \dfrac{1}{30}$

よって，$\boldsymbol{\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{6},\ \dfrac{1}{12},\ \dfrac{1}{20},\ \dfrac{1}{30}}$

問2

（1）$a_1 = (-1)^{1-1} = (-1)^0 = 1$

$a_2 = (-1)^{2-1} = (-1)^1 = -1$

$a_3 = (-1)^{3-1} = (-1)^2 = 1$

$a_4 = (-1)^{4-1} = (-1)^3 = -1$

$a_5 = (-1)^{5-1} = (-1)^4 = 1$

$a_6 = (-1)^{6-1} = (-1)^5 = -1$

よって，**1，−1，1，−1，1，−1**

（2）$b_1 = \dfrac{a_1+1}{2} = \dfrac{1+1}{2} = 1$

$b_2 = \dfrac{a_2+1}{2} = \dfrac{-1+1}{2} = 0$

$b_3 = \dfrac{a_3+1}{2} = \dfrac{1+1}{2} = 1$

$b_4 = \dfrac{a_4+1}{2} = \dfrac{-1+1}{2} = 0$

$b_5 = \dfrac{a_5+1}{2} = \dfrac{1+1}{2} = 1$

$b_6 = \dfrac{a_6+1}{2} = \dfrac{-1+1}{2} = 0$

よって，**1，0，1，0，1，0**

問3

（1）公差を d とすると，

$10 = 2 + 2d$ であるから，$d = 4$

したがって，2 の次の項は，

$2 + 4 = 6$

10 の次の 2 項は，

$10 + 4 = 14,\quad 14 + 4 = 18$

よって，2，$\boxed{\mathbf{6}}$，10，$\boxed{\mathbf{14}}$，$\boxed{\mathbf{18}}$

（2）公差を d とすると，

$4 = -5 + 3d$ であるから，$d = 3$

したがって，−5 の前の項は，

$-5 - 3 = -8$

−5 の次の 2 項は，

$-5 + 3 = -2,\quad -2 + 3 = 1$

よって，$\boxed{\mathbf{-8}}$，−5，$\boxed{\mathbf{-2}}$，$\boxed{\mathbf{1}}$，4

問4

（1）一般項を a_n とすると，

$$a_n = 32 + (n-1)\cdot(-3) = \boldsymbol{-3n + 35}$$

（2）$a_{10} = -3 \cdot 10 + 35 = \mathbf{5}$

（3）第 n 項が −22 であるとすると，

$a_n = -3n + 35 = -22$

$-3n = -57$

$n = 19$

よって，**第 19 項**

（4）第 n 項ではじめて負の数になるとすると，

$a_n = -3n + 35 < 0$

$-3n < -35$

$n > \dfrac{35}{3} = 11\dfrac{2}{3}$

よって，**第 12 項**

問 5

（1）初項が -2 で，公差が 3 であるから，項数を n とすると，

$$-2+(n-1)3=34$$
$$3n-5=34$$
$$n=13$$

よって，求める和は，

$$\frac{13(-2+34)}{2}=\frac{13\cdot 32}{2}=13\cdot 16=\mathbf{208}$$

（2）初項が 1 で、$2n-1$ は第 n 項であるから，求める和は，

$$\frac{n\{1+(2n-1)\}}{2}=\frac{n(2n)}{2}=\boldsymbol{n^2}$$

問 6

第 n 項までの和は，

$$\frac{n\{2\cdot 5+(n-1)3\}}{2}=\frac{3n^2+7n}{2}$$

よって，$\dfrac{3n^2+7n}{2}=55$

これを解くと，

$$3n^2+7n=110$$
$$3n^2+7n-110=0$$
$$(3x+22)(x-5)=0$$
$$n=-\frac{22}{3},\ 5$$

n は自然数で，$n>0$ なので、$n=5$

したがって，**第 5 項**

問 7

（1）公比を r とすると，

$-40=5r^3$ であるから，$r=-2$

したがって，5 の次の 2 項は，

$$5\times(-2)=-10,\quad -10\times(-2)=20$$

-40 の次の項は，

$$-40\times(-2)=80$$

よって，5, $\boxed{\mathbf{-10}}$, $\boxed{\mathbf{20}}$, -40, $\boxed{\mathbf{80}}$

（2）公比を r とすると，

$18=162r^2$ であるから，$r=\pm\dfrac{1}{3}$

したがって，162 の前の項は，

$$162\div\left(\pm\frac{1}{3}\right)=\pm 486$$

162 の次の項は，

$$162\times\left(\pm\frac{1}{3}\right)=\pm 54$$

18 の次の項は，

$$18\times\left(\pm\frac{1}{3}\right)=\pm 6$$

よって，$\boxed{\mathbf{\pm 486}}$, 162, $\boxed{\mathbf{\pm 54}}$, 18, $\boxed{\mathbf{\pm 6}}$

（複合同順）

問 8

公比を r とすると，

$a_4=-8r^{4-1}=-1$ であるから，$r=\dfrac{1}{2}$

よって，第 10 項は，

$$a_{10}=-8\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{10-1}=-2^3\cdot\left(\frac{1}{2^9}\right)=-\frac{1}{2^6}=\boldsymbol{-\frac{1}{64}}$$

問 9

（1）　初項 1，公比 2 で，2^7 は第 8 項であるから，求める和は，

$$\frac{1(2^8-1)}{2-1}=256-1=\mathbf{255}$$

（2）　初項 1，公比 $-\dfrac{1}{2}$ で，$-\dfrac{1}{2^9}$ は第 10 項であるから，求める和は，

$$\frac{1\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{10}\right\}}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}=\frac{1-\frac{1}{1024}}{\frac{3}{2}}=\frac{1023}{1024}\times\frac{2}{3}=\mathbf{\frac{341}{512}}$$

（3）　初項 $\sqrt{3}$，公比 $-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ であるから，求める和は，

$$\frac{\sqrt{3}\left\{1-\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{10}\right\}}{1-\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)}=\frac{\sqrt{3}\left(1-\frac{1}{3^5}\right)}{1+\frac{1}{\sqrt{3}}}=\frac{3(3^5-1)}{3^5(\sqrt{3}+1)}=\frac{242(\sqrt{3}-1)}{81(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}=\frac{242(\sqrt{3}-1)}{81\cdot 2}=\boldsymbol{\frac{121(\sqrt{3}-1)}{81}}$$

（4）　初項 2，公比 3 であるから，項数を n とすると，

$2\cdot 3^{n-1}=486$

$3^{n-1}=243=3^5$ より，$n=6$

よって，求める和は，

$\dfrac{2(3^6-1)}{3-1}=\dfrac{2(729-1)}{2}$

$=\mathbf{728}$

問 10

初項を a，公差を r とすると，初項から第 3 項までの和が 6 であるから，

$\dfrac{a(r^3-1)}{r-1}=6\cdots$①

初項から第 6 項までの和が -42 であるから，

$\dfrac{a(r^6-1)}{r-1}=-42\cdots$②

①，②より，

$$\frac{\dfrac{a(r^6-1)}{r-1}}{\dfrac{a(r^3-1)}{r-1}}=\frac{-42}{6}$$

よって，$\dfrac{r^6-1}{r^3-1}=-7$

これを解くと，

$$r^6-1=-7(r^3-1)$$

$$r^6+7r^3-8=0$$

$$(r^3+8)(r^3-1)=0$$

$$r^3=-8,\ 1$$

$r\fallingdotseq 1$ なので，$r^3\fallingdotseq 1$

よって，$r^3=-8$ であるから，$r=-2$

これを，①に代入して，

$\dfrac{a(-8-1)}{-2-1}=6$

$-9a=-18$ より，$a=2$

したがって，初項　**2**，　公差　$\mathbf{-2}$

問 11

（1）与式 $=\mathbf{1^2+2^2+3^2+4^2+5^2}$

$=1+4+9+16+25=\mathbf{55}$

（2）与式 $=(2\cdot1-1)+(2\cdot2-1)$

$+(2\cdot3-1)+(2\cdot4-1)+\cdots$

$\cdots+(2\cdot9-1)+(2\cdot10-1)$

$=\mathbf{1+3+5+7+\cdots+17+19}$

$=\dfrac{10(2\cdot1+9\cdot2)}{2}$

$=\mathbf{100}$

（3）与式 $=3\cdot2^{1-1}+3\cdot2^{2-1}+3\cdot2^{3-1}$

$+\cdots+3\cdot2^{n-1}$

$=\mathbf{3+6+12+\cdots3\cdot2^{n-1}}$

$=3(1+2+4+\cdots2^{n-1})$

$=3(2^0+2^1+2^2+\cdots2^{n-1})$

$=3\left\{\dfrac{1(2^n-1)}{2-1}\right\}$

$=\mathbf{3(2^n-1)}$

問 12

（1）初項 101，公差 1 の等差数列の第 k 項は，

$101+(k-1)1=k+100$

また，項数を n とすると，$n+100=200$ より，$n=100$ であるから，

与式 $=\displaystyle\sum_{k=1}^{100}\boldsymbol{(k+100)}$

（2）初項 1，公比 $-\dfrac{1}{3}$ の等比数列の第 k 項は，

$1\cdot\left(-\dfrac{1}{3}\right)^{k-1}=\left(-\dfrac{1}{3}\right)^{k-1}$

また，項数を n とすると，

$\left(-\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}=-\dfrac{1}{2187}=\left(-\dfrac{1}{3}\right)^{7}$ より，$n=8$ であるから，

与式 $=\displaystyle\sum_{k=1}^{8}\boldsymbol{\left(-\frac{1}{3}\right)^{k-1}}$

問 13

（1）与式 $=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k^2+k)$

$=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^2+\sum_{k=1}^{n}k$

$=\dfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+\dfrac{1}{2}n(n+1)$

$=\dfrac{1}{6}n(n+1)\{(2n+1)+3\}$

$=\dfrac{1}{6}n(n+1)(2n+4)$

$=\boldsymbol{\dfrac{1}{3}n(n+1)(n+2)}$

（2）この数列の第 k 項は，$k(k+2)$ であるから，

$$\begin{aligned}
\text{与式} &= \sum_{k=1}^{n} k(k+2) \\
&= \sum_{k=1}^{n} (k^2+2k) \\
&= \sum_{k=1}^{n} k^2 + 2\sum_{k=1}^{n} k \\
&= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) + \frac{2}{2}n(n+1) \\
&= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) + n(n+1) \\
&= \frac{1}{6}n(n+1)\{(2n+1)+6\} \\
&= \boldsymbol{\frac{1}{6}n(n+1)(2n+7)}
\end{aligned}$$

（3）この数列の第 k 項は，$(2k-1)^2$ であるから，

$$\begin{aligned}
\text{与式} &= \sum_{k=1}^{n} (2k-1)^2 \\
&= \sum_{k=1}^{n} (4k^2-4k+1) \\
&= 4\sum_{k=1}^{n} k^2 - 4\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1 \\
&= \frac{4}{6}n(n+1)(2n+1) - \frac{4}{2}n(n+1) + n \\
&= \frac{1}{3}n\{2(n+1)(2n+1) - 6(n+1) + 3\} \\
&= \frac{1}{3}n(4n^2+6n+2-6n-6+3) \\
&= \frac{1}{3}n(4n^2-1) \\
&= \boldsymbol{\frac{1}{3}n(2n+1)(2n-1)}
\end{aligned}$$

問 14

（1）$\boldsymbol{a_1 = 1,\ \ a_{k+1} = 2a_k + 3} \quad (k = 1, 2, 3, \cdots)$

（2）$\boldsymbol{a_1 = 0,\ \ a_{k+1} = (a_k + 1)^2} \quad (k = 1, 2, 3, \cdots)$

問 15

（1）$a_1 = 1$

$a_2 = {a_1}^2 + 2 = 1^2 + 2 = 3$

$a_3 = {a_2}^2 + 2 = 3^2 + 2 = 11$

$a_4 = {a_3}^2 + 2 = 11^2 + 2 = 123$

よって，**1，3，11，123**

（2）$b_1 = 3$

$b_2 = b_1 + 3 \cdot 1 = 3 + 3 = 6$

$b_3 = b_2 + 3 \cdot 2 = 6 + 6 = 12$

$b_4 = b_3 + 3 \cdot 3 = 12 + 9 = 21$

よって，**3，6，12，21**

問 16

（1）$a_2 = 3a_1 + 2 = 2 \cdot 3 + 2$

$$\begin{aligned}
a_3 &= 3a_2 + 2 \\
&= 3(2 \cdot 3 + 2) + 2 \\
&= 2 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3 + 2 \\
a_4 &= 3a_3 + 2 \\
&= 3(2 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3 + 2) + 2 \\
&= 2 \cdot 3^3 + 2 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3 + 2
\end{aligned}$$

よって，

$$\begin{aligned}
a_n &= 2 \cdot 3^{n-1} + 2 \cdot 3^{n-2} + \cdots 2 \cdot 3 + 2 \\
&= 2 + 2 \cdot 3 + \cdots + 2 \cdot 3^{n-2} + 2 \cdot 3^{n-1} \\
&= \frac{2(3^n - 1)}{3 - 1} \\
&= \frac{2(3^n - 1)}{2} \\
&= \boldsymbol{3^n - 1}
\end{aligned}$$

（2）$b_2 = b_1 + (2 \cdot 1 - 1)$

$$\begin{aligned}
&= 4 + (2 \cdot 1 - 1) \\
b_3 &= b_2 + (2 \cdot 2 - 1) \\
&= 4 + (2 \cdot 1 - 1) + (2 \cdot 2 - 1) \\
b_4 &= b_3 + (2 \cdot 3 - 1) \\
&= 4 + (2 \cdot 1 - 1) + (2 \cdot 2 - 1) + (2 \cdot 3 - 1)
\end{aligned}$$

よって，

$$\begin{aligned}
b_n = 4 &+ (2 \cdot 1 - 1) + (2 \cdot 2 - 1) \\
&+ (2 \cdot 3 - 1) + \cdots + \{2(n-1) - 1\}
\end{aligned}$$

ここで，

$$\begin{aligned}
&(2 \cdot 1 - 1) + (2 \cdot 2 - 1) + (2 \cdot 3 - 1) \\
&\quad + \cdots + \{2(n-1) - 1\} = \sum_{k=1}^{n-1} (2k-1)
\end{aligned}$$

と表すことができるので

$$\begin{aligned}
b_n &= 4 + \sum_{k=1}^{n-1} (2k-1) \\
&= 4 + 2\sum_{k=1}^{n-1} k - \sum_{k=1}^{n-1} 1 \\
&= 4 + 2 \cdot \frac{(n-1)n}{2} - (n-1) \\
&= 4 + n^2 - n - n + 1 \\
&= \boldsymbol{n^2 - 2n + 5}
\end{aligned}$$

問 17

$a_n = \dfrac{n+1}{n} \cdots$ ① とする．

[1] $n = 1$ のとき

$a_1 = \dfrac{1+1}{1} = 2$

よって，$n=1$ のとき，①は成り立つ．

［2］$n=k$ のとき，①が成り立つと仮定する．

$$a_k=\frac{k+1}{k}$$

$n=k+1$ のとき

漸化式より

$$\begin{aligned}a_{k+1}&=2-\frac{1}{a_k}\\&=2-\frac{1}{\frac{k+1}{k}}\\&=2-\frac{k}{k+1}\\&=\frac{2(k+1)}{k+1}-\frac{k}{k+1}\\&=\frac{2k+2-k}{k+1}\\&=\frac{k+2}{k+1}\\&=\frac{(k+1)+1}{k+1}\end{aligned}$$

よって，$n=k+1$ のときも①が成り立つ．

［1］，［2］から，すべての自然数 n について①が成り立つ．

■