1章　数と式の計算

練習問題 1-A

1. （1）与式 $= (3a^2+2ab-4b^2)$

$$+ (a^2-ab+3b^2)$$

$$+ (2a^2+3ab-b^2)$$

$$= \boldsymbol{6a^2+4ab-2b^2}$$

（2）与式 $= 3A-2B-5C$

$$= 3(3a^2+2ab-4b^2)$$

$$-2(a^2-ab+3b^2)$$

$$-5(2a^2+3ab-b^2)$$

$$= 9a^2+6ab-12b^2$$

$$-2a^2+2ab-6b^2$$

$$-10a^2-15ab+5b^2$$

$$= \boldsymbol{-3a^2-7ab-13b^2}$$

（3）与式 $= B(A-C)$

$$= (a^2-ab+3b^2)\times$$

$$\{(3a^2+2ab-4b^2)-(2a^2+3ab-b^2)\}$$

$$= (a^2-ab+3b^2)(a^2-ab-3b^2)$$

$$= (a^2-ab)^2-(3b^2)^2$$

$$= \boldsymbol{a^4-2a^3b+a^2b^2-9b^4}$$

2. （1）与式 $= \{(a+b)(a-b)\}^2$

$$= (a^2-b^2)^2$$

$$= (a^2)^2-2\cdot a^2\cdot b^2+(b^2)^2$$

$$= \boldsymbol{a^4-2a^2b^2+b^4}$$

（2）与式 $= 42x^2+48x-35x-40$

$$= \boldsymbol{42x^2+13x-40}$$

（3）与式 $= (3a+2b)^2-4(3a+2b)-5$

$$= \boldsymbol{9a^2+12ab+4b^2-12a-8b-5}$$

（4）与式 $= (a^3-b^3)(a^3+b^3)$

$$= \boldsymbol{a^6-b^6}$$

（5）与式 $= x^3+3x^2(-4y)$

$$+3x(-4y)^2+(-4y)^3$$

$$= \boldsymbol{x^3-12x^2y+48xy^2-64y^3}$$

（6）与式 $= 2x^3-5x^2y$

$$+6x^2y-15xy^2$$

$$-2xy^2+5y^3$$

$$= \boldsymbol{2x^3+x^2y-17xy^2+5y^3}$$

3. （1）与式 $= a(x+y)-b(x+y)$

$$= \boldsymbol{(a-b)(x+y)}$$

（2）与式 $= (a^2)^2-(b^2)^2$

$$= (a^2+b^2)(a^2-b^2)$$

$$= \boldsymbol{(a^2+b^2)(a+b)(a-b)}$$

（3）与式 $= \boldsymbol{(4a-3)(a+2)}$

（4）与式 $= (x^2)^2-8x^2-9$

$$= (x^2+1)(x^2-9)$$

$$= \boldsymbol{(x^2+1)(x+3)(x-3)}$$

（5）与式 $= x^2+(y+2)x-(2y^2-7y+3)$

$$= x^2+(y+2)x-(2y-1)(y-3)$$

$$= \{x+(2y-1)\}\{x-(y-3)\}$$

$$= \boldsymbol{(x+2y-1)(x-y+3)}$$

（6）与式 $= x^2+(4y-8)x+(3y^2-6y-9)$

$$= x^2+(4y-8)x+3(y+1)(y-3)$$

$$= \{x+3(y-3)\}\{x+(y+1)\}$$

$$= \boldsymbol{(x+3y-9)(x+y+1)}$$

4. （1）

$$
\begin{array}{r|rrrrr}
 & x^2 & -x & +2 & & \\ \hline
2x^2+3x+5 & 2x^4 & +x^3 & +6x^2 & +x & +10 \\
 & 2x^4 & +3x^3 & +5x^2 & & \\ \hline
 & & -2x^3 & +x^2 & +x & \\
 & & -2x^3 & -3x^2 & -5x & \\ \hline
 & & & 4x^2 & +6x & +10 \\
 & & & 4x^2 & +6x & +10 \\ \hline
 & & & & & 0
\end{array}
$$

商　$\boldsymbol{x^2-x-2}$, 余り　$\boldsymbol{0}$

等式

$$\boldsymbol{2x^4+x^3+6x^2+x+10}$$

$$\boldsymbol{=(2x^2+3x+5)(x^2-x-2)}$$

（2）

$$
\begin{array}{r|l}
 & \frac{1}{2}x^2 \ -\frac{1}{4}x \ +\frac{1}{8} \\ \hline
2x+1 & x^3 \qquad\qquad -1 \\
 & x^3 + \frac{1}{2}x^2 \\ \hline
 & -\frac{1}{2}x^2 \\
 & -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x \\ \hline
 & \frac{1}{4}x \ -1 \\
 & \frac{1}{4}x + \frac{1}{8} \\ \hline
 & -\frac{9}{8}
\end{array}
$$

商　$\boldsymbol{\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x + \frac{1}{8}}$，余り　$\boldsymbol{-\frac{9}{8}}$

等式

$\boldsymbol{x^3 - 1}$

$\boldsymbol{= (2x+1)\left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x + \frac{1}{8}\right) - \frac{9}{8}}$

5. （1）最大公約数　$\boldsymbol{ab}$

最小公倍数　$\boldsymbol{a^3b^3c^2}$

（2）$x^3 + 7x^2 + 12x = x(x+4)(x+3)$

$x^2 - x - 20 = (x+4)(x-5)$

よって

最大公約数　$\boldsymbol{x+4}$

最小公倍数　$\boldsymbol{x(x+4)(x+3)(x-5)}$

（3）$x^4 - 5x^2 + 4 = (x^2-1)(x^2-4)$

$= (x+1)(x-1)(x+2)(x-2)$

$x^2 + x - 2 = (x+2)(x-1)$

よって

最大公約数　$\boldsymbol{(x+2)(x-1)}$

最小公倍数

$\boldsymbol{(x+1)(x-1)(x+2)(x-2)}$

（4）$x^2 - 2x = x(x-2)$

$x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$

$x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2$

よって

最大公約数　$\boldsymbol{x-2}$

最小公倍数　$\boldsymbol{x(x-1)(x-2)^2}$

6. ある整式を A とすると，題意より

$A = (x^2-1)(x^4+x^2+1) + (x+1)$

$= x^6 + x^4 + x^2 - x^4 - x^2 - 1 + x + 1$

$= x^6 + x$

A を x^2+1 で割ると

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^4 \ - x^2 \ + 1 \\ \hline
x^2+1 & x^6 \qquad\qquad + x \\
 & x^6 + x^4 \\ \hline
 & -x^4 \\
 & -x^4 - x^2 \\ \hline
 & x^2 + x \\
 & x^2 \qquad + 1 \\ \hline
 & x - 1
\end{array}
$$

よって，商は，$\boldsymbol{x^4 - x^2 + 1}$，余りは，$\boldsymbol{x-1}$

7. 　ある整式を $P(x)$，$P(x)$ を $(x+1)(x-3)$ で割ったときの商を $Q(x)$ とすると，題意より

$P(x) = (x+1)(x-3)Q(x) + 3x + 1$

が成り立つ．

ここで，$P(x)$ を $x-3$ で割ったときの余りは $P(3)$ であるから

$P(3) = 3 \cdot 3 + 1$

$= \boldsymbol{10}$

練習問題 1-B

1. （1）$(a+3b) = A$ とおく．

与式 $= \{2(a+3b)-1\}\{3(a+3b)-2\}$

$= (2A-1)(3A-2)$

$= 6A^2 - 7A + 2$

$= 6(a+3b)^2 - 7(a+3b) + 2$

$= 6(a^2 + 6ab + 9b^2) - 7a - 21b + 2$

$\boldsymbol{= 6a^2 + 36ab + 54b^2 - 7a - 21b + 2}$

（2）$(x+y)=X$ とおくと

$$
\begin{aligned}
\text{与式} &= \{(x+y)-z\}^3 \\
&= (X-z)^3 \\
&= X^3-3X^2z+3Xz^2-z^3 \\
&= (x+y)^3-3(x+y)^2z \\
&\qquad +3(x+y)z^2-z^3 \\
&= (x^3+3x^2y+3xy^2+y^3) \\
&\qquad -3z(x^2+2xy+y^2) \\
&\qquad\quad +3xz^2+3yz^2-z^3 \\
&= \boldsymbol{x^3+y^3-z^3} \\
&\quad \boldsymbol{+3x^2y-3y^2z+3z^2x} \\
&\qquad \boldsymbol{+3xy^2+3yz^2-3zx^2-6xyz}
\end{aligned}
$$

（3）$(a+b)=A,\ (a-b)=B$ とおくと

$$
\begin{aligned}
\text{与式} &= (a+b+c)(a+b-c) \\
&\qquad \times(a-b-c)(a-b+c) \\
&= \{(a+b)+c\}\{(a+b)-c\} \\
&\qquad \times\{(a-b)-c\}\{(a-b)+c\} \\
&= (A+c)(A-c)(B-c)(B+c) \\
&= (A^2-c^2)(B^2-c^2) \\
&= A^2B^2-(A^2+B^2)c^2+c^4 \\
&= (AB)^2-(A^2+B^2)c^2+c^4 \\
&= \{(a+b)(a-b)\}^2 \\
&\quad -\{(a+b)^2+(a-b)^2\}c^2+c^4 \\
&= (a^2-b^2)^2-(2a^2+2b^2)c^2+c^4 \\
&= a^4+2a^2b^2+b^4-2a^2c^2+2b^2c^2+c^4 \\
&= \boldsymbol{a^4-2a^3b+a^2b^2-9b^4}
\end{aligned}
$$

（4）$(x^2+1)=X$ とおく.

$$
\begin{aligned}
\text{与式} &= (x+1)(x^2-x+1) \\
&\qquad \times(x^2+x+1)(x^2-x+1) \\
&= (x^3+1)\{(x^2+1)+x\}\{(x^2+1)-x\} \\
&= (x^3+1)(X+x)(X-x) \\
&= (x^3+1)(X^2-x^2) \\
&= (x^3+1)(x^4+2x^2+1-x^2) \\
&= (x^3+1)(x^4+x^2+1) \\
&= x^7+x^5+x^3+x^4+x^2+1 \\
&= \boldsymbol{x^7+x^5+x^4+x^3+x^2+1}
\end{aligned}
$$

2. （1）

$$
\begin{aligned}
\text{与式} &= x(3x^2-2xy-5y^2) \\
&= \boldsymbol{2(3x-5y)(x+y)}
\end{aligned}
$$

（2）

$$
\begin{aligned}
\text{与式} &= a^2+2ab+b^2-(c^2+2cd+d^2) \\
&= (a+b)^2-(c+d)^2 \\
&= \{(a+b)+(c+d)\}\{(a+b)-(c+d)\} \\
&= \boldsymbol{(a+b+c+d)(a+b-c-d)}
\end{aligned}
$$

（3）x について整理すると

$$
\begin{aligned}
\text{与式} &= (y^2-2yz+z^2)x+(y^2z-yz^2) \\
&= (y-z)^2x+yz(y-z) \\
&= (y-z)\{(y-z)x+yz\} \\
&= \boldsymbol{(y-z)(xy+yz-zx)}
\end{aligned}
$$

（4）$x^3=X$ とおくと

$$
\begin{aligned}
\text{与式} &= X^2-7X-8 \\
&= (X+1)(X-8) \\
&= (x^3+1)(x^3-8) \\
&= (x^2+1^3)(x^3-2^3) \\
&= \boldsymbol{(x+1)(x^2-x+1)} \\
&\qquad \boldsymbol{\times(x-2)(x^2+2x+4)} \\
&= \boldsymbol{(x+1)(x-2)} \\
&\qquad \boldsymbol{\times(x^2-x+1)(x^2+2x+4)}
\end{aligned}
$$

（5）$(x+1)=X$ とおく.

$$
\begin{aligned}
\text{与式} &= \{(x+1)+y\}\{(x+1)-2y\}-4y^2 \\
&= (X+y)(x-2y)-4y^2 \\
&= X^2-yX-2y^2-4y^2 \\
&= X^2-yX-6y^2 \\
&= (X+2y)(X-3y) \\
&= (x+1+2y)(x+1-3y) \\
&= \boldsymbol{(x+2y+1)(x-3y+1)}
\end{aligned}
$$

3. （1）a について整理すると

$$
\begin{aligned}
\text{与式} &= (b^2-c^2)a+c^2b-a^2b+a^2c-b^2c \\
&= (c-b)a^2+(b^2-c^2)a+(bc^2-b^2c) \\
&= (c-b)a^2+(b+c)(b-c)a+bc(b-c) \\
&= (c-b)a^2-(b+c)(c-b)a-bc(c-b) \\
&= (c-b)\{a^2-(b+c)a-bc\} \\
&= (c-b)(a-b)(a-c) \\
&= \boldsymbol{(a-b)(b-c)(c-a)}
\end{aligned}
$$

（2） 与式 $= (x^5+x^4)+(x^3+x^2)+(x+1)$

$$\begin{aligned}
&= x^4(x+1)+x^2(x+1)+(x+1)\\
&= (x+1)(x^4+x^2+1)\\
&= (x+1)(x^4+2x^2+1-x^2)\\
&= (x+1)\{(x^2+1)^2-x^2\}\\
&= (x+1)\{(x^2+1)+x\}\{(x^2+1)^2-x\}\\
&= \boldsymbol{(x+1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)}
\end{aligned}$$

（3） 与式 $= \{(x+y+z)^3-x^3\}-(y^3+z^3)$

$$\begin{aligned}
&= \{(x+y+z)-x\}\\
&\quad \times\{(x+y+z)^2+(x+y+z)x+x^2\}\\
&\qquad -(y+z)(y^2-yz+z^2)\\
&= (y+z)\\
&\quad \times(x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx\\
&\qquad\qquad +x^2+xy+zx+x^2)\\
&\qquad -(y+z)(y^2-yz+z^2)\\
&= (y+z)\\
&\quad \times(3x^2+y^2+z^2+3xy+2yz+3zx)\\
&\qquad -(y+z)(y^2-yz+z^2)\\
&= (y+z)\\
&\quad \times\{(3x^2+y^2+z^2+3xy+2yz+3zx)\\
&\qquad\qquad -(y^2-yz+z^2)\}\\
&= (y+z)(3x^2+3xy+3yz+3zx)\\
&= 3(y+z)\{x^2+(y+z)x+yz\}\\
&= 3(y+z)(x+y)(x+z)\\
&= \boldsymbol{3(x+y)(y+z)(z+x)}
\end{aligned}$$

4. 最小公倍数を $P(x)$ とおく．

$P(-1)=0$ であるから，$P(x)$ は $x+1$ を因数にもつ．

$$\begin{array}{rrrr|r}
1 & -10 & 19 & 30 & -1\\
 & -1 & 11 & -30 & \\
\hline
1 & -11 & 30 & 0 &
\end{array}$$

よって

$$\begin{aligned}
P(x) &= (x+1)(x^2-11x+30)\\
&= (x+1)(x-5)(x-6)
\end{aligned}$$

また，$A=(x-5)(x+1)$ であるから

$\boldsymbol{B=(x+1)(x-6)}$

5. 最小公倍数を $P(x)$ とおく．

$$\begin{aligned}
P(x) &= 4(x^2)^2+3x^2-1\\
&= (4x^2-1)(x^2+1)\\
&= (2x+1)(2x-1)(x^2+1)
\end{aligned}$$

最大公約数が $2x+1$ で，2 式の次数は 2 次と 3 次であるから，求める 2 つの整式は

$$\begin{cases}\boldsymbol{(2x+1)(2x-1)}\\ \boldsymbol{(2x+1)(x^2+1)}\end{cases}$$

6. 題意より

$$x^4-1=P(x)(x^3-3x^2+9x-27)+80$$

が成り立つので

$$P(x)(x^3-3x^2+9x-27)=x^4-1-80$$

$$P(x)(x^3-3x^2+9x-27)=x^4-81$$

よって

$$P(x)=(x^4-81)\div(x^3-3x^2+9x-27)$$

$$\begin{array}{r|lllll}
 & x & +3 & & & \\
\hline
x^3-3x^2+9x-27 & x^4 & & & & -81\\
 & x^4 & -3x^3 & +9x^2 & -27x & \\
\hline
 & & 3x^3 & -9x^2 & +27x & -81\\
 & & 3x^3 & -9x^2 & +27x & -81\\
\hline
 & & & & & 0
\end{array}$$

したがって，$\boldsymbol{P(x)=x+3}$

7. $Q(x)$ を x^2-3x+2 で割ったときの余りは，1 次以下の整式になる．

この余りを $ax+b$，商を $R(x)$ とおくと

$$\begin{aligned}
Q(x) &= (x^2-3x+2)R(x)+ax+b\\
&= (x-1)(x-2)R(x)+ax+b
\end{aligned}$$

が成り立つ．

ここで，$P(x)$ を $x-1$，$x-2$ で割ったときの余りがいずれも 1 であるから

$$P(1)=1,\quad P(2)=1$$

すなわち

$$\begin{cases}a+b=1\\ 2a+b=1\end{cases}$$

これを解いて，$a=0$，$b=1$

したがって，求める余りは，$0x+1$，すなわち **1** である．