練習問題 2-A

1. （1）　与えられた等差数列の一般項を a_n とすると

$$a_n = 35 + (n-1)\cdot(-2)$$
$$= -2n + 37$$

$a_n < 0$ とすると

$$-2n + 37 < 0$$
$$-2n < -37$$
$$n > 18\frac{1}{2}$$

よって，はじめて負になるのは，**第 19 項** である．

（2）　与えられた等差数列の初項から第 n 項までの和をを S_n とすると

$$S_n = \frac{n\{2\cdot 35 + (n-1)\cdot(-2)\}}{2}$$
$$= \frac{n(-2n+72)}{2}$$
$$= n(-n+36)$$

よって，第 10 項までの和は

$$S_{10} = 10(-10+36)$$
$$= 10\cdot 26$$
$$= \mathbf{260}$$

（3）　$S_n < 0$ とすると

$$n(-n+36) < 0$$
$$-n(n-36) < 0$$
$$n(n-36) > 0$$
$$n < 0,\quad 36 < n$$

$n > 0$ であるから，はじめて負になるのは，**第 37 項** である．

2. （1）　与えられた等比数列の一般項を a_n とすると

$$a_n = 2\cdot 3^{n-1}$$

$a_n > 1000$ とすると

$$2\cdot 3^{n-1} > 1000$$
$$3^{n-1} > 500$$

ここで，$3^5 = 243$，$3^6 = 729$ であるから，はじめて 1000 より大きくなるのは，$n-1=6$ のとき，すなわち **第 7 項** である．

（2）　与えられた等比数列の初項から第 n 項までの和をを S_n とすると

$$S_n = \frac{2(3^n-1)}{3-1}$$
$$= \frac{2(3^n-1)}{2}$$
$$= 3^n - 1$$

よって，第 5 項までの和は

$$S_2 = 3^5 - 1$$
$$= 243 - 1$$
$$= \mathbf{242}$$

（3）　$S_n > 10000$ とすると

$$3^n - 1 > 10000$$
$$3^n > 10001$$

ここで，$3^8 = 6531$，$3^9 = 19683$ であるから，はじめて 10000 より大きくなるのは，**第 9 項** である．

3. （1）　与えられた恒等式において，$k = 1,\ 2, \cdots,\ k$ として辺々を加えると

$$\sum_{k=1}^{n}\{(k+1)^4 - (k-1)^4\} = \sum_{k=1}^{n}(8k^3 + 8k)$$

左辺 $= \sum_{k=1}^{n}(k+1)^4 - \sum_{k=1}^{n}(k-1)^4$

$$= \{2^4 + 3^4 + \cdots + n^4 + (n+1)^4\}$$
$$- \{0^4 + 1^4 + 2^4 + \cdots + (n-1)^4\}$$
$$= n^4 + (n+1)^4 - 1$$
$$= n^4 - 1 + (n+1)^4$$
$$= (n^2+1)(n^2-1) + (n+1)^4$$
$$= (n^2+1)(n+1)(n-1) + (n+1)^4$$
$$= (n+1)\{(n^2+1)(n-1) + (n+1)^3\}$$
$$= (n+1)(2n^3 + 2n^2 + 4n)$$
$$= 2n(n+1)(n^2+n+2)$$

右辺 $= 8\sum_{k=1}^{n}k^3 + 8\sum_{k=1}^{n}k$

$$= 8\sum_{k=1}^{n}k^3 + 8\cdot\frac{1}{2}n(n+1)$$
$$= 8\sum_{k=1}^{n}k^3 + 4n(n+1)$$

よって
$$2n(n+1)(n^2+n+2)=8\sum_{k=1}^{n}k^3+4n(n+1)$$
であるから
$$\sum_{k=1}^{n}k^3$$
$$=\frac{1}{8}\{2n(n+1)(n^2+n+2)-4n(n+1)\}$$
$$=\frac{2}{8}n(n+1)\{(n^2+n+2)-2\}$$
$$=\frac{1}{4}n(n+1)(n^2+n)$$
$$=\boldsymbol{\frac{1}{4}n^2(n+1)^2}$$
$$=\boldsymbol{\left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2}$$

（2） [1] $n=1$ のとき

左辺 $=\sum_{k=1}^{1}k^3=1^3=1$

右辺 $=\frac{1}{4}\cdot 1^2\cdot(1+1)^2=1$

よって，$n=1$ のとき，等式は成り立つ．

[2] $n=l$ のとき，等式が成り立つと仮定する．
$$\sum_{k=1}^{l}k^3=\frac{1}{4}l^2(l+1)^2$$
この両辺に $(l+1)^3$ を加えると
$$\sum_{k=1}^{l}k^3+(l+1)^3=\frac{1}{4}l^2(l+1)^2+(l+1)^3$$
$$\sum_{k=1}^{l+1}k^3=\frac{1}{4}l^2(l+1)^2+(l+1)^3$$
$$=\frac{1}{4}(l+1)^2\{l^2+4(l+1)\}$$
$$=\frac{1}{4}(l+1)^2(l^2+4l+4)$$
$$=\frac{1}{4}(l+1)^2(l+2)^2$$
$$=\frac{1}{4}(l+1)^2\{(l+1)+1\}^2$$

よって，$n=l+1$ のときも等式は成り立つ．

[1]，[2] から，すべての自然数 n について等式が成り立つ．

4. （1） 与式 $=\sum_{k=1}^{n}(k^3+k^2)$
$$=\frac{1}{4}n^2(n+1)^2+\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$
$$=\frac{1}{12}n(n+1)\{3n(n+1)+2(2n+1)\}$$
$$=\frac{1}{12}n(n+1)(3n^2+7n+2)$$
$$=\boldsymbol{\frac{1}{12}n(n+1)(n+2)(3n+1)}$$

（2） 与式 $=\sum_{k=1}^{n-1}(k^2+k)$
$$=\frac{1}{6}(n-1)n\{2(n-1)+1\}+\frac{1}{2}(n-1)n$$
$$=\frac{1}{6}n(n-1)(2n-1+3)$$
$$=\frac{1}{6}n(n-1)(2n+2)$$
$$=\boldsymbol{\frac{1}{3}n(n-1)(n+1)}$$

5. $a_n=n(n+1)2^{n-2}$ を①とする．

[1] $n=1$ のとき

$a_1=1(1+1)2^{1-2}=2\cdot\frac{1}{2}=1$

よって，$n=1$ のとき，①は成り立つ．

[2] $n=k$ のとき，①が成り立つと仮定する．

$a_k=k(k+1)2^{k-2}$

$n=k+1$ のとき，漸化式より
$$a_{k+1}=2a_k+(k+1)2^k$$
$$=2\cdot k(k+1)2^{k-2}+(k+1)2^k$$
$$=k(k+1)2^{k-1}+(k+1)2^k$$
$$=(k+1)2^{k-1}(k+2)$$
$$=(k+1)(k+2)2^{k-1}$$
$$=(k+1)\{(k+1)+1\}2^{(k+1)-2}$$

よって，$n=k+1$ のときも①が成り立つ．

[1]，[2] から，すべての自然数 n について①が成り立つ．

練習問題 2-B

1. （1） $b_n = a_{n-1} - a_n$ より，$b_k = a_{k+1} - a_k$ であるから，これを与式の右辺に代入すると

$$\begin{aligned}右辺 &= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1}(a_{k+1} - a_k)\\ &= a_1 + \{(a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \cdots\\ &\quad \cdots + (a_{n-1} - a_{n-2}) + (a_n - a_{n-1})\}\\ &= a_1 + (-a_1 + a_n)\\ &= a_n = 左辺\end{aligned}$$

よって，$\boldsymbol{a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k}$

（2）
$$\begin{aligned}b_1 &= 2 - 1 = 1\\ b_2 &= 4 - 2 = 2\\ b_3 &= 7 - 4 = 3\\ b_4 &= 11 - 7 = 4\end{aligned}$$

であるから，$\{b_n\}$ は

$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \cdots$

となる．よって，その一般項は

$b_n = n$

したがって，$n \geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned}a_n &= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k\\ &= 1 + \sum_{k=1}^{n-1} k\\ &= 1 + \frac{1}{2}(n-1)n\\ &= \frac{1}{2}(n^2 - n + 2)\end{aligned}$$

$n = 1$ のとき，$a_1 = \frac{1}{2}(1^2 - 1 + 2) = 1$

であるから，$n = 1$ のときも，この式は成り立つ．よって，$\boldsymbol{a_n = \frac{1}{2}(n^2 - n + 2)}$

2.
$$\begin{aligned}S_n &= a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n\\ S_{n-1} &= a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}\end{aligned}$$

であるから，$n \geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned}a_n &= S_n - S_{n-1}\\ &= n^2 + 2n - \{(n-1)^2 + 2(n-1)\}\\ &= n^2 + 2n - (n^2 - 2n + 1 + 2n - 2)\\ &= 2n + 1 \cdots ①\end{aligned}$$

また，$a_1 = S_1 = 1^2 + 2 \cdot 1 = 3$

一方，①において，$n = 1$ とすると

$a_1 = 2 \cdot 1 + 1 = 3$

よって，①は，$n = 1$ のときも成り立つ．

したがって，$\boldsymbol{a_n = 2n + 1}$

（初項 3，公差 2 の等差数列）

3. （1） $\boldsymbol{a_2 = 1,\ \ a_3 = 3,\ \ a_4 = 6}$

（2） k 本の直線による交点が a_n 個あるとき，$(k+1)$ 本目の直線は他の k 本の直線と交わり，交点の数は k 個増加するので

$\boldsymbol{a_{k+1} = a_k + k}$

（3）
$$\begin{aligned}a_2 &= 1\\ a_3 &= 1 + 2\\ a_4 &= (1 + 2) + 3\\ a_5 &= (1 + 2 + 3) + 4\\ a_n &= \{1 + 2 + 3 + \cdots + (n-2)\} + (n-1)\\ &= 1 + 2 + 3 + \cdots + (n-2) + (n-1)\\ &= \frac{1}{2}(n-1)n\\ &= \boldsymbol{\frac{1}{2}n(n-1)}\end{aligned}$$

〔別解〕

$a_{k+1} = a_k + k$ より

$a_{k+1} - a_k = k$

ここで，$b_k = a_{k+1} - a_k$ とおけば，$\{b_k\}$ は $\{a_n\}$ の階差数列であり

$b_k = k$

である．また，直線が 1 本のとき，交点はないので，$a_1 = 0$

よって

$$\begin{aligned}a_n &= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k\\ &= 0 + \sum_{k=1}^{n-1} k\\ &= \frac{1}{2}(n-1)n\\ &= \boldsymbol{\frac{1}{2}n(n-1)}\end{aligned}$$

4.「$8^n - 1$ が 7 で割り切れる」という命題を①とおく．

[1] $n = 1$ のとき

$8^1 - 1 = 7$ となり，7 で割りきれる．

よって，$n = 1$ のとき，①は成り立つ．

[2] $n = k$ のとき，①が成り立つと仮定する．

$8^k - 1$ が 7 で割り切れるので，整数 m を用いて

$8^k - 1 = 7m$

と表すことができるから

$8^k = 7m + 1$

$n = k+1$ のとき

$$\begin{aligned} 8^{k+1} - 1 &= 8^k \cdot 8 - 1 \\ &= (7m+1) \cdot 8 - 1 \\ &= 56m + 8 - 1 \\ &= 56m + 7 \\ &= 7(8m+1) \end{aligned}$$

よって，$8^{k+1} - 1$ も 7 で割り切れるから，$n = k+1$ のときも①が成り立つ．

［1］，［2］から，すべての自然数 n について①が成り立つ．

5. 整数 $p^l q^m r^n$ の約数は

$p^a q^b r^c$

ただし

$a = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots, l$

$b = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots, m$

$c = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots, n$

で表すことができるので，その総和は，次の式を展開することで求められる．

$$(p^0 + p^1 + p^2 + \cdots + p^l) \times (q^0 + q^1 + q^2 + \cdots + q^m) \times (r^0 + r^1 + r^2 + \cdots + r^n)$$

ここで

$$p^0 + p^1 + p^2 + \cdots + p^l = 1 + p + p^2 + \cdots + p^l$$

は，初項 1，公比 p の等差数列の初項から第 $(l+1)$ 項までの和であり，$p \fallingdotseq 1$ であるから

$$p^0 + p^1 + p^2 + \cdots + p^l = \frac{p^{l+1} - 1}{p - 1}$$

同様に

$$q^0 + q^1 + q^2 + \cdots + q^m = \frac{q^{m+1} - 1}{q - 1}$$

$$r^0 + r^1 + r^2 + \cdots + r^n = \frac{r^{n+1} - 1}{r - 1}$$

したがって，約数の総和は

$$\boldsymbol{\frac{p^{l+1} - 1}{p - 1} \cdot \frac{q^{m+1} - 1}{q - 1} \cdot \frac{r^{n+1} - 1}{r - 1}}$$ となる．

∎