1章　数と式の計算

§ 1　整式の計算　(p.1〜p.15)

問 1

（1）与式 $= 5x^2 - 3x^2 - x + 3x + 2 - 1$

$= \boldsymbol{2x^2 + 2x + 1}$

（2）与式 $= -4x^2 + 7x^2 + 5x - 2x + 1 - 6$

$= \boldsymbol{3x^2 + 3x - 5}$

問 2

（1）$A + B = (3x^2 + 2x + 1) + (x^2 - 7x + 2)$

$= 3x^2 + 2x + 1 + x^2 - 7x + 2$

$= 3x^2 + x^2 + 2x - 7x + 1 + 2$

$= \boldsymbol{4x^2 - 5x + 3}$

$A - B = (3x^2 + 2x + 1) - (x^2 - 7x + 2)$

$= 3x^2 + 2x + 1 - x^2 + 7x - 2$

$= 3x^2 - x^2 + 2x + 7x + 1 - 2$

$= \boldsymbol{2x^2 + 9x - 1}$

（2）$A + B = (x^3 - x^2 + 4) + (2x^4 + x^3 - 3)$

$= x^3 - x^2 + 4 + 2x^4 + x^3 - 3$

$= 2x^4 + x^3 - x^2 + x^2 + 4 - 3$

$= \boldsymbol{2x^4 + x^3 + 1}$

$A - B = (x^3 - x^2 + 4) - (2x^4 + x^3 - 3)$

$= x^3 - x^2 + 4 - 2x^4 - x^3 + 3$

$= -2x^4 + x^3 - x^2 - x^2 + 4 + 3$

$= \boldsymbol{-2x^4 + x^3 - 2x^2 + 7}$

問 3

（1）$A + B$

$= (x^3 + ax^2 + 4a^3) + (2x^4 + a^2x^2 - 3x)$

$= x^3 + ax^2 + 4a^3 + 2x^4 + a^2x^2 - 3x$

$= 2x^4 + x^3 + ax^2 + a^2x^2 - 3x + 4a^3$

$= \boldsymbol{2x^4 + x^3 + (a^2 + a)x^2 - 3x + 4a^3}$

$A - B$

$= (x^3 + ax^2 + 4a^3) - (2x^4 + a^2x^2 - 3x)$

$= x^3 + ax^2 + 4a^3 - 2x^4 - a^2x^2 + 3x$

$= -2x^4 + x^3 + ax^2 - a^2x^2 + 3x + 4a^3$

$= \boldsymbol{-2x^4 + x^3 + (-a^2 + a)x^2 + 3x + 4a^3}$

（2）$A + B$

$= (x^2 + 2xy + y^2) + (-3x^2 + 7xy + 2y^2)$

$= x^2 + 2xy + y^2 - 3x^2 + 7xy + 2y^2$

$= y^2 + 2y^2 + 2xy + 7xy + x^2 - 3x^2$

$= \boldsymbol{3y^2 + 9xy - 2x^2}$

$A - B$

$= (x^2 + 2xy + y^2) - (-3x^2 + 7xy + 2y^2)$

$= x^2 + 2xy + y^2 + 3x^2 - 7xy - 2y^2$

$= y^2 - 2y^2 + 2xy - 7xy + x^2 + 3x^2$

$= \boldsymbol{-y^2 - 5xy + 4x^2}$

問 4

（1）与式 $= (-5) \cdot (-5)$

$= \boldsymbol{25}$

（2）与式 $= -(5 \cdot 5)$

$= \boldsymbol{-25}$

（3）与式 $= -a^2 \cdot (-1)^3 \cdot b^3$

$= -a^2 \cdot (-b^3)$

$= \boldsymbol{a^2b^3}$

（4）与式 $= (-3)^3 \cdot (a^2)^3b^3 \times (-2)^2 \cdot a^2(b^3)^2$

$= -27a^6b^3 \times 4a^2b^6$

$= \boldsymbol{-108a^8b^9}$

（5）与式 $= ab^3 \cdot a^2 - ab^3 \cdot 5b^2$

$= \boldsymbol{a^3b^3 - 5ab^5}$

（6）与式 $= x^3 + 2x^2$

$+ 5x^2 + 10x$

$- 2x - 4$

$= \boldsymbol{x^3 + 7x^2 + 8x - 4}$

問 5

（1） 与式 $= x^2 + (3+5)x + 3 \cdot 5$

$= \boldsymbol{x^2 + 8x + 15}$

（2） 与式 $= x^2 + (5y + 2y)x + 5y \cdot 2y$

$= \boldsymbol{x^2 + 7xy + 10y^2}$

（3） 与式 $= 3 \cdot 2x^2 + \{3 \cdot 5 + (-1) \cdot 2\}x + (-1) \cdot 5$

$= \boldsymbol{6x^3 + 13x - 5}$

（4） 与式 $= (2x)^2 - (3y)^2$

$= \boldsymbol{4x^2 - 9y^2}$

問 6

$(a-b)^3 = \{a - (-b)\}^3$

$= a^3 + 3a^2 \cdot (-b) + 3a \cdot (-b)^2 + (-b)^3$

$= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

問 7

（1） 与式 $= (2a)^3 + 3 \cdot (2a)^2 \cdot b + 3 \cdot 2a \cdot b^2 + b^3$

$= \boldsymbol{8a^3 + 12a^2b + 6ab^2 + b^3}$

（2） 与式 $= (3a)^3 + 3 \cdot (3a)^2 \cdot (-2b)$

$+ 3 \cdot 3a \cdot (-2b)^2 + (-2b)^3$

$= \boldsymbol{27a^3 - 54a^2b + 36ab^2 - 8b^3}$

問 8

（1） $(a+b) = A$ とおくと

左辺 $= \{(a+b) + c\}^2$

$= A^2 + 2Ac + c^2$

$= (a+b)^2 + 2(a+b)c + c^2$

$= a^2 + 2ab + b^2 + 2ac + 2bc + c^2$

$= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$

$=$ 右辺

（2） 左辺 $= a^3 - a^2b + ab^2$

$+ a^2b - ab^2 + b^3$

$= a^3 + b^3$

$=$ 右辺

（3） 左辺 $= a^3 + a^2b + ab^2$

$- a^2b - ab^2 - b^3$

$= a^3 - b^3$

$=$ 右辺

問 9

（1） 与式 $= (2a)^2 + b^2 + (3c)^2$

$+ 2 \cdot 2a \cdot b + 2b \cdot 3c + 2 \cdot 3c \cdot 2a$

$= \boldsymbol{4a^2 + b^2 + 9c^2 + 4ab + 6bc + 12ca}$

（2） 与式 $= (x+2y)\{x^2 - x \cdot 2y + (2y)^2\}$

$= x^3 + (2y)^3$

$= \boldsymbol{x^3 + 8y^3}$

問 10

（1） $(x+2y) = X$ とおくと

与式 $= \big\{(x+2y) - 1\big\}\big\{(x+2y) - 3\big\}$

$= (X-1)(X-3)$

$= X^2 - 4X + 3$

$= (x+2y)^2 - 4(x+2y) + 3$

$= \boldsymbol{x^2 + 4xy + 4y^2 - 4x - 8y + 3}$

（2） $(y+z) = Y$ とおくと

与式 $= \big\{x + (y+z)\big\}\big\{x - (y+z)\big\}$

$= (x+Y)(x-Y)$

$= x^2 - Y^2$

$= x^2 - (y+z)^2$

$= x^2 - (y^2 + 2yz + z^2)$

$= \boldsymbol{x^2 - y^2 - z^2 - 2yz}$

（3） $(a+c) = A$ とおくと

与式 $= \big\{(a+c) + 2b\big\}\big\{(a+c) - 2b\big\}$

$= (A+2b)(A-2b)$

$= A^2 - (2b)^2$

$= (a+c)^2 - 4b^2$

$= a^2 + 2ac + c^2 - 4b^2$

$= \boldsymbol{a^2 - 4b^2 + c^2 + 2aa}$

（4）　$(a-b)=A$ とおくと

与式 $=\{3c+(a-b)b\}\{3c-(a-b)\}$

$=(3c+A)(3c-A)$

$=(3c)^2-A^2$

$=9c^2-(a-b)^2$

$=9c^2-(a^2-2ab+b^2)$

$=\boldsymbol{-a^2-b^2+9c^2+2ab}$

問 11

（1）与式 $=a(a^2-6ab+9b^2)$

$=\boldsymbol{a(a-3b)^2}$

（2）　a について整理すると

与式 $=a(3b+2)-3b-2$

$=a(3b+2)-(3b+2)$

$(3b+2)=B$ とおくと

与式 $=aB-B$

$=B(a-1)$

$=\boldsymbol{(a-1)(3b+2)}$

（3）与式 $=2(x^2-9y^2)$

$=2\{x^2-(3y)^2\}$

$=\boldsymbol{2(x+3y)(x-3y)}$

（4）与式 $=a^2-(b^2-4bc+4c^2)$

$=a^2-(b-2c)^2$

$(b-2c)=B$ とおくと

与式 $=a^2-B^2$

$=(a+B)(a-B)$

$=\{a+(b-2c)\}\{a-(b-2c)\}$

$=\boldsymbol{(a+b-2c)(a-b+2c)}$

（5）与式 $=a^3+2^3$

$=(a+2)(a^2-a\cdot 2+2^2)$

$=\boldsymbol{(a+2)(a^2-2a+4)}$

（6）与式 $=(x^2-y^2)+(x^3-y^3)$

$=(x-y)(x+y)+(x-y)(x^2+xy+y^2)$

$(x-y)=X$ とおくと

与式 $=X(x+y)+X(x^2+xy+y^2)$

$=X(x+y+x^2+xy+y^2)$

$=\boldsymbol{(x-y)(x^2+xy+y^2+x+y)}$

問 12

（1）与式 $=x^2+(3+8)x+3\cdot 8$

$=\boldsymbol{(x+3)(x+8)}$

（2）与式 $=x^2+\{1+(-6)\}x+1\cdot(-6)$

$=\boldsymbol{(x+1)(x-6)}$

問 13

（1）

5	6		13
5	3	$\longrightarrow$	3
1	2	$\longrightarrow$	10

与式 $=\boldsymbol{(5x+3)(x+2)}$

（2）

6	-2		1
3	2	$\longrightarrow$	4
2	-1	$\longrightarrow$	-3

与式 $=\boldsymbol{(3x+4)(2x-1)}$

問 14

（1）　$x^2=X$ とおくと

与式 $=X^2-13X+36$

$=(X-4)(X-9)$

$=(x^2-4)(x^2-9)$

$=\boldsymbol{(x+2)(x-2)(x+3)(x-3)}$

（2）　$(a+b)=A$ とおくと

与式 $=A^2-2A-3$

$=(A-3)(A+1)$

$=\boldsymbol{(a+b-3)(a+b+1)}$

（3）x について整理すると

与式 $=x^2+(2y-1)x+(y^2-y-2)$

$=x^2+(2y-1)x+(y-2)(y+1)$

1	$(y-2)(y+1)$		$2y-1$
1	$(y-2)$	$\longrightarrow$	$y-2$
1	$(y+1)$	$\longrightarrow$	$y+1$

よって

与式 $=\{x+(y-2)\}\{x+(y+1)\}$

$=\boldsymbol{(x+y-2)(x+y+1)}$

（4）x について整理すると

与式 $= 2x^2 + (5y+5)x + (2y^2+y-3)$

定数項を因数分解すると，

2		-3		1
2	✕	3	$\longrightarrow$	3
1		-1	$\longrightarrow$	-2

よって

与式 $= 2x^2 + (5y+5)x + (2y+3)(y-1)$

2		$(2y+3)(y-1)$		$5y+5$
2	✕	$y-1$	$\longrightarrow$	$y-1$
1		$2y+3$	$\longrightarrow$	$4y+6$

したがって

与式 $= \{2x + (y-1)\}\{x + (2y+3)\}$

$= \boldsymbol{(2x+y-1)(x+2y+3)}$

問 15

（1）

$$\begin{array}{r} 3x \quad -4 \\ x+3 \overline{)\,3x^2+5x-10} \\ \underline{3x^2+9x} \\ -4x-10 \\ \underline{-4x-12} \\ 2 \end{array}$$

商 $\boldsymbol{3x-4}$，余り $\boldsymbol{2}$

等式

$\boldsymbol{3x^2+5x-10 = (x+3)(3x-4)+2}$

（2）

$$\begin{array}{r} 3x \quad +4 \\ 2x-5 \overline{)\,6x^2-7x+15} \\ \underline{6x^2-15x} \\ 8x+15 \\ \underline{8x-20} \\ 35 \end{array}$$

商 $\boldsymbol{3x+4}$，余り $\boldsymbol{35}$

等式

$\boldsymbol{6x^2-7x+15 = (2x-5)(3x+4)+35}$

（3）

$$\begin{array}{r} \frac{1}{3}x \quad -\frac{2}{9} \\ 3x+2 \overline{)\,x^2 \qquad +1} \\ \underline{x^2+\frac{2}{3}x} \\ -\frac{2}{3}x+1 \\ \underline{-\frac{2}{3}x-\frac{4}{9}} \\ \frac{13}{3} \end{array}$$

商 $\boldsymbol{\frac{1}{3}x - \frac{2}{9}}$，余り $\boldsymbol{\frac{13}{9}}$

等式

$\boldsymbol{x^2+1 = (3x+2)\left(\frac{1}{3}x - \frac{2}{9}\right) + \frac{13}{9}}$

問 16

ある整式を A とおくと，題意より

$A = (x-3)(x^2+x+6)+14$

$= x^3+x^2+6x$

$\quad -3x^2-3x-18+14$

$= \boldsymbol{x^3-2x^2+3x-4}$

問 17

（1）

	a	b	
		b	c
最大公約数 $=$		b	
最小公倍数 $=$	a	b	c

よって

最大公約数 $\boldsymbol{b}$

最小公倍数 $\boldsymbol{abc}$

（2）

	2	2		a^2	b	c^3	
	2		3	a^3	b^2	c	d
最大公約数 $=$	2			a^2	b	c	
最小公倍数 $=$	2	2	3	a^3	b^2	c^3	d

よって

最大公約数 $\boldsymbol{2a^2bc}$

最小公倍数 $\boldsymbol{12a^3b^2c^3d}$

（3）

	2	$x^2(x-1)^3$	$(x+3)$	
	2	3	$x(x-1)^2$	$(x+2)^2$
最大公約数 $=$	2		$x(x-1)^2$	
最小公倍数 $=$	2	3	$x^2(x-1)^3$	$(x+3)(x+2)^2$

よって

最大公約数 $\boldsymbol{2x(x-1)^2}$

最小公倍数 $\boldsymbol{6x^2(x-1)^3(x+3)(x+2)^2}$

問 18

（1）与式 $= (2x^3-3x^2+5x+4)$

$\quad + (-x^3+x^2-2x+2)$

$= 2x^3-3x^2+5x+4-x^3+x^2-2x+2$

$= \boldsymbol{x^3-2x^2+3x+6}$

（2） 与式 $= 3(2x^3 - 3x^2 + 5x + 4)$
$\quad - 2(-x^3 + x^2 - 2x + 2)$
$= 6x^3 - 9x^2 + 15x + 12$
$\quad + 2x^3 - 2x^2 + 4x - 4$
$= \boldsymbol{8x^3 - 11x^2 + 19x + 8}$

（3） 与式 $= 2 \cdot 1^3 - 3 \cdot 1^2 + 5 \cdot 1 + 4$
$= 2 - 3 + 5 + 4$
$= \boldsymbol{8}$

（4） 与式 $= -0^3 + 0^2 - 2 \cdot 0 + 2$
$= \boldsymbol{2}$

（5） 与式 $= -a^3 + a^2 - 2 \cdot a + 2$
$= \boldsymbol{-a^3 + a^2 - 2a + 2}$

（6） 与式 $= 2 \cdot (-a)^3 - 3 \cdot (-a)^2 + 5 \cdot (-a) + 4$
$= 2 \cdot (-a^3) - 3 \cdot a^2 - 5a + 4$
$= \boldsymbol{-2a^3 - 3a^2 - 5a + 4}$

問 19

（1） $A(x)$ を $x - 1$ で割ったときの余りは
$A(1) = 1^3 - 2 \cdot 1^2 + 1 + 3$
$= 1 - 2 + 1 + 3 = \boldsymbol{3}$

（2） $A(x)$ を $x + 1$ で割ったときの余りは
$A(-1) = (-1)^4 + (-1)^3 - 2 \cdot (-1)^2$
$\quad + 5 \cdot (-1) - 1$
$= 1 - 1 - 2 - 5 - 1 = \boldsymbol{-8}$

問 20

$P(x) = x^3 - 2x^2 + 4x + 3$ とおくと

$P(x)$ を $2x - 1$ で割ったときの余りは，
$P\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 - 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) + 3$
$= \frac{1}{8} - \frac{1}{2} + 2 + 3 = \boldsymbol{\frac{37}{8}}$

$P(x)$ を $2x + 3$ で割ったときの余りは，
$P\left(-\frac{3}{2}\right) = \left(-\frac{3}{2}\right)^3 - 2 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)^2$
$\quad + 4 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) + 3$
$= -\frac{27}{8} - \frac{9}{2} - 6 + 3 = \boldsymbol{-\frac{87}{8}}$

問 21

$P(1) = 1^3 - 3 \cdot 1^2 + 4$
$= 1 - 3 + 4 = 2 \neq 0$

$P(2) = 2^3 - 3 \cdot 2^2 + 4$
$= 8 - 12 + 4 = 0$

$P(3) = 3^3 - 3 \cdot 3^2 + 4$
$= 27 - 27 + 4 = 4 \neq 0$

よって，$P(x)$ は，$\boldsymbol{x - 2}$ で割り切れる．

問 22

$P(x) = x^3 + 5x^2 + kx + 2$ とおくと，$P(x)$ が $x + 2$ で割り切れるためには，$P(-2) = 0$ となればよいので
$(-2)^3 + 5 \cdot (-2)^2 + k(-2) + 2 = 0$
$-8 + 20 - 2k + 2 = 0$
$-2k = -14$
$\boldsymbol{k = 7}$

問 23

（1） $P(x) = x^3 + x^2 - 3x + 1$ とおくと
$P(1) = 1^3 + 1^2 - 3 \cdot 1 + 1 = 0$
したがって，$P(x)$ は $x - 1$ を因数にもつ．

$$
\begin{array}{r}
x^2 + 2x - 1 \\
\hline
x - 1 \,\big)\, x^3 + x^2 - 3x + 1 \\
x^3 - x^2 \\
\hline
2x^2 - 3x \\
2x^2 - 2x \\
\hline
-x + 1 \\
-x + 1 \\
\hline
0
\end{array}
$$

〔組み立て除法を利用〕

	1	1	−3	1	1
		1	2	−1	
	1	2	−1	0	

よって
$P(x) = \boldsymbol{(x - 1)(x^2 + 2x - 1)}$

（2） $P(x) = x^3 + 2x^2 - 11x - 12$ とおくと
$P(-1) = (-1)^3 + 2 \cdot (-1)^2 - 11 \cdot (-1) - 12 = 0$
よって，$P(x)$ は $x + 1$ を因数にもつ．

$$
\begin{array}{r|l}
x+1 & x^2 \quad +x \quad -12 \\
\cline{2-2}
 & x^3+2x^2-11x-12 \\
 & \underline{x^3+x^2} \\
 & \quad x^2-11x \\
 & \quad \underline{x^2+x} \\
 & \quad\quad -12x-12 \\
 & \quad\quad \underline{-12x-12} \\
 & \quad\quad\quad 0
\end{array}
$$

〔組み立て除法を利用〕

$$
\begin{array}{r|cccc|l}
 & 1 & 2 & -11 & -12 & -1 \\
 & & -1 & -1 & 12 & \\
\hline
 & 1 & 1 & -12 & 0 &
\end{array}
$$

したがって

$$
\begin{aligned}
P(x) &= (x+1)(x^2+x-12) \\
&= \boldsymbol{(x+1)(x+4)(x-3)}
\end{aligned}
$$

（3） $P(x)=2x^3-7x^2+7x-2$ とおくと，

$P(1)=2\cdot 1^3-7\cdot 1^2+7\cdot 1-2=0$

よって，$P(x)$ は $x-1$ を因数にもつ．

$$
\begin{array}{r|l}
x-1 & 2x^2 \quad -5x \quad +2 \\
\cline{2-2}
 & 2x^3-7x^2+7x-2 \\
 & \underline{2x^3-2x^2} \\
 & \quad -5x^2+7x \\
 & \quad \underline{-5x^2+5x} \\
 & \quad\quad 2x-2 \\
 & \quad\quad \underline{2x-2} \\
 & \quad\quad\quad 0
\end{array}
$$

〔組み立て除法を利用〕

$$
\begin{array}{r|cccc|l}
 & 2 & -7 & 7 & -2 & 1 \\
 & & 2 & -5 & 2 & \\
\hline
 & 2 & -5 & 2 & 0 &
\end{array}
$$

したがって

$$
\begin{aligned}
P(x) &= (x-1)(2x^2-5x+2) \\
&= \boldsymbol{(x-1)(x-2)(2x-1)}
\end{aligned}
$$

（4） $P(x)=x^4-x^3-6x^2+4x+8$ とおくと，

$P(-1)=0$

よって，$P(x)$ は $x+1$ を因数にもつ．

$$
\begin{array}{r|l}
x+1 & x^3-2x^2-4x+8 \\
\cline{2-2}
 & x^4-x^3-6x^2+4x+8 \\
 & \underline{x^4+x^3} \\
 & \quad -2x^3-6x^2 \\
 & \quad \underline{-2x^3-2x^2} \\
 & \quad\quad -4x^2+4x \\
 & \quad\quad \underline{-4x^2-4x} \\
 & \quad\quad\quad 8x+8 \\
 & \quad\quad\quad \underline{8x+8} \\
 & \quad\quad\quad\quad 0
\end{array}
$$

〔組み立て除法を利用〕

$$
\begin{array}{r|ccccc|l}
 & 1 & -1 & -6 & 4 & 8 & -1 \\
 & & -1 & 2 & 4 & -8 & \\
\hline
 & 1 & -2 & -4 & 8 & 0 &
\end{array}
$$

よって，

$$P(x)=(x+1)(x^3-2x^2-4x+8)$$

$Q(x)=x^3-2x^2-4x+8$ とおくと，

$Q(2)=0$

よって，$Q(x)$ は $x-2$ を因数にもつ．

$$
\begin{array}{r|l}
x-2 & x^2 \quad\quad -4 \\
\cline{2-2}
 & x^3-2x^2-4x+8 \\
 & \underline{x^3-2x^2} \\
 & \quad\quad -4x+8 \\
 & \quad\quad \underline{-4x+8} \\
 & \quad\quad\quad 0
\end{array}
$$

〔組み立て除法を利用〕

$$
\begin{array}{r|cccc|l}
 & 1 & -2 & -4 & 8 & 2 \\
 & & 2 & 0 & -8 & \\
\hline
 & 1 & 0 & -4 & 0 &
\end{array}
$$

よって

$$Q(x)=(x-2)(x^2-4)$$

以上より

$$
\begin{aligned}
P(x) &= (x+1)(x-2)(x^2-4) \\
&= (x+1)(x-2)(x-2)(x+2) \\
&= \boldsymbol{(x+1)(x+2)(x-2)^2}
\end{aligned}
$$