画像フィルタリング，変換，スパース表現

～学生向け画像信号処理チュートリアル～

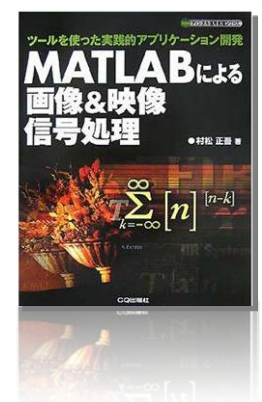
平成24年7月31日（火）

新潟大学工学部　電気電子工学科

准教授　村松　正吾

自己紹介（むらまつ　しょうご）

- 所属
  - 新潟大学　工学部　電気電子工学科
- 画像・映像信号処理の教育研究に従事
  - 学部:「プログラミング」,「画像情報工学」
  - 博士前期:「画像処理特論」, 博士後期:「多次元信号処理理論」
  - 学会:電子情報通信学会(IEICE), 映像情報メディア学会(ITE) , IEEE
- 著書など
  - 「マルチメディア技術の基礎DCT入門」（CQ出版社, 1997年）
  - 「MATLABによる画像&映像信号処理 」（CQ出版社, 2007年）
- 研究分野
  - フィルタバンク設計
  - 画像・映像信号処理

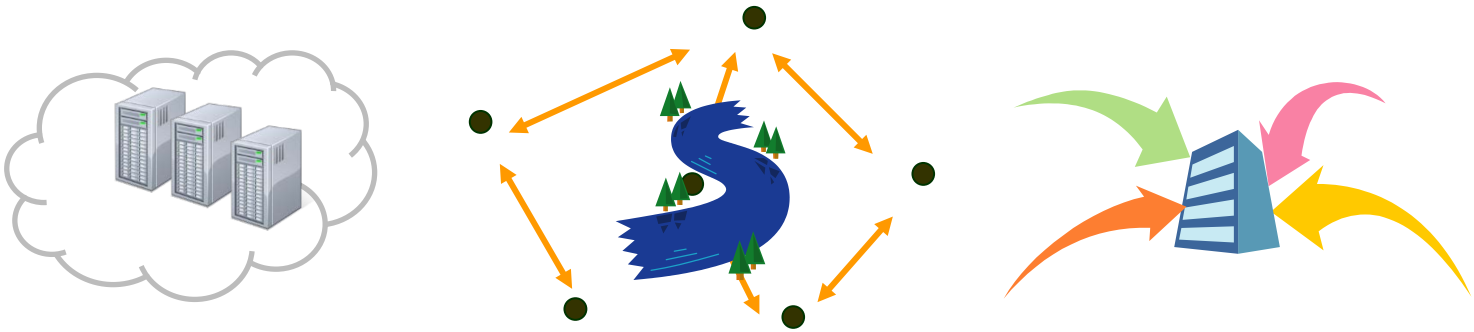


「画像フィルタリング、変換、スパース表現」正誤表

	誤	正
式(6a)(6b)	$y_0[n] = \gamma(x[n] + x[n-1])$ $y_1[\mathrm{n}] = \delta x[n] - \gamma x[n-1]$	$y_0[n] = \gamma x[n] + \delta x[n-1]$ $y_1[\mathrm{n}] = \gamma x[n] - \delta x[n-1]$
式(9)の直前	$\dfrac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{y})}{\partial \mathbf{y}} = 2\mathbf{y} + \mathbf{D}^T \boldsymbol{\lambda} = 0$	$\dfrac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{y})}{\partial \mathbf{y}} = 2\mathbf{y} - \mathbf{D}^T \boldsymbol{\lambda} = 0$
式(32)	$\hat{\mathbf{y}} = \mathcal{T}_\lambda(\mathbf{v}) = \mathrm{sign}(\mathbf{v}) \cdot (\lvert\mathbf{v}\rvert - \lambda\mathbf{1})_+$	$\hat{\mathbf{y}} = \mathcal{T}_\lambda(\mathbf{v}) = \mathrm{diag}(\mathrm{sign}(\mathbf{v})) \cdot (\lvert\mathbf{v}\rvert - \lambda\mathbf{1})_+$
第6章 第11行目	事後確率 $p(\mathbf{w}\lvert\mathbf{y})$	事後確率 $p(\mathbf{y}\lvert\mathbf{x})$

はじめに

- クラウド、センサネットワーク、ビッグデータ



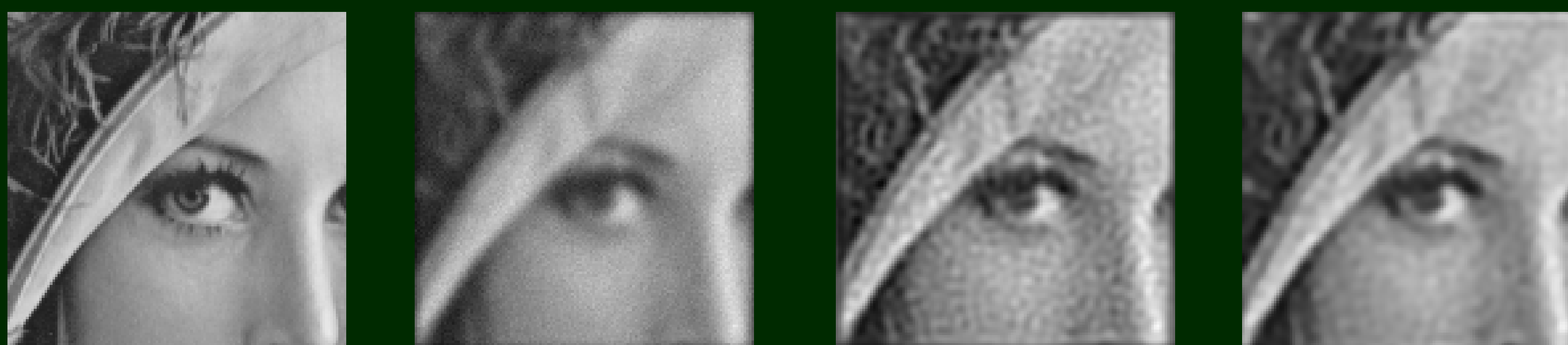
  - 遠隔・協調化、劣悪なセンシング、リアルタイム性
- 画像応用への高品質化・高機能化の要求
  - 画像圧縮、復元、特徴抽出の発展に期待大

画像のスパース表現の有用性について解説する

スパース表現の応用

- ぼけ除去の例

kws25_1



原画像 ぼけ画像 Wienerフィルタ 冗長Haar+ISTA

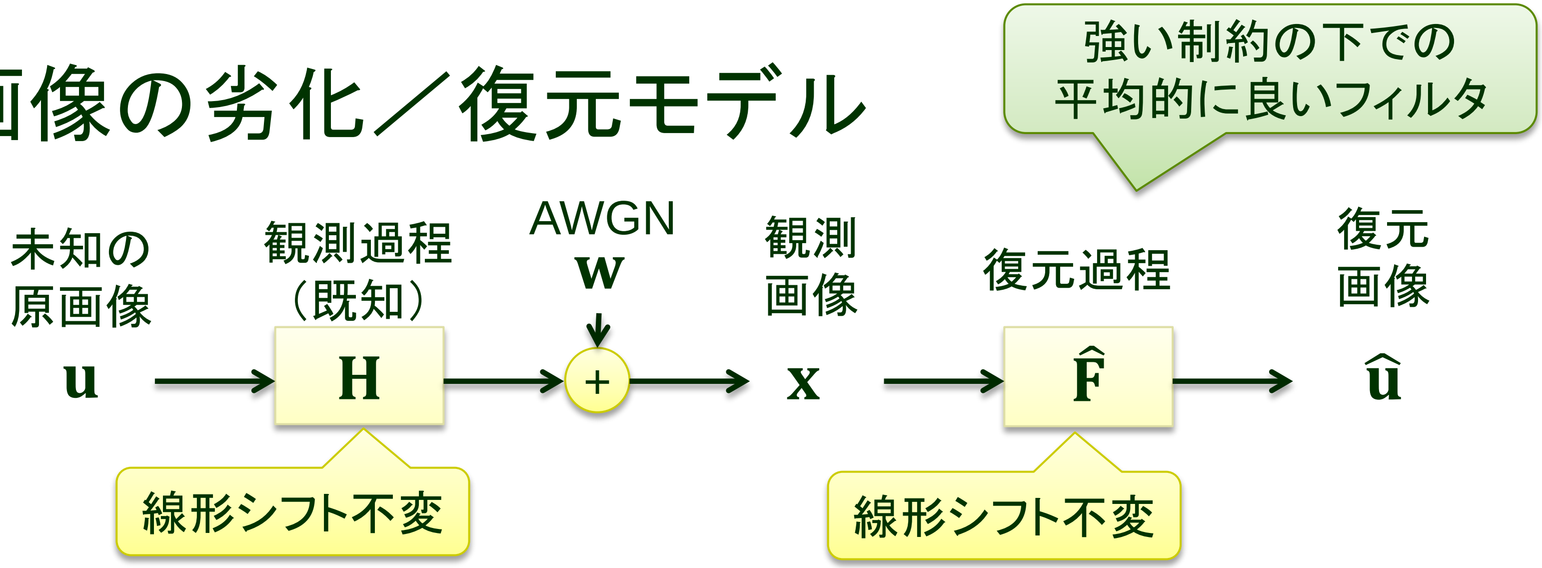
※ISTA: Iterative Shrinkage/Thresholding Algorithm

講演内容

- Wienerフィルタの概要
- 分析処理と合成処理
- 非線形近似とスパース表現
- フレームと基底
- スパース表現の画像処理応用
- 関連技術とまとめ

Wienerフィルタの概要

- 画像の劣化／復元モデル



仮定

$$\mathbf{x} = \mathbf{H}\mathbf{u} + \mathbf{w}$$

$$\hat{\mathbf{u}} = \hat{\mathbf{F}}\mathbf{x}$$

問題
設定

期待値

$$\hat{\mathbf{F}} = \mathrm{argmin}_{\mathbf{F}} E\{\|\mathbf{u} - \mathbf{F}\mathbf{x}\|^2\}$$

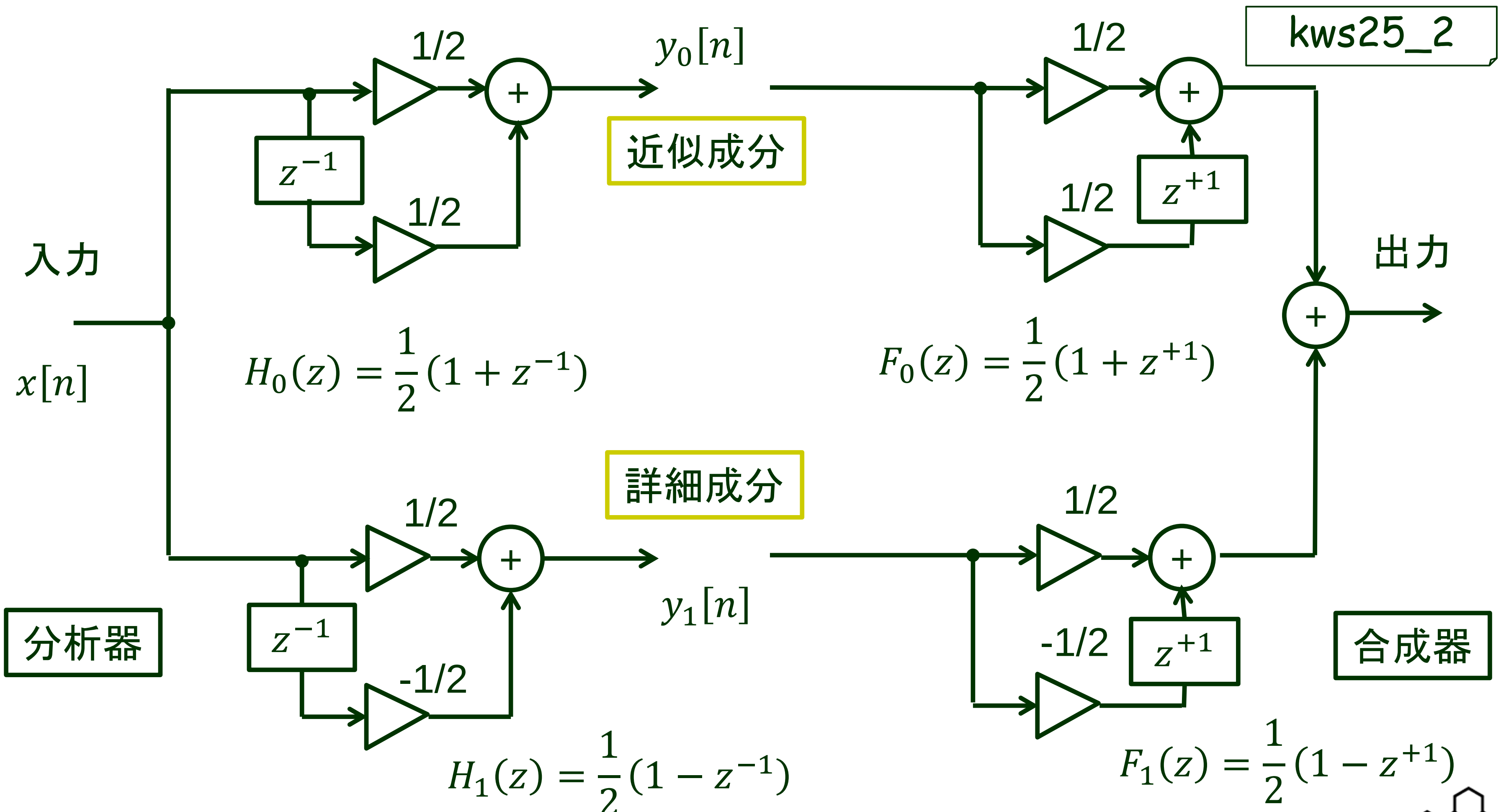
復元誤差の期待値を最小にするフィルタ

講演内容

- Wienerフィルタの概要
- 分析処理と合成処理
- 非線形近似とスパース表現
- フレームと基底
- スパース表現の画像処理応用
- 関連技術とまとめ

分析・合成処理

$$T(z) = H_0(z)F_0(z) + H_1(z)F_1(z)$$
$$= \frac{1}{4}\{(2 + z^{-1} + z^{+1})$$
$$+ (2 - z^{-1} - z^{+1})\} = 1$$



分析・合成処理の行列表現

分析処理

$$\begin{pmatrix} \vdots \\ y_0[n] \\ y_1[n] \\ y_0[n+1] \\ y_1[n+1] \\ \vdots \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \ddots & 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \\ 0 & -1 & 1 & 0 & \\ & 0 & 1 & 1 & 0 \\ & 0 & -1 & 1 & 0 \\ & 0 & 0 & 1 & \ddots \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \vdots \\ x[n-1] \\ x[n] \\ x[n+1] \\ \vdots \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ $\mathbf{y} = \mathbf{T}\mathbf{x}$

合成処理

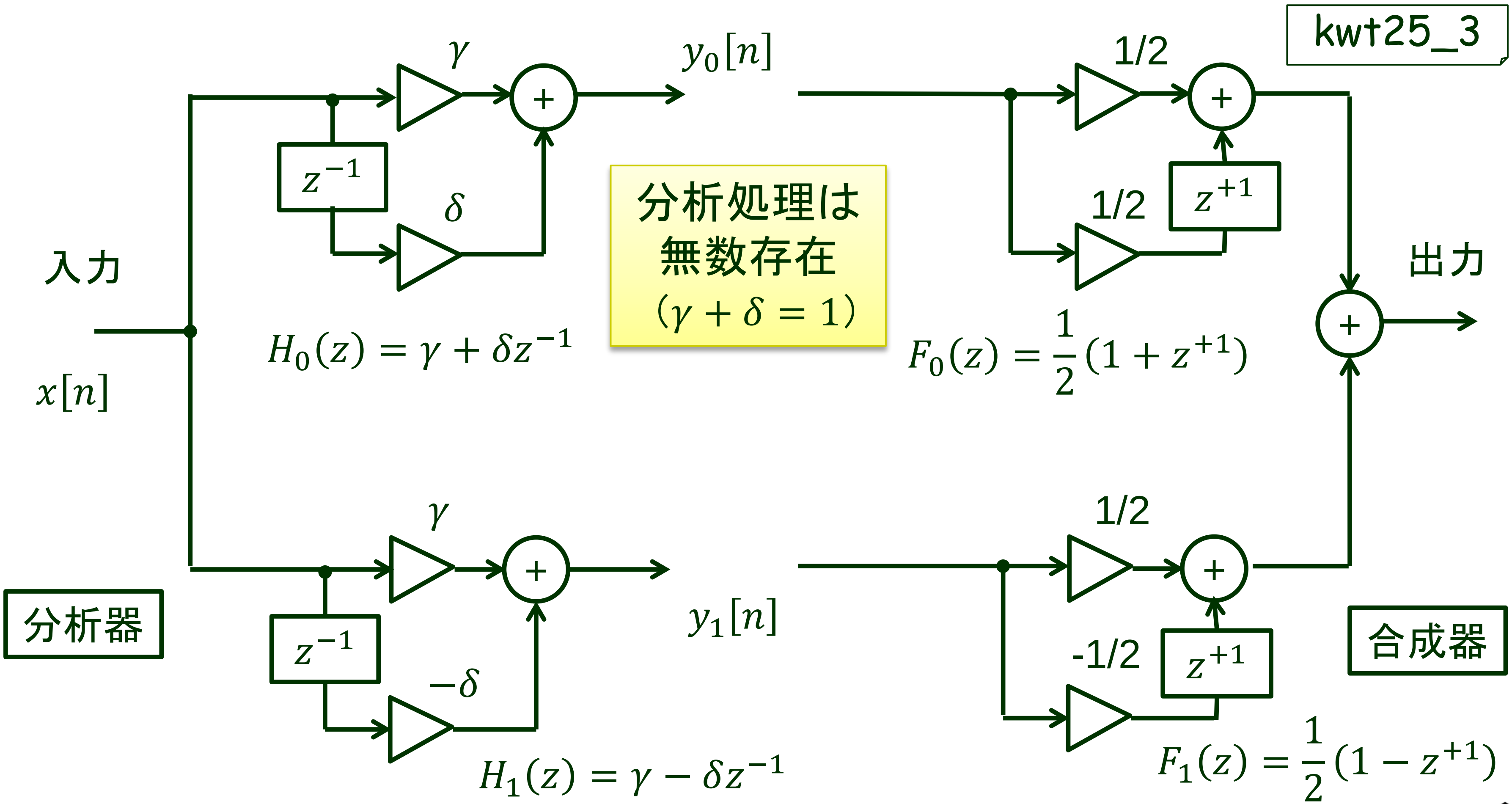
$$\begin{pmatrix} \vdots \\ x[n] \\ x\,[n+1] \\ \vdots \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \ddots & 1 & -1 & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \vdots \\ y_0[n] \\ y_1[n] \\ y_0[n+1] \\ y_1[n+1] \\ \vdots \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ $\mathbf{x} = \mathbf{D}\mathbf{y}$

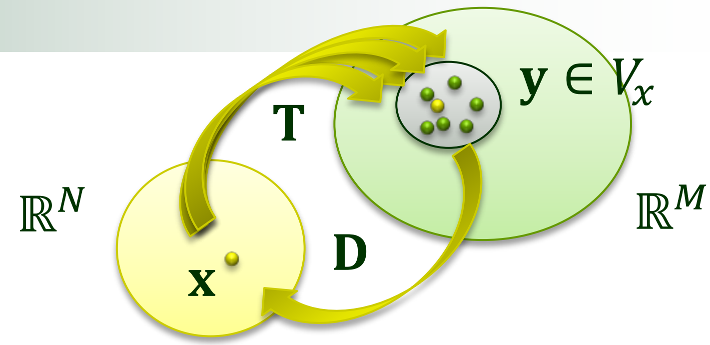
$\mathbf{DT} = \mathbf{I}$ が成り立つ

分析問題

$$T(z) = H_0(z)F_0(z) + H_1(z)F_1(z)$$
$$= \frac{1}{2}\{(1 + \delta z^{-1} + \gamma z^{+1}) + (1 - \delta z^{-1} - \gamma z^{+1})\}$$
$$= 1$$



最小二乗解



- 合成処理**D** に対し無数の分析処理が存在
  → 適切な分析処理 **T** を選択する問題
  ≡ 適切な変換係数 **y** を選択する問題
- ℓ_2(標準)ノルム最小化問題として解く

$$\hat{\mathbf{y}} = \arg\min_{\mathbf{y}} \|\mathbf{y}\|_2^2 \text{ subject to } \mathbf{x} = \mathbf{D}\mathbf{y}$$

係数の二乗和(エネルギー)

$$\|\mathbf{y}\|_2^2 = \sum_{m=0}^{M-1} |y[m]|^2$$

無数に存在する係数$\mathbf{y}$の候補の中から最適なものを探す

一般逆行列

- 標準ノルム最小化問題はラグランジュ定数$\boldsymbol{\lambda}$の導入により

$$\mathcal{L}(\mathbf{y}) = \|\mathbf{y}\|_2^2 - \boldsymbol{\lambda}^T(\mathbf{D}\mathbf{y} - \mathbf{x})$$

を最小化する問題となる.

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{y})}{\partial \mathbf{y}} = 2\mathbf{y} - \mathbf{D}^T\boldsymbol{\lambda} = 0$$

より

$$2\mathbf{D}\mathbf{y} = 2\mathbf{x} = \mathbf{D}\mathbf{D}^T\boldsymbol{\lambda} \Rightarrow \boldsymbol{\lambda} = 2(\mathbf{D}\mathbf{D}^T)^{-1}\mathbf{x}$$

となるので，最適な係数$\hat{\mathbf{y}}$は，

$$\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{D}^T(\mathbf{D}\mathbf{D}^T)^{-1}\mathbf{x} = \mathbf{D}^+\mathbf{x}$$

kws25_4

と導かれる.

ムーア･ペンローズ一般逆行列

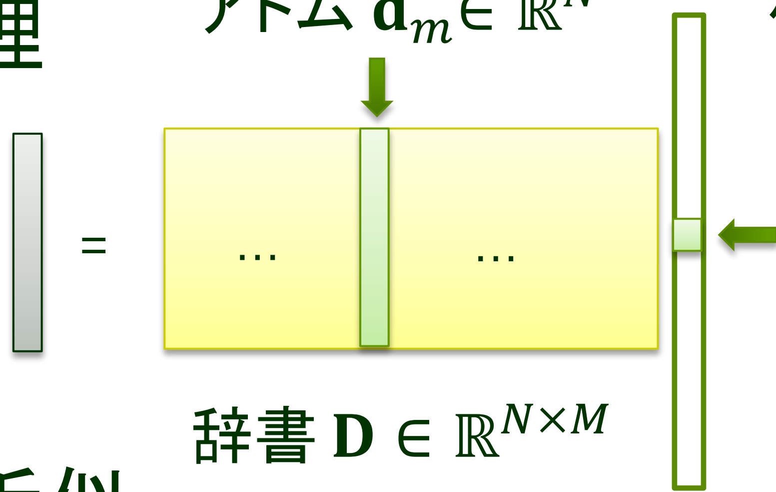
講演内容

- Wienerフィルタの概要
- 分析処理と合成処理
- 非線形近似とスパース表現
- フレームと基底
- スパース表現の画像処理応用
- 関連技術とまとめ

合成処理と非線形近似

- 合成処理

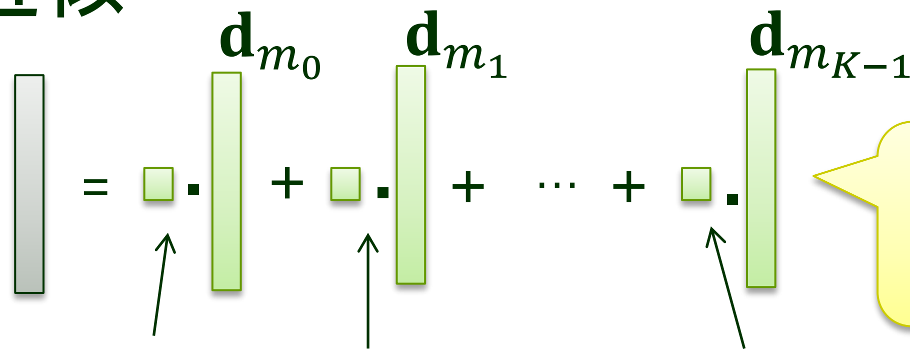
信号
$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$



kws25_5

- 非線形近似

近似信号
$\tilde{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^N$



絶対値の大きな係数のみで合成（誤差が生じる）

$|y[m_0]| \geq |y[m_1]| \geq \cdots \geq |y[m_{K-1}]| \geq \cdots$

もし，$\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x}$
$\Rightarrow$ $\mathbf{x}$はK-スパース

ℓ_0ノルム最小化問題

- 少ない係数で良い近似を得たい
  - 標準ノルムは小さな係数を過小評価，誤差大
- ℓ_0ノルム最小化問題として解く

係数がスパースなほど良い

非零係数の数

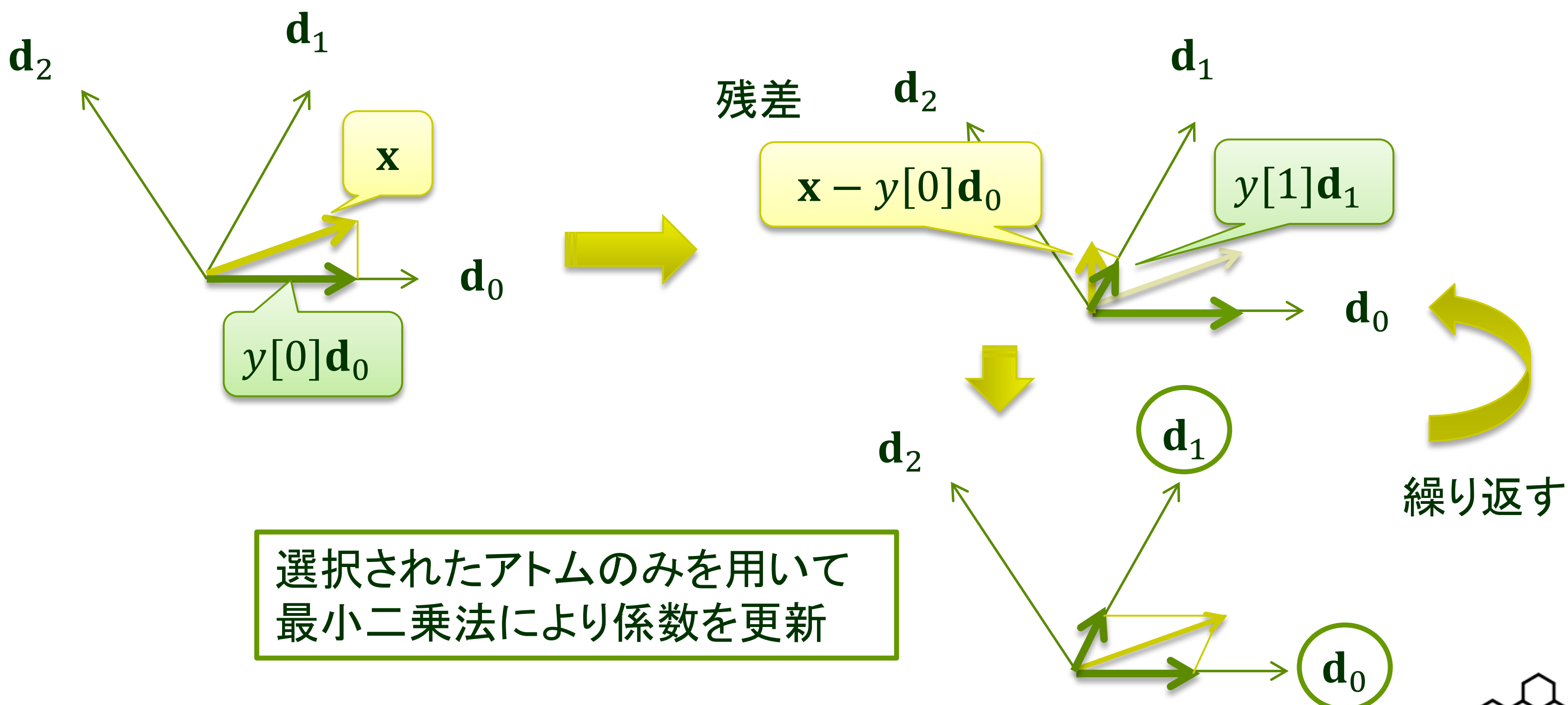
$$\hat{\mathbf{y}} = \arg\min_{\mathbf{y}} \|\mathbf{y}\|_0 \ \text{subject to} \ \mathbf{x} = \mathbf{D}\mathbf{y}$$

- 最適な係数の組合せを探索する問題
  - 現実的な計算時間内で解を得ることは不可能
  - 貪欲法（OMP，MP）による近似解の探索が一般的

直交マッチング追跡法(OMP)

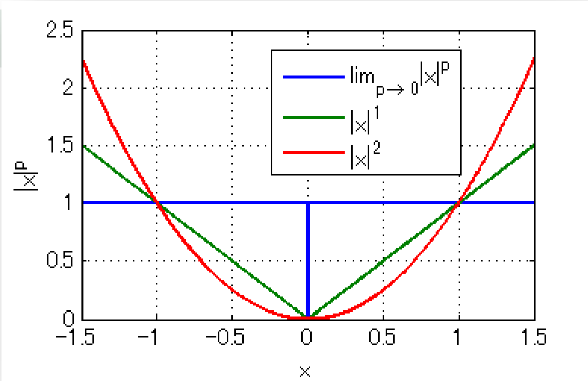
- 残差に最も近いアトムを逐次選択

kws25_6



選択されたアトムのみを用いて
最小二乗法により係数を更新

ℓ_1ノルム最小化問題



- ℓ_0ノルム最小化問題は解の探索が困難
  - ℓ_0ノルムに代わるスパース性尺度を導入
- ℓ_1ノルム最小化問題として解く

$$\hat{\mathbf{y}} = \arg\min_{\mathbf{y}} \|\mathbf{y}\|_1 \text{ subject to } \mathbf{x} = \mathbf{D}\mathbf{y}$$

係数の絶対値和

$$\|\mathbf{y}\|_1 = \sum_{m=0}^{M-1} |y[m]|$$

- 基底追跡(BP)法と呼ばれる
  - 線形計画問題に帰着

基底追跡法(BP)

- 最短経路となるようアトムを選択

kws25_7

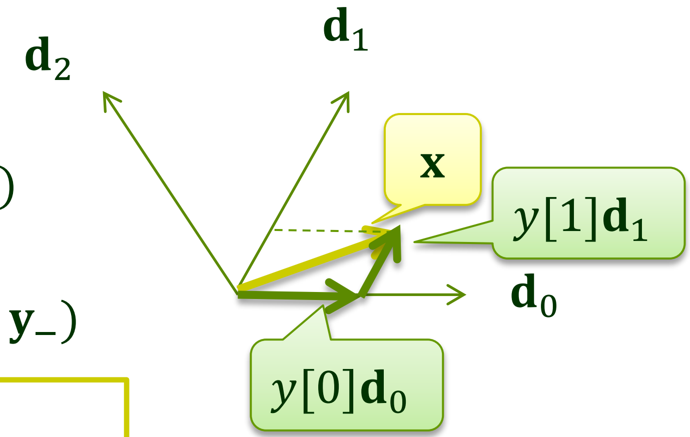
$$\hat{\mathbf{y}} = \arg\min_{\mathbf{y}} \|\mathbf{y}\|_1 \quad \text{subject to} \quad \mathbf{x} = \mathbf{D}\mathbf{y}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{y}_+ - \mathbf{y}_- \in \mathbb{R}^N$$

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_+ \\ \mathbf{y}_- \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2N}$$

$$\|\mathbf{y}\|_1 = \mathbf{1}^T(\mathbf{y}_+ + \mathbf{y}_-)$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{D}\mathbf{y} = \mathbf{D}\,(\mathbf{y}_+ - \mathbf{y}_-)$$



$$\hat{\mathbf{z}} = \arg\min_{\mathbf{z}} \mathbf{1}^T\mathbf{z}$$
$$\text{subject to} \quad \mathbf{x} = [\mathbf{D} \ \ -\mathbf{D}]\mathbf{z} \quad \text{and} \quad \mathbf{z} \geq \mathbf{0}$$

線形計画法に帰着

基底追跡ノイズ除去(BPDN)

- BP法は多項式時間で解くことができる
  - しかし、画像信号に対し事実上実現が困難
- 再構成誤差を許容して解く

制御パラメータ（重み）

$$\hat{\mathbf{y}} = \arg\min_{\mathbf{y}} \frac{1}{2}\|\mathbf{x} - \mathbf{D}\mathbf{y}\|_2^2 + \lambda\|\mathbf{y}\|_1$$

忠実度

スパース性

- 基底追跡ノイズ除去(BPDN)法と呼ばれる
  - 演算量を大幅に削減可能
  - 簡便で画像処理にも十分適用できる

ISTAにより解ける（後述）

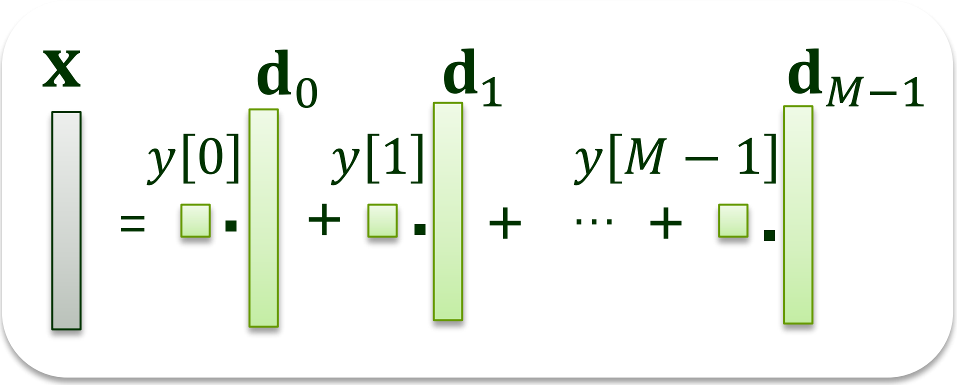
kws25_8

講演内容

- Wienerフィルタの概要
- 分析処理と合成処理
- 非線形近似とスパース表現
- フレームと基底
- スパース表現の画像処理応用
- 関連技術とまとめ

辞書表現(合成)と変換(分析)

- 辞書$\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{N\times M}$による信号$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{N}$の表現
  - アトム$\mathbf{d}_{\mathrm{m}} \in \mathbb{R}^{N}$ の線形結合



$$\mathbf{x} = \mathbf{D}\mathbf{y}$$

- もし，$\mathrm{rank}(\mathbf{D}) = N$ ならば，係数$\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{M}$を与える変換$\mathbf{T} \in \mathbb{R}^{M\times N}$が存在

$$\mathbf{y} = \mathbf{T}\mathbf{x}$$

フレーム

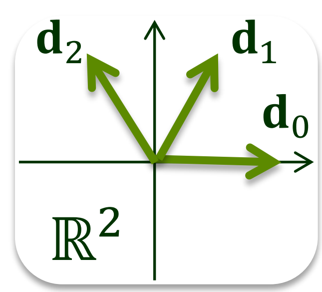
アトムの数が多い

- rank$(\mathbf{D}) = N$, $M > N$の場合
  - 集合$\{\mathbf{d}_m\}_{m=0}^{M-1}$を$\mathbb{R}^N$の**フレーム**とよぶ. $\boldsymbol{T}$は無数存在.
  - $\lambda_{\min}$, $\lambda_{\max}$を行列$\mathbf{D}\mathbf{D}^{\mathrm{T}}$の最小，最大固有値とすると

$$\lambda_{\min}\|\mathbf{x}\|_2^2 \le \|\mathbf{D}^T\mathbf{x}\|_2^2 \le \lambda_{\max}\|\mathbf{x}\|_2^2$$

  が成り立つ（必要十分条件）.

- タイトフレーム
  - $\lambda_{\min} = \lambda_{\max} (= \mathcal{R})$を満たす



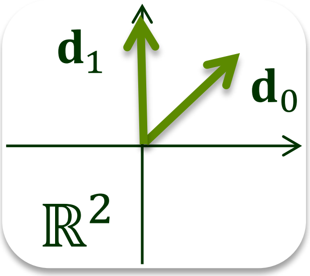
$$\boxed{\mathbf{D}\mathbf{D}^T = \mathcal{R}\mathbf{I}\text{が成り立つ}}$$

基底

アトムの数が等しい

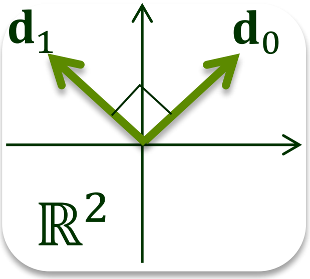
kws25_9

- rank$(\mathbf{D}) = N$, $M = N$の場合
  - 集合$\{\mathbf{d}_m\}_{m=0}^{M-1}$を$\mathbb{R}^N$の**基底**とよぶ．$\mathbf{T}$は唯一存在．
  - 双直交基底（例：9/7DWT）



$$\mathbf{T} = \mathbf{D}^{-1} (\neq \mathbf{D}^T)$$

  - 正規直交基底（例：DCT）



$$\mathbf{T} = \mathbf{D}^{-1} = \mathbf{D}^T$$

パーセバルの等式

$\|\mathbf{x}\|_2^2 = \|\mathbf{y}\|_2^2$ が成り立つ

列ベクトルでの議論．画像はどのように扱うか？

- 画像の列ベクトル表現

画像 $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{N_0 \times N_1}$

0	2		
4	6		

列ベクトル化 →

← 配列化

アトム $\mathbf{d}_m \in \mathbb{R}^N$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ \\ \\ 2 \\ 6 \\ \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 & 0 & 0 & -1/2 & 1/2 & 0 & \cdots \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & -1/2 & -1/2 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 1/2 & -1/2 & 0 & 0 & 1/2 & -1/2 & 0 & \cdots \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & & & 0 & 0 & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ \\ \\ 0 \\ 2 \\ \\ \vdots \end{bmatrix}$$

画像 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$

辞書　$\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{N \times M}$

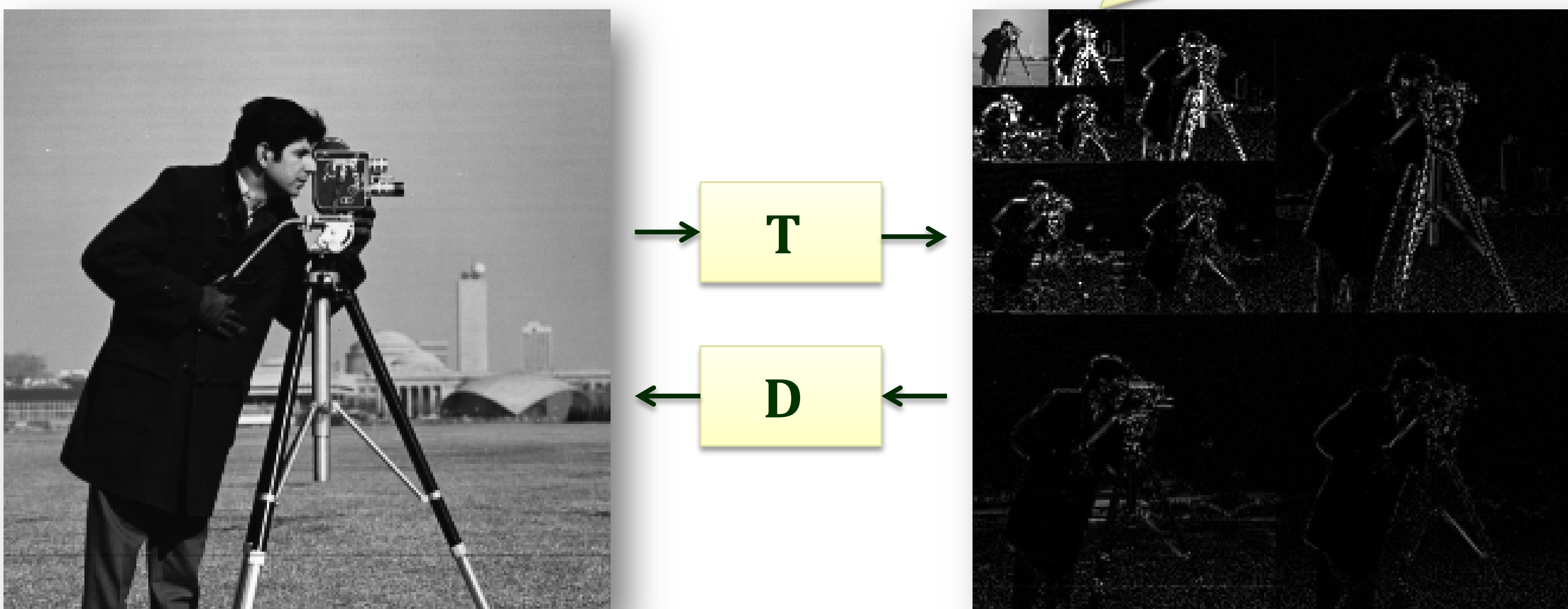
係数 $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^M$

画像変換の効果

kws25_10

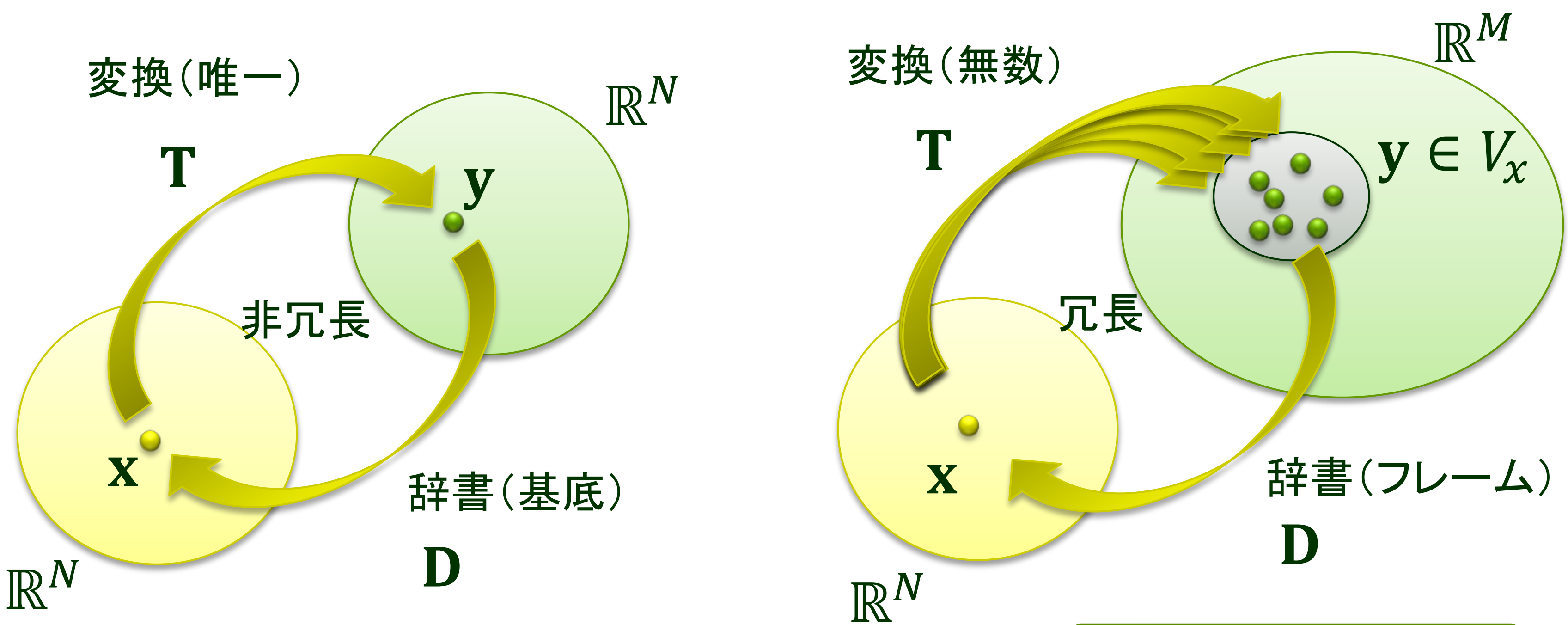
- 3段直交ウェーブレット変換

スパースな表現を与える



A. Adachi, S. Muramatsu, H. Kikuchi, **Constraints of Second-Order Vanishing Moments on Lattice Structures for Non-separable Orthogonal Symmetric Wavelets**, *IEICE Trans. Fundamentals*, Vol. E92-A, No. 3, pp.788-797, Mar. 2009

基底と比べたフレームの利点は？



より良い近似を探索

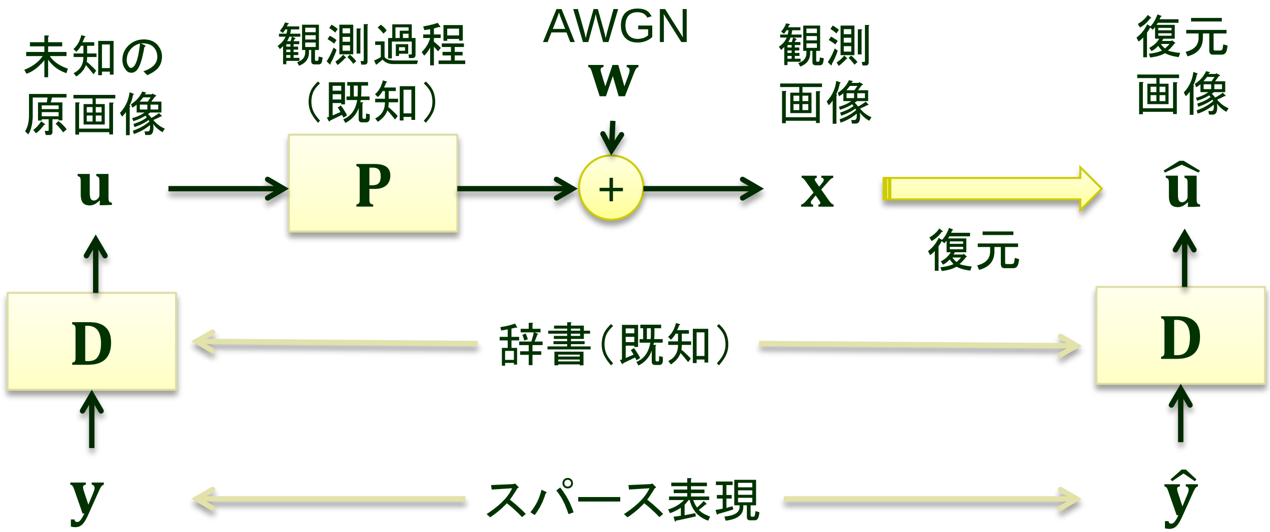
冗長な辞書(フレーム)では係数 $\mathbf{y}$ を選択できる

講演内容

- Wienerフィルタの概要
- 分析処理と合成処理
- 非線形近似とスパース表現
- フレームと基底
- スパース表現の画像処理応用
- 関連技術とまとめ

スパース表現の画像処理応用

- 画像の劣化／復元モデル



仮定

$$\mathbf{x} = \mathbf{P}\mathbf{u} + \mathbf{w}$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{D}\mathbf{y}$$

$\mathbf{y}$ はスパース

問題設定

$$\hat{\mathbf{y}} = \mathrm{argmin}_{\mathbf{y}} \frac{1}{2} \|\mathbf{x} - \mathbf{P}\mathbf{D}\mathbf{y}\|_2^2 + \lambda\rho(\mathbf{y})$$

$$\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{D}\hat{\mathbf{y}}$$

正則化項(スパース性)

ノイズ除去問題の解法例

kws25_11

- $\mathbf{P} = \mathbf{I}$, $\rho(\mathbf{y}) = \|\boldsymbol{y}\|_1$のとき
  - BPDNに帰着 ⇒ ISTA（後述）で解ける

観測時の劣化なし

$$\hat{\mathbf{y}} = \mathrm{argmin}_{\mathbf{y}} \frac{1}{2}\|\mathbf{x} - \mathbf{D}\mathbf{y}\|_2^2 + \lambda\|\mathbf{y}\|_1$$

- 特に，$\boldsymbol{D}$が正規直交ならば，
  - $\|\mathbf{D}^T\mathbf{x}\|_2^2 = \|\mathbf{x}\|_2^2$ （パーセバルの等式）
  - $\mathbf{D}^T\mathbf{D} = \mathbf{I}$

$\mathcal{R} = 1$のタイトフレームでも成り立つ

双直交基底，（タイト）フレームでは成り立たない

$$\therefore \hat{\mathbf{y}} = \mathrm{argmin}_{\mathbf{y}} \frac{1}{2}\|\mathbf{D}^T(\mathbf{x} - \mathbf{D}\mathbf{y})\|_2^2 + \lambda\|\mathbf{y}\|_1$$

$$= \mathrm{argmin}_{\mathbf{y}} \frac{1}{2}\|\mathbf{v} - \mathbf{y}\|_2^2 + \lambda\|\mathbf{y}\|_1$$

変換係数

ただし，$\mathbf{v} = \mathbf{D}^T\mathbf{x} = \mathbf{T}\mathbf{x}$

ソフト縮退ノイズ除去

帯域適応型の
BayesShrinkを利用

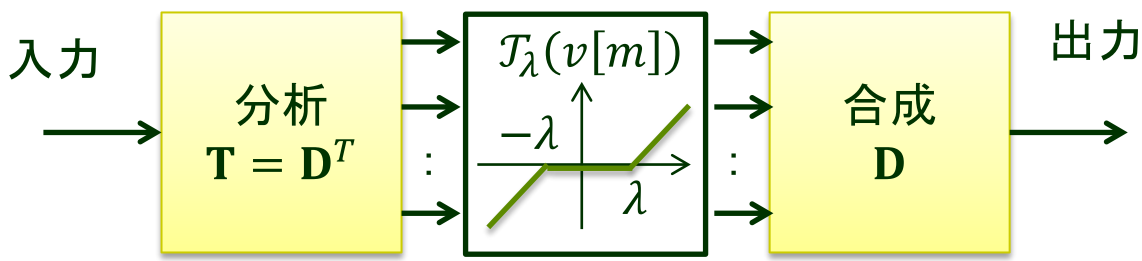
kws25_12

- 評価式の導関数

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{y}}\frac{1}{2}\|\mathbf{v}-\mathbf{y}\|_2^2+\lambda\|\mathbf{y}\|_1=(\mathbf{y}-\mathbf{v})\ +\lambda\mathrm{sign}(\mathbf{y})$$

より

$$\boxed{\hat{y}[m]=\mathcal{T}_\lambda\left(v[m]\right)=\mathrm{sign}(v[m])\cdot(|v[m]|-\lambda)_+}$$

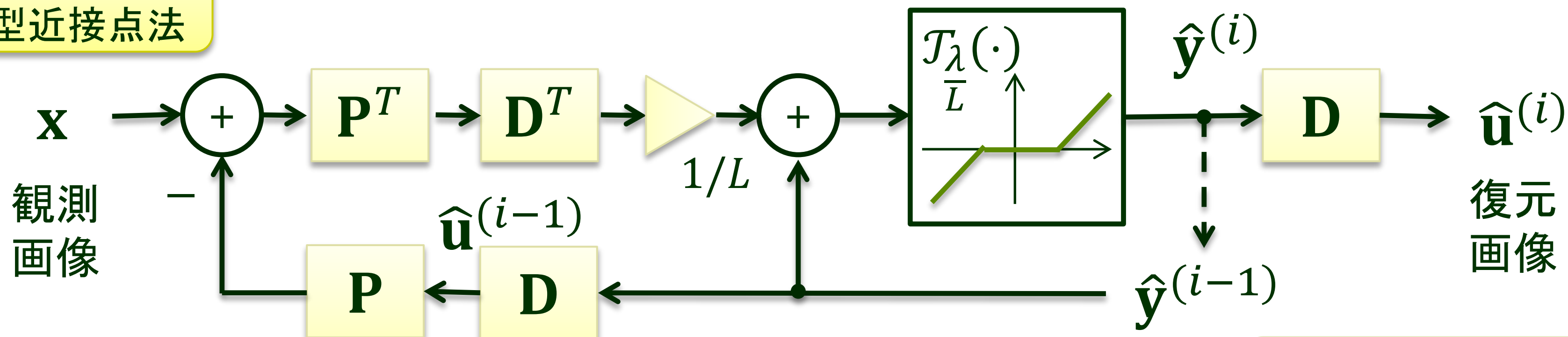


Donoho, Johnstoneらのソフト縮退処理に他ならない

画像復元問題の解法例 — ISTA（繰返し縮退／閾値アルゴリズム）

- $\mathbf{P} \neq \mathbf{I}$, $\mathbf{D}$が一般的な辞書，$\rho(\mathbf{y}) = \|\mathbf{y}\|_1$
  - ISTAにより係数 $\hat{\mathbf{y}}$ の厳密解が得られる

前方-後方
分離型近接点法

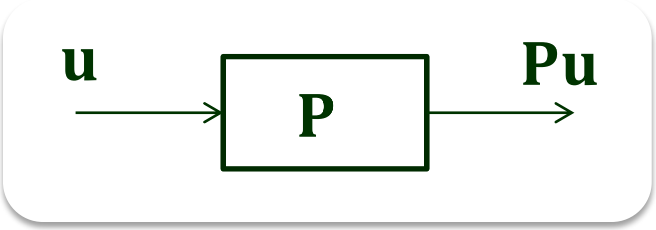


最大固有値は
べき乗法で求まる

  - ソフト縮退処理の一般化と見なせる
  - $\mathbf{D}$がタイトフレーム/直交基底⇒$L = \mathcal{R}\lambda_{\max}(\mathbf{P}^T\mathbf{P})$
  - 演算は簡便で画像データに対して十分適用可

画像信号に対する線形処理（観測過程Pの候補）

- 画像の列ベクトル化に関する留意点
  - 実装上は必ずしも必要ない
  - 表現**Pu**は線形離散作用素**P**による画像**u**の操作
- 線形離散作用素の例
  - （可逆）変換処理
  - 線形フィルタ処理
  - 縮小処理と拡大処理

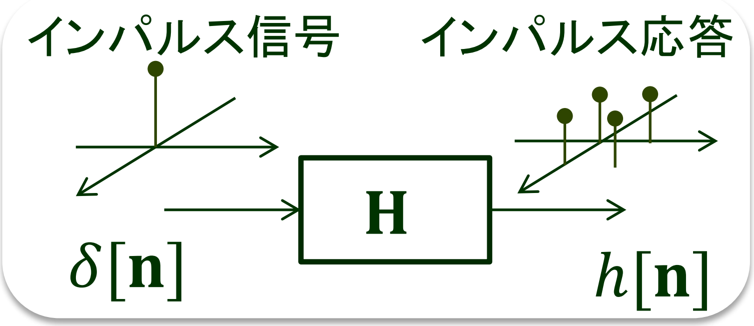


線形フィルタ処理

点拡がり関数(PSF)，手ブレなど

- 二次元畳込み演算

$$y[\mathbf{n}] = \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^2} h[\mathbf{n}-\mathbf{k}]x[\mathbf{k}]$$



- 画像のサポート領域は有限
  - 画像はユークリッド空間$\mathbb{R}^N$の要素 ⇒ 境界処理
  - 境界処理の例：周期拡張，対称拡張
- 境界処理も含めて行列表現が可能 kws25_13

$$\mathbf{y} = \mathbf{H}\mathbf{x}, \qquad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^N, \qquad \mathbf{H} \in \mathbb{R}^{N\times N}$$

  - 行列表現にシフト不変性は不要

線形フィルタの転置（共役作用素）

- 行列$\mathbf{H}$の転置$\mathbf{F}=\mathbf{H}^T$は，インパルス応答$h[\mathbf{n}]$の垂直・水平反転に対応
  - いま，行列$\boldsymbol{H},\boldsymbol{F}$の$k$行$n$列目要素を

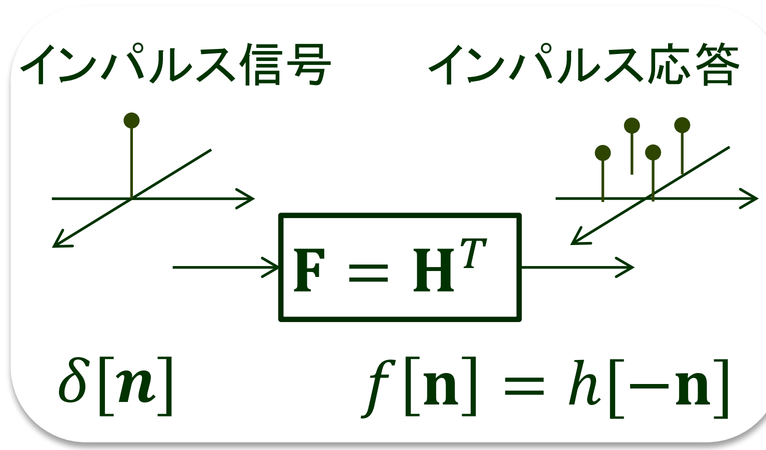
$$\mathbf{H}_{\mathbf{k},\mathbf{n}}=h[\mathbf{n}-\mathbf{k}]$$

$$\mathbf{F}_{\mathbf{k},\mathbf{n}}=f[\mathbf{n}-\mathbf{k}]$$

$\mathbf{k},\mathbf{n}\in\mathbb{Z}^2$とすると，

$$\mathbf{F}_{\mathbf{k},\mathbf{n}}=\mathbf{H}_{\mathbf{n},\mathbf{k}}=h[-(\mathbf{n}-\mathbf{k})]$$

が成り立つ．

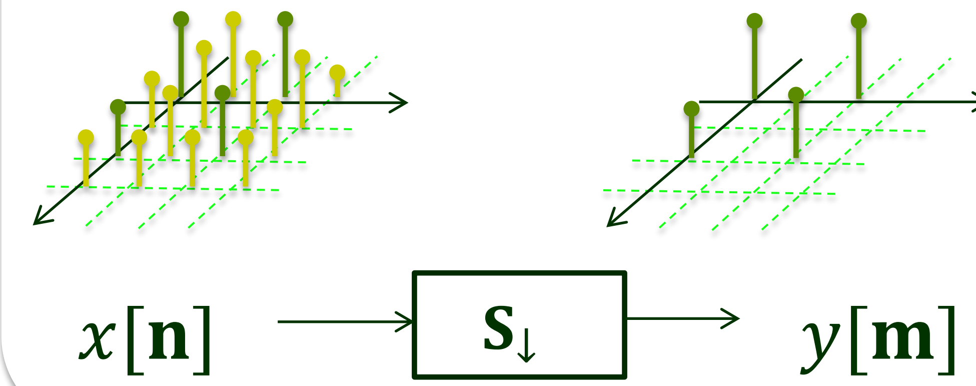


kws25_14

$$\therefore f[\mathbf{n}]=h[-\mathbf{n}]$$

縮小処理

kws25_15



- 間引き処理

$$\mathbf{y} = \mathbf{S}_{\downarrow}\mathbf{x}$$

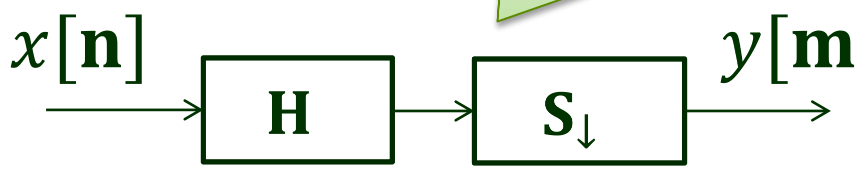
  - 行列Sは単位行列から行ベクトルを間引いたもの
  - 行列表現に間引きの規則性は不要

共役作用素

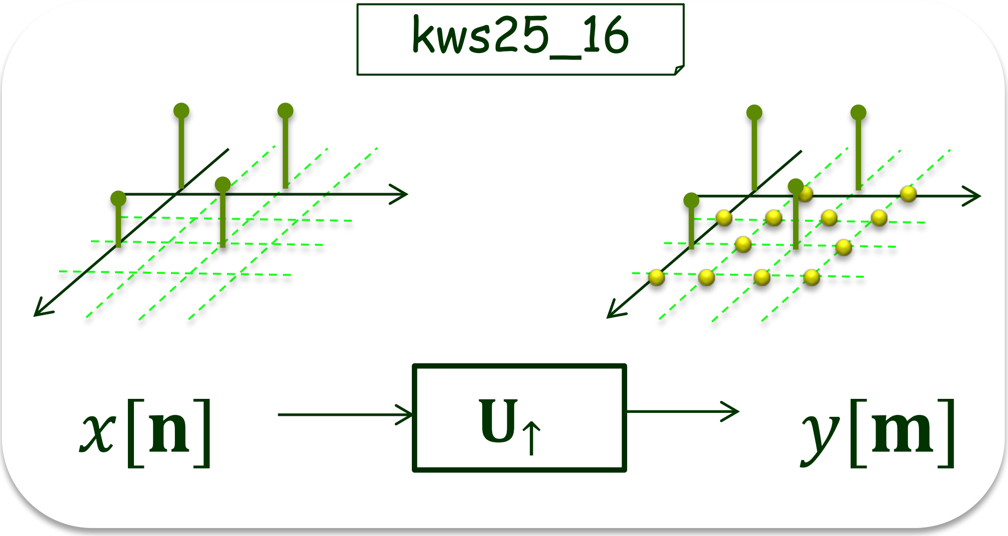
- 行列$\mathbf{S}_{\downarrow}$の転置$\mathbf{U}_{\uparrow} = \mathbf{S}_{\downarrow}^{T}$は零値挿入に対応
- 縮小処理（デシメーション）
  - 間引き処理$\mathbf{S}_{\downarrow}$ × 線形フィルタ$\mathbf{H}$

低解像度の画像取得など

$$\mathbf{y} = \mathbf{S}_{\downarrow}\mathbf{H}\mathbf{x}$$



拡大処理



- 零値挿入処理

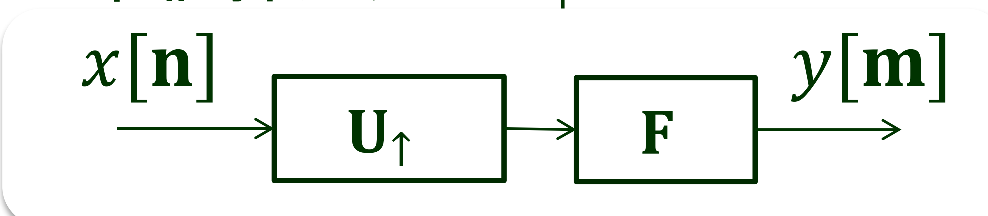
$$\mathbf{y} = \mathbf{U}_\uparrow \mathbf{x}$$

  - 行列$\boldsymbol{U}$は単位行列に零行ベクトルを挿入したもの
  - 行列表現に零値挿入の規則性は不要
- 行列$\mathbf{U}_\uparrow$の転置$\mathbf{S}_\downarrow = \mathbf{U}_\uparrow^T$は間引き処理に対応

共役作用素

- 拡大処理（インタポレーション）
  - 線形フィルタ$\mathbf{F}$ × 零値挿入処理$\mathbf{U}_\uparrow$

$$\mathbf{y} = \mathbf{F}\mathbf{U}_\uparrow \boldsymbol{x}$$



kws25_1

kws25_17

kws25_18

画像復元問題と観測過程

画像復元問題	観測過程　$\mathbf{P}$
ぼけ除去	レンズの点広がり関数や手ブレによるぼけを線形フィルタ $\mathbf{P}=\mathbf{H}$ によりモデル化
超解像	低解像度の観測過程を線形フィルタ$\mathbf{H}$と間引き処理$\mathbf{S}_\downarrow$により $\mathbf{P}=\mathbf{S}_\downarrow\mathbf{H}$ とモデル化
画像修復	画素の欠損を不規則間引き処理$S_\downarrow$と零値挿入処理$\mathbf{S}_\downarrow^T$により$\mathbf{P}=\mathbf{S}_\downarrow^T\mathbf{S}_\downarrow$とモデル化
圧縮センシング	線形シフト変フィルタ$\mathbf{H}$と不規則間引き処理$\mathbf{S}_\downarrow$により観測行列を$\mathbf{P}=\mathbf{S}_\downarrow\mathbf{H}$ とデル化

講演内容

- Wienerフィルタの概要
- 分析処理と合成処理
- 非線形近似とスパース表現
- フレームと基底
- スパース表現の画像処理応用
- 関連技術とまとめ

関連技術

辞書Dの設計
Curvelet，混成DirLOT（Bd1-2-2）など

辞書Dの学習
K-SVDなど

局所的画像パッチを利用
BM3Dなど

非線形モデルへ拡張
カーネル回帰法など

係数毎の設定・適応化：$\boldsymbol{\lambda}^T|\mathbf{y}|$
BayesShrink など

分散
最適化

$$\hat{\mathbf{y}} = \mathrm{argmin}_{\mathbf{y}} \frac{1}{2}\|\mathbf{x} - \mathbf{PDy}\|_2^2 + \lambda\|\mathbf{y}\|_1$$

正則化項の変更
全変動(TV)など
l_pノルム$(p < 1)$

等価：$\lambda = \dfrac{\sigma_w^2}{\phi_y}$

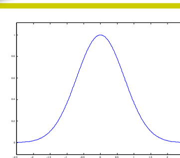
最大事後確率
（MAP）推定

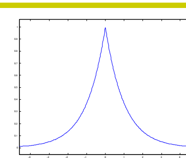
$$p(\mathbf{y}|\mathbf{x}) \propto p(\mathbf{x}|\mathbf{y})p(\mathbf{y}) \propto e^{-\frac{\|\mathbf{w}\|_2^2}{2\sigma_w^2}} \cdot e^{-\frac{\|\mathbf{y}\|_1}{\phi_y}}$$

係数～ラプラス分布
$y[m] \sim \mathcal{L}(0, \phi_y)$

分布を仮定しない
SURE-LETなど

ノイズ～正規分布
$w[n] \sim \mathcal{N}(0, \sigma_w^2)$





まとめ

- 簡便な信号の分析／合成処理からはじめ，画像のスパース表現の有用性について概説した
- 種々の画像復元問題を共通の枠組みで表現し，他の関連技術との関係を整理した
- グレースケール静止画像からの展開も重要である
  - 映像（時間）
  - カラー／マルチスペクトル画像（成分）
  - ステレオ／マルチアレイ画像（位置）
- 本講演が，画像のスパース表現への興味のきっかけとして役立てば幸いである

謝辞

- 本招待講演の機会をいただいた第25 回回路とシステムワークショップ実行委員会Bd分科会の皆様に謝意を申し上げます.