外積代数 と 高次微分形式

電通大数学：山田

V を n 次元 線形空間とする.

$\mathbb{R}^n$ というより，基底 $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ をもつ空間と思って聞くと良い.

$\wedge$ をウェッジという

定義 V の r 次外積代数 $\wedge^r V$ とは

$$v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_r \qquad (\text{各 } v_i \in V)$$

の形の元（r 回ウェッジ）の１次結合の集合に, 次の２種類の同一視を導入した集合である

(1) 多重線形性　　(2) 交代性

説明のため，ウェッジの塊を $\underline{[1]}$, $\underline{[2]}$, $\underline{[3]}$ と表す.

(1) 多重線形性： 各ベクトルについて線形性がある

$$\underline{[1]} \wedge (c_1 v_1 + c_2 v_2) \wedge \underline{[2]} = c_1(\underline{[1]} \wedge v_1 \wedge \underline{[2]}) + c_2(\underline{[1]} \wedge v_2 \wedge \underline{[2]})$$

(2) 交代性： 交代するとマイナスがつく

$$\underline{[1]} \wedge v_i \wedge \underline{[2]} \wedge v_j \wedge \underline{[3]} = - \underline{[1]} \wedge v_j \wedge \underline{[2]} \wedge v_i \wedge \underline{[3]}$$

特に，ウェッジの中に 同じベクトルの対があると 0.

説明：交代性から

$$\begin{aligned} X &= \underline{[1]} \wedge v \wedge \underline{[2]} \wedge v \wedge \underline{[3]} \\ &= -\underline{[1]} \wedge v \wedge \underline{[2]} \wedge v \wedge \underline{[3]} = -X \end{aligned}$$

$X = -X$ なので $2X = 0$, よって $X = 0$. □

例

$$
\begin{aligned}
e_3 \wedge e_2 \wedge e_1 &= -\, e_3 \wedge e_1 \wedge e_2 \\
&= \quad e_1 \wedge e_3 \wedge e_2 \\
&= -\, e_1 \wedge e_2 \wedge e_3
\end{aligned}
$$

行列式の定義 のところで, 交換の符号 sgn（偶置換 $+$, 奇置換 $-$）を学んだだろうか？

$$
\begin{aligned}
&e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \cdots \wedge e_{i_n} \\
&\quad = \mathrm{sgn}\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n \end{pmatrix} e_1 \wedge e_2 \wedge \cdots \wedge e_n
\end{aligned}
$$

互換の積 に表したとき, 偶数個か奇数個か で符号を決める.

外積代数の意味・目的とは...

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$$

- $(a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2) \wedge (c\vec{e}_1 + d\vec{e}_2)$

$$= ac\,\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_1 + ad\,\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2 + bc\,\vec{e}_2 \wedge \vec{e}_1 + bd\,\vec{e}_2 \wedge \vec{e}_2$$

$$= ac\,\underbrace{\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_1}_{0} + ad\,\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2 + bc\,\underbrace{\vec{e}_2 \wedge \vec{e}_1}_{-\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2} + bd\,\underbrace{\vec{e}_2 \wedge \vec{e}_2}_{0}$$

$$= (ad - bc)\,\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2$$

$$= \det \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2$$

行列式 つまり 面積に “関係がある”

- $(a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3) \wedge (b_1 e_1 + b_2 e_2 + b_3 e_3) = ?$

外積代数 と呼ばれる理由

事実 n 次元線形空間 V の r 次外積代数 $\wedge^r V$ は線形空間で,
次元は ${}_nC_r$

$$\dim \wedge^r V = {}_nC_r = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

ただし $0 \le r \le n$.
・$r > n$ のときは $\wedge^r V = \{0\}$.

V の基底 $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ をとれば, $\wedge^r V$ の基底として

$$\wedge^r \mathcal{B} = \{\, e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \cdots \wedge e_{i_r} \,|\, 1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_r \le n \,\}$$

がとれる.

約束 $\wedge^0 V = \mathbb{R}, \quad \wedge^1 V = V$ とみなす.

例　V が3次元で, 基底 $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ をとると,

$$\begin{aligned} \wedge^1 \mathcal{B} &= \{e_1,\ e_2,\ e_3\} && \text{3次元} \\ \wedge^2 \mathcal{B} &= \{e_1 \wedge e_2,\ e_1 \wedge e_3,\ e_2 \wedge e_3\} && \text{3次元} \\ &= \{e_2 \wedge e_3,\ e_3 \wedge e_1,\ e_1 \wedge e_2\} && \text{便利} \\ \wedge^3 \mathcal{B} &= \{e_1 \wedge e_2 \wedge e_3\} && \text{1次元} \end{aligned}$$

例2 V が4次元で, 基底 $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ をとると,

$$\wedge^2 \mathcal{B} = \left\{ \begin{matrix} e_1 \wedge e_2, & e_1 \wedge e_3, & e_1 \wedge e_4, \\ e_3 \wedge e_4, & e_4 \wedge e_2, & e_2 \wedge e_3 \end{matrix} \right\} \quad \text{6次元}$$

例3 V が n 次元のとき, 基底 $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \ldots e_n\}$ に対して

$$\wedge^n \mathcal{B} = \wedge^{\mathrm{top}} \mathcal{B} = \{\ e_1 \wedge e_2 \wedge \cdots \wedge e_n\ \} \quad \text{1次元}$$

例えば V が３次元で, 基底 $\mathcal{B}=\{e_1,e_2,e_3\}$ をとると
$\wedge^2 V$ は３次元で，基底 $\wedge^2\mathcal{B}=\{e_2\wedge e_3,\ e_3\wedge e_1,\ e_1\wedge e_2\}$
をもつので，$\wedge^2 V$ の元は

$$\alpha_1\, e_2\wedge e_3+\alpha_2\, e_3\wedge e_1+\alpha_3\, e_1\wedge e_2$$

$$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\in\mathbb{R}$$

と表される.

一般には n 次元の V に対する $\wedge^r V$ の元は

$$I_r=\{(i_1,\ldots,i_r)\,|\,1\leq i_1<i_2<\cdots<i_r\leq n\ \}$$

とおいて

$$\sum_{(i_1,\ldots,i_r)\in I_r}\alpha_{i_1,\ldots,i_r}\, e_{i_1}\wedge e_{i_2}\wedge\cdots\wedge e_{i_r}$$

ただし $\alpha_{i_1,\ldots,i_r}\in\mathbb{R}$

外積代数の性質： $\xi \in \wedge^i V,\ \eta \in \wedge^j V$ **のとき**

$$\xi \wedge \eta, \quad \eta \wedge \xi \qquad \in \wedge^{i+j} V$$

であるが, 符号が微妙で

$$\boxed{\eta \wedge \xi \; = \; (-1)^{ij} \xi \wedge \eta}$$

例： e_3 **と** $e_1 \wedge e_2 \wedge e_4$ $\qquad (-1)^{1\cdot 3} = -1$

$$\begin{aligned} e_3 \ \wedge \ (e_1 \wedge e_2 \wedge e_4) &= \ \ \underline{e_3 \wedge e_1} \wedge e_2 \wedge e_4 \\ &= -e_1 \wedge \underline{e_3 \wedge e_2} \wedge e_4 \\ &= \ \ e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (e_1 \wedge e_2 \wedge e_4) \ \wedge \ e_3 &= \ \ e_1 \wedge e_2 \wedge \underline{e_4 \wedge e_3} \\ &= -e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_4 \end{aligned}$$

より $\qquad e_3 \wedge (e_1 \wedge e_2 \wedge e_4) = -(e_1 \wedge e_2 \wedge e_4) \wedge e_3$

コベクトルの外積代数 に ベクトル列を代入

n 次元線形空間 V $\Rightarrow$ その双対空間 V^* も n 次元線形空間

V^* の r 次外積代数 $\omega = w_1^* \wedge w_2^* \wedge \cdots \wedge w_r^*$ への
V の r 個の列 $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_r)$ の代入 を

$$
\begin{aligned}
&\omega(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_r) \\
&= (w_1^* \wedge w_2^* \wedge \cdots \wedge w_r^*)(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_r) \\
&= \det \begin{bmatrix} w_1^*(\vec{v}_1) & w_1^*(\vec{v}_2) & \cdots & w_1^*(\vec{v}_r) \\ w_2^*(\vec{v}_1) & w_2^*(\vec{v}_2) & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ w_r^*(\vec{v}_1) & w_r^*(\vec{v}_2) & \cdots & w_r^*(\vec{v}_r) \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

(i, j) 成分は $w_i^*(\vec{v}_j)$

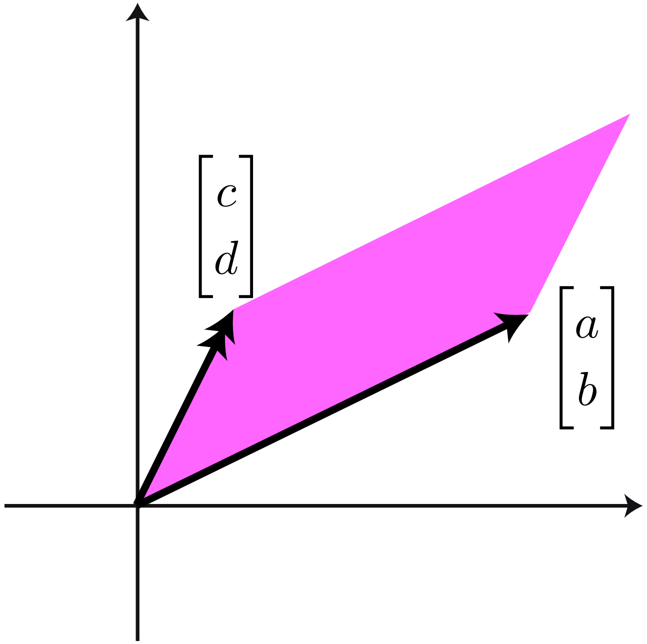
と定め, ω が 1 次結合のときは, 各項に対する線形和をとる.

２次元（平面）で

$$(e_1^* \wedge e_2^*)(a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2, c\vec{e}_1 + d\vec{e}_2)$$

$$= \det \begin{bmatrix} e_1^*(ae_1 + be_2) & e_1^*(ce_1 + de_2) \\ e_2^*(ae_1 + be_2) & e_2^*(ce_1 + de_2) \end{bmatrix}$$

$$= \det \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = ad - bc \in \mathbb{R}$$



$e_1^* \wedge e_2^*$ は

$\left(\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} \right)$ に対して **値** $ad - bc$ を返す.

今度こそ, 真に 符号付の **面積** を測っている.

定理 ω を **多重線形性**と**交代性** で変形しても, ベクトル列を代入した値は変わらない.

例：$\omega = (5e_1^* - 3e_2^*) \wedge (e_1^* + e_2^*)$ に $(e_1 + 2e_2, 3e_1)$ を代入.

(1) そのまま

$$\det \begin{bmatrix} (5e_1^* - 3e_2^*)(e_1 + 2e_2) & (5e_1^* - 3e_2^*)(3e_1) \\ (e_1^* + e_2^*)(e_1 + 2e_2) & (e_1^* + e_2^*)(3e_1) \end{bmatrix}$$

$$= \det \begin{bmatrix} 5 \cdot 1 - 3 \cdot 2 & 5 \cdot 3 \\ 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 & 1 \cdot 3 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} -1 & 15 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} = -48$$

(2) $\omega = (5e_1^* - 3e_2^*) \wedge (e_1^* + e_2^*) = 8e_1^* \wedge e_2^*$ と変形して

$$8 \det \begin{bmatrix} e_1^*(e_1 + 2e_2) & e_1^*(3e_1) \\ e_2^*(e_1 + 2e_2) & e_2^*(3e_1) \end{bmatrix} = 8 \det \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = -48$$

一致した

定理 ω を **多重線形性**と**交代性** で変形しても, ベクトル列を代入した値は変わらない.

説明：理由を一言で言えば

多重線形性と**交代性** は**行列式の性質**に対応しているから.

いよいよ

高次微分形式

$\mathbb{R}^3$ の座標変数は通常 xyz である．が，$x_1x_2x_3$ の方が “わかりやすい” あるいは “伝えやすい” ことがある.
ここでは、場合によって読み替えて使う.

$$\begin{array}{ccc} x_1 & \leftrightarrow & x \\ x_2 & \leftrightarrow & y \\ x_3 & \leftrightarrow & z \end{array}$$

例えば, $\mathrm{div}\overrightarrow{X} = \dfrac{\partial X_1}{\partial x} + \dfrac{\partial X_2}{\partial y} + \dfrac{\partial X_3}{\partial z}$ より

$\mathrm{div}\overrightarrow{X} = \dfrac{\partial X_1}{\partial x_1} + \dfrac{\partial X_2}{\partial x_2} + \dfrac{\partial X_3}{\partial x_3}$ のほうが良い.

対応

1 点における	$\rightsquigarrow$	平面・空間 の各点で
ベクトル	$\rightsquigarrow$	ベクトル場
コベクトル	$\rightsquigarrow$	“コベクトル場”
		$\longrightarrow$ 1 次微分形式
コベクトル の r 次外積	$\rightsquigarrow$	“コベクトル の r 次外積場”
		$\longrightarrow$ r 次微分形式

r 次微分形式 とは,

各点で その点を始点とするコベクトルの r 次外積 が指定されていること

表示法

平面の２次微分形式（$n=2, r=2$ の場合）

$$f(x_1, x_2)dx_1 \wedge dx_2 \quad \text{あるいは} \quad f(x,y)dx \wedge dy \quad \text{の形}$$

空間の２次微分形式（$n=3, r=2$ の場合）

$$X_{12}\,dx_1 \wedge dx_2 + X_{13}\,dx_1 \wedge dx_3 + X_{23}\,dx_2 \wedge dx_3$$

あるいは, 並べ方を変えて

$$X_{23}\,dx_2 \wedge dx_3 + X_{31}\,dx_3 \wedge dx_1 + X_{12}\,dx_1 \wedge dx_2$$

各 X_{ij} は関数 $X_{ij}(x_1, x_2, x_3)$.

xyz 空間では

$$X(x,y,z)\,dy \wedge dz + Y(x,y,z)\,dz \wedge dx + Z(x,y,z)\,dx \wedge dy$$

略して $X\,dy \wedge dz + Y\,dz \wedge dx + Z\,dx \wedge dy$

$n = 5, r = 3$ の場合

$$X_{123}\, dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 + \cdots + X_{345}\, dx_3 \wedge dx_4 \wedge dx_5$$

など

一般には　$I_r = \{(i_1, \ldots, i_r) \mid 1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_r \leq n\}$

$$\sum_{(i_1,\ldots,i_r)\in I_r} X_{i_1,\ldots,i_r}\, dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \cdots \wedge dx_{i_r}$$

ただし $X_{i_1,\ldots,i_r} = X_{i_1,\ldots,i_r}(x_1, x_2, \cdots, x_n)$

これに, 始点が同じ ベクトル r 列 $(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_r)$ を代入する と 値 を返す. （n 次元空間での「r 次元体積」にあたる）

始点 P によって 係数配分 $X_{i_1,\ldots,i_r}$(P) が変化する.

計算例 ：２次微分形式への ２ベクトル列の代入

$$w^* = x\,dy \wedge dz, \quad a = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ at } (4, 2, 3)$$

$$w^*(a, b) = (x\,dy \wedge dz)\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$$

$$\downarrow \text{ at } (4, 2, 3)$$

$$= (4\,dy \wedge dz)\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$$

$$= 4 \det \begin{bmatrix} dy\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}\right) & dy\left(\begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) \\ dz\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}\right) & dz\left(\begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) \end{bmatrix}$$

$$= 4 \det \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad = 4 \cdot 3 \quad = 12$$

計算例２ $w^* = x\,dy \wedge dz - 7y^2 dz \wedge dx,$

$$a = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ at } (4, 2, 3) \text{ の場合}$$

$$\begin{aligned} w^*(a, b) &= (x\,dy \wedge dz)\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) \\ &\quad - (7y^2\,dz \wedge dx)\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) \\ &\quad \downarrow \text{ at } (4, 2, 3) \\ &= (4\,dy \wedge dz)\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) \\ &\quad - (7 \cdot 2^2\,dz \wedge dx)\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) \\ &= 4 \det \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} - 28 \det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} = -128 \end{aligned}$$

微分形式の外微分　d

スカラー場（関数）$\varphi = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ について
外微分 d は

$$d\varphi \;=\; \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} dx_2 + \cdots + \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} dx_n$$

勾配 $\nabla\varphi$ は 外微分 $d\varphi$ と同等

であった.

これを 0 次微分形式の外微分 とみなし，高次の微分形式に拡張する.

予告： 回転 rot $\overrightarrow{X}$ は $*d\widetilde{X}$ と，発散 div $\overrightarrow{X}$ は $*d*\widetilde{X}$ と同等

一般に r 次微分形式

$$\omega = \sum_{(i_1,\ldots,i_r)\in I_r} X_{i_1,\ldots,i_r}\, dx_{i_1}\wedge dx_{i_2}\wedge\cdots\wedge dx_{i_r}$$

$$I_r = \{(i_1,\ldots,i_r)\,|\,1\le i_1<i_2<\cdots<i_r\le n\,\}$$

に対して, $r+1$ 次微分形式 ω の **外微分** $d\omega$ を

$$d\omega = \sum_{j=1}^{n}\sum_{(i_1,\ldots,i_r)\in I_r}\frac{\partial X_{i_1,\ldots,i_r}}{\partial x_j}\, dx_j\wedge dx_{i_1}\wedge dx_{i_2}\wedge\cdots\wedge dx_{i_r}$$

で定める.

メモ：j が $i_1, i_2, \ldots, i_r$ のいずれかに一致する項 は消える.

$\Rightarrow$ 計算を省略して良い.

平面 で１次 $(n=2, r=1)$ の場合

１次微分形式 $\mu = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$（略して $Pdx + Qdy$）に対して $d\mu$ は２次微分形式で

$$
\begin{aligned}
d\mu &= \frac{\partial P}{\partial x} dx \wedge dx + \frac{\partial P}{\partial y} dy \wedge dx \\
&\qquad\qquad + \frac{\partial Q}{\partial x} dx \wedge dy + \frac{\partial Q}{\partial y} dy \wedge dy \\
&= \frac{\partial P}{\partial y} \underbrace{dy \wedge dx}_{= -dx \wedge dy} + \frac{\partial Q}{\partial x} dx \wedge dy \\
&= \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \wedge dy
\end{aligned}
$$

グリーンの定理 に現れる形

空間 で１次 $(n=3, r=1)$ の場合

１次微分形式 $\mu = X(x,y,z)dx + Y(x,y,z)dy + Z(x,y,z)dz$
略して

$$\mu = X\,dx + Y\,dy + Z\,dz$$

に対して $d\mu$ は２次微分形式で

$$\begin{aligned} d\mu = \quad & \frac{\partial X}{\partial x}\,dx \wedge dx + \frac{\partial X}{\partial y}\,dy \wedge dx + \frac{\partial X}{\partial z}\,dz \wedge dx \\ & + \frac{\partial Y}{\partial x}\,dx \wedge dy + \frac{\partial Y}{\partial y}\,dy \wedge dy + \frac{\partial Y}{\partial z}\,dz \wedge dy \\ & + \frac{\partial Z}{\partial x}\,dx \wedge dz + \frac{\partial Z}{\partial y}\,dy \wedge dz + \frac{\partial Z}{\partial z}\,dz \wedge dz \\ = \cdots & \end{aligned}$$

結果　rot と似たもの が現れる！

$$\mu = X\,dx + Y\,dy + Z\,dz$$

に対して

$$\begin{aligned} d\mu = &\left(\frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y}\right) dy \wedge dz \\ &+ \left(\frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z}\right) dz \wedge dx \\ &+ \left(\frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x}\right) dx \wedge dy \end{aligned}$$

計算例　　1 次微分形式

$$\mu = z^2\,dx + e^{3x}\sin y\,dy - xyz\,dz$$

の外微分

$$d\mu = \frac{\partial X}{\partial x}\,dx \wedge dx + \frac{\partial z^2}{\partial y}\,dy \wedge dx + 2z\,dz \wedge dx$$

$$+\,3e^{3x}\sin y\,dx \wedge dy + \frac{\partial Y}{\partial y}\,dy \wedge dy + \frac{\partial Y}{\partial z}\,dz \wedge dy$$

$$-\,yz\,dx \wedge dz - \;xz\,dy \wedge dz + \frac{\partial Z}{\partial z}\,dz \wedge dz$$

$$-dz \wedge dx$$

$$= \cdots$$

$$= -xz\,dy \wedge dz + (yz + 2z)\,dz \wedge dx + 3e^{3x}\sin y\,dx \wedge dy$$

後のため，この２次微分形式を ω $(= d\mu)$ とおく

「積の外微分」の公式：

ξ が i 次微分形式，η が j 次微分形式 のとき

$\xi \wedge \eta$ は $i + j$ 次微分形式

になる．その外微分（ライプニッツ則）は 符号が微妙で

$$\boxed{d(\xi \wedge \eta) \ = \ (d\xi) \wedge \eta + (-1)^i \xi \wedge (d\eta)}$$

外微分に関する最も重要な性質

$$d \circ d = 0$$

２回 外微分すると消える

$\boldsymbol{d \circ d = 0}$ の理由は, 次の２つ

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$$

$$dx_j \wedge dx_i = -dx_i \wedge dx_j$$

計算例　２次微分形式

$$\omega = -zx\,dy\wedge dz + (yz+2z)\,dz\wedge dx + 3e^{3x}\sin y\,dx\wedge dy$$

の外微分　　　さっきの $\omega = d\mu$

$$d\omega = \frac{\partial(-xz)}{\partial x}\,dx\wedge dy\wedge dz + \frac{\partial(yz+2z)}{\partial y}\,\underbrace{dy\wedge dz\wedge dx}_{dx\wedge dy\wedge dz}$$

$$+ \frac{\partial(3e^{3x}\sin y)}{\partial z}\,\underbrace{dz\wedge dx\wedge dy}_{dx\wedge dy\wedge dz}$$

$$= 0$$

さっきの計算 $\omega = d\mu$ と合わせて　$d(d\mu) = 0$　となっている.

$d\circ d = 0$ の確認にもなった.

ここまで.