算数を教えるのに必要な数学的素養

――「2×3か3×2」の数学――

伊藤　武広・荻上　紘一*・原田　　実**

1.　序

小学校2年の算数でかけ算の導入の際に

（☆）「3枚の皿にリンゴが2個ずつのっている時全部でリンゴが何個あるか」

という類の問題が扱われる。これに関して著者の1人は次の様な経験を持つ。

著者の長男が2年生の時上記の問題に対して

「3×2＝6」

と解答したところ，担任教師は「答えの6は正しいけれども，式は3×2ではなく2×3でなければならない」と指導した。長男は「そういうものか」と思ったようであるが，著者は早速担任教師にその理由を質問してみた。担任教師と著者とのやりとりは概略次のような内容であった。

教師「リンゴが2個ずつのっている皿が3枚あるから2個＋2個＋2個即ち2個の3倍，従って2個×3＝6個である。2＋2＋2は2の3倍即ち2×3であって3の2倍即ち3×2ではない。これを同数累加という。」

著者「2＋2＋2を日本語では2の3倍というから2×3でなければならないというのであれば，英語では3 times 2だから3×2が自然である。私の子供は帰国子女だからごく自然に3×2と考えたのだと思う」

教師「2（リンゴの個数）が被乗数，3（皿の枚数）が乗数でそれぞれ違う意味をもっている（立場が違う）から2×3と3×2は同じではない」

著者「2と3を違う立場の数と考えるということは，整数環Zの内部演算としての積ではなくZ－加群としての作用を考えていることになる。」

教師「？？？？？」

著者「日本語は右Z－加群的であり英語は左Z－加群的である。更に，〝かけ算〟は環Zの内部演算としての積，左Z－加群としての作用，右Z－加群としての作用という3つの意味をもっている」

教師「？？？？？」

・・・・・・・・・

教師「3年生になれば交換法則を教えるから問題はなくなるでしょう」

---

* 東京都立大学理学部（数学）

** 東京学芸大学（数学）

著者「交換法則というのは環Ｚの内部演算としての積に関する概念であってＺ—加群としての作用に関するものではない」

残念ながらこの教師は，整数環Ｚの代数的構造など全く理解せずに算数を〝自信をもって〟教えていたのである。それは当人の不勉強のせいかも知れないが，彼（又は彼女）が受けた大学教育が悪かったのかも知れない。

算数教育においては，〝教え方〟が重視されることが多いようであるが，教え方云々はあくまでも〝数学を十分に理解している〟ことが大前提である。「算数を教えるのに大学で学ぶ代数学や幾何学等を知っていても役にたたない」と思っているとしたらとんでもないことで，小学校で教える算数と大学で学ぶ数学とは〝同じもの〟である。従って，算数教育の基本は数学を理解することである。言い替えれば，良い算数教師であるための必要条件は数学を十分に理解していることである。

本稿の目的は，小学生に算数を教える教師に要求される最小限の数学的素養を例示することである。

2.　環と環の作用をもつ加群

念のため環と作用域をもつ加群の概念を復習する。

定義1.　空でない集合Ｍにおいて，加法$M\times M\ni(a,\ b)\longrightarrow a+b\in M$が定義されていて次の条件を満たすとき，Ｍを加群という：

(Ｍ１)　$a+b=b+a$

(Ｍ２)　$(a+b)+c=a+(b+c)$

(Ｍ３)　任意のa，bに対して$a+x=b$がただ１つの解をもつ。

例えば，整数全体の集合Ｚは通常の加法に関して加群をなす。

定義2.　空でない集合Ａにおいて，加法$A\times A\ni(a,\ b)\longrightarrow a+b\in A$と乗法$A\times A\ni(a,\ b)\longrightarrow ab\in A$が定義されていて次の条件を満たすとき，Ａを環という：

(Ｒ１)　Ａは加法に関して加群である

(Ｒ２)　$(ab)c=a(bc)$

(Ｒ３)　$a(b+c)=ab+ac$，$(b+c)a=ba+ca$。

特に，乗法が交換法則を満たすときＡを可換環という。

例えば，Ｚは通常の加法と乗法に関して可換環をなす。

定義3.　環Ａと加群Ｍが与えられ，ＡのＭへの作用$A\times M\ni(a,\ x)\longrightarrow ax\in M$が定義されていて次の条件を満たすとき，Ｍを左Ａ—加群という：

(ＬＭ１)　$a(x+y)=ax+ay$

(ＬＭ２)　$(ab)x=a(bx)$

(ＬＭ３)　$(a+b)x=ax+bx$

(ＬＭ４)　Ａが乗法に関する単位元１をもてば$1x=x$が成り立つ。

同様にＡのＭへの作用$M\times A\ni(x,\ a)\longrightarrow xa\in M$が定義されていて次の条件を満たすとき，Ｍを右Ａ—加群という：

(RM 1)　$(x+y)a = xa + ya$

(RM 2)　$x(ab) = (xa)b$

(RM 3)　$x(a+b) = xa + xb$

(RM 4)　Aが乗法に関する単位元1をもてば$x1 = x$が成り立つ。

注．環Aはその積演算をAのAへの作用とみなすことにより左A一加群ありかつ同時に右A一加群でもある。

3．Zの積演算とZ一加群としての作用

整数全体の集合をZで表わす。Zは通常の加法と乗法に関して可換環の構造をもつ。積演算によりZは左Z一加群でありかつ同時に右Z一加群でもある。即ち，Zにおける乗法$Z\times Z \ni (m, n) \longrightarrow mn \in Z$は3つの意味をもっている：(i)環の内部演算としての積 (ii) 左Z一加群としての作用 (iii) 右Z一加群としての作用。(i)ではmとnは〝対等〞で$m\times n$，((ii) ではm times n即ちnのm倍 (iii) ではmのn倍即ちn times mである。

このことを問題（☆）に即して述べれば次のようになる：問題（☆）においてはリンゴの個数と皿の枚数はそれぞれ違う意味をもっていると考えられているから，そこで教えようとしているかけ算はZの内部演算としての積ではなく左Z一加群又は右Z一加群としての作用である。

リンゴの個数の集合Zに皿の枚数の集合Zが作用している。分かりやすくするために皿の枚数の集合をZ_0で表わすことにすれば，「$3\times 2 = 6$」とするのは左Z_0一加群としてのZ_0のZへの作用$Z_0\times Z \ni (3, 2) \longrightarrow 3\times 2 = 6 \in Z$であり，「$2\times 3 = 6$」とするのは右$Z_0$一加群としての$Z_0$のZへの作用$Z\times Z_0 \ni (2, 3) \longrightarrow 2\times 3 = 6 \in Z$である。この時，右$Z_0$一加群と考える（即ち，$2\times 3$）のは正しいが左$Z_0$一加群と考える（即ち，$3\times 2$）のは正しくないという根拠は全くないのである。何故ならば，Zは可換環であるから，§2の注に記したように，Zの内部演算としての積，左Z一加群としての作用，右Z一加群としての作用は全て同じものと考えられるのである。

参考文献

[1]　数学辞典（第3版），岩波書店

(1993年4月21日　受理)