不平等の測度

―理論と応用―

野村　友和

はじめに

内容と目標：

- 所得や貯蓄などの不平等を表す測度の特徴および計算方法について理解する。
- **p.20** 以降は統計分析の範囲を超えるので授業では扱わないが，この分野に興味のある大学院生は読んでおくこと。

この資料の内容は主に，

- **Amartya Sen, "On Economic Inequality", Oxford University Press, 1973**
  （邦訳）鈴村興太郎･須賀晃一（訳）『不平等の経済学』，東洋経済新報社，**2000** 年
- 青木昌彦（著）『分配理論』，筑摩書房，**1979** 年

に基づくので，さらに詳しく知りたい方などは参考にすること。

客観的測度と規範的測度

- 客観的測度：客観的な意味で不平等の程度を表現する測度。
- 規範的測度：社会厚生に関わる規範的な観念に即して不平等を表現する測度。
  →不平等の程度が高いほど，社会的な厚生のレベルは低い。
  （個人の効用関数についての限界効用逓減と，社会厚生関数が個人の効用の総和として表されるという前提）

多数の個人からなる社会において，だれとだれの間の不平等を重視するかということは，人によって，あるいは場合によって異なる。
→不平等の程度を純粋に客観的に捉えるということは困難。
→客観的な指標であっても，なんらかの規範的な側面が含まれている。

どちらの社会や分配が不平等かということは，どの測度を用いるかによって変化する。
→いずれかの測度を選んで用いるということは，必然的に規範的な判断（どのような社会厚生関数を想定するか）を伴っていることに注意が必要。

範囲

$y_i (i = 1, \cdots, n)$ を個人 i の所得とし，$y_1 \geq y_2 \geq \cdots \geq y_n$ とする。
また，平均所得を μ と表す。

範囲（**range**）は以下で定義される：

$$R = (\max_i y_i - \min_i y_i)/\mu = (y_1 - y_n)/\mu \qquad (1)$$

範囲は最大と最小のみに依存し，その間の分布がどのように変化しても変化しない。
→最大値・最小値に関わらない所得移転にまったく反応しない。

Pigou-Daltonの移転原理：
相対的に貧しい個人から裕福な個人への所得移転が必ず不平等度を大きくする。
→相対的に裕福な個人から貧しい個人への所得順位を逆転しない所得移転（**PD**移転）は必ず不平等度を改善する。
→範囲はこの直感と整合的な条件（**PD**条件）を満たさない。

相対平均偏差

相対平均偏差は以下で定義される：

$$M = \frac{1}{n\mu}\sum_{i=1}^{n}|\mu - y_i| \tag{2}$$

すべての個人が同じ所得を得ている場合には，$M = 0$ となり，1 人がすべての所得を得ている場合には，$M = 2(n-1)/n$ となる。

相対平均偏差は，平均よりも高い（低い）所得を得ている個人の間の所得移転にまったく反応しない。
→**PD** 条件を満たさない。

分散と変動係数

分散は以下で定義される：

$$V = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\mu - y_i)^2 \tag{3}$$

分散は，相対平均偏差と異なり，平均から離れた水準における所得格差ほど（二乗されることにより）強調される。
→**PD**条件を満たす。

分散は平均所得の水準に依存する（平均が大きくなれば分散も大きくなる傾向がある）ので，相対的なばらつきを測定する変動係数が用いられる：

$$CV = \frac{V^{\frac{1}{2}}}{\mu} \tag{4}$$

分散・変動係数ともに同額の所得移転による変化は所得水準に依存せず一定。
→「相対的に貧しい個人への所得移転に対してより敏感に反応する方が望ましい」と考えることもできる（感応性の条件）。

対数標準偏差

対数標準偏差は以下で定義される：

$$H = \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (\log \mu - \log y_i)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \tag{5}$$

幾何平均をμとして用いれば対数標準偏差は$\log y$の標準偏差となる。
→所得分配の文脈ではμとして算術平均が用いられる方が一般的。

分散と異なり，対数標準偏差は単位や数値の絶対水準に依存しない測度。また，同額の所得移転による変化は所得水準が低いほど大きくなる。
→相対的に貧しい個人間での所得格差を重視。
→感応性の条件を満たす。

高い所得水準においては，貧しい個人から裕福な個人に対する所得移転により対数標準偏差が減少する場合がある。
→対数標準偏差はPD条件を満たさない。

相対平均格差とジニ係数

相対平均格差は，すべての個人間の組み合わせにおける所得格差の絶対値の算術平均:

$$RMD = \frac{1}{n^2\mu}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|y_i - y_j| \tag{6}$$

ジニ係数は，相対平均格差の二分の一。
→ローレンツ曲線と45度線の間の面積の二倍と等しい*。

$$\begin{aligned} G &= \frac{1}{2n^2\mu}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|y_i - y_j| & (7)\\ &= 1 - \frac{1}{n^2\mu}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\min(y_i, y_j) & (8)\\ &= 1 + \frac{1}{n} - \frac{2}{n^2\mu}(y_1 + 2y_2 + \cdots + ny_n) & (9) \end{aligned}$$

*証明は鈴村・須賀によるA. センの邦訳p.38の脚注２を参照

ジニ係数の解釈と特徴

(7) 式：個人間の組み合わせ（ペア）において相対的に貧しい個人が所得格差に憂鬱を感じており，その憂鬱の程度が所得格差の大きさに比例的であれば，すべてのペアの憂鬱の合計がジニ係数。
(8) 式：ペアの厚生を二人のうち所得の低い方の個人の厚生とし，社会厚生をすべてのペアの厚生の合計とすれば，ジニ係数の背後にある社会厚生関数を得る。
(9) 式：ジニ係数は所得順位で加重した各個人の所得シェアの和。

相対平均偏差，分散，変動係数，対数標準偏差はいずれも平均との差を用いた測度。
→相対平均格差およびジニ係数はすべての個人のペアにおける所得格差を考慮。

ジニ係数は，分散や変動係数のように平均との偏差の二乗という恣意的な手続きを行うことなく，**PD** 条件を満たす。

所得移転によりジニ係数がどのように変化するかは，移転が行われる個人の所得水準ではなく順位に依存（i 番目の個人と j 番目の個人との間の代替率は i/j）。
→感応性の条件を満たさない。

タイルのエントロピー測度

確率xで生じる事象が実際に生じたときの情報価値$h(x)$はxの減少関数。
→$h(x) = \log \frac{1}{x}$で表されるとする。

ある状況における期待情報価値（エントロピー）は：

$$H(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i \log \frac{1}{x_i} \tag{10}$$

エントロピーはすべての事象が等確率で生じる場合に最大値$\log n$をとる。

確率x_iを個人iの所得シェアと見立てれば完全平等の場合にエントロピーが$\log n$となるので，$\log n$から所得分布のエントロピー$H(x)$を引けば不平等の測度となる。
→タイル尺度：

$$T = \log n - H(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i \log n x_i \tag{11}$$

タイル尺度の特徴

タイル尺度はPD条件を満たすが，感応性の条件は満たさない。
→しかし，所得移転による反応は所得移転が行われる個人間の所得格差が大きい場合ほど大きい。

タイル尺度で不平等度を順序づけるということは，複数の所得分配を以下の社会厚生関数で順序づけることと同じ。

$$W(x_1, \cdots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i \log \frac{1}{x_i} \tag{12}$$

→個人の厚生関数が$x_i \log \frac{1}{x_i}$に比例的であるというのは，あまり直感的ではない。

タイル尺度は，不平等をグループ内の不平等とグループ間の不平等とに分解できる。

タイル尺度の分解

社会がグループ $\boldsymbol{M}$ とグループ $\boldsymbol{F}$ から成り，各グループの所得分配が
$\mathrm{x}^{\boldsymbol{M}} = (\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_{\boldsymbol{m}})$，$\mathrm{x}^{\boldsymbol{F}} = (\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{m}+1}, \cdots, \boldsymbol{x}_{\boldsymbol{n}})$ であるとする。

このとき，全社会，グループ $\boldsymbol{M}$，グループ $\boldsymbol{F}$ における不平等度は：

$$\boldsymbol{T}(\mathrm{x}) = \log \boldsymbol{n} + \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{x}_i \log \boldsymbol{x}_i \tag{13}$$

$$\boldsymbol{T}(\mathrm{x}^{\boldsymbol{M}}) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\boldsymbol{x}_i}{\boldsymbol{m}\boldsymbol{\mu}^{\boldsymbol{M}}} \log \frac{\boldsymbol{x}_i}{\boldsymbol{\mu}^{\boldsymbol{M}}} \tag{14}$$

$$\boldsymbol{T}(\mathrm{x}^{\boldsymbol{F}}) = \sum_{i=m+1}^{n} \frac{\boldsymbol{x}_i}{(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{m})\boldsymbol{\mu}^{\boldsymbol{F}}} \log \frac{\boldsymbol{x}_i}{\boldsymbol{\mu}^{\boldsymbol{F}}} \tag{15}$$

ここで，$\boldsymbol{\mu}^{\boldsymbol{M}}, \boldsymbol{\mu}^{\boldsymbol{F}}$ はそれぞれグループ $\boldsymbol{M}$，グループ $\boldsymbol{F}$ における所得シェアの平均である。

グループ M とグループ F のグループ間の不平等を，各グループ内においては全員が同じ所得（各グループの平均所得）を得ている場合の不平等度とすれば：

$$T(\mu^M, \mu^F) = \log n + m\mu^M \log \mu^M + (n - m)\mu^F \log \mu^F \qquad (16)$$

全社会の不平等，各グループ内の不平等，グループ間の不平等について，以下が成立する。

$$T(\mathrm{x}) = m\mu^M T(\mathrm{x}^M) + (n - m)\mu^F T(\mathrm{x}^F) + T(\mu^M, \mu^F) \qquad (17)$$

グループが **3** つ以上であっても，同様の分解が可能。

平均対数偏差

タイル尺度と同様に分解が可能な不平等の測度として，平均対数偏差がある：

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\log \bar{y} - \log y_i) & (18) \\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\log \frac{\bar{y}}{y_i}\right) & (19) \\ &= \log \bar{y} - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\log y_i} & (20) \end{aligned}$$

ν_k，I_k をそれぞれ第 k グループの比率，平均対数偏差とし，λ_k を第 k グループの平均所得と総人口の平均所得の比率とすれば，平均対数偏差は以下のように分解できる。

$$I = \sum_k \nu_k I_k + \sum_k \nu_k \log \frac{1}{\lambda_k} \tag{21}$$

ここで，右辺第一項はグループ内の不平等，第二項はグループ間の不平等となる。

平均対数偏差の変化の要因分解

Mookherjee and Shorrocks (1982)*は平均対数偏差のt期から$t+1$期の変化を以下のように分解した。

$$\begin{aligned} \Delta I &= I^{t+1} - I^{t} \\ &= \Delta\left(\sum_k \nu_k I^k\right) - \Delta\left(\sum_k \nu_k \log \lambda_k\right) \\ &= \sum_k \nu_k^t \Delta I_k + \sum_k I_k^{t+1} \Delta \nu_k - \sum_k \log \lambda_k^{t+1} \Delta \nu_k - \sum_k \nu_k^t \Delta \log \lambda_k \end{aligned} \tag{22}$$

ここで，右辺第一項はグループ内不平等の変化による効果，第二・三項はグループ構成比の変化による効果，第四項は各グループの相対所得の変化による効果と解釈できる。

*D. Mookherjee and A. Shorrocks (1982), "A Decomposition Analysis of the Trend in UK Income Inequality", *Economic Journal*, Vol.92, No.368: 886-902

(22) 式の分解では，ν_k については t 期の，I_k, λ_k については $t+1$ 期の値をウェイトとして用いたが，t 期と $t+1$ 期の平均を用いて分解する方が適切である。

$$\Delta I = \sum_k \bar{\nu}_k \Delta I_k + \sum_k \bar{I}_k \Delta \nu_k - \sum_k \overline{\log \lambda_k} \Delta \nu_k - \sum_k \bar{\nu}_k \Delta \log \lambda_k \tag{23}$$

さらに，λ_k ではなく，μ_k の変化の効果を特定するため，$\theta_k = \nu_k \lambda_k$（第 k グループの所得シェア）とおけば，**(22)** 式の右辺第四項は，

$$\begin{aligned} -\sum_k \bar{\nu}_k \Delta \log \lambda_k &= \sum_k \bar{\nu}_k \Delta \log \left(\sum_l \nu_l \mu_l / \mu_k \right) \\ &= -\log \left[1 - \sum_k \lambda_k^{t+1} \Delta \nu_k \right] + \log \left[1 + \sum_k \theta_k^t \Delta \mu_k / \mu_k^t \right] \\ &\quad - \sum_k \bar{\nu}_k \Delta \log \mu_k \qquad (24) \\ &\simeq \sum_k \bar{\lambda}_k \Delta \nu_k + \sum_k (\bar{\theta}_k - \bar{\nu}_k) \log \mu_k \qquad (25) \end{aligned}$$

結局，**(22)** 式は以下のように書き換えることができる。

$$\Delta I = \sum_k \bar{\nu}_k \Delta I_k + \sum_k \bar{I}_k \Delta\nu_k + \sum_k (\bar{\lambda}_k - \overline{\log\lambda_k})\Delta\nu_k + \sum_k (\bar{\theta}_k - \bar{\nu}_k)\Delta\log\lambda_k \tag{26}$$

右辺第一項はグループ内不平等の変化の効果，第二・三項はグループ構成比の変化の効果，第四項は各グループの平均所得の相対的な変化（グループ間不平等の変化）の効果と解釈できる。

Mookherjee and Shorrocks (1982) は **1965** 年から **1980** 年までのイギリスの家計所得の不平等を分析。

平均対数偏差の変化の要因分解を用いて日本の不平等を分析した研究としては，小塩 **(2005)***，経済財政白書（**2006**，**2009** 年度版）がある。また，大竹 **(2005)**†は対数分散を用いて同様の分解により日本の不平等を分析している。

*小塩隆士『社会保障の経済学（第３版）』日本評論社

†大竹文雄 (2005)『日本の不平等–格差社会の幻想と未来–』日本経済新聞社

アトキンソン尺度

社会厚生を以下のように個人の厚生の和と定義する：

$$W(\mathrm{y}) = \sum_{i=1}^{n} u(y_i) \tag{27}$$

与えられた所得分配と同水準の社会厚生を最も少ない総所得で達成するためには：

$$\sum_{i=1}^{n} u(y_i) = nu(y_e) \tag{28}$$

となるような y_e を均等に分配すればよい。これを，均等分配所得と呼ぶ。

実際の平均所得 μ と均等分配所得 y_e の差を，不平等により社会が負担する費用（損失）と考えることができる。

アトキンソン尺度：

$$A(\mathrm{y}) = \frac{\mu - y_e}{\mu} \tag{29}$$

実際には個人の効用関数として，以下のような関数形が用いられる。

$$u(y)=\begin{cases} a+b\frac{y^{1-\varepsilon}}{1-\varepsilon} & (\varepsilon\neq 1,\varepsilon>0) \\ \log y & (\varepsilon=1) \end{cases} \tag{30}$$

$\varepsilon\neq 1$ のとき，均等配分所得は $y_e=\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}y_i^{1-\varepsilon}\right)^{\frac{1}{1-\varepsilon}}$ であり，

$$A(\mathrm{y})=1-\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{y_i}{\mu}\right)^{1-\varepsilon}\right]^{\frac{1}{1-\varepsilon}} \tag{31}$$

$\varepsilon=1$ のときは，

$$A(\mathrm{y})=1-\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}\frac{y_i}{\mu}} \tag{32}$$

パラメータ ε が大きいほど，低所得者が重視される。

各測度の比較

どの測度を用いて不平等を計測すべかを考える際に着目すべき点：

1. **Pigou-Dalton** 条件を満たすか。
2. 全員の所得を等倍したときに，不平等度はどのように変化するか。
3. 全員に同じ金額の所得を加えたときに，不平等度はどのように変化するか。
4. 全人口を，任意の所得を受け取っている個人が等倍になるよう増加させたとき，不平等度はどのように変化するか。

	1	2	3	4
範囲	×	↑	→	→
相対平均偏差	×	→	↓	→
分散	○	→	→	→
変動係数	○	→	↓	→
対数標準偏差	×	→	↓	→
ジニ係数	○	→	↓	→
タイル尺度	○	→	↓	→
アトキンソン尺度	○	→	↓	→

一般化エントロピー

不平等の測度の多くはエントロピー測度として一般化することが可能*：

$$
GE(\alpha) = \begin{cases} \dfrac{1}{n\alpha(1-\alpha)} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \left[\left(\frac{y_i}{\bar{y}} \right)^{\alpha} - 1 \right] & (\text{for } \alpha \neq 0, 1) \\ \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \left[\frac{y_i}{\bar{y}} \log \left(\frac{y_i}{\bar{y}} \right) \right] & (\text{for } \alpha = 1) \\ \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \log \left(\frac{\bar{y}}{y_i} \right) & (\text{for } \alpha = 0) \end{cases} \tag{33}
$$

$GE(\alpha)$ は α が 0 に近づくほど低所得者層の，1 に近づくほど高所得者層の所得変化に敏感に反応する。

*一般化エントロピーに関する記述は，J. B. Davies and D. A. Green and H. J. Paarsch (1998), "Economic Statistics and Social Welfare Comparisons: A Review" in A. Ullahh and D. E. A. Giles eds., *Handbook of Applied Economic Statistics*, chap.1, Marcel Dekker に基づく。

$GE(\alpha)$は$\alpha = 0$のとき平均対数偏差，$\alpha = 1$のときタイル尺度となる。また，$\alpha = 2$のときは変動係数の２乗の半分となる。

アトキンソン尺度において，$1 - \varepsilon = \alpha$とおけば：

$$A(\mathrm{y}) = \begin{cases} 1 - [\alpha(1-\alpha)GE(\alpha) + 1]^{\frac{1}{\alpha}} & (\text{for } \alpha < 1, \alpha \neq 0) \\ \\ 1 - \exp(-GE(\alpha)) & (\text{for } \alpha = 0) \end{cases} \tag{34}$$

となることから，アトキンソン尺度も一般化エントロピーに変換することが可能であることがわかる。

一般化エントロピーに属する不平等の測度は，どれも対称性と移転原理を満たす平均独立な測度であり，しかも母集団をいくつかのサブ・グループに分割したとき，サブ・グループ内での不平等とサブ・グループ間の不平等に分解することが可能である。

さらに，分解が可能な不平等の測度は必ず一般化エントロピーの正の変換で表される。

ただし，ジニ係数は一般化エントロピーとは異なる概念（一般化エントロピーでは所得の順位は関係ないが，ジニ係数では所得の順位が重要）。

ローレンツ準順序とPD移転原理

人口および総所得が同じ所得分配$\mathbf{x}$と$\mathbf{y}$について，$\mathbf{x}$のローレンツ曲線が$\mathbf{y}$のローレンツ曲線よりも厳密に内側にあるとき，$\mathbf{x}$は$\mathbf{y}$にローレンツ優越するといい，$\mathbf{x} \prec_L \mathbf{y}$と書く。

ローレンツ曲線が互いに交差していれば，$\mathbf{x} \prec_L \mathbf{y}$とも$\mathbf{y} \prec_L \mathbf{x}$ともいえない。
→ローレンツ曲線による不平等の表現は，完備性を満たさない準順序。

[定理]：所得分配$\mathbf{x}$と$\mathbf{y}$について，次の二つの条件は同値である。

- $\mathbf{x} \prec_L \mathbf{y}$
- $\mathbf{x}$は$\mathbf{y}$から有限回の**PD**移転によって実現することができる。

→ローレンツ準順序と**PD**の移転原理は同等。
→証明は**Rothschild and Stiglitz (1970)***。

*M. Rothschild and J.E. Stiglitz (1970), "Increasing Risk I: A Definition", *Journal of Economic Theory*, Vol.2, No.2:225-243

ローレンツ準順序と社会厚生

[定理] : $\boldsymbol{W}$ を対称で厳密に準凹な社会厚生関数とする。総所得が等しい所得分配 $\mathbf{x}$ と $\mathbf{y}$ について，$\mathbf{x} \prec_L \mathbf{y}$ であれば，$\boldsymbol{W}(\mathbf{y}) < \boldsymbol{W}(\mathbf{x})$ が成立する。$\mathbf{x} \not\prec_L \mathbf{y}$ でなければ，$\boldsymbol{W}(\mathbf{x}) < \boldsymbol{W}(\mathbf{y})$ となるような $\boldsymbol{W}$ が少なくとも $\mathbf{1}$ つは存在する。

対称性（無名性）: 所得分配が同じであれば，社会厚生は特定の個人がいくらの所得を得ているかということには依存しない（任意の個人間で所得を入れ替えても社会厚生は変化しない）。

厳密な準凹性 : 任意の所得分配 $\mathbf{x}$，$\mathbf{y}$ について以下が成立する。

$$\boldsymbol{W}(\mathbf{x}) = \boldsymbol{W}(\mathbf{y}) < \boldsymbol{W}(t\mathbf{x} + (1-t)\mathbf{y}) \tag{35}$$

→ローレンツ準順序による不平等の順序づけは，規範的な価値判断と両立する。
→証明は**Dasgupta, Sen and Starrett (1973)***。

*P.Dasgupta, A. K, Sen and D. Starrett (1973), "Notes on the Measurement of Inequality", *Journal of Economic Theory*, Vol.6: 180-187

人口に関する対称性

[公理]：**SAP(Symmetry Axiom for Population)**
任意の所得分布$(y_1, \ldots, y_n)$に対し，nr人の個人の所得分布で任意の$i(1 \leq i \leq n)$について$x_{1i} = x_{2i} = \cdots = x_{ri} = y_i$を満たすものを考える。ただし，$r$は任意の実数とする。このとき，$W^{nr}(\mathrm{x}) = rW^n(\mathrm{y})$が成立する。

→同じ人口nと所得分配xを持つr個の国をひとまとめにしても，一人あたり平均厚生水準は変化しない。

[定理]：x, yをそれぞれ人口n, mの国の所得分配とし，W^n, W^nはそれぞれ，対称性，厳密な準凹性，**SAP**を満足する社会厚生関数とする。このとき，$\mathrm{x} \prec_L \mathrm{y}$であれば，$W^n(\mathrm{x})/n < W^m(\mathrm{y})/m$が成立する。$\mathrm{x} \prec_L \mathrm{y}$でなければ，対称性，厳密な準凹性，**SAP**を満足する社会厚生関数W^n, W^nの中に，$W^m(\mathrm{y})/m < W^n(\mathrm{x})/n$となるものが必ず存在する。

→人口が異なっても，ローレンツ準順序により不平等を比較できる。

平均所得が異なる所得分配の比較

平均独立の公理：
社会厚生関数 $\boldsymbol{W}$ は任意の所得分配 x と任意の正の数 $\boldsymbol{\theta}$ について以下を満たす。

$$\boldsymbol{W}(\boldsymbol{\theta}\mathrm{x}) = \boldsymbol{\theta}\boldsymbol{W}(\mathrm{x})$$

平均独立の公理を導入すれば，平均所得の異なる国の間でローレンツ準順序を用いて不平等を比較することができる。

しかし，この公理を正当化することができるかどうかには疑問がある。
→「より貧しい（平均所得が低い）国ほど不平等は深刻に捉えられなければならない」と考えることもできる。