完全魔方陣

「対角線に平行な斜めの数の和も全て一致するような魔方陣」を**完全魔方陣**とか**汎魔方陣**と呼ぶ.
（左右の辺を糊付けした円筒を考えている）

例

1	12	13	8
15	6	3	10
4	9	16	5
14	7	2	11

7	11	23	5	19
3	20	9	12	21
14	22	1	18	10
16	8	15	24	2
25	4	17	6	13

4 次の完全魔方陣は 880 個中 48 (= **3** × 16) 個,
5 次の完全魔方陣は 275305224 個中 3600 (= **144** × 25) 個.

完全魔方陣の行や列をシフトしても．また完全魔方陣になる.

1	12	13	8
15	6	3	10
4	9	16	5
14	7	2	11

$\longrightarrow$

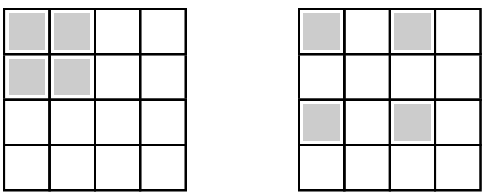
12	13	8	1
6	3	10	15
9	16	5	4
7	2	11	14

これらは完全魔方陣としては，本質的に同じものと考えられる.

4 次の完全魔方陣

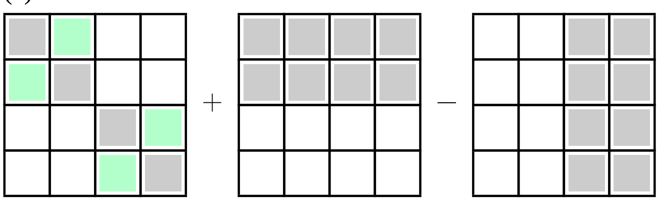
1. 4 次の完全魔方陣では以下の 4 数の和も 34 になる.

(a) (b)

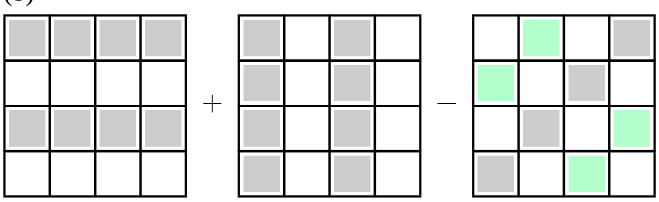


証明：

2× (a) =

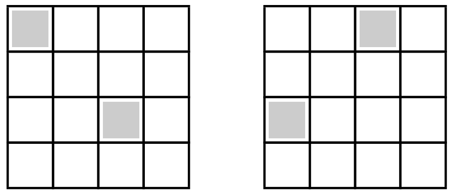


2× (b) =



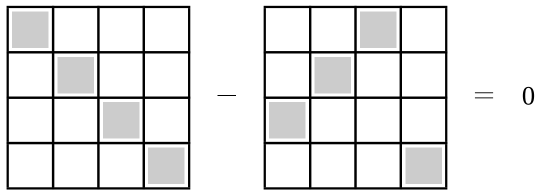
2. 以下の 2 数の和は 17.

(c) (c’)



証明： 1.(b) と次を用いる

(c) − (c’) =



3. 全ての完全 4 方陣は次の 3 つの方陣から行や列のシフトと回転・鏡像により作れる．(本質的にはこの 3 種類しかない)

1	12	6	15
8	13	3	10
11	2	16	5
14	7	9	4

1	8	10	15
12	13	3	6
7	2	16	9
14	11	5	4

1	14	4	15
8	11	5	10
13	2	16	3
12	7	9	6

証明： 完全方陣を考える際には，全てのマスから 1 を引き，0 〜 15 を使った魔方陣を考えると都合が良い，こうすると **1.** (a), (b) の和は 30， **2.** (c), (c’) の和は 15 となる.

まず，シフト操作により，0 を (1, 1) に持って来れば，**2.** (c) より 15 は (3, 3) に入る．15 の周りの 4 数を a, b, c, d とおく．**1.**, **2.** の性質により，他のマスは a, b, c, d を用いて以下の様に表せる.

0	$15-c$	$a+c$	$15-a$
$15-d$	$c+d$	$\boldsymbol{b}$	$a+d$
$b+d$	$\boldsymbol{a}$	15	$\boldsymbol{c}$
$15-b$	$b+c$	$\boldsymbol{d}$	$a+b$

a, b, c, d, $a+b$, $a+c$. $a+d$, $b+c$, $\ldots$, $15-d$ で 1 〜 14 が重複なく全て出て来るには， a, b, c, d は 1, 2, 4, 8 の 4 つの数からなることが分かる．回転・鏡像 + シフトによって生じる重複を除くため，a が 最小，$b < d$ の条件で求めると，(a, b, c, d) の組合せは

$$(a,\ b,\ c,\ d) = (1,\ 2,\ 4,\ 8),\ (1,\ 2,\ 8,\ 4),\ (1,\ 4,\ 2,\ 8)$$

の 3 種類のみとなる.

最後に，全てのマスに 1 を加えれば，**3.** で示した 3 つの魔方陣が出来上がる．■

５次の完全魔方陣

次の 5 方陣は**桂馬飛び法**で作った 5 方陣の全てのマスから 1 を引いたものである．

0	8	11	19	22
14	17	20	3	6
23	1	9	12	15
7	10	18	21	4
16	24	2	5	13

この方陣の各数字を（5 の倍数）＋（余り）で表し，それぞれを別の 5×5 方陣に書き込むと，

(5N)

0	5	10	15	20
10	15	20	0	5
20	0	5	10	15
5	10	15	20	0
15	20	0	5	10

(余り)

0	3	1	4	2
4	2	0	3	1
3	1	4	2	0
2	0	3	1	4
1	4	2	0	3

これは次の 2 つの文字方陣で

(A, B, C, D, E) = (0, 5,10,15, 20)

(a, b, c, d, e) = (0, 4, 3, 2, 1)

と置いたものになっている．

A	B	C	D	E
C	D	E	A	B
E	A	B	C	D
B	C	D	E	A
D	E	A	B	C

a	c	e	b	d
b	d	a	c	e
c	e	b	d	a
d	a	c	e	b
e	b	d	a	c

この 2 つの文字方陣をみると，各行・各列・2 つの対角線だけでなく，平行な斜めの線においても各文字は 1 度しか現れていない．したがって，それらの和は全て A + B + C + D + E + a + b + c + d + e となり，元の方陣が完全方陣になっていることが分かる．

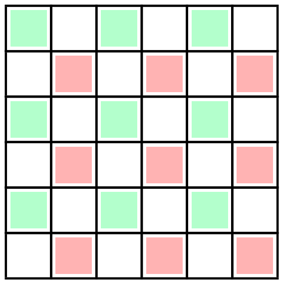
逆に次のことが知られている．

定理　全ての 5 次の完全魔方陣は上の 2 つの文字方陣の各文字に割り当てる数字を入れ換えることによって得られる．

６次の完全魔方陣

定理　6 次の完全魔方陣は存在しない．

この事実を以下の図を用いて証明しよう．

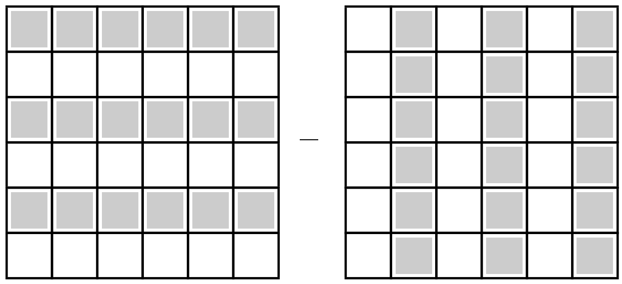


まず，6 次の魔方陣の定和は 6 (36 + 1)/2 = 111 となることに注意する．（1 から始まる魔方陣の場合．0 から始めれば，105．いずれにしても奇数になることがポイント）

もし，6 次の完全魔方陣が存在したと仮定すれば，緑と赤の全体は 3 つの平行な対角線（一般対角線）からなっているので，

(緑の和) + (赤の和) = 3 × 111 = 333

である．一方



を考えれば，

(緑の和) − (赤の和) = 0

となる．上とあわせると等しい 2 整数の和が奇数ということになり，矛盾である．
背理法により， 6 次の完全魔方陣は存在しない．

参考文献：

内田伏一「魔方陣にみる数のしくみ」（日本評論社）