α-domination 戦略を用いた非劣解集合における解抽出法の提案

The proposal of the method which extracts solutions from non-dominated solutions using α-domination strategy

金美和
Mifa KIM

Abstract: In multiobjective optiomization problems, a group of solutions called Pareto-optimal solution is acquired, and optimal value is chosen manually.However, manually choosing one solution from a vast number of solutions with comparing individual solutions is very difficult.In this paper, a method called α-extraction method is proposed.It is a method to extract relatively important solutions from the obtained group of solutions by discriminating solutions using α-domination strategy.

1 はじめに

多目的最適化問題では目的関数間にトレードオフの関係がある場合，パレート最適解と呼ばれる他のどの解よりも優位にあるとはいい切れないが，総合的に比較して決して劣らない解の集合を求める．[1] 多目的最適化問題ではこのパレート解を求めることが 1 つの目標となり，最適化によって得られた解集合の中から解選考者が解を選択する．ところが得られた解集合の数が膨大な場合，解選考者がすべての解を比較検討し最適と思われる 1 つの解を選択することは，極めて困難な作業となる．よって何らかの方法で，最適化によって求まった解集合の中から特に重要な解を選び出し，解選考者に提示する必要がある．本論では，α-domination 戦略と呼ばれる手法を用いて解の差別化を行うことで，得られた解集合の中から比較的重要な解を抽出する手法，α 抽出法を提案する．

2 多目的最適化

多目的最適化問題（Multiobjective Optimization problems: MOPs）は，k 個の互いに競合する目的関数 $\vec{f}(\vec{x})$ を m 個の不等式制約条件のもとで最小化する問題と定式化される [2]．

多目的最適化問題では，各目的関数がトレードオフの関係にある場合，単一の解を得ることは難しい．そのため，最適解の概念の代わりにパレート最適解の概念が導入されている．

2.1 パレート最適解

パレート最適解は，多目的最適化問題における解の優越関係により定義される．解の優越関係の定義を以下に示す．

【定義】: $x^1, x^2 \in X$ とする．

a) $f_k(x^1) \leq f_k(x^2)(k=1,\cdots,p)$ のとき，x^1は x^2に優越するという．

b) $f_k(x^1) < f_k(x^2)(k=1,\cdots,p)$ のとき，x^1は x^2に強い意味で優越するという．

次に，この優越関係に基づくパレート最適解の定義について以下に示す．

【定義】: $x^0 \leq X$ とする．

a) x^0に強い意味で優越する $x \leq X$ が存在しないとき, x^0を弱パレート最適解という．

b) x^0に優越する $x \leq X$ が存在しないとき, x^0を (強) パレート最適解という．

Fig. 1 に 2 目的，最小化問題の場合におけるパレート最適解の例を示す．

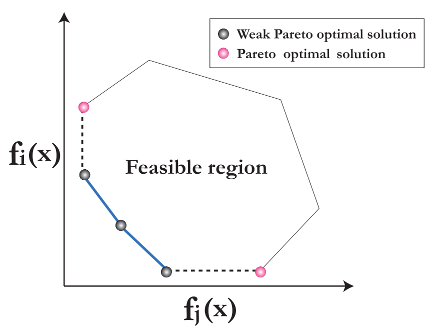

Fig. 1 Pareto potimal solution

2.2 解選考

多目的最適化問題において，得られた非劣解集合に解の広がり，解の精度，分布の均一の要素が存在することは重要であり，このような解集合を求めることが 1 つの目標となる．しかし，解選考者が膨大な解の中から自分にとって最適な解を抽出することは困難な作業である．

得られた非劣解集合から解を抽出する場合，抽出した解集合が元の非劣解集合の形状を保持していることが重要となる．また，抽出した解集合が何らかの意味で優越度を持った個体であることが望ましい解集合であると考

える．

そこで本発表では，膨大な数の非劣解集合が得られた場合に，その解集合から上記の点を満たすような特徴的な解を抽出し，解選考者が選択を容易に行うための抽出法を提案する．

3　α 抽出法

本発表では α-domination 戦略を用いて得られた非劣解集合の中から特徴的な解を抽出する α 抽出法を提案する．

3.1　α-domination 戦略

多目的問題において複数の解からいずれか 1 つの解を選択するとき，その選択基準は互いの解を比較したときのコストパフォーマンスにもとづいて選ぶことが一般的である．このような概念に基づいた手法が α-domination 戦略 [3] である．

α-domination 戦略の定義は次のとおりである．

【定義】K 目的最大化問題 $f_1(x)$，⋯，$f_n(x)$ を考える．ここで f_j を一単位得ることは最低でも f_i を α_{ij} 単位得ること以上の価値があるというような $\alpha_{ij} \geqq 0$ を決定すると，

$$g_i(x,y) := f_i(x) - f_i(y) + \sum_{j \neq i}^{1..K} \alpha_{ij}(f_j(x) - f_j(y)) \quad (1)$$

としたとき，

$$\text{解}\, x \,\text{が解}\, y \,\text{を}\, \alpha - dominate \,\text{する} \Leftrightarrow \forall_i g_i(x,y) \geq 0, and\ \exists_i g_i(x,y) > 0$$

である．

式 (1) で用いられるパラメータ α_{ij} は，すなわち f_j を一単位改善するとき，f_i の改悪が α_{ij} 単位までならば解 x の dominate 範囲とするような上下解を定めている．つまり

$$\alpha_{ji} \leq \frac{\Delta f_i}{\Delta f_j} \leq \frac{1}{\alpha_{ij}}$$

と表すことができる．α-domination 戦略の概念図を Fig. 2 に示す．

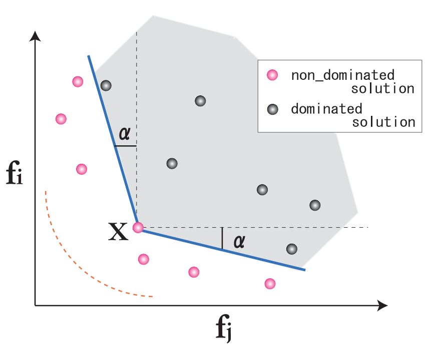

Fig. 2　α-domination

3.2　α 抽出法のアルゴリズム

α 抽出法のアルゴリズムは以下のとおりである．解集合を N_0 とし，非劣解を a_0，a_1，a_2，⋯，a_n とする．

Step1　非劣解集合 N_0 に α-domination 戦略を適応する．dominate されずに残った最後の解 a_i を α 抽出解とする．α 抽出解 a_i と解集合の両端個体に，同様の評価値を与える．評価方法は 3.3 で示す．

Step2　a_i を端の個体とし，a_0⋯，a_i を解集合 N_1，a_i，⋯，a_n を解集合 N_2 とする．それぞれに α-domination 戦略を適応し，得られた α 抽出解 a_k，a_t に評価値を与える.（k ＜ i ＜ t）

Step3　全個体に評価値が与えられるまで Step1，Step2 を繰り返す．

Step4　評価値 R の小さなものから優良な α 抽出解とする．

3.3　抽出解の評価方法

本発表では抽出解の評価方法に二つのアルゴリズムを用いて α 抽出法を提案する．

3.3.1　α_n 抽出法

1 つ目のアルゴリズムは，多数の解集合から α-domination によって抽出された解ほど，優秀な α 非劣解と評価するアルゴリズムであり，評価値 R は次のように表される．

解集合 N_0 の部分解集合 N_x から α-domination によって得られた α 抽出解を a_x とすると，a_x の評価値 R_x は，

$$R_x = \frac{N_0}{N_x} \quad (2)$$

本論ではこの評価方法を用いる α 抽出法を，α_n 抽出法と呼ぶ．

3.3.2　α_d 抽出法

α_d 抽出法では，より広範な目的関数空間上において得られた α 抽出解ほど優れた解であると評価するアルゴリズムを用いる．

α-domination を行う解集合 N_i のうち，目的関数空間上で端に位置する解を a_x,a_y とし，得られた α 抽出解 a_z までの距離をそれぞれ d_{xz}，d_{yz}，a_x と a_y の距離を d_{xy} とする．評価値 R_z は次式で表される．

$$R_z = (\frac{1}{d_{xy}})^2 \cdot \frac{d_{xz}}{d_{yz}} \qquad (d_{xz} \geq d_{yz}) \quad (3)$$

式 (3) では，両端の解から α 抽出解までの距離の比を考慮しているので，広範な目的関数空間で得られた α 抽出解であっても，端に近傍な解には優れた評価値が与えられない．

4　数値実験

4.1　比較対象手法

比較対象手法には，目的関数空間上で両端に位置する解の中点に，最も近い解を順次選択するを方法を用いる．この手法を本論では，中点選択法と呼ぶ．

4.2　比較方法

二つの比較方法を用いて実験を行った．次に各比較方法について説明する．

4.2.1　近似パレートフロントとの誤差比較

各手法による抽出解が，非劣解集合の描く近似パレートフロントの形状を保持しているかを比較するために，次のような方法を用いる．まず，評価値の高い n 個の抽出解を任意の目的関数でソートして順に直線で結ぶ．次に全解集合から，直線に交わる法線を引く．法線の長さの和を調べ，パレートフロントとの誤差とする．概念図を Fig. 3 に示す．

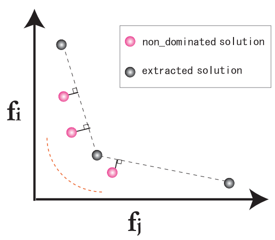

Fig. 3　Error of non-dominated solutions and extracted solutions

4.2.2　優越度と分布の比較

各手法で選択される抽出解集合の精度と分布度合いを比較するために，Knoewls と Corne により【Approximating the Nondominated Front Using the Pareto Archived Evolution Strategy】[4] で提案された比較手法を用いる．比較評価方法の概念は以下のとおりである (Fig. 4)．

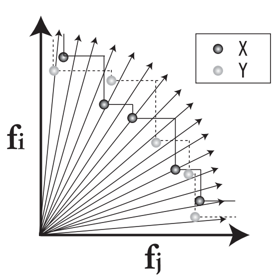

Fig. 4　Sampling the Pareto frontier using lines of intersection【LI】

まず，得られた 2 つの抽出解集合 X，Y ごとに到達フロント線を形成する．そして，各目的の端から一様の方向へ 1000 本のサンプリング線を引き，各近似パレート曲線との接点を求める．どちらの到達フロント線がより原点に近いかを比べ，その割合を比較する．

5　数値実験結果

α_n 抽出法と α_d 抽出法を，それぞれ中点選択法と比較する．各手法を適応させるパレートフロント形状には曲線，波線，非連続，離散の 4 通りを用意し，全て最小化問題とする．また，比較手法 LI では，各問題で解集合の $\frac{1}{10}$ の抽出解集合を用いて比較を行う．

5.1　曲線パレートフロント

曲線を描くパレートフロントに，各 α 抽出法と中点選択法を適応した．全手法のパレートフロントとの I_{error} を Fig. 5 に，各 α 抽出法に中点選択法を比較して求める I_{LI} を Fig. 6 に示す．

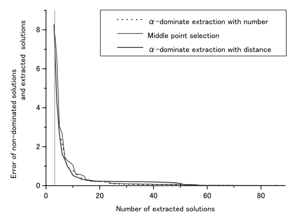

Fig. 5　I_{error}

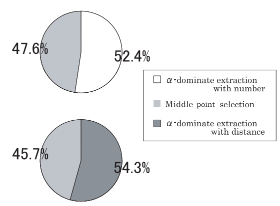

Fig. 6　I_{LI}

Fig. 5 からは各手法の I_{error} に大きな差は見られない．これは，この問題のパレートフロント形状は解が均一に分布し，かつ正確な円弧を描いているため，各手法の特徴が発揮されず解抽出部分が酷似し，I_{error} に差が生じないものと考えられる．一方 Fig. 6 ではどちらも α 抽出法が優位な結果が示されている．これは α 抽出法は合理的な解を抽出するため，精度を測る I_{LI} では良好な評価を得ている．

5.2　波線パレートフロント

凸形状と非凸形状が混在する波線形状のパレートフロントと各手法の I_{error} を Fig. 7 に，両 α 抽出法に中点選択法を比較して求める I_{LI} を Fig. 8 に示す．

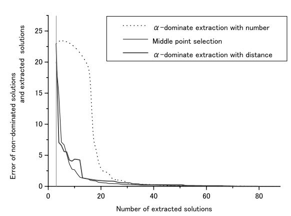

Fig. 7　I_{error}

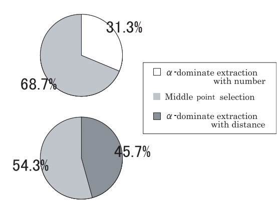

Fig. 8　I_{LI}

Fig. 7 より，α_n 抽出法で特に劣悪な結果が示されていることが確認できる．これは，解の目的関数上の位置を考慮しない α_n 抽出法では，非凸部分の個体が抽出されにくいためである．一方，距離を考慮し評価する α_d 抽出法は，広い範囲からの抽出解ならば非凸部分の解も抽出するため，α_n 抽出法ほど大きな誤差は生じていない．しかし，基本的に α 抽出法は合理的とはいえない非凸部分の解は抽出しにくい．よって抽出解が目的関数空間上に分布せず，Fig. 8 で示されるように I_{LI} でも良い結果を得ることはできない．

5.3　離散パレートフロント

目的関数上で数ヶ所に分散して解が存在する離散問題のパレートフロントと各手法の I_{error} を Fig. 9 に，α 抽出法に中点選択法を比較して求める I_{LI} を Fig. 10 に示す．

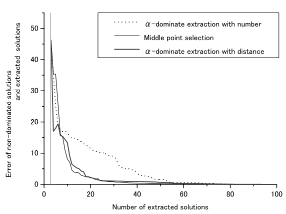

Fig. 9　I_{error}

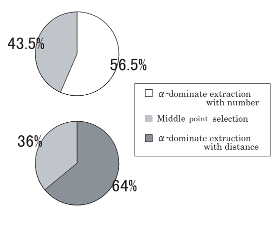

Fig. 10　I_{LI}

α 抽出法は各分散部分において原点に近い解，つまり精度の高い解を抽出するため，Fig. 10 で示されるように，中点選択法よりも良好な結果が示されている．Fig. 9 では，抽出解の数が少ない場合は各手法に差がないものの，抽出解が増えるに連れ α_n 抽出法で I_{error} の減少が比較的少なくなっていることが分かる．これは α_n 抽出法では，精度の良い解ならば隣接する解も抽出するため，その結果部分的な解の抽出が行われ，誤差が減らないものと考えられる．

5.4　非連続パレートフロント

解が目的関数上に分散する非連続問題のパレートフロントと各手法の I_{error} を Fig. 11 に，各 α 抽出法に中点選択法を比較して求める I_{LI} を Fig. 12 に示す．

Fig. 11 から，各手法の I_{error} に大きな差は見られない．しかし Fig. 12 に示す I_{LI} では，α_n 抽出法は中点選択法に劣っているが，α_d 抽出法は中点選択法よりも優位な結果を示している．これは，この非連続パレートフロントの一部の解探索が十分ではないため，その範囲に含まれる解は，α_n 抽出法では抽出されないが，α_d 抽出法では抽出されるといった差異によって生じたもの

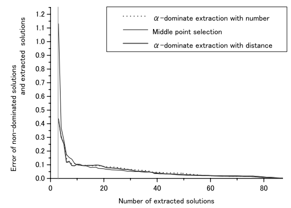

Fig. 11　I_{error}

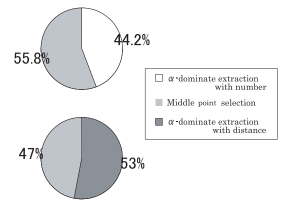

Fig. 12　I_{LI}

と考えられる．

6　おわりに

本発表では，多目的最適化によって得られた膨大な数の非劣解集合から，特徴的な解を抽出する手法，α 抽出法を提案した．α 抽出法では α-domination 戦略と呼ばれる手法によって合理性のある解を求めている．また，抽出される解集合の範囲を考慮に入れた評価方法によって，抽出される解の多様性を維持する．

数値実験結果より提案手法は膨大な解の中から単に中点に近い解を選択するよりも，精度が高くかつ多様性のある解集合を抽出することが可能となることがわかった．

参考文献

1) 西川，三宮，茨木．”最適化　第四章”．岩波書店，1982．

2) 坂和正敏，田中雅博．”遺伝的アルゴリズム”．朝倉書店，1997．

3) K.Ikeda,H.Kita,and S.Kobayashi, Failuer of Pareto-Based MOEAs,Dose Non-Dominated Really Mean Near to Optimal? Congress on Evolutionary Computation pp.957-962，2001

4) Joshua D. Knowles and David W. Corne. Approximating the Nondominated Front Using the Pareto Archived Evolution Strategy，Evolutionary Computation, 8(2):149-172, 2000