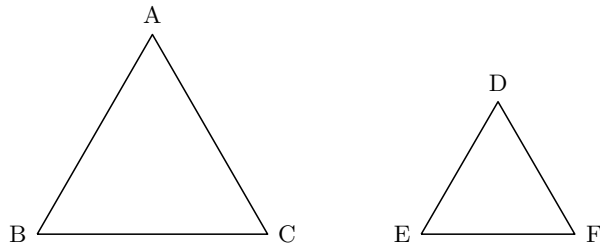


平たくいうと相似とは、形は同じだけどサイズが違うということです。それでは前回挙げた 3 つの証明の例をみましょう。

命題

2 つの正三角形は相似である。



仮定 $AB = BC = CA \dots ①$
 $DE = EF = FD \dots ②$

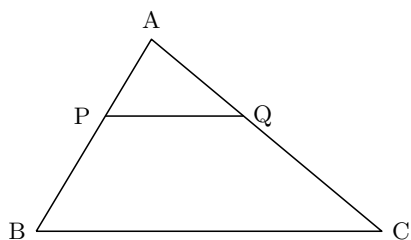
結論 $\triangle ABC \sim \triangle DEF$

証明 $\triangle ABC, \triangle DEF$ の 1 辺の長さをそれぞれ a, b とすると, ①, ②より
 $AB : DE = a : b$
 $BC : EF = a : b$
 $CA : FD = a : b$
 $\therefore AB : DE = BC : EF = CA : FD \dots ③$
 ここで, $\triangle ABC$ と $\triangle DEF$ について
 $AB : DE = BC : EF = CA : FD \dots (\because ③)$
 よって, 三辺の比相等であるから
 $\triangle ABC \sim \triangle DEF$

QED

命題

$\triangle ABC$ において, P は辺 AB 上にある $AP : PB = x : y$ となる点, 辺 AC 上に点 Q を $AQ : QC = x : y$ となる点とすると, $PQ \parallel BC$ である。



仮定 $AP : PB = x : y \dots ①$
 $AQ : QC = x : y \dots ②$

結論 $PQ \parallel BC$

証明 ①より

$$\begin{aligned} AP : PB &= x : y \\ PB : AP &= y : x \\ (PB + AP) : AP &= (y + x) : x \\ \therefore AB : AP &= (x + y) : x \dots ③ \end{aligned}$$

また, ②より

$$\begin{aligned} AQ : QC &= x : y \\ QB : AQ &= y : x \\ (QB + AQ) : AQ &= (y + x) : x \\ \therefore AC : AQ &= (x + y) : x \end{aligned}$$

これと③より

$$AB : AP = AC : AQ \dots ④$$

ここで, $\triangle ABC$ と $\triangle APQ$ について

$$\angle CAB = \angle QAP \quad (\because \text{共通})$$

$$AB : AP = AC : AQ \quad (\because ④)$$

よって, 二辺の比夾角相等であるから

$$\triangle ABC \sim \triangle APQ$$

$$\therefore \angle ABC = \angle APQ$$

$$\therefore BC \parallel PQ$$

QED

さて, 仮定の $x : y$ を具体的に $1 : 1$ としてみましょう。すると P, Q はそれぞれ辺 AB, AC の中点になります。そう! これは中点連結定理の応用なんです! 数学的には, この命題は「中点連結定理の一般化」であるといえます。

系

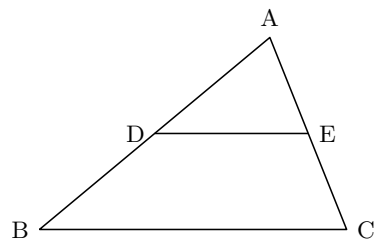
上の命題において, $PQ : BC = x : (x + y)$ である。

相似の定義から対応する辺の比は相似比になります。見やすさのために, 性質の (2) を使って, 比の前項と後項を入れ替えました。(系とは命題から簡単にわかる命題のことでした。)

$x : y = 1 : 1$ の場合, 中点連結定理の 2 つ目の結論と一致しますね。

命題

△ABCにおいて、辺AB上の点Dから引いた辺BCの平行線と辺ACとの交点をEとすると $AE:EC=AD:DB$ である。



仮定	$DE \parallel BC$
結論	$AE:EC=AD:DB$
証明	△ABCと△ADEについて $\angle CAB=\angle EAD$ (∵ 共通) $\angle ABC=\angle ADE$ (∵ 仮定) よって、二角相等であるから $\triangle ABC\sim\triangle ADE$ ∴ $AC:AE=AB:AD$ これより $(AC-AE):AE=(AB-AD):AD$ $EC:AE=DB:AD$ ∴ $AE:EC=AD:DB$ <i>QED</i>

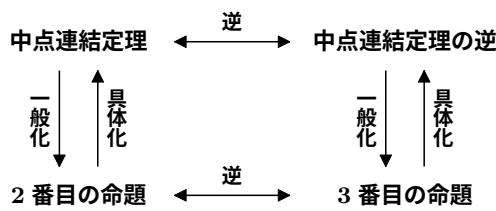
2 番目の命題の仮定と結論が入れ替わっています。つまり、2 番目の命題の逆ということです。

〇〇だから平行なのか、平行だから〇〇なのか、違いは明確なのですが、ちょっと困惑するかもしれないと思い、中点連結定理の逆は授業で取り扱いませんでした。

定理 (中点連結定理の逆)

△ABCにおいて、辺ABの中点をMとし、Mを通るBCの平行線と辺ACとの交点をNとすると、NはACの中点である。

2 番目の命題が中点連結定理の一般化になっているように、3 番目の命題は中点連結の逆の一般化になっています。



それでは相似の証明をするときの注意点です。およその構造は合同の時と変わりません。つまり

- ・ どの三角形について示すのか宣言
- ・ 相似になる要素を示す
- ・ 相似条件を述べ、 $\sim$ を示す

です。左右のシバリ、頂点の対応の順のシバリも合同の時と変わりません。

辺の比が等しいことや角が等しいことが仮定から分かっていない場合、相似の証明の前に示しておくということも変わりません。

2 番目の命題では性質の (2) と (4) を用いて比例式の変形をしましたが、どの性質を利用したのか明示しませんでした。このように、特に断りなく変形して構いません (番号を間違えると減点しなくてはなりません)。また、練習のため同様にはせず、あえて繰り返し書きました。

比例式について、もう少し言っておきます。1, 2 番目の証明をみてください。

対応する辺の比が等しい

(両辺とも前項と後項が対応する辺になっている)

という比例式になっています。必ずこうするようにしてください。つまり、例えば 1 番目の命題で

$$AB:BC:CA=DE:EF:FD$$

としたり、2 番目の命題で

$$AB:AC=AP:AQ$$

としたりしてはダメということです。

[終]