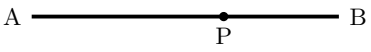
定義

線分 AB 上に点 P をとるとき, P は AB を**内分する**といい, P を**内分点**という.

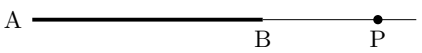
線分 AB の延長上 (または BA の延長上) に点 Q をとるとき, Q は AB を**外分する**といい, Q を**外分点**という.

内分についてはそれほど難しくないでしょう.

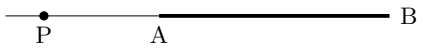


外分は少しつかみにくいかもしれません. 特にもともとの線分の外側にあるのに, 「分ける」というところです. 内分に対する言葉なので, そこにとらわれずに覚えてください.

外分には 2 つの状況があります. 1 つ目は AB の延長上にある場合です. この場合, 外分比を $a : b$ とすると $a > b$ です.



もう 1 つは BA の延長上にある場合です. この場合, 外分比を $a : b$ とすると $a < b$ です.



外分は

$a : b$ に外分する点

としか表現しません. ですから上のどちらの状態か自分で判断しないといけません. これが外分を難しくしているもう 1 つの理由です. どちらの状況か判断する材料は $a > b$ であるか $a < b$ であるかです. この不等式を含めてしっかり定義を覚えてください.

それでは三角形の相似を発展させて多角形の相似を考察します. その前に相似の定義をもう 1 度確認しましょう.

定義

2 つの多角形の **対応する辺が比例*** し, かつ **対応する角が等しい** とき, 2 つの多角形は互いに相似であるという.

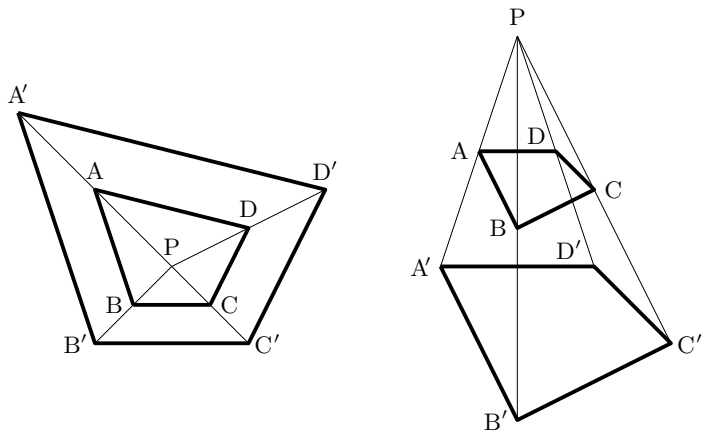
* 比例 ··· 比が等しいこと

2 つの相似と思われる多角形についてこれを証明するのは大変です. そこで次の定理を証明します.

定理

1 点から 1 つの多角形の各頂点に引いた線分を等しい比に内分 (または外分) する点を順に結んでできる多角形は, 元の多角形に相似である.

この定理を n 角形について証明するのは大変です. そこで四角形について証明して, その流れで n 角形でも証明できることを把握します.



仮定　$\mathrm{PA} : \mathrm{PA'} = \mathrm{PB} : \mathrm{PB'} = \mathrm{PC} : \mathrm{PC'} = \mathrm{PD} : \mathrm{PD'}$

結論　$\mathrm{AB} : \mathrm{A'B'} = \mathrm{BC} : \mathrm{B'C'} = \mathrm{CD} : \mathrm{C'D'} = \mathrm{DA} : \mathrm{D'A'}$
$\angle \mathrm{DAB} = \angle \mathrm{D'A'B'}$
$\angle \mathrm{ABC} = \angle \mathrm{A'B'C'}$
$\angle \mathrm{BCD} = \angle \mathrm{B'C'D'}$
$\angle \mathrm{CDA} = \angle \mathrm{C'D'A'}$

証明　$\triangle \mathrm{PAB}$ と $\triangle \mathrm{PA'B'}$ について
$\angle \mathrm{APB} = \angle \mathrm{A'PB'}$　$(\because$ 共通$)$
$\mathrm{PA} : \mathrm{PA'} = \mathrm{PB} : \mathrm{PB'}$　$(\because$ 仮定$)$
よって, 二辺の比夾角相等であるから
$\triangle \mathrm{PAB} \backsim \triangle \mathrm{PA'B'}$　$\cdots$ ①
$\triangle \mathrm{PBC}$ と $\triangle \mathrm{PB'C'}$, $\triangle \mathrm{PCD}$ と $\triangle \mathrm{PC'D'}$, $\triangle \mathrm{PDA}$ と $\triangle \mathrm{PD'A'}$ について, 同様にして
$\triangle \mathrm{PBC} \backsim \triangle \mathrm{PB'C'}$　$\cdots$ ②
$\triangle \mathrm{PCD} \backsim \triangle \mathrm{PC'D'}$　$\cdots$ ③
$\triangle \mathrm{PDA} \backsim \triangle \mathrm{PD'A'}$　$\cdots$ ④
①より

$$\begin{cases} \mathrm{AB} : \mathrm{A'B'} = \mathrm{PA} : \mathrm{PA'} & \cdots ⑤ \\ \angle \mathrm{PAB} = \angle \mathrm{PA'B'} & \cdots ⑥ \\ \angle \mathrm{PBA} = \angle \mathrm{PB'A'} & \cdots ⑦ \end{cases}$$

②より

$$\begin{cases} \mathrm{BC} : \mathrm{B'C'} = \mathrm{PB} : \mathrm{PB'} & \cdots ⑧ \\ \angle \mathrm{PBC} = \angle \mathrm{PB'C'} & \cdots ⑨ \\ \angle \mathrm{PCB} = \angle \mathrm{PC'B'} & \cdots ⑩ \end{cases}$$

③より

$$\begin{cases} \mathrm{CD} : \mathrm{C'D'} = \mathrm{PC} : \mathrm{PC'} & \cdots ⑪ \\ \angle \mathrm{PCD} = \angle \mathrm{PC'D'} & \cdots ⑫ \\ \angle \mathrm{PDC} = \angle \mathrm{PD'C'} & \cdots ⑬ \end{cases}$$

④より

$$\begin{cases} \mathrm{DA} : \mathrm{D'A'} = \mathrm{PD} : \mathrm{PD'} & \cdots ⑭ \\ \angle \mathrm{PDA} = \angle \mathrm{PD'A'} & \cdots ⑮ \\ \angle \mathrm{PAD} = \angle \mathrm{PA'D'} & \cdots ⑯ \end{cases}$$

仮定より ⑤, ⑧, ⑪, ⑭ の右辺は等しいから

$$\begin{aligned}\mathrm{AB}:\mathrm{A'B'} &= \mathrm{BC}:\mathrm{B'C'}\\ &= \mathrm{CD}:\mathrm{C'D'}\\ &= \mathrm{DA}:\mathrm{D'A'} \qquad \cdots ⑰\end{aligned}$$

また

$$\begin{aligned}\angle\mathrm{DAB} &= \angle\mathrm{DAP} + \angle\mathrm{PAB}\\ &= \angle\mathrm{D'A'P} + \angle\mathrm{PA'B'} \quad (\because ⑯, ⑥)\\ &= \angle\mathrm{D'A'B'}\end{aligned}$$

$$\therefore \angle\mathrm{DAB} = \angle\mathrm{D'A'B'} \qquad \cdots ⑱$$

$$\begin{aligned}\angle\mathrm{ABC} &= \angle\mathrm{ABP} + \angle\mathrm{PBC}\\ &= \angle\mathrm{A'B'P} + \angle\mathrm{PB'C'} \quad (\because ⑦, ⑨)\\ &= \angle\mathrm{A'B'C'}\end{aligned}$$

$$\therefore \angle\mathrm{ABC} = \angle\mathrm{A'B'C'} \qquad \cdots ⑲$$

$$\begin{aligned}\angle\mathrm{BCD} &= \angle\mathrm{BCP} + \angle\mathrm{PCD}\\ &= \angle\mathrm{B'C'P} + \angle\mathrm{PC'D'} \quad (\because ⑩, ⑫)\\ &= \angle\mathrm{B'C'D'}\end{aligned}$$

$$\therefore \angle\mathrm{BCD} = \angle\mathrm{B'C'D'} \qquad \cdots ⑳$$

$$\begin{aligned}\angle\mathrm{CDA} &= \angle\mathrm{CDP} + \angle\mathrm{PDA}\\ &= \angle\mathrm{C'D'P} + \angle\mathrm{PD'A'} \quad (\because ⑬, ⑮)\\ &= \angle\mathrm{C'D'A'}\end{aligned}$$

$$\therefore \angle\mathrm{CDA} = \angle\mathrm{C'D'A'} \qquad \cdots ㉑$$

ここで四角形 ABCD と四角形 A′B′C′D′ について

$$\begin{aligned}\mathrm{AB}:\mathrm{A'B'} &= \mathrm{BC}:\mathrm{B'C'}\\ &= \mathrm{CD}:\mathrm{C'D'}\\ &= \mathrm{DA}:\mathrm{D'A'} \qquad (\because ⑰)\\ \angle\mathrm{DAB} &= \angle\mathrm{D'A'B'} \qquad (\because ⑱)\\ \angle\mathrm{ABC} &= \angle\mathrm{A'B'C'} \qquad (\because ⑲)\\ \angle\mathrm{BCD} &= \angle\mathrm{B'C'D'} \qquad (\because ⑳)\\ \angle\mathrm{CDA} &= \angle\mathrm{C'D'A'} \qquad (\because ㉑)\end{aligned}$$

よって対応する辺が比例し,
かつ対応する角が等しいから

四角形 ABCD ∽ 四角形 A′B′C′D′

$\mathcal{QED}$

証明中の⑥, ⑨, ⑫, ⑮より, 対応する各辺は平行であることがわかります.

今, 2 つの相似多角形 P, P′(相似比 $a:b$) があるとします. 多角形 P の付近に点をとり, そこから各頂点に半直線を引きます. その各半直線上に $a:b$ になる点をとって, 順に結んでできる多角形を P″ とします. このとき P と P″ は定理から相似で, 相似比は $a:b$ です. P と P′ は相似比 $a:b$ の相似, P と P″ も相似比 $a:b$ の相似, ということは P′ と P″ は合同であるということがわかります.

これらを 2 つをまとめて言い換えると $\cdots$

系

2 つの相似多角形を, 対応する各頂点を結ぶ直線が 1 点で交わるように移動することができる. このとき, 対応する各辺はどれも平行である.

定義

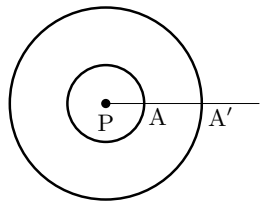
2 つの相似多角形の対応する各頂点を結ぶ直線が 1 点で交わるとき, 2 つの相似多角形は**相似の位置にある**といい, 各頂点を結ぶ直線が交わる 1 点を**相似の中心**という.

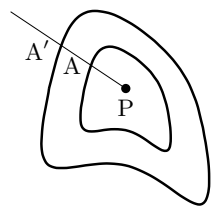
多角形も頂点の数が増えれば増えるほど角ばらなくなり, 曲線に見えてきます. そこで, 多角形の相似を曲線で囲まれた一般の図形に発展させてみましょう.

定義

2 つの図形 F, F′ と点 P に対し, P から引いた半直線と図形 F, F′ との交点を A, A′ とする. P からどのように半直線を引いても PA : PA′ が一定であるとき, 2 つの図形 F, F′ は**相似の位置にある**といい, P を**相似の中心**という.

2 つの図形を相似の位置にあるように移動できるとき, 2 つの図形は**相似**であるという.





上の左図は円です. 同心円を考えると異なる半径の 2 円は相似といえます. また, 右図のようなヘンテコリンな図形でも上の条件を満たしているので相似といえます.

[終]