講義02 状態空間表現

講義02のポイント

- 様々なシステムの状態空間表現に慣れよう
- 2階以上の微分方程式を状態空間表現で表す方法を理解しよう

講義02の内容

1. 直流モータの状態空間表現
2. マスーばねーダンパシステムの状態空間表現
3. 2階微分方程式で表されるシステムの状態空間表現
4. 3階微分方程式で表されるシステムの状態空間表現
5. 状態空間表現の特徴

2.1 直流モータの状態空間表現

- 直流（DC: Direct Current）モータのモデル
  - 電機子回路内のモデル

$$L\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}+Ri(t)=v_i(t)-v_b(t)$$

  - 逆起電力のモデル

$$v_b(t)=K_b\omega(t)$$

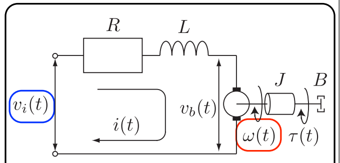
  - 発生トルクのモデル

$$\tau(t)=K_\tau i(t)$$

  - 電機子コイルのモデル

$$J\frac{\mathrm{d}\omega(t)}{\mathrm{d}t}+B\omega(t)=\tau(t)$$

$\omega(t)=\frac{\mathrm{d}\theta(t)}{\mathrm{d}t}$　逆起電力定数：K_b　トルク定数：K_τ



回路内の抵抗：$R[\Omega]$
インダクタンス：$L[\mathrm{H}]$
回路に加える電圧：$v_i(t)$ ⇒ 入力
回路内を流れる電流：$i(t)$
誘導起電力：$v_b(t)$
慣性モーメント：J
粘性摩擦係数：B
回転角速度：$\omega(t)$ ⇒ 出力

2.1 直流モータの状態空間表現

4つの式を整理した結果

$$\left.\begin{aligned}L\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}+Ri(t)&=-K_b\omega(t)+v_i(t)\\ J\frac{\mathrm{d}\omega(t)}{\mathrm{d}t}+B\omega(t)&=K_\tau i(t)\end{aligned}\right\}$$ ➡ 連立微分方程式

すべての変数の初期値を0としてラプラス変換

$$G(s)=\frac{\omega(s)}{V_i(s)}=\frac{K_\tau}{(Js+B)(Ls+R)+K_\tau K_b}$$ ：伝達関数

➡ 　　　　により　　　　の変化の様子はわかるが
の変化の様子は

➡ $i(t)$の変化を知るには　　　伝達関数を導出

2.1 直流モータの状態空間表現

4つの式を整理した結果

$$\left.\begin{aligned}L\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}+Ri(t)&=-K_b\omega(t)+v_i(t)\\ J\frac{\mathrm{d}\omega(t)}{\mathrm{d}t}+B\omega(t)&=K_\tau i(t)\end{aligned}\right\}$$ ➡ 連立微分方程式

状態ベクトル：$x(t)=\begin{bmatrix}i(t)\\ \omega(t)\end{bmatrix}$,　入力：　出力：　とすると...

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix}i(t)\\ \omega(t)\end{bmatrix}=$$

$$y(t)=\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}i(t)\\ \omega(t)\end{bmatrix}$$

2.1 直流モータの状態空間表現

- 状態空間表現

$$\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{dt}}\begin{bmatrix} i(t)\\ \omega(t)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{K_b}{L} \\ \frac{K_\tau}{J} & -\frac{B}{J}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} i(t)\\ \omega(t)\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\frac{1}{L}\\ 0\end{bmatrix}u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix} i(t)\\ \omega(t)\end{bmatrix}$$

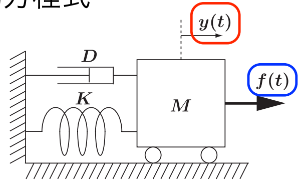
$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i(t)\\ \omega(t)\end{bmatrix}, A = \qquad , b = \begin{bmatrix}\frac{1}{L}\\ 0\end{bmatrix}, c = \begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}$$

$$y(t) = cx(t)$$

状態方程式を $x(t)$ について解けば $\begin{bmatrix} i(t)\\ \omega(t)\end{bmatrix}$ の変化の様子がわかる

2.2 マスーばねーダンパシステムの状態空間表現

- マスーばねーダンパシステムの運動方程式



物体の変位　　の2回微分　　の項の存在

物体に加える力

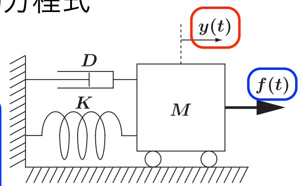
物体の変位

- 物体の変位 $y(t)$ の時間微分は　：
- 物体の速度 $\dot{y}(t)$ の時間微分は　：

2.2 マスーばねーダンパシステムの状態空間表現

- マスーばねーダンパシステムの運動方程式

$$M\ddot{y}(t) + D\dot{y}(t) + Ky(t) = f(t)$$



$y(t) = x_1(t)$

もしくは

$\ddot{y}(t) =$

$\dot{x}_2(t) =$

2.2 マスーばねーダンパシステムの状態空間表現

- マスーばねーダンパシステムの運動方程式

$$M\ddot{y}(t) + D\dot{y}(t) + Ky(t) = f(t)$$

$y(t) = x_1(t)$ → $\dot{y}(t) =$ 　　, $\dot{x}_2(t) =$

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = \\ \dot{x}_2(t) = \end{cases}$$

$$\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{dt}}\begin{bmatrix} x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix} = \qquad \begin{bmatrix} x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix} + \qquad u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix}$$

2.2 マスーばねーダンパシステムの状態空間表現

- マスーばねーダンパシステムの状態空間表現

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{K}{M} & -\frac{D}{M} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \end{bmatrix}, A = \qquad , b = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \end{bmatrix}, c = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$y(t) = cx(t)$$

状態方程式を $x(t)$ について解けば $\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$ の変化の様子がわかる

2.3 2階微分方程式で表されるシステムの状態方程式

- 2階微分方程式で表されるシステムの微分方程式

$$\ddot{y}(t) + a_1\dot{y}(t) + a_0 y(t) = b_0 u(t)$$

a_0, a_1, b_0：定数

$x_1(t) =$ 　　, $x_2(t) =$ 　　とする

マスーバネーダンパシステムの場合

RLC回路の場合

$$a_1 = \frac{R}{L},\ a_0 = \frac{1}{LC},\ b_0 = \frac{1}{LC}$$

状態ベクトル：$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$, 入力：　出力：　とすると...

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \qquad \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \qquad u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

2.3 2階微分方程式で表されるシステムの状態方程式

- $\ddot{y}(t) + a_1\dot{y}(t) + a_0 y(t) = b_0 u(t)$

状態空間表現

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ b_0 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}, A = \qquad , b = \qquad , c =$$

$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = Ax(t) + bu(t)$$

$$y(t) = cx(t)$$

$$A =$$

2.3 2階微分方程式で表されるシステムの状態方程式

- $\ddot{y}(t) + a_1\dot{y}(t) + a_0 y(t) = b_0 u(t)$
- 入力を　　出力を　　とした伝達関数

$G(s) =$

分母多項式=0

システムの

依存して

- 状態方程式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ b_0 \end{bmatrix} u(t)$$

は　　のみに現れる

2.4 3階微分方程式で表されるシステムの状態方程式

- 3階微分方程式で表されるシステムの微分方程式

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^3x(t)}{\mathrm{d}t^3}} + a_2\boxed{\frac{\mathrm{d}^2x(t)}{\mathrm{d}t^2}} + a_1\boxed{\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}} + a_0\boxed{x(t)} = b_0u(t)$$

a_0, a_1, a_2, b_0：定数

とすると…

$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} =$$

$$\frac{\mathrm{d}^2x(t)}{\mathrm{d}t^2} =$$

$$\frac{\mathrm{d}^3x(t)}{\mathrm{d}t^3} = \dot{x}_3(t)$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = \\ \dot{x}_2(t) = \\ \dot{x}_3(t) = \end{cases}$$

2.4 3階微分方程式で表されるシステムの状態方程式

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = x_3(t) \\ \dot{x}_3(t) = -a_2x_3(t) - a_1x_2(t) - a_0x_1(t) + b_0u(t) \end{cases}$$

入力：$u(t)$ ，出力：$x_1(t)(= y(t))$ とすると…

状態空間表現

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} = \qquad \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \qquad u(t) \\ y(t) = \qquad \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} \end{cases}$$

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}, A = \qquad , b = \qquad , c =$$

2.4 3階微分方程式で表されるシステムの状態方程式

- $\dfrac{\mathrm{d}^3x(t)}{\mathrm{d}t^3} + a_2\dfrac{\mathrm{d}^2x(t)}{\mathrm{d}t^2} + a_1\dfrac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} + a_0x(t) = b_0u(t)$

$x(t) =$ 　　，$\dot{x}_1(t) =$ 　　，$\dot{x}_2(t) =$ 　　とすると…

状態空間表現

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} = \qquad \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \qquad u(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} &= Ax(t) + bu(t) \\ y(t) &= cx(t) \end{aligned}} \qquad A =$$

2.4 3階微分方程式で表されるシステムの状態方程式

- $\dfrac{\mathrm{d}^3x(t)}{\mathrm{d}t^3} + a_2\dfrac{\mathrm{d}^2x(t)}{\mathrm{d}t^2} + a_1\dfrac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} + a_0x(t) = b_0u(t)$
- 入力を $u(t)$ 出力を $y(t)$ とした伝達関数

$G(s) =$

分母多項式=0 →

→ 　　　　に依存して

- 状態方程式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ b_0 \end{bmatrix}u(t)$$

→ 　　は　　　　のみに現れる

2.5 状態空間表現の特徴

- 連立1階または2階，3階微分方程式の状態空間表現

$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = Ax(t) + bu(t), y(t) = cx(t)$$

特徴

- 状態として選んだシステムの

  .
- システムの特性を表すパラメータが，状態空間表現では .
- 微分方程式の階数が増えるに応じて，ベクトル $x(t)$ などの次数が増える

2.5 状態空間表現の特徴

- 1階微分方程式の例

$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = a_1 x(t) + b_1 u(t) \qquad x(t), a_1, b_1, u(t)\text{: スカラー}$$

  - であれば「　」
- 状態空間表現

$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = Ax(t) + bu(t), y(t) = cx(t)$$

  - 係数行列 A が　に影響を及ぼしていると予想...
  - に　の　が関係

講義02のまとめ

- 状態ベクトルの変数を適切に選ぶことにより，2階以上の微分方程式も状態空間表現で表すことができる．
- システムの重要な特性である安定性は，状態空間表現の係数行列 A が影響を及ぼしていることが予想される．