京大

# 平成26年度入学試験問題

# 数　学（理系）

200点満点

≪配点は，学生募集要項に記載のとおり．≫

（注　意）

1. 問題冊子および解答冊子は係員の指示があるまで開かないこと．
2. 解答冊子は表紙のほかに16ページある．
3. 問題は全部で6題ある（1ページから2ページ）．
4. 試験開始後，解答冊子の表紙所定欄に学部名・受験番号・氏名をはっきり記入すること．表紙には，これら以外のことを書いてはならない．
5. 解答は解答冊子の指定された解答用ページに書くこと．ただし，続き方をはっきり示して計算用ページに解答の続きを書いても良い．この場合に限って計算用ページに書かれているものを解答の一部として採点する．それ以外の場合，計算用ページは採点の対象としない．
6. 解答のための下書き，計算などは，計算用ページに書くこと．
7. 解答に関係のないことを書いた答案は無効にすることがある．
8. 解答冊子は，どのページも切り離してはならない．
9. 問題冊子は持ち帰ってもよいが，解答冊子は持ち帰ってはならない．

**1** (30 点)

座標空間における次の3つの直線 $l, m, n$ を考える：

$l$ は点 $\mathrm{A}(1,0,-2)$ を通り，ベクトル $\vec{u}=(2,1,-1)$ に平行な直線である．
$m$ は点 $\mathrm{B}(1,2,-3)$ を通り，ベクトル $\vec{v}=(1,-1,1)$ に平行な直線である．
$n$ は点 $\mathrm{C}(1,-1,0)$ を通り，ベクトル $\vec{w}=(1,2,1)$ に平行な直線である．

P を $l$ 上の点として，P から $m, n$ へ下ろした垂線の足をそれぞれ Q, R とする．このとき，$\mathrm{PQ}^2+\mathrm{PR}^2$ を最小にするような P と，そのときの $\mathrm{PQ}^2+\mathrm{PR}^2$ を求めよ．

**2** (30 点)

2つの粒子が時刻 0 において △ABC の頂点 A に位置している．これらの粒子は独立に運動し，それぞれ1秒ごとに隣の頂点に等確率で移動していくとする．たとえば，ある時刻で点 C にいる粒子は，その1秒後には点 A または点 B にそれぞれ $\frac{1}{2}$ の確率で移動する．この2つの粒子が，時刻 0 の $n$ 秒後に同じ点にいる確率 $p(n)$ を求めよ．

**3** (35 点)

△ABC は，条件 $\angle\mathrm{B}=2\angle\mathrm{A}$，$\mathrm{BC}=1$ を満たす三角形のうちで面積が最大のものであるとする．このとき，$\cos\angle\mathrm{B}$ を求めよ．

$\boxed{4}$ (35 点)

実数の定数 $a, b$ に対して，関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \frac{ax+b}{x^2+x+1}$$

で定める．すべての実数 $x$ で不等式

$$f(x) \leqq f(x)^3 - 2f(x)^2 + 2$$

が成り立つような点 $(a, b)$ の範囲を図示せよ．

$\boxed{5}$ (35 点)

自然数 $a, b$ はどちらも 3 で割り切れないが，$a^3+b^3$ は 81 で割り切れる．このような $a, b$ の組 $(a, b)$ のうち，$a^2+b^2$ の値を最小にするものと，そのときの $a^2+b^2$ の値を求めよ．

$\boxed{6}$ (35 点)

双曲線 $y = \dfrac{1}{x}$ の第 1 象限にある部分と，原点 O を中心とする円の第 1 象限にある部分を，それぞれ $C_1, C_2$ とする．$C_1$ と $C_2$ は 2 つの異なる点 A, B で交わり，点 A における $C_1$ の接線 $l$ と線分 OA のなす角は $\dfrac{\pi}{6}$ であるとする．このとき，$C_1$ と $C_2$ で囲まれる図形の面積を求めよ．

**問題は，このページで終わりである．**