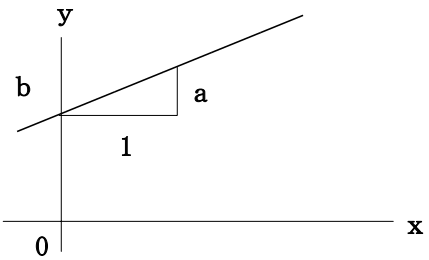
４　直線の方程式（数学）

数学と測量では、ｙ軸ｘ軸が逆となるので、ここでは軽くおさらいとしておきましょう。

（１）傾きａ、切片ｂの直線

傾きがａであり、ｙ軸上のｂ（切片）を通る直線の方程式は、次のように表される。



$$\boxed{y = ax + b} \cdots ①$$

ａ：傾き

ｂ：切片

たとえば、生まれたばかりの赤ん坊の身長はｂ㎝であった。１年にａ㎝ずつ成長したとすると、ｘ年後には何（ｙ）㎝でしょう。ということである

具体的にｂ＝40㎝、ａ＝５㎝とした場合、10年後には

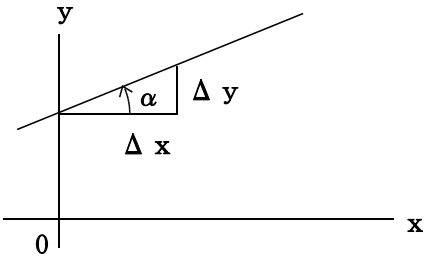
$y = 5x + 40$

$= 5 \times 10 + 40$

$= 90$㎝　である。

傾きａは、

$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$



であり、ｘ軸からの角度αとすると、

ａ＝tanαである。

したがって、上記の①式は

$$y = \frac{\Delta y}{\Delta x} x + b \quad \cdots ②$$　あるいは、

$y = \tan\alpha + b$　　…③ ということができる。

ところでｂは、（x_1,y_1）を通るときに、①式に代入しても成り立つので

$y=ax+b$　…①

$y_1=a\ x_1+b$

したがって　$b=y_1-ax_1$　これを再度①式に代入すると

$y=ax+(y_1-ax_1)$　である。

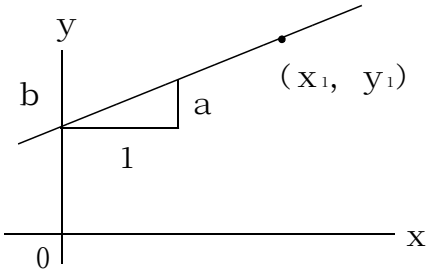
先の事例で確認すると、１年で5㎝伸びる子が10年後に90㎝であるとき、生まれたとき何（ｂ）㎝か。　（x_1,y_1）＝(10,90)

$b=90-10\times5=40$㎝

（２）点（x_1, y_1）を通る傾きａ、切片ｂとする直線式

①式に（x_1, y_1）を代入すると、

$y_1=ax_1+b$　‥‥②



①式－②式とすると、

$y=ax+b$

$-)\ y_1=ax_1+b$

$y-y_1=a(x-x_1)$

である。つまり、

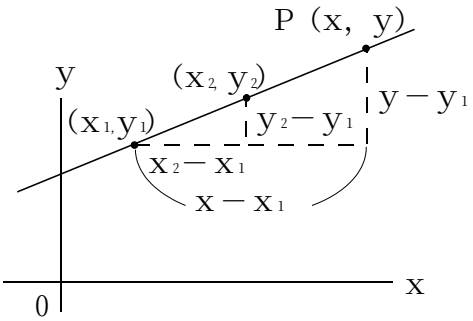
（x_1, y_1）を通り、傾きａの直線式は、

$\boxed{y-y_1=a(x-x_1)}$　覚える

である。

（３）２点（x_1, y_1)、（x_2, y_2）を通る直線

２点（x_1, y_1)、（x_2, y_2）とするとき、任意のＰ（ｘ，ｙ）とするとき、右図から



$$\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

であるので、これを変形すると

$$y-y_1 = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1) \quad \cdots⑤$$

覚える

である。つまり④式のａを入れ替えた式である。

例題

２点（－２，８)、（４，２）を通る直線式を求めよ。

解説

$$y-y_1 = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$$

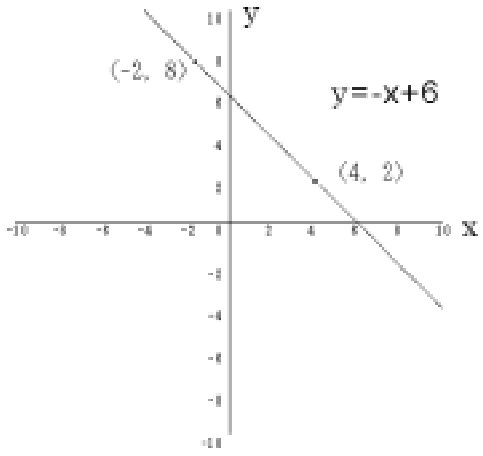
に代入すると、

$$y-8 = \frac{2-8}{4+2}(x+2)$$

$$=-1(x+2)+8$$

$$=-x+6$$

である。グラフにすると次のようになる。



（4）2直線の平行と直交

次の2つの直線があるとき、

$y=ax+b$　…　①

$y=a'x+b$　…　②

① 2直線の平行

2つの直線が平行であるということは、傾きaが等しいということである。つまり、$a=a'$ が平行な2直線の条件である。bがどんな値をとっても平行である。

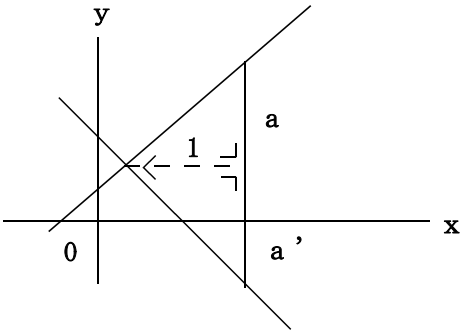
② 2直線の直交

2つの直線が直交するためには、$a\cdot a'=-1$ である。

なぜなら、右図において直角であるとピタゴラスの定理から、

$(a-a')^2=(1^2+a^2)\cdot(1^2+a'^2)$ であり、整理すると、

$a\cdot a'=-1$である。



（5）2直線の交点

2つの直線

$y=ax+b$　…　①

$y=a'x+b'$　…　②

があるとき、2つの式を同時に満足する点（x_0, y_0）が、交点Pである。

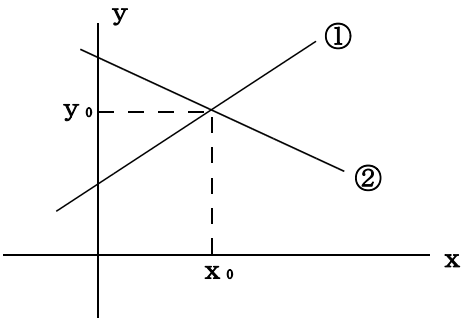
①式－②式

$y=ax+b$

$-)\ y=a'x+b'$

$0=(a-a')x+(b-b')$

$(a'-a)x=b-b'$



$$x_0 = \frac{b - b'}{a' - a}$$ である。

これを、①式に代入し

$y_0 = a x_0 + b$　として、ｙを求めることができる。

たとえば、$y = -x + 6$

$y = x + 2$

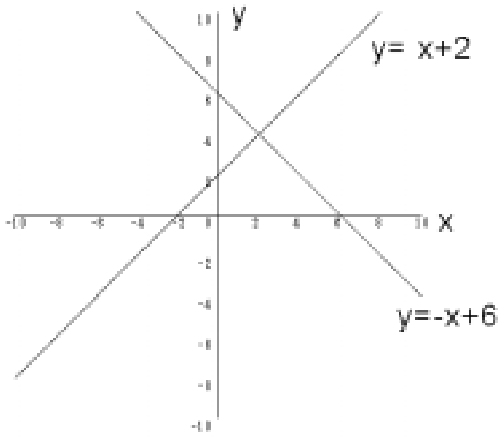
とする、２つの直線の交点は、

$$\begin{array}{rl} & y = -x + 6 \\ -) & y = x + 2 \\ \hline & 0 = -2x + 4 \end{array}$$

$x = 2$

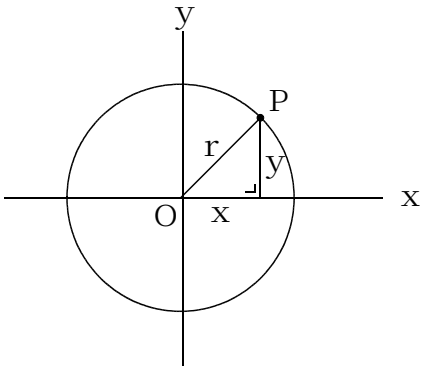
$y = -2 + 6 = 4$

交点は（２，４）である。



５　円の方程式（数学）

原点Ｏ（0，0）中心とする半径ｒを通るＰ（ｘ，ｙ）は、

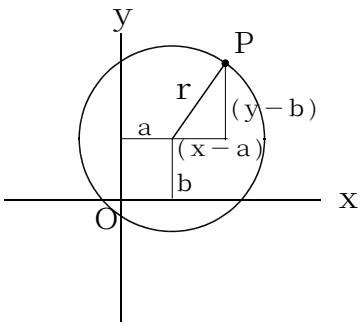


図のようにＯから常にｒの距離に存する点Ｐの集まりであるから、

$x^2 + y^2 = r^2$

で表される。

また、（ａ，ｂ）を中心とする、半径ｒの式は、



$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$

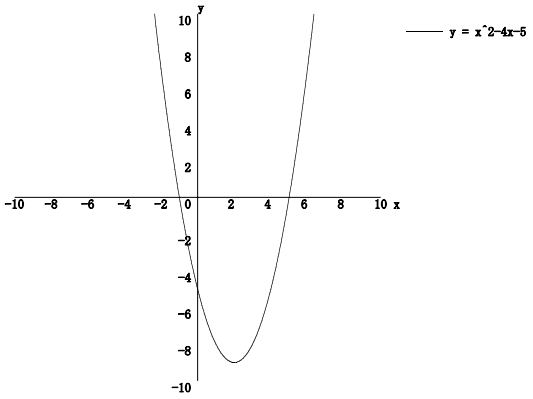
である。

たとえば、(3，2）を中心とする半径5の式は、

$(x-3)^2+(y-2)^2=5^2$ である。

６　２次関数と２次方程式

$y=x^2+1$のように、変数ｘが自乗であるとき２次関数という。
２次関数のグラフは
$y=a(x-p)^2+q$　と
するとき（ｐ、ｑ）を頂点、
$y=ax^2$とする、グラフの平行移動をしたものである。



たとえば、$y=(x-2)^2-9$は右図のとおりである。
一般に２次関数は、その次数の高い係数から順に並べ、
$y=ax^2+bx+c$
と表す。

このとき、$y=0$とするとき、２次方程式という。

$$ax^2+bx+c=0$$

$y=0$とするときにｘ軸上に図から２個存在することが分かる。

２次方程式を$(x-e)(x-f)=0$　のように因数に分解したときe,fである。因数に分解することが難しいので、次式をもちいる。

$$a\neq 0$$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

たとえば、$y=(x-2)^2-9$はあ、$y=x^2-4x-5$であり

$a=1$，$b=-4$、$c=-5$　として上式に代入すると

$$x=\frac{+4\pm\sqrt{(-4)^2-4\times1\times(-1)}}{2\times1}$$

$=+5$、又は-1である。グラフのｘ軸上の点である。

先の２次方程式の解を証明すると次のとおりである。

証明　$ax^2+bx+c=0$　　$a\neq 0$のとき、両辺をaで割ると、

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$$

$$x^2+\frac{b}{a}x=\left[x+\frac{b}{2a}\right]^2-\left[\frac{b}{2a}\right]^2 \text{であるので、}$$

$$\left[x+\frac{b}{2a}\right]^2-\left[\frac{b}{2a}\right]^2+\frac{c}{a}=0$$

$$x+\frac{b}{2a}=\pm\sqrt{\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}}$$

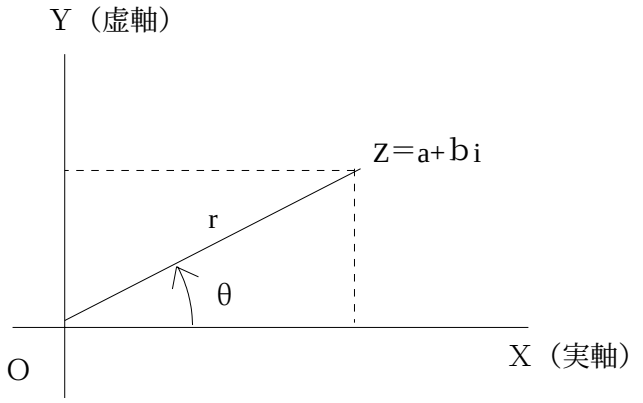
$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

７　複素数（ｃｏｍｐｌｅｘ　ｎｕｍｂｅｒ）

正の数の平方根を求めることができるが、通常は０未満の平方根を求めることできない。たとえば$\sqrt{-1}$である。そこで　$i^2=-1$　　と定義し、ば$\sqrt{-1}=1i$、$\sqrt{-2}=2i$　というように表す。

このｉを用いた数　a+bｉ　（a,bは実数）を複素数という。aを実部、bを虚部という。

①　これを平面上に表すと次のようになる。



平面位置は、実軸（ｘ）に実部aをとり、虚軸（ｙ）に虚部bをとったときの交点である。原点ＯとＺまでの距離r、Ｘ軸とＯＺの直線に挟まれる角θを偏角といい、

$$Z=r(\cos\theta, i\sin\theta)$$

なぜなら、$a=r\cdot\cos\theta$、$b=r\cdot\sin\theta i$

である。このとき、極座標形式では

$$Z=(r,\theta)$$

と表す。

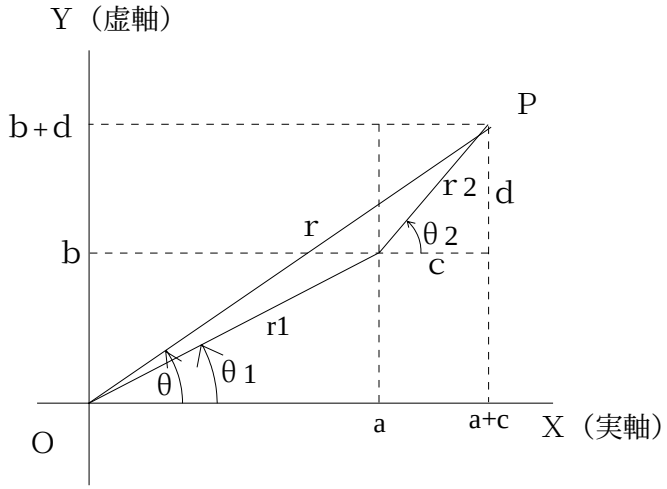
②　複素数の加減算

複素数の加減算は、次のように計算する。

$P = (a+bi) + (c+id) = (a+c) + (b+d)\ i$

$Q = (a+bi) - (c+id) = (a-c) + (b-d)\ i$

つまり、実部と虚部をそれぞれ加減すればよい。加算の式は平面上では次のとおりである。



$a+bi$ であるときの距離 $r1$、偏角 $\theta 1$ を（$r1, \theta 1$)、$c+di$ とするとき距離 $r2$、偏角 $\theta 2$（$r2, \theta 2$）とするとき、原点Oと Pの距離を r、その偏角を θ とするとき、極座標形式で表すと

$$(r1, \theta 1) + (r2, \theta 2) = (r, \theta)$$
$$= (a+c) + (b+d)\ i$$

である。そのとき原点OからPまでの距離 r と偏角 θ は

$$r = \sqrt{(a+c)^2+(b+d)^2}$$

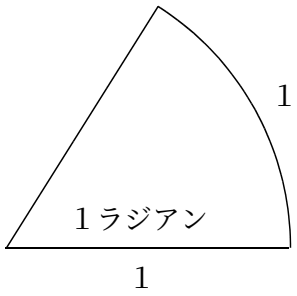
$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{b+d}{a+c}\right)$$

である。

測量の計算では、虚数を取り扱う複素数では計算しないが、偏角θを方向角、aをx座標、bをｙ座標と置き換えることによって、関数電卓の複素数機能を利用することができる。

8　弧度法（ラジアン）

ラジアンは、円周上でその円の半径1と同じ長さの弧となる2本の半径が成す角と定義される。度数法で測った360度は、弧度法においては2πラジアンになる。



よって、1ラジアンは、360°＝2π1　であり

1ラジアン＝360°÷2π

57.29578度

3437分

206265秒

である

（応用については、　　をみよ。）