

【特集】音の流体力学

細管内の音波伝播と熱音響現象

*愛知教育大学 物理学教室

矢崎 太一†

Sound Propagation in Narrow Tubes and Thermoacoustic Phenomena

Taichi YAZAKI, Department of Physics, Aichi University of Education

1 はじめに

1687 年, Newton は大気中を伝播する音の速度理論を科学誌 *Principia* で初めて紹介した. 1 世紀後, 彼の理論は Laplace や Poisson によって修正され, 大気中を伝播する音は等温的よりはむしろ断熱的であることが判明した. 音響学の長い歴史の中で音速論争は科学史に残る注目すべき出来事となった. さらにこの論争が「音」と「熱力学」との関連性を示す重要なステップとなったことも事実である. 「熱力学」の問題と関連して音速の正確な測定については現在でも研究されている¹⁾.

円筒管のような固体壁で囲まれた空間を伝播する音波の問題についても同様に長い歴史がある. Helmholtz や Kirchhoff および Lord Rayleigh など音響学の理論的研究に功績を残した著名な人物が登場する. 管内音波は自由空間中を伝播する断熱音波と異なり管壁での粘性や熱伝導の効果により多様な現象を引き起こす. 粘性だけを考慮した Helmholtz の理論をさらに発展させ Kirchhoff は熱伝導度も考慮し, ある仮定のもとで音の伝播定数を理論的に導いた. その後, 彼の理論は Rayleigh によって彼の著書である *The Theory of Sound*²⁾ の中で詳細に説明された. Kirchhoff の解が非常に複雑な超越方程式から導出されるため, これ以降の研究は Weston³⁾のようにこの方程式の解析的近似解を導出するグループと, Zwicker や Kosten⁴⁾および Iberall⁵⁾のように流体力学の基本方程式から再

出発するグループに別れることになる.

細管内の音波伝播は古典音響学の多くの分野に共通する基本的な問題であり, エンジンや冷凍機の蓄熱(冷)器, 楽器, 車の触媒コンバータ, 聴覚器官や雪層などのような多孔質媒質を伝播する音波の解析や理論的モデルの出発点となっている. これらは音響学の魅力的な分野として現在も注目されている. 熱音響現象の理論的先駆者である Rott⁶⁾は論文の中で「Kirchhoff 以降多くの研究が報告されているにもかかわらず彼の理論の重要性が見逃されている」と指摘している. 断熱音速に関する多くの実験報告があるのに対して, 現在に至るまで広い範囲に渡って彼の理論が実験的に検証されていないのは驚きである. 熱音響現象の基礎でもある円筒管内の音波伝播の問題を断熱から等温までの広い範囲にわたって実験的に検証することから始めてみる.

2 円筒管内の音波伝播

1975 年, Tijdeman⁷⁾は円筒管の x 軸の正の方向に伝播する圧力波を $P = p_0 \exp(i\omega t - k_0 \Gamma x)$ と書くと, Kirchhoff の提案した音波伝播定数 Γ が本質的に以下の 2 つのパラメータによって記述されることを示した. 1 つは管の内半径 R と管壁に形成される速度境界層 $\sqrt{\nu/\omega}$ との間の比 G であり, 他は音波の伝播が平面波的吗かどうかの測度となるパラメータ K である. すなわち

$$G = R \sqrt{\frac{\omega}{\nu}}, \quad K = \frac{R\omega}{c} \quad (1)$$

ここで ω は角振動数, ν および c はそれぞれ気体

*〒448-8542 刈谷市井ヶ谷町広沢 1

†Email: tyazaki@aecc.aichi-edu.ac.jp

の動粘性係数と断熱音速を示す。また k_0 は断熱空間での波数を示す。熱音響現象を含めて我々の興味あるほとんど全ての場合が $K \ll 1$ および $K/G \ll 1$ を満足する。そのとき伝播定数 Γ は G だけに依存し以下のように記述される。

$$\Gamma = \sqrt{\frac{J_0(i^{3/2}G)}{J_2(i^{3/2}G)}} \sqrt{\gamma + (\gamma - 1) \frac{J_2(i^{3/2}\sqrt{\sigma}G)}{J_0(i^{3/2}\sqrt{\sigma}G)}} \quad (2)$$

J_0 と J_2 は 0 次および 2 次の Bessel 関数を示し、 σ は Prandtl 定数、 γ は比熱比である。管内を伝播する音波の位相速度と減衰定数は理論的に $V=c/\text{Im}\Gamma$ および $\eta=k_0\text{Re}\Gamma$ となる。 G が管壁での粘性効果を示す一方で $\sqrt{\sigma}G$ は管の内半径と管壁で形成される温度境界層との比に等しく、粘性の効果と無関係で熱伝導度の効果を示す。 $\sqrt{\sigma}G$ が零の極限では式(2)の 2 番目のルートの中身は比熱比 γ となり、もし粘性効果が無視できれば位相速度は Newton の等温音速と一致する。我々の経験するほとんどの「音」は多かれ少なかれ固体壁の隙間を通過する。特にその代表例である円筒管内の音場は Γ によって支配されることになる。Laplace の断熱音速と同様に Γ は古典音響学における重要な物理量の一つであると確信している。

(2)式の妥当性を調べてみる。 G が普遍的パラメータであることを示すために様々な条件の下で位相速度と減衰定数の測定を試みた。管内径は $R=0.6, 1.0$ および 2.0mm を用いた。管の肉厚は(壁の温度揺らぎを無視できる)等温壁を実現するため十分厚い銅管を用いた。また G の広範囲にわたる測定を可能にするため管内平均気圧は $P_m=2.5$,

5.0, 10.2, 40.6 および 101kPa とした。管の一端から小振幅(およそ 10Pa 程度)のパルス波をスピーカーとベローズを用いて入力し管の軸方向に沿って等間隔に取り付けた多数の小型圧力センサーでパルス波の時空発展を調べた。閉じられた他端での反射波を無くし純粋な進行波での実験を実現するため、管の全長は 20m から 40m とした。任意の 2 点間でのパルス波時系列から周波数応答関数を求め、その位相と振幅スペクトルから位相測速度 V と減衰定数 η を決定した。センサー間の管の体積に比べて無視できない dead volume を持つセンサーの周期配列は別の分散効果を引き起こす⁸⁾。円筒管本来の結果を得るためには多少の工夫を要する。計算は容易だが実験はそれほど簡単ではない。

式(2)から得られた無次元化された位相速度 V/c と減衰定数 η/k_0 の結果を図 1 の実線で示す。流体要素の熱力学的過程を強調するために G の代わりに管内の流体と管壁との間の熱交換をコントロールするパラメータ $\omega\tau$ ($=\sigma G^2/2$) が用いられている。熱音響現象の分野でよく用いられ、熱緩和時間 τ ($=R^2/2\alpha$; α は気体の熱拡散係数)は流路内の流体要素と壁が熱平衡に達するまでの時間の目安となる。実験では $\omega\tau$ の 10^{-4} から 10^2 までの 7 桁にわたって式(2)の結果と非常に良く一致する実験結果を得ている。全ての実験データに対して K と K/G の値はそれぞれ 7×10^{-2} および 6×10^{-3} 以下であった。異なった条件で得られた全てのデータがある 1 本の曲線上に乗る。これは $\omega\tau$ が管内の音波伝播を支配する普遍的パラメータであることを意味する。

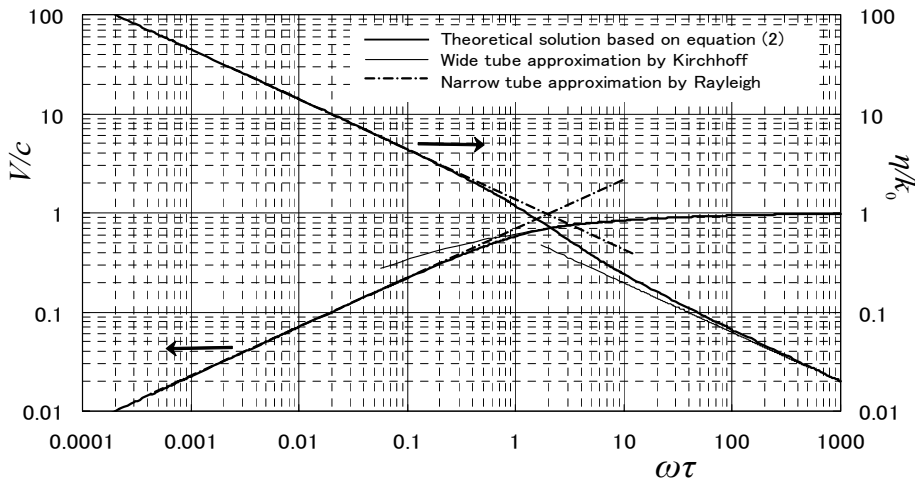


図1 円筒管内を伝播する音波の伝播定数 (位相速度 V と減衰定数 η) の $\omega\tau$ 依存性

だから Tijdeman が論文の中で指摘しているように、これまでよく用いていた “Wide tube” や “Narrow tube” なる表現は誤解を与えるかもしれない。

結果は大きく分けると 2 つの漸近領域から構成されている。まず $\omega\tau \gg 2$ の領域を考える。緩和時間 τ が振動周期 ($2\pi/\omega$) に比べて十分長いから管路内の流体要素は断熱可逆的となる。単位質量当たりのエントロピー変動 s を圧力変動 P と温度変動 T で表すと

$$s = -\frac{\beta}{\rho_m} P + \frac{C_p}{T_m} T \quad (3)$$

となる。ここで β および C_p は気体の熱膨張率および単位質量あたりの定圧比熱である。 ρ_m は平均密度を表す。自由空間中の音波と同様にエントロピー変動はないが圧力と同位相の温度変動が存在する。波数を $k = (\text{Re}k - i\text{Im}k)$ とすると ($\text{Re}k = \omega/V$ および $\text{Im}k = \eta$)、 $\text{Re}k_0 \sim 1$ および $\text{Im}k/k_0 \sim 1/\sqrt{2\omega\tau}$ の漸近的表現を得る。粘性と熱伝導度による僅かな散逸はあるが分散がなく位相速度は振動数によらず断熱音速 c に近い。この領域は熱音響現象では仕事流束の輸送に利用される。また大振幅音波が可能となるため衝撃波のような非線形現象の研究対象領域にもなる。図 1 から分かるように、よく知られた Kirchhoff の “Wide Tube” 近似は位相速度に関しては意外にも広範囲 ($\omega\tau > 2$) で成立している。大気圧のもとで 1mm の内半径をもつ細管内では 15Hz 以上の振動数を持つ音波に対し Kirchhoff の単純な近似式が適用できることになる。しかし減衰定数については $\omega\tau = 10$ でも式(2)との間に明らかな差が認められる。よく知られた彼の近似式は注意して用いる必要がある⁹⁾。

一方 $\omega\tau \ll 2$ の領域では緩和時間 τ が振動周期に比べて十分短いから管路内の流体要素は等温的となり温度変動はない。圧力と逆位相のエントロピー変動が存在することを式(3)は示している。管路内では温度変動がないので熱伝導度による散逸は少ない。熱力学的には等温過程であるが決して可逆的ではない。強い粘性効果のため位相速度は Newton の等温音速には近づかない。 $\omega\tau \sim 10^{-4}$ では位相速度は人間の走る速度より遅くなる。図 1 の結果から漸近的表現として $\text{Re}k/k_0 \sim \sqrt{2/\omega\tau}$ および $\text{Im}k/k_0 \sim \sqrt{2\omega\tau}$ を得る。管内を伝播する音波の

進行方向の侵入距離は $1/\eta = \sqrt{2D/\omega}$ となり ($D \equiv c^2\tau/4$)、周波数の増加に伴い減少する。また $\omega = 2D(\text{Re}k)^2$ が成立するから管内音波はプリズム中を伝播する光と同様に異常分散を示す。同じ管径で同じ平均気圧であれば位相速度はあらゆる領域で周波数の増加に伴い増加することになる。さらに図 1 の点線で示されるように得られた漸近線、 $k/k_0 \sim \sqrt{2\omega\tau}(1-i)$ は Rayleigh の “Narrow tube” 近似の計算結果 $k/k_0 = \sqrt{2\gamma\sigma/\omega\tau}(1-i)$ と広範囲 ($\omega\tau < 0.4$) で一致する。これらの結果は音波がこの領域では拡散定数 D を持つ拡散方程式に従うことを意味する。一見等温過程で分散があり魅力的な領域に見えるが、現実には粘性による強い散逸のため波動伝播という臨場感はない。消音効果などの応用分野もあるが、熱音響現象では音響インピーダンスを大きくする工夫をして粘性散逸を減らしこの領域を活用することになる。

こうして円筒管内音波伝播の問題は Kirchhoff と Rayleigh の極めて単純な近似式を用いて $\omega\tau$ の広い範囲を網羅することができる。しかし僅かな領域ではあるが $\omega\tau \sim 2$ 近辺の領域は彼らの近似式を適用することができない。壁近くの流体要素は等温的に振舞い、圧力と逆位相のエントロピー変動が存在する。その一方で壁から十分離れた流体要素は断熱的に圧縮・膨張を繰り返し、エントロピー変動はないが圧力と同位相の温度変動が存在する。この領域では管内気体の温度変動とエントロピー変動は動径方向に依存する。流体要素の運動は断熱と等温の間で熱伝導度によるエントロピー生成が最も大きくなり熱力学的には不可逆過程となる。管内を往復運動する流体要素と管壁との間の熱交換は中途半端（不十分）だが粘性散逸はそれほど深刻ではない。だから波動伝播が可能であり「壁」と「音」の間の熱的相互作用を通じて多様な現象が期待できる魅力的な領域である。「熱音響現象」ではこの僅かな領域が主役となる。またこの領域では位相速度と群速度との差が最も大きく波動伝播の観点からも興味深い。

3 熱音響現象

1908 年オランダの Kamerlingh-Onnes によって He が液化されると、低温実験（圧力計測等）を行

うために室温から低温部(4.2K)へ連結された細管内で大振幅の気柱振動が自発的に発生する現象が観測された。低温物理では Kramers¹⁰⁾と呼んでいる。18 世紀に科学誌等に報告されていた Rijke 管²⁾, Sondhauss 管²⁾, および国宝吉備津神社の「吉備津の釜」¹¹⁾と同様に熱音響現象の代表例となる。これらの現象に共通するのは $\omega\tau \sim 2$ の部分がある事と, その場所で軸方向に沿った急激な温度勾配が存在することである。

Taconis 振動を流体力学的観点から理論的に解明するため Kirchhoff 理論の非一様温度への拡張が始まったのは 1949 年以降のことである。 $\omega\tau$ が十分大きい(Wide tube)条件を仮定した Kramers¹²⁾や, 十分小さい(Narrow tube)条件のもとで理論的に安定性を議論した Ter-Haar¹³⁾の理論は実験を合理的に説明することができなかったが, 1969 年以降の Rott^{6,14)}の理論への手がかりとなった。Rott は階段型温度分布を仮定して $\omega\tau$ に制限を課すことなく長波長近似および定在波近似のもとで線形安定解析を展開した。彼の予言した安定曲線はその後なされた実験と定量的に一致することが示された¹⁰⁾。Rott の理論は熱音響現象を流体力学的視点に立って理解した最初の成功例である。最近では阪大の杉本等による放物線型温度分布を仮定した安定曲線が解析的に提案されている。

1979 年米国の Ceperley¹⁵⁾は熱音響現象を「流体力学」の視点ではなく「熱力学」の視点からの新しい理解の方法を示した。音波は圧力変動に伴い「圧縮」と「膨張」を繰り返す。管の軸方向に沿って温度勾配が存在し流体要素が管壁と十分熱交換できると仮定すると(粘性効果は無視する)管内を往復運動する流体要素は周期的な「加熱」と「冷却」を経験する。これらの 4 つの過程が順序よく繰り返されれば「ある種の熱機関(エンジン)」と同じ熱力学的サイクルとなる。このような理由で熱的に励起された気柱振動を「熱音響エンジン(原動機)」と呼ぶ。Stirling エンジンも熱音響エンジンの代表例である。

Ceperley の新しい視点は当時 Los Alamos 国立研究所の低温物理学者であった Wheatley を強く刺激した^{16,17)}。米国では彼を中心としたグループによって新たなデバイス(熱音響冷凍機)が試作・提案された。低温実験によって迷惑な現象だけであ

った Taconis 振動が「流体力学」から「熱力学」へと視点を変えることによって新しい「エンジン」や「冷凍機」を生み出すことになった。さらに「エンジン(冷凍機)」で遂行される「エネルギー変換」の理解の方法や概念さえも変えることになった。

管径 10mm 程度の一端の閉じた薄肉ステンレス管の中に 50~100 メッシュのステンレスの金網を重ねて入れ, 他端からピストン等で管内気柱を強制振動させると重ねて入れた金網の両端に急激な温度勾配が形成される。国内の熱音響現象の組織的取り組みは気柱自励振動でなくこの「パルス管冷凍機」と呼ばれるデバイスの理解から始まった。米国が「定在波エンジン・冷凍機」に注目する一方, 国内では筑波大の富永が中心となり「進行波エンジン・冷凍機」の重要性や理解の方法が提案され, 熱音響理論^{18,19)}の先駆けとなった。

気柱に温度勾配をつければ「エンジン」としての機能が発現し, 逆に気柱を強制振動させれば「冷凍機」となる。どちらも $\omega\tau \sim 2$ の部分が重要な役割を果たしている。Kirchhoff による細管内の音波伝播という数理科学の問題が視点を変えただけで先端技術につながった。背景に分かり易い応用分野を持つ研究領域は発展するにちがいない。

3.1 熱音響現象の理解と応用を目指して

熱音響現象は「流体の振動」と, 特徴的な方向への「熱流(エントロピー流)」が存在する共通性がある。流体力学が流体要素の変動量である変位 ξ (流速 u), 温度 T , 圧力 P , 密度 ρ , エントロピー s の時空発展を記述するのに対して, 熱音響現象の「熱力学的理解」は振動流によって生じた「熱流束」と「仕事流束」およびそれらの間の「エネルギー変換」に注目し, それらを「進行波」と「定在波」の寄与に分類することから始まる。流体要素の往復運動という対称的な運動からある特徴的な方向への非対称な「エネルギー流束」が生まれる。これが音波冷凍機などの音響デバイスを生み出す。新しいデバイスの提案や現象の大雑把な理解という観点では「熱力学的視点」は実験屋にとって便利かつ合理的である。

3.1.1 振動流に伴うエネルギー流束

振動流に伴う 2 つの特徴的なエネルギー流束が存在する。エントロピーを運ぶ「熱流束」とそれ

以外の「仕事流束」である。後者は音響学の「音響強度」と同等である。それらの和が全エネルギー流束（エンタルピー流束）である。この関係はある位置を中心に往復運動する流体要素に着目すると以下のように記述される。

$$\frac{\omega}{2\pi} \oint P d\xi + \frac{\omega}{2\pi} \rho_m T_m \oint s d\xi = \frac{\omega}{2\pi} \rho_m \oint h d\xi \quad (4)$$

積分は振動の1サイクルを示す。左辺の第1項が仕事流束 I 、第2項が熱流束 Q で右辺がエンタルピー流束 H である (m は平均量を示す)。 h は単位質量当たりのエンタルピー変動である。上式は以下のようにも書くこともできる。

$$\overline{Pu} + \rho_m T_m \overline{su} = \rho_m \overline{hu} \quad (5)$$

ここで $\overline{}$ は時間平均を示す。式(4),(5)は管の動径方向に依存しており断面平均をする必要がある。簡単のために以下では粘性効果を見捨てる。だから圧力と同様に流速(変位)の動径方向依存性も考えない。ある場所での流体要素の圧力と変位の時間変化を以下のように記述する。

$$P = p_0 \exp i \omega t$$

$$\xi = \xi_0 \exp i(\omega t - \theta) \quad (6)$$

$$= \xi_0 \cos \theta \exp i \omega t + \xi_0 \sin \theta \exp i(\omega t - \pi/2)$$

流体要素の変位 ξ は圧力と同位相の成分 $\xi_0 \cos \theta$ と $\pi/2$ だけ遅れた成分 $\xi_0 \sin \theta$ から構成される。それぞれ「定在波成分」および「進行波成分」と呼ぶ。これらは $\omega \tau \gg 2$ の(散逸がない)場合の純粋な進行波音波と定在波音波の位相関係を考慮して命名された。流体要素の往復運動はこのように局所的には2種類に分類される(図2参照)。このことは熱音響現象を理解する上で極めて重要である。実際には管内を伝播する音波は両方の成分から構成されている。

仕事流束(音響強度)について考察する。ある場所での仕事流束 I は式(4)あるいは(5)の第1項で与えられ、

$$I = \frac{1}{2} p_0 \xi_0 \omega \sin \theta$$

となる。これは進行波成分が仕事流束に寄与することを意味し、その大きさは図2a)の楕円の面積に周波数を乗じた値に等しい。また時計方向の回転は I が正の値で x 軸の正の方向を意味し、音波の進行方向と一致する。また反時計方向の回転は I が x 軸の負の方向を意味し音波の進行方向も負

の方向である。図2b)はある場所での「定在波成分」を示す。定在波成分は音響強度に寄与しないことになる。だから散逸を伴う共鳴管では純粋な定在波音波は存在しない。散逸を考慮して有限振幅の定在波を扱う場合は注意が必要である。

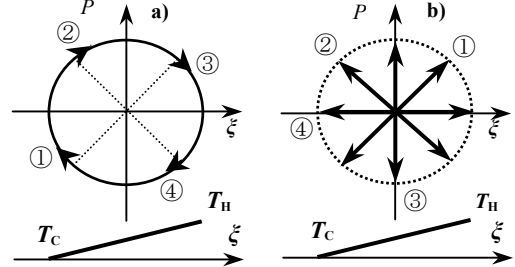


図2 a)進行波成分, b)定在波成分

次に熱流束について考察する。式(3)のエントロピー変動の動径方向依存を考えよう。管壁に近い流体要素は圧縮・膨張に対して瞬時に壁と熱交換できるので壁との間に温度差は生じない。管の軸方向に温度勾配 ∇T_m があっても流体要素は変位に伴う温度変動 $\xi \nabla T_m$ を瞬時に感じ常に壁と熱平衡を保ちながら運動する(局所的等温可逆過程)。この領域ではエントロピー変動が最も大きい。壁から充分離れた流体要素は断熱可逆的でエントロピー変動に寄与しない。壁から温度境界層程度離れた流体要素は熱交換に有限の時間を必要とし壁との間の温度差を維持しながら運動するため熱伝導度による不可逆性(エントロピー生成)が生じる。こうして管内のエントロピー変動は圧力変動と異なり動径方向に分布を持つ。その分布は $\omega \tau$ によって支配される。エントロピー変動が拡散方程式に従うことを考慮して断面平均をとると^{17,18)},

$$\langle s(r) \rangle = s(R)(\chi' - i\chi'') \quad (7)$$

$$s(R) = -(\beta / \rho_m) P + (C_p / T_m) \xi \nabla T_m$$

と書ける。 $\langle \rangle$ は断面平均を示す。結果的に管内のエントロピー変動は管壁と瞬時に熱交換することによって変動する成分 $s(R)\chi'$ と $\pi/2$ 遅れる成分 $s(R)\chi''$ から構成される。 χ' と χ'' の $\omega \tau$ 依存性を図3に示す。式(7)を用いて熱流束すなわち式(4)または式(5)の左辺第2項を計算すると

$$Q_P = -0.5 \chi' \beta T_m p_0 \xi_0 \omega \sin \theta = -\chi' \beta T_m I$$

$$Q_S = 0.5 \chi'' \beta T_m p_0 \xi_0 \omega \cos \theta \quad (8)$$

$$Q_D = 0.5 \chi'' \rho_m C_p \omega \xi_0^2 \nabla T_m = -k_{eff} \nabla T_m$$

となる。 Q_P は図2a)の進行波成分による熱流束で、

図3から分かるように等温可逆過程($\omega\tau \ll 2$)で有効である。方向は仕事流束と逆向きで、 $\omega\tau \ll 2$ ならば理想気体($\beta T_m = 1$)では I と Q_p を加算した全エネルギー流束は零となる。冷凍機としては最も重要な熱流束であり、Stirling や Pulse tube 冷凍機の冷凍²⁰⁾に寄与している。

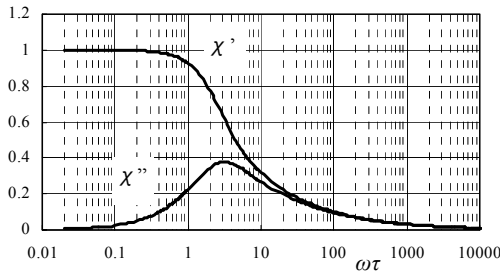


図3 χ' および χ'' の $\omega\tau$ 依存性

Q_s は不可逆性に頼った熱輸送で、その向きは圧力の増大する方向である($\cos\theta$ の符号で決まる)。しかし図2b)の③や④のような節に近い部分では熱流束は存在しない。Beer cooler²¹⁾など共鳴管を利用した冷凍機の冷凍に寄与する。

Q_D は Q_s と同様に不可逆性に依存しており、その向きは高温部から低温部に向かう。 Q_p や Q_s がヒートポンプに寄与する一方で、 Q_D はその冷凍出力に損失(限界)を与える。進行波エンジンや冷凍機($\omega\tau \ll 2$)では抑制することが可能だが定在波を利用したデバイスでは深刻な問題となる。しかし圧力変動や熱膨張に依存しないため液体や固体では伝熱に対して有効利用できる。液体ではある条件で有効的熱伝導度 k_{eff} が通常の熱伝導度の 10^3 倍以上になる。哺乳類の体内と表面温度が殆ど変わらないのは血液の脈動と関連しており Q_D が重要な役割を果たしているはずである。添え字の D は dream を意味する²²⁾。

3.1.2 エネルギー変換と音源

図2a)に示すように音波の進行方向(x の正の方向)に正の温度勾配が存在するとき、管壁との間の熱交換が十分よければ($\omega\tau \ll 2$)、「進行波成分」をもつ流体要素は一周期の間に「圧縮①」→「加熱②」→「膨張③」→「冷却④」を経験することになる。微小ではあるが等温可逆過程からなる Stirling Engine とよく似た熱力学的サイクルである。この微小サイクルによって単位体積・単位時間当たり発生した仕事 W_p が仕事流束 I を増幅する。

こうして音波の進行方向に沿った温度勾配は「仕事源(音源): $W = \text{div} I > 0$ 」となる可能性がある。Stirling Engine や、後で示すループ管エンジンのような「進行波原動機」に有効である。また図2a)において逆周り(④→③→②→①)は冷凍機を可能にする熱力学的サイクルとなる。進行波は本質的に可逆過程と関連している。

図2b)に示すように、ある場所での「定在波成分」をもつ流体要素の往復運動を考える。 P と ξ が同位相であるから、たとえ管の軸方向に温度勾配があっても「圧縮」と「加熱」および「膨張」と「冷却」が同時に起こってしまい進行波のような熱力学的サイクルは起こらない。しかし前節で述べたように熱交換が中途半端で熱緩和時間 τ が流体要素の振動周期の $1/4$ 程度の遅れがあると(すなわち $\omega\tau \sim \pi/2$)、 P と ξ が同位相である「定在波①」でも進行波と同様に温度勾配が「仕事源」となる可能性がある。 P と ξ の位相が π ずれた場所②でも同じ時間遅れがあれば負の温度勾配を課せばよいことになる(負の方向に伝播する進行波と同じ)。ただし図2b)の③や④に示すように $P \sim 0$ や $\xi \sim 0$ の「節」や「腹」の可能性のある場所にいくら急激な温度勾配をつけても、またそこで時間遅れを調整しても「原動機」としての機能は発現しないはずである。Taconis 振動、Rijke 管および Sondhauss 管も W_s が原因となる「定在波型原動機」に分類される。

吸熱や放熱が行われる熱交換器を除けば全エネルギー流 H は一定に保たれる。だから空間的に

$$\text{div } I + \text{div } Q = 0 \quad (9)$$

が成り立つ。これは仕事流束と熱流束の間のエネルギー変換を意味する。上記で定性的に述べた仕事源 W はエネルギー変換の測度である。線形・長波長近似された流体力学の基本方程式を用いて $W = \text{div} I$ を計算すると、

$$W = W_p + W_s + W_k \quad (10)$$

$$W_p = 0.5 \chi' \beta \omega p_0 \xi_0 \sin\theta \nabla T_m = -Q_p \nabla T_m / T_m$$

$$W_s = 0.5 \chi'' \beta \omega p_0 \xi_0 \cos\theta \nabla T_m = Q_s \nabla T_m / T_m$$

$$W_k = -0.5 \chi'' (K_T - K_S) \omega p_0^2$$

となる¹⁹⁾。 K_T と K_S は等温および断熱圧縮率である。 W_p と W_s は進行波と定在波の仕事源を示し、それらの正の値は熱流束から仕事流束への変換(原動機)を意味し音源となりえる。またヒートボ

ンプは $W < 0$ の場合に対応する. いずれもそれぞれの熱流束と密接に関連している. W_k は熱伝導度による散逸を示し負の値をとる. 粘性効果を考慮すると新たにその散逸 $W_v < 0$ が加わり χ' や χ'' の形も変化する^{18,19)}.

3.1.3 熱音響現象の実験例

現在報告されている熱音響現象の大雑把な理解や新たなデバイスの試作提案には, 式(8)および(10)を利用することができる. 以下では 2 種類の実例について簡単に紹介する.

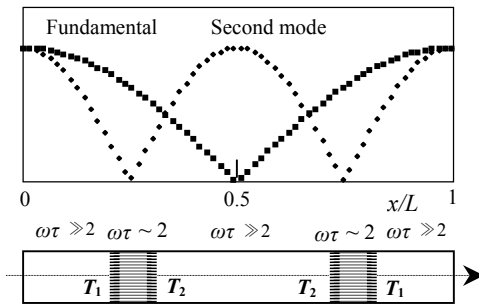


図4 定在波エンジンと管内の圧力分布

i) 定在波エンジン・冷凍機

図4に示すように両端の閉じた共鳴管(半径 $R=20\text{mm}$ 長さ $L=1\text{m}$ 程度)を用いて「定在波エンジン」を試作する. 参考のため蓄熱器のない場合の圧力分布を示した. ハニカムセラミックス等を利用して $\omega\tau \sim 2$ に調整した蓄熱器を温度 T_1 と温度 T_2 の2の熱交換器で挟み $x/L=0.75$ に設置する(0.25の位置あるいは両方に設置してもよい). 蓄熱器の位置は基本モードに対して図2b)の①に対応する. 温度一様な部分は(W_k と W_v による)散逸しかないから残りの部分は $\omega\tau \gg 2$ とする. 実際には $\omega\tau = 10^4$ 程度となる. 管の一端からスピーカー等でパルス波を入力し他端で圧力のパワースペクトルを観測してみよう. その結果からこの共鳴器の基本モードに対する Q -値を決定し温度比依存性を調べてみる²³⁾. 図5に示す実験結果は圧力振幅が増大する向きに温度勾配を増大させていくと ($T_1/T_2 > 1$), $T_1/T_2 \sim 1.7$ 付近で Q -値が無限大になる臨界点が存在することを示している. 臨界点は Rott が予言した中立安定点に対応する¹⁴⁾. この時温度勾配の向きは式(10)によると $W_s > 0$ になる条件と合致する. 臨界点を超えると気柱は自発的に発振し, 上記で予想したように「エンジン」として

の機能が発現する(Q -値は負となる). 逆に圧力振幅の減少する向きに温度勾配を増すと ($T_1/T_2 < 1$) Q -値はさらに小さくなり ($W_s < 0$), 気柱は安定したままである. こうして Q -値の温度依存性を調べるにより実際に臨界点まで達しなくても, 臨界点の有無とその点を予測できる. これは装置の試作・評価には有効な手段となる. また図4から分かるように蓄熱器の位置を $x/L \sim 0.85$ にすると基本モードに加え高次(2次)のモードも可能となる. これらのモードは温度勾配により倍音関係を満たさないため, ある条件ではモード競合による準周期運動²⁴⁾や場合によってはカオス^{25,26)}が観測されることもある.

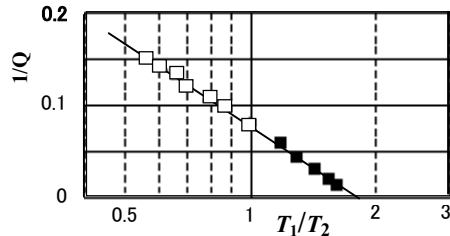


図5 蓄熱器を含む共鳴管の Q -値の温度依存性

1980年代に, 図6に示す Beer cooler²¹⁾と呼ばれる定在波型冷凍機が Los Alamos 国立研究所で試作された. 循環水で T_R を室温に保ちながらヒータで蓄熱器 R_S の高温端の温度 T_H を上昇させていくと $1/4$ 波長モードの気柱振動(0.3MPa の He 気体)が励起される. 同時に蓄冷器の一端の温度 T_C が下がり始める. 散逸のない場合の予想される熱流束 Q , 仕事流束 I およびエンタルピー流束 H 分布を図6に示す. 蓄熱(冷)器での I と Q の向き(負は左側への流れを示す)およびエネルギー変換に注目してほしい. この冷凍機は入力 380W に対し, $T_C = -6^\circ\text{C}$ で 10W の冷凍能力を持つ. 本質的に不可逆過程(Q_s および W_s)を用いているため効率的には問題があるが可動部が無いなどの利点もある.

最近, 仕事流束の正確な計測が可能になった²⁷⁾.

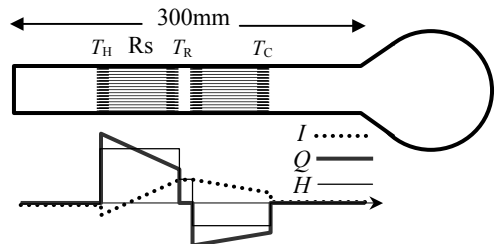


図6 Beer cooler と各種エネルギー流束分布

図7b)はLDVを用いて測定された定在波原動機の仕事流束を示す。図6で示したように仕事流束がエネルギー変換の結果として蓄熱器から左右へ湧き出す様子が捉えられている。これは温度勾配が音源となっている実験的証拠である。図7で $\pi R^2 \Delta I (\equiv \Delta I)$ はエンジンの出力(div I を蓄熱器で体積分した値)を示す。定在波型エンジンに分類されている Taconis 振動や Rijke 管および Sondhauss 管での温度勾配も同様である。

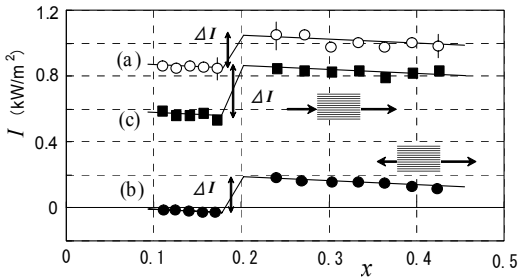


図7 定在波と進行波エンジンの仕事流束分布

ii) 進行波エンジン・冷凍機

共鳴器を用いた定在波の場合は境界条件によって圧力・速度分布が予想できるため、蓄熱器の設置場所や温度勾配の向きを簡単に決めることができる。進行波エンジンでは共鳴管(図4)に課した厳しい規制(境界条件)を緩くして「進行波」も励起できるような環境を作る事が重要である。たとえば図8に示すようなループ管(全長 3m, 内半径 20mm 程度)を用いる。ループの中に蓄熱器 R_1 を入れ温度勾配を適当な向きにつけると、それに応じた方向(矢印方向: R_1 を通って室温から高温部)に 1 あるいは 2 波長の進行波音波が伝播しだす²⁸⁾。図7a)に示すように、蓄熱器 R_1 の前後で仕事流束を観測すると進行方向に増幅されることが分かる。蓄熱器で出力された出力仕事 ΔI は管内で散逸される。参考のため理想的(等温可逆)蓄熱器でのエネルギー変換の様子を図9a)に示す。式(8)と(10)の Q_p と W_p から分かるように音波が理想的な蓄熱器を通過するとき、仕事流束は温度比倍だけ増幅することになる ($I_{out}/I_{in}=T_H/T_R$)²⁹⁾。

図8に示すようにループ内に蓄冷器 R_2 があると、パワー増幅された音波は R_2 を通過するとき図9b)に示すエネルギー変換を受ける。式(8)の Q_p により R_2 では音波の進行方向と逆方向の熱流束が生じヒートポンプの機能が発現する($W<0$)。冷凍能力は低温端での I の計測によって見積もることがで

きる。負荷のある場合に観測された蓄熱器 R_1 の周辺での仕事流束分布を図7c)に示す。出力 ΔI は散逸に加えヒートポンプに必要な分だけ増加する。平均気圧 0.25MPa の He と Ar の混合気体を用いて、入力 230W に対して熱負荷なしで $T_C = -27^\circ\text{C}$ を得た³⁰⁾。可動部が無く、単純で少ないパーツから構成されている利点がある一方で、外部から位相や振幅を制御し難いなどの欠点(?)もある。エネルギー変換を決定する蓄熱器での位相 θ を含めて音場はどのように決まるのだろうか? 自由空間中を伝播する進行波音波は音響インピーダンス ($z=cP/P_m u$) が小さく ($z=\gamma$) 蓄熱器内部での散逸が大きいから励起され難い。Ceperley はループ管では散逸を減らすために定在波成分が重要な役割を果たすことを指摘している³¹⁾。

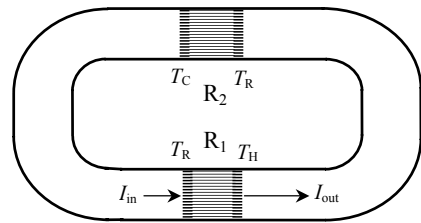


図8 進行波熱音響エンジン・冷凍機

最近、東大の上田によってループ管内で形成される音場の詳細な実験結果が報告されている³²⁾。蓄熱器で与えられた $\omega\tau$ に対して、式(10)の仕事源である W_p と W_s の和が最も大きくなるような位相差 θ が自動的に選択されていること、同時に散逸に寄与する W_k と W_v の和が最小となるような圧力と流速の振幅分布が形成されていることが実験結果に基づいて指摘されている。ループ管で気柱の自励発振が観測されたのは最近のことである。

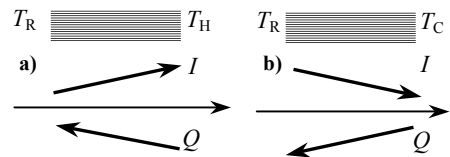


図9 蓄熱(冷)器内の I と Q の間のエネルギー変換
a) エンジン ($W>0$), b) ヒートポンプ ($W<0$)

進行波デバイスを実用化するため共鳴管とループ管を組み合わせた新しいエンジン^{33,34)}や冷凍機³⁵⁾が実験的に提案され、効率も内燃機関に迫る勢いである。しかし熱力学的視点に立った理解が進む一方で、Rott が行った流体力学的視点からの安定

解析を含む研究は進行波の場合まだ無い。これらの問題を含め I_m を決めている条件、効率の問題および音響流³⁶⁾の問題など未解決の問題が山積している。今後の進展が期待される。

3.2 安定限界の熱力学的意味

熱音響現象は熱対流やレーザー発振と同様に非平衡系で発現する散逸構造の典型例である。非平衡を維持しても僅かな温度勾配ですぐに気柱が不安定になるわけではない。Rott の中立安定限界の熱力学的な意味を実験結果を通して考えてみる。

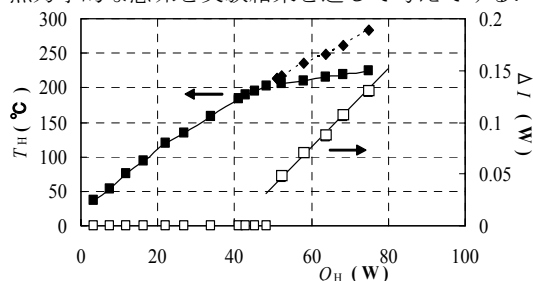


図 10 T_H (■と◆) および出力 ΔI (□) の Q_H 依存性

共鳴管 (図 4) の $x/L=0.75$ だけに蓄熱器を入れ低温部 ($T_2=T_R$) を循環水で室温に保ち、高温部 ($T_1=T_H$) に取り付けたヒータに電流を流しながら徐々に平衡状態から遠ざけてみる。実験結果を図 10 に示す。高温部に加えるヒータパワー Q_H が 50W を越えると分岐が起こり 162Hz の気柱自励振動が生じる。高温部の温度 T_H の傾きは低下し有限の出力仕事 ΔI が出力される。LDV で計測された出力仕事は分岐点で不連続的に変化しているようにも見える。臨界点以上で振動を抑制して得られた結果を◆で示す。式(9)を蓄熱器で体積分するとエネルギー保存則、 $Q_H - Q_R = \Delta I$ が得られる。 Q_H の全てが熱流として蓄熱器に吸収されると仮定し、その一部が出力仕事 ΔI に変換されながら残り Q_C を室温熱源に吐き出すことを意味する。エントロピー流を熱流束とその場の平均温度との比 $S=Q/T_m$ で表すと、蓄熱器でのエントロピー生成 ΔS (div S を蓄熱器で体積分した値) はエネルギー保存則を用いて

$$\begin{aligned}\Delta S &= \frac{Q_R}{T_R} - \frac{Q_H}{T_H} \\ &= \left(\frac{1}{T_R} - \frac{1}{T_H} \right) Q_H - \frac{\Delta I}{T_R}\end{aligned}\quad (11)$$

となる。 $\Delta S=0$ ならば可逆過程となり効率 $\Delta I/Q_H$ はカルノー効率 $(1 - T_R/T_H)$ と一致する。

上記の観点から図 10 の意味を考えてみる。分岐点までのエントロピー生成量 $\Delta S = (1/T_R - 1/T_H)Q_H$ は蓄熱器を構成する固体の熱伝導が原因である。式(11)は分岐点を越えて観測される出力 ΔI や T_H の傾きの低下が蓄熱器内部でのエントロピー生成を低減している事を示唆する。式(11)の右辺は全て実験で測定可能である。図 10 で得られた実験データを再整理して ΔS を分岐点前後で調べてみた。結果を図 11 に示す。分岐点では熱音響振動の発現によりエントロピー生成が単純熱伝導による生成よりも小さくなるのが分かる。このように Rott の示した気柱の安定限界は熱力学におけるエントロピー生成の問題に帰着される可能性がある。

名古屋大学の琵琶はループ管と共鳴管を組み合わせることによって複数のモードが励起可能な装置を作成した³⁷⁾。平衡状態から離れるに従い定在波モードから準周期モードを経て進行波モードの気柱振動を観測した。彼は「励起可能なモードの中で、蓄熱器内のエントロピー生成が最小となるモードが発現する」ことをモード選択の基準として実験的に提案している。

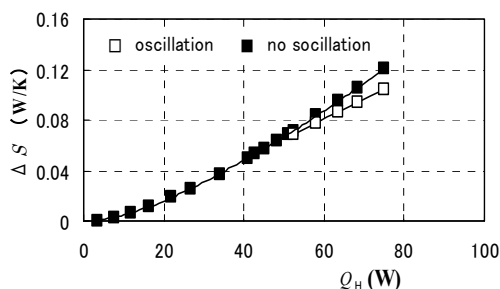


図 11 蓄熱器内部のエントロピー生成

図 6 および図 8 のヒートポンプ (冷凍機) 機能を持つ蓄冷器内でのエントロピー生成は式(11)に対応して、

$$\begin{aligned}\Delta S &= \frac{Q_R}{T_R} - \frac{Q_C}{T_C} \\ &= \left(\frac{1}{T_R} - \frac{1}{T_C} \right) Q_C + \frac{\Delta I}{T_R}\end{aligned}\quad (12)$$

となる。もし Q_C が無ければ ΔS は最大値 $\Delta I/T_R$ をとり、 $\Delta S=0$ ならば可逆過程となり $Q_C/\Delta I$ はカルノー効率、 $T_C/(T_R - T_C)$ 、と一致する。低温が生成され ($T_C < T_R$) 有限の冷凍能力 Q_C が生じることによって蓄冷器内での ΔS を低減している。

熱音響現象の理解の方法として熱力学的手法を

導入した富永³⁸⁾は「エンジンや冷凍機がそれらの機能を発現するのはエントロピー生成が最小となる普遍則が存在するからである」と指摘している。この普遍則に従うと図 10 や図 11 で示した出力仕事 ΔI の不連続性や分岐現象を合理的に説明することができる³⁹⁾。

4 おわりに

音の実験をしてみると基本的な物理量でも意外に測定が難しかったり、また測定方法が確立されていない量が多いことに気づく。音響強度²⁷⁾、振動流速、共鳴管のQ値²³⁾や温度揺らぎ⁴⁰⁾はその例である。音速のように簡単に計算できても測定はそれほど簡単ではない。「音」の新しい分野で発見型実験を遂行するためにも基本的物理量の測定方法を確立しておくことは必要である。

引用文献

- 1) Benedetto, G., Gavioso, R. M. & Spagnolo.: R. Rev. Nuo. Cim., 22, (1999) 1-42.
- 2) Lord Rayleigh.: *The Theory of Sound*, Vol.II (Dover, New York, 1945).319-326.
- 3) Weston, D. E.: Proc. Phys. Soc. London, B.66, (1953) 695-709.
- 4) Zwikker, C., & Kosten, C. W.: *Sound Absorbing Materials* (Elsevier, Amsterdam, 1949) 25-51 .
- 5) Ibarra, A. S.: J. Res.Nat.Bur.Stand., 45, (1950) 85-108.
- 6) Rott, N.: Z. Angew. Math. Phys., 20, (1969) 230-243.
- 7) Tjiedeman, H.: J. Sound Vib., 39, (1975) 1-33.
- 8) Sugimoto, N., Masuda, M., Ohno, J. & Motoi, D.: Phys. Rev. Lett., 83, (1999) 4053-4056.
- 9) 野村浩史: 修士論文 (名古屋大学, 2005)
- 10) Yazaki, T., Tominaga, A. & Narahara, Y.: J. Low Temp. Phys., 41, (1980) 45-60.
- 11) 上田秋成: 雨月物語 (講談社学術文庫 487)
- 12) Kramers, H. A.: Physica, 15, (1949) 971-987.
- 13) Ter Haar, H.:CR de la Conf. Des basses temperatures, Paris, Sept. 1955.
- 14) Rott, N.: Z. Angew. Math. Phys., 24, (1973) 54-72.
- 15) Ceperley, P. H.: J. Acoust. Soc. Am., 66, (1979) 1508-1513.
- 16) Garrett, S. L. & Backhaus, S.: American Scientist, 88, (2000)516-525.
- 17) Wheatley, J. C., Hofler, T., Swift, G. W. & Migliore, A.: Phys. Rev. Lett., 50, (1983) 499-502.
- 18) Tominaga, A.: Cryogenics, 35, (1995) 427-440.
- 19) 富永 昭: 熱音響工学の基礎 (内田老鶴圃, 1998)
- 20) 井上龍夫: 低温工学, 26, (1991) 98-107.
- 21) Swift, G. W.: J. Acoust. Soc. Am., 84, (1988) 1145-1180.
- 22) 富永 昭: 低温工学, 25, (1990) 300-303.
- 23) Biwa, T., Ueda, Y., Nomura, H., Mizutani, U. & Yazaki, T.: Phys. Rev. E, (印刷中)
- 24) Yazaki, T., Takashima, S. & Mizutani, F.: Phys. Rev. Letts., 58, (1987) 1108-1111.
- 25) Yazaki, T., Sugioka, S., Mizutani, F. & Mamada, H.: Phys. Rev. Lett., 64, (1990) 2515-2518.
- 26) Yazaki, T.: Phys. Rev. E, 48, (1993)1806-1818.
- 27) Yazaki, T. & Tominaga, A.: Proc. R. Soc. London, Ser. A, 454, (1998) 2113-2122.
- 28) Yazaki, T., Iwata, A., Maekawa, T. & Tominaga, A.: Phys. Rev. Lett., 81, (1998) 3128-3131.
- 29) Biwa, T., Tashiro, Y., Mizutani, U., Kozuka, M. & Yazaki, T.: Phys. Rev. E, 69, (2004) 066304.
- 30) Yazaki, T., Biwa, T. & Tominaga, A.: Appl. Phys. Lett., 80, (2002) 157-159.
- 31) Ceperley, P. H.: U. S. Patent 4, 355, 517 (1982)
- 32) Ueda, U., Biwa, T., Mizutani, U. & Yazaki, T.: J. Acoust. Soc. Am., 115, (2004) 1134-1141.
- 33) Backhaus, S. & Swift, G. W.: Nature, 399, (1999) 335-338.
- 34) Ueda, U., Biwa, T., Mizutani, U. & Yazaki, T.: Appl. Phys. Lett., 81, (2002) 5252-5254.
- 35) Ueda, U., Biwa, T., Mizutani, U. & Yazaki, T.: J. Acoust. Soc. Am., 117, (2005) 3369-3372.
- 36) Yano, T.: J. Acoust. Soc. Am., 106, (1999)7-12.
- 37) Biwa, T., Ueda, U., Yazaki, T. & U. Mizutani.: Europhys. Lett., 60, (2002)363-368.
- 38) 富永 昭: 誕生と変遷にまなぶ熱力学の基礎 (内田老鶴圃, 2004)
- 39) 富永 昭: 低温工学, 40, (2005) 13-21.
- 40) Tashiro, Y.: 修士論文(名古屋大学, 2004) (投稿予定)