第2章　整式の基礎

2.0　はじめに

先の整数の性質に関する章を受けて，ここでは「整式の基礎」について解説します。

整式については，中学である程度学習しています。
本章では，これから学ぶ数学の土台となる整式の計算について紹介します。ここではそれらの復習と，これから必要になるいくつかの計算法，考え方を扱うことになります。
しかし中学校のときと違って，かなり複雑な計算を要求されることがあるでしょうし，またこのような計算がいったい何を意味するのか，すぐには分からないこともあるでしょう。しかし高校で数学を勉強する限り，ここで扱う計算にいつか必ず出会うことになります。意味を知ることはそのときまでの楽しみにとっておき，まずは計算技術を身につけることを第一に読み進めてください。

補講 5 では，多項式の次数に関する性質を，積と関連させて解説します。
補講 6 では，多項式に関する「除法の原理」の証明を与えます。

2.1　単項式

整式とは何かを話すための準備として，まずは単項式というところから始めます。

定義 (単項式，次数，係数)　いくつかの文字や数の積として表わされる式を **単項式**（たんこうしき） という。また，単項式で，かけ合わされている文字の個数を，その単項式の **次数**（じすう） といい，文字以外の部分を **係数**（けいすう） という。 **(定義終)**

単項式
次数
係数

例　$4a^2x^3$ は 4 ，二つの a と三つの x をかけあわせたもの（a^2 は $a\times a$ を意味するので，a が二つであると 勘定（かんじょう） します）なので単項式です。結局，文字は五つあるので，次数は 5，また文字以外の部分は 4 なので，係数は 4 です。 **(例終)**

$4a^2x^3$ は「a と x に関する 5 次式である」ということもあります。このあたりはいろいろな言い方があるので，そのときそのときで慣れてください。

以下，さまざまな場面でいくつか，あるいは特定の一つの文字に注目して計算をしたり，議論をしたりすることがあります。その際に次数や係数が上の場合と変わってきます。たとえば，

例　$4a^2x^3$ は文字 a に注目すると次数は 2 で係数は $4x^3$，文字 x に注目すると次数は 3 で係数は $4a^2$ です。

また $-xy^2z^2$ は文字 x，y に注目すると次数は 3 で，係数は $-z^2$ となります。

(例終)

要は注目している文字以外がすべて係数となるのです。

また上と同様に「$4a^2x^3$ は a に関して 2 次式，x に関して 3 次式である」ともいいます。

ある文字に着目した場合の次数や係数については，次の問いで十分に理解を深めておいてください。

練習 18 次の単項式の次数と係数を答えよ。また（　）内の文字に関して次数と係数は何か。

(1) $-3by$　(y)　　(2) $4x^2y^3z$　(x)

(3) $-a^2b^4x^3$　$(a,\ x)$　　(4) $a^2b^3c^7y^2$　$(a,\ b,\ c)$

注意　単項式の次数は，以上のように定義するのですが，数の次数はいくつでしょう?

たとえば数 3 には文字が入っていません。つまり 0 個です。よって数 3 の次数は 0，と答えるのが普通でしょう。

しかしこれについては，ちょっとだけまずいことがあります。詳しいことは補講 5 で説明します。**(注意終)**

2.2　整　式

単項式という考えを使って，多項式，そして整式という考え方を導入します。

定義 (多項式，項，整式)　いくつかの単項式の和として表わされる式を **多項式**（たこうしき） という。多項式を構成するそれぞれの単項式をその多項式の **項**（こう） という。　**多項式**　**項**

単項式と多項式をあわせて **整式**（せいしき） という[1]。**(定義終)**　**整式**

[1]少し古い参考書や，数学の専門書では「単項式と多項式をあわせて多項式という」としているものもあります。これは単項式を多項式の特別なもの（単項式は項のたくさん（多）ある式の中で，たまたま項が一つ（単）になったと考える）とみなす立場です。私もどちらかというとこちらの立場に立ちたいのですが，ここは教科書にあわせて整式という言葉を用いることにします。

例　$3x^2+4x+3$ は三つの単項式 $3x^2$, $4x$, 3 の和として表されていますので，これは多項式です。とうぜん $3x^2$, $4x$, 3 が項です。

また $3x^2-4x-3$ も多項式です。

「えー，和じゃなくて，差なのになんでぇ？」という人がいるかもしれませんが，$3x^2-4x-3=3x^2+(-4x)+(-3)$ と書けるので，これは多項式なのです。また $3x^2$, $-4x$, -3 が項です。

あとの二つの項については,「$4x$, 3 が項」ではないことに注意してください。

(例終)

引き算を足し算に書き直して見ていることに注目！　こういった考え方は，中学のときに正負の数の計算のところで学んでいます。

定義 (同類項)　一つの整式において，注目した文字の部分が同じである項を **同類項**（どうるいこう）という。 **同類項**

(定義終)

例　$2ax^2+5x-2-ax^2-4x$ において，x に注目したとき，$2ax^2$ と $-ax^2$, $5x$ と $-4x$ が同類項です。 **(例終)**

同類項は分配法則

$$ax+bx=(a+b)x$$

を用いると一つにまとめることができ，式を整理することができます[2]。

例

$$\begin{aligned}2ax^2+5x-2-ax^2-4x &= (2-1)ax^2+(5-4)x-2\\ &= ax^2+x-2\end{aligned}$$

(例終)

これからよく使う整式の「次数」という言葉を定義しましょう。

定義 (次数，n 次式，定数項)　同類項をまとめて整理した結果得られる整式のそれぞれの項の次数でもっとも大きなものを，その整式の **次数**（じすう）という。 **次数**

整式の次数が n であるとき，その整式は n **次式である** という。また，注目した文字を含まない項を **定数項**という。 **(定義終)** **定数項**

[2] 分配法則というと

$$(a+b)c=ac+bc$$

を思い浮かべ，本文のような使い方を 訝（いぶか）る人もいるかもしれません。そういう人は，左辺の式を右辺の式に変形するための式である，という意味にとっているのでしょう。しかし等式 $A=B$ の両辺は本来同等なのですから，$B=A$ である——つまり $ac+bc=(a+b)c$——と考えてもなんらさしつかえありません。

整式の次数は **同類項をまとめてから判断する** ことに注意（見かけにだまされないように）。

例　$3x^2+5-5x-2+4x$ の同類項をまとめて整理すると

$$\begin{aligned}3x^2+5-5x-2+4x &= 3x^2+(-5+4)x+5-2\\ &= 3x^2-x+3\end{aligned}$$

最後の整式の項は $3x^2$, $-x$, 3 であり，それぞれの項の次数は 2, 1, 0 です。このなかでもっとも大きい次数は 2 ですから，この整式の次数は 2 です。また定数項は 3。 **(例終)**

練習 19 次の整式は何次式か。また文字が 2 種類以上ある整式はそれぞれの文字について何次式か。その場合の定数項はそれぞれ何か。

(1) $2x^2-4x-5+3x-3x^2+1$
(2) $3x^2-5x^3+x-4-3x+5x^3$
(3) $ax+3a^2-3x-2+5a$
(4) $3xy^2+2y^3-2xy+2x-4y+4$

ところで，上の問いをやっていてやりにくさを感じませんでしたか？　どこに同類項があるか，目をあっちにやったり，こっちに走らせたりしなければならず，見つけるのに苦労したことでしょう。

こういった面倒を軽減するために，整式を整理するときにはある文字について注目し，次数の高い項から順にならべるか，あるいは次数の低い項から順にならべる，のいずれかの方法をとるのが習慣になっています。次数の高い項からならべる方法を **降（こう）べきの順** ，次数の低い項からならべる方法を **昇（しょう）べきの順** といいます。日本では降べきの順に整理するのが習慣のようです[3]。

降べきの順
昇べきの順

例　整式 $-3x+4x^2-5+7x^3$ を降べきの順に整理すると，

$$-3x+4x^2-5+7x^3=7x^3+4x^2-3x-5$$

となります。 **(例終)**

例　整式 $x^2+y^2+4xy-5x+3y-3$ を x に関して降べきの順に整理すると，

$$x^2+y^2+4xy-5x+3y-3=x^2+(4y-5)x+y^2+3y-3$$

となります。x の一次の項である $4xy$ と $-5x$ は同類項なのでまとめ，$(4y-5)x$ としていることに注意してください。

[3]アメリカの教科書で，昇べきの順に整理をしているものを見たことがあります。国によって習慣は異なるようです。

ちなみにこの場合の定数項は y^2+3y-3 です[4]。 **(例終)**

練習 20 整式 $x^2+y^2+4xy-5x+3y-3$ を y に関して降べきの順に整理せよ。またその場合の定数項は何か。

練習 21 次の式を x に関して降べきの順に整理せよ。
(1) $2x^2-4x-5+3x-3x^2+1$
(2) $3x^2-5x^3+x-4-3x+5x^3$
(3) $ax+3a^2-3x-2+5a$
(4) $3xy^2+2y^3-2xy+2x-4y+4$

2.3 整式の加法・減法

ではいよいよ整式の計算に入りましょう。ほとんどのことは中学校ですでに勉強済みのはずです。中学校で習ったことを整理，復習してください。

整式の加法については特に説明は必要ないでしょう。同類項をまとめていけばよいのです。

例 $A=2x^2+4x-4, B=3x^2-2x+5$ とするとき，

$$\begin{aligned} A+B &= (2x^2+4x-4)+(3x^2-2x+5) \\ &= (2+3)x^2+(4-2)x+(-4+5) \\ &= 5x^2+2x+1 \end{aligned}$$

(例終)

一方減法については
$$A-B=A+(-B)$$
のように，加法に直して計算していきます。これは数の場合と同様です。

例 二つの整式を $A=2x^2+4x-4, B=3x^2-2x+5$ とするとき，

$$\begin{aligned} A-B &= (2x^2+4x-4)-(3x^2-2x+5) \\ &= 2x^2+4x-4-3x^2+2x-5 \\ &= (2-3)x^2+(4+2)x+(-4-5) \\ &= -x^2+6x-9 \end{aligned}$$

(例終)

[4] もう一つついえば，元々の式は x, y に関して降べきの順に整理されています。文字が二つ以上ある場合は，この式のように整理をするのが習慣のようです。もっともそれが絶対ではありません。

引く式 $3x^2-2x+5$ のそれぞれの項の係数の符号が $-3x^2+2x-5$ のように変わっていることに注意してください。これが $A+(-B)$ の $-B$ の意味です。

もちろん，慣れてきたらいきなり答えを書いてもかまいません。とはいうものの，はじめの 2 行くらいは書く習慣をつけたほうが間違いは少なくなるでしょう。

練習 22 次の二つの整式 $A,\ B$ について，$A+B,\ A-B$ を計算せよ。

(1) $A=2x^2+3x-2,\quad B=x^2-4x-3$

(2) $A=3a^3-2a^2+a,\quad B=-4a^2+3a-4$

(3) $A=\dfrac{1}{2}y^2+\dfrac{3}{2}y+2,\quad B=\dfrac{2}{3}y^2-\dfrac{1}{3}y-\dfrac{2}{5}$

(4) $A=x^2-4xy+3y^2,\quad B=2y^2-3x^2+5xy$

三つ以上の整式の和や差も，（手間は増えますが）同じようにして計算することができます。

例題 4 $A=3x^2+4x-5,\ B=-2x^2-x+4,\ C=x^2+x+2$ のとき，$A+B-C$ を計算せよ。

解説　まずは素直に代入し，減法を加法に直してから同類項をまとめていきます。

解答例

$$\begin{aligned} A+B-C &= (3x^2+4x-5)+(-2x^2-x+4)-(x^2+x+2) \\ &= 3x^2+4x-5-2x^2-x+4-x^2-x-2 \\ &= 2x-3 \quad \cdots \textbf{(答)} \end{aligned}$$

(解答例終)

練習 23 $A=-3x^2-3x+4,\ B=x^2+x+3,\ C=4x^2-2x-1$ のとき，次の計算をせよ。

(1) $A-B+C$　　(2) $C-A-B$

2.4　整式の乗法

加法・減法とくれば，次は乗法と除法ですね。まずは単項式の乗法から始めましょう。

2.4.1　単項式の乗法

先の章で紹介しましたように，a を n 個かけあわせたものを a^n と表しました。そして，a の肩に乗っている数 n を **指数** といいました。　**指数**

a^n というような形をしたもののかけ算については，次のような計算法則が成り立ちます。

定理 (指数法則　その1[5]**)**　m, n を正の整数とするとき，次が成り立つ。

(1) $a^m \times a^n = a^{m+n}$

(2) $(a^m)^n = a^{mn}$

(3) $(ab)^n = a^n b^n$

証明　a^m が，a を m 個かけたものであったことを思い出せば，いずれもすぐに納得できるだろうが，証明を与えておく。

(1)

$$\begin{aligned} a^m \times a^n &= \overbrace{a \times a \times \cdots \times a}^{m\text{ 個}} \times \overbrace{a \times a \times \cdots \times a}^{n\text{ 個}} \\ &= \overbrace{a \times a \times \cdots \times a}^{m+n\text{ 個}} \\ &= a^{m+n} \end{aligned}$$

(証明終)

問 13 指数法則の（2）,（3）を証明せよ。

単項式の乗法は，この **指数法則**（しすうほうそく） を使って計算します。　**指数法則**

例を挙げましょう。まずは比較的単純なものから。

例

$$\begin{aligned} a^2 \times a^4 &= a^{2+4} = a^6 \\ (b^3)^5 &= b^{3\times 5} = b^{15} \\ (a^2b^3)^4 &= (a^2)^4(b^3)^4 = a^8b^{12} \end{aligned}$$

(例終)

練習 24 次の計算をせよ。

(1) $a^3 \times a^2$　(2) $b \times b^6$　(3) $(x^2)^4$

(4) $(p^2q)^3$　(5) $(2a^2b^3)^2$　(6) $(-2x^2y^3)^3$

[5]独白：「その 1」ということは,「その 2」もあるということですね。

もう少し複雑な例を次に挙げましょう。一つ一つの等号をじっくり追いかけて，何をやっているかしっかりつかんでください。

例

$$\begin{aligned}(-2a^3)^2 \times 4a^4 &= (-2)^2 \times (a^3)^2 \times 4a^4 \qquad \text{（(3) を用いた）} \\ &= 4 \times a^{3\times 2} \times 4a^4 \qquad \text{（(2) を用いた）} \\ &= (4 \times 4) \times a^6 \times a^4 \\ &= 16a^{6+4} \qquad \text{（(1) を用いた）} \\ &= 16a^{10}\end{aligned}$$

(例終)

例

$$\begin{aligned}3x^2y^3 \times 4x^5y^2 &= (3 \times 4) \times (x^2 \times x^5) \times (y^3 \times y^2) \\ &= 12x^7y^5\end{aligned}$$

(例終)

それぞれの等号のところで，どの指数法則を使っているか，よく確認しておくように。また次で計算練習をしてもらいますが，一つ一つの変形でどの指数法則を使っているか自分に言い聞かせながら計算を進めてください。もちろん慣れてきたら二番目の例のように省略していって構いません。しかし，次の練習だけは上の例を真似して詳しく計算をしてみてください。

練習 25 次の計算をせよ。

(1) $3a^2 \times 6a^3$　(2) $3b^2 \times (-4b^4)$　(3) $xy^3 \times 2x^2y^3$
(4) $3a^2b^3 \times (-3ab^2)$　(5) $(-x^3y)^2 \times (-3x^4y^3)^3$　(6) $(-a^2)^3 \times (4a^3)^4$

2.4.2 多項式の乗法

それでは整式の乗法をやりましょう。

整式の乗法の基礎になるのは，分配法則 **分配法則**

$$A(B + C) = AB + AC$$

です[6]。

[6]教科書には分配法則として

$$(A + B)C = AC + BC$$

分配法則には $B+C$ と二つしか書いていませんが，これは三つ以上あっても成立します。たとえば三つの場合は

$$A(B+C+D)=AB+AC+AD$$

となります。

この法則を繰り返し使うことで整式の乗法の計算ができます。

例

$$\begin{aligned}3ab^2(2a^2+ab-b^2) &= 3ab^2\times 2a^2+3ab^2\times ab+3ab^2\times(-b^2)\\ &= 6a^3b^2+3a^2b^3-3ab^4\end{aligned}$$

(例終)

はじめのうちは，この例のようにていねいに解きほぐしていくといいでしょう。慣れたらもちろん途中は暗算し，いきなり結果を書きしるしても構いません。

二番目の式のところで（指数法則を用いて）単項式の積の計算をしていることに注意してください。

もう少し複雑な例を挙げましょう。

例

$$\begin{aligned}&(x^2-3x+4)(2x+3)\\ =\ &(x^2-3x+4)\times 2x+(x^2-3x+4)\times 3\\ &\qquad \text{（x^2-3x+4 をひとかたまりと考え，分配法則を用いた）}\\ =\ &2x^3-6x^2+8x+3x^2-9x+12\\ &\qquad \text{（再び分配法則を用いた）}\\ =\ &2x^3-3x^2-x+12\end{aligned}$$

(例終)

上の例の中に注記したように，式をひとかたまりのものとみなす見方に注意してください。こういった考え方は今後あちこちに現れ，有効であることが理解できるでしょう。

も書かれていますが，これは分配法則 $A(B+C)=AB+AC$ と乗法に関する交換法則 $AB=BA$ が成り立つので当然成り立っています。

実際

$$\begin{aligned}(A+B)C &= C(A+B) && \text{（乗法の交換法則を用いた）}\\ &= CA+CB && \text{（本文で紹介した分配法則を用いた）}\\ &= AC+BC && \text{（乗法の交換法則を用いた）}\end{aligned}$$

整式の乗法について，一つ言葉を紹介しておきます。

定義 (展開する)　いくつかの整式の積で表わされた式を，単項式の和の形に変形することを，その式を **展開する** という。　**(定義終)**　**展開する**

つまり「式を展開せよ」といわれたら，繰り返し分配法則を用いて，上に挙げた例のようにカッコのない式に変形することになります。

練習 26 次の式を展開せよ。

(1) $2x(3x^2-7x-5)$　(2) $(3xy^2-2x^2y+xy)(-5xy)$

(3) $(-3a+2)(2a^2-3a+5)$　(4) $(4a^2+2ab+b^2)(2a-b)$

2.5　公式による展開

整式の展開は先の節のように，根気よく分配法則を繰り返し繰り返し用いれば必ず結果が得られます。よってそれ以上付け加えることはないのですが，さまざまな計算の中でしょっちゅう現れる展開については公式としてまとめ，記憶しておくと便利です[7]。

ここで紹介する展開公式のいくつかは，すでに中学校のとき出会っています。記憶を新たにしてください。

定理 (展開公式)

(1) $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2,\quad (a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

(2) $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

(3) $(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$

(4) $(ax+b)(cx+d)=acx^2+(ad+bc)x+bd$

(5) $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3,\quad (a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

証明　(5) の第一の公式のみ証明する。残りは読者の練習のために残しておきますので，必ずやるように。

さて，

$$
\begin{aligned}
(a+b)^3 &= (a+b)^2(a+b) && \text{(3 乗の定義)}\\
&= (a^2+2ab+b^2)(a+b) && \text{(和の 2 乗の展開公式)}\\
&= (a^2+2ab+b^2)\times a+(a^2+2ab+b^2)\times b && \text{(分配法則)}\\
&= a^3+2a^2b+ab^2+a^2b+2ab^2+b^3 && \text{(分配法則，積の交換法則)}\\
&= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 && \text{(同類項をまとめた)}
\end{aligned}
$$

(証明終)

[7] 皆さんは小学校のときに九九を覚えたことでしょう。九九を覚えていなくても計算はできます。しかしそれではものすごく時間がかかることが容易に想像できます。展開公式を覚えてもらうのも，そういった意味合いからなのです。

注意　上の証明はかなり詳しく書くとともに，右の方に，なぜ等号が成り立つのか，その根拠となることがらを書いてみました。こういったことは，中学校の図形の証明のときにやっていると思いますが，ここでは，式の証明に慣れてもらいたいという動機から，このようにしてみました。

これから後の証明では，ここまで詳しく書くつもりはありませんが，数学が苦手な人は，面倒でもできるだけこういったことをメモしていくことをお勧めします。というのも，数学が苦手な人に限って (というと 語弊(ごへい) があるかもしれませんが) 理由を曖昧にする傾向が感じられるからです。

数学では,「なぜそれが成り立つのか」ということをとことん追求するので，それを面倒に感じサボる人は，なかなか数学が上達しないようです。日常生活でこんなことをすれば，人間関係にヒビが入ることもありますので，なかなかやりませんが，ある程度こういったことを訓練しておかないと，日常生活で困る場面もあるのではないでしょうか。

数学を学習する一つの意味が，ここにあると思います。　**(注意終)**

問 14 上の定理の残りの公式を証明せよ。

次の二つの問は少し難しい内容になっています。興味ある人は取り組んでみてください。

問 15 (1)，(5) の第二式は実際に展開しなくても，それぞれ第一式を使うと簡単に導き出せる。どのようにすればよいか。

問 16 2 乗の展開公式，3 乗の展開公式の項の係数はそれぞれ，1，2，1 と 1，3，3，1 となっています。この調子のよさを覚えておいてほしい。

これに関連して，計算練習として $(a+b)^4$ を展開し，その係数を抽出してみよ。これらを並べたときどのようなことが成り立っていそうか？　もしわからなければ $(a+b)^5$ も計算してみよ。そのとき， $(a+b)^6$ を展開するとどうなるか予想できるか？　そしてそれは正しいだろうか？

注意　(1) を「2 乗（あるいは平方）の展開公式」,(2) を「和と差の積」,(5) を「3 乗（あるいは立方）の展開公式」と呼ぶことがあります。今後も 適宜(てきぎ) 使いたいと思いますので，できれば覚えておいてください。　**(注意終)**

展開公式を具体的な例に適用してみましょう。わざと順番を入れ替えて例を挙げますので，上の定理のどれを使っているか，よく観察してください。

例

(1)　$(a+2)(a-1) = a^2 + (2-1)a + 2 \times (-1) = a^2 + a - 2$

(2)　$(2x-y)^3 = (2x)^3 - 3 \times (2x)^2 \times y + 3 \times (2x) \times y^2 - y^3 = 8x^3 - 12x^2y + 6xy^2 - y^3$

(3)　$(x+2y)(x-2y) = x^2 - (2y)^2 = x^2 - 4y^2$

(4)　$(2x+3y)^2 = (2x)^2 + 2 \times (2x) \times (3y) + (3y)^2 = 4x^2 + 12xy + 9y^2$

（5） $(3x+1)(x-2)=(3\times1)x^2+\{3\times(-2)+1\times1\}x+1\times(-2)=3x^2-5x-2$

(例終)

この例ではどのように公式を適用したかを示すため，途中の式をかなり詳しく書いてみました。しかし慣れてくれば，こんなに詳しく書く必要はありません。可能なら暗算をしても構いません (係数が複雑なときはあまり勧めませんけど)。いずれにしても早く慣れて，すばやく展開できるようになること。

練習 27 次の式を展開せよ。

(1) $(3x+1)(2x-3)$　(2) $(3x-2)^2$

(3) $(x-3a)(x+3a)$　(4) $(2a+b)^3$

(5) $(y+4)(y-6)$　(6) $(2x+3y)(x-4y)$

2.6　整式の除法

2.6.1　単項式の除法

先の節と同じように，まずは単項式の除法から始めましょう。

単項式の乗法のところで指数法則というものを紹介しました。これはかけ算に関するものですが，除法についても指数法則があります。それは次のようなものです。

定理 (指数法則　その2)　$m,\ n$ を $m>n$ なる正の整数とするとき，

（4）　$a^m \div a^n = a^{m-n}$

問 17 上の定理を証明せよ。

注意　定理の中に「$m>n$ なる正の整数」という言葉が入っていることに注意してください。先の指数法則の中にはこのような付帯(ふたい)条件はありませんでした。

これはいかにも歯切れが悪い書き方です。この条件をはずす方法があるのですが，それは必要になるまで延期します。　**(注意終)**

文字式の割り算は分数を使って書く，という約束がありましたので，上の定理は

（4）′　$\dfrac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$

と書いてもいいですね。これは後で使うことになります。整式の除法については（4）があれば十分です。

例を挙げましょう。

例　（1）　$a^5\div a^2=a^{5-2}=a^3$

(2)　$\dfrac{x^3}{x} = x^{3-1} = x^2$

(例終)

もう少し複雑な例を挙げましょう。

例　$4x^3y^5 \div 2xy^3$ の計算

$$\begin{aligned} 4x^3y^5 \div 2xy^3 &= (4 \div 2) \times (x^3 \div x) \times (y^5 \div y^3) \\ &= 2x^2y^2 \end{aligned}$$

(例終)

要はそれぞれの数や文字について指数法則を使って計算をすればいいわけです。

練習 28 次の計算をせよ。

(1) $b^7 \div b^3$　(2) $\dfrac{y^{12}}{y^9}$　(3) $a^2b^4 \div ab$

(4) $x^4y^7z^3 \div x^3y^4z$　(5) $6a^9b^4 \div 3a^4b^2$　(6) $\dfrac{8x^3y^4}{2xy^2}$

2.6.2　整式の除法

いよいよ整式の除法です[8]。ここは少し面倒です。が，コツさえつかめばそんなに難しいことはないでしょう。

まずは復習から。

小学校のときに整数の割り算をやりました。

$$\begin{array}{r} 21 \\ 13 \overline{)\,275} \\ \underline{26} \\ 15 \\ \underline{13} \\ 2 \end{array}$$

たとえば $275 \div 13$ は上のように行い，商 21，余り 2 を得ます。
どのような計算をしたか見ましょう。
275 の上のけたから順に見ていきました。

[8] このあたりから整数と整式の似ているところがよく現れてきます。

まず 2 は 13 で割れません。次にもうひとけた増やし 27 を考えると，これは 13 で割れ，商が 2，余りが 1。この余りと残っていた 1 の位の 5 で 15 という数を作り，$15 \div 13$ を計算し，商が 1，余りが 2。先の商と今の商をあわせて結局商が 21，余りが 2，となる，というわけでした。

何をいまさらといわないでください。この計算と同じような方法で整式の割り算ができるのです。

例　$(2x^2 + 7x + 5) \div (x + 3)$ の計算

$$
\begin{array}{r}
2x \quad +1 \\
x+3 \,\overline{\smash{)}\,2x^2+7x+5} \\
\underline{2x^2+6x} \\
x \quad +5 \\
\underline{x \quad +3} \\
2
\end{array}
$$

上の例がどのように計算をしているか，見ただけで分かるでしょうか？　文章で説明するのは難しいのですが，やってみましょう。

数の割り算と同じように，計算の準備をします。

$$
x+3 \,\overline{\smash{)}\,2x^2+7x+5}
$$

まず，割られる式 $2x^2 + 7x + 5$ の最高次数の項 $2x^2$ と割る式 $x + 3$ の最高次数の項 x で割算をします。つまり $2x^2 \div x$ を計算します。これは簡単に計算できて，商は $2x$ です。そこで，商 $2x$ を立てます。

$$
\begin{array}{r}
2x \\
x+3 \,\overline{\smash{)}\,2x^2+7x+5}
\end{array}
$$

次に，この商 $2x$ と割られる式 $x + 3$ のかけ算を計算し，割られる式の下に書きます。次数をそろえて書くことに注意してください。

$$
\begin{array}{r}
2x \\
x+3 \,\overline{\smash{)}\,2x^2+7x+5} \\
2x^2+6x
\end{array}
$$

そして，上の式から下の式を引きます。すると，$2x^2$ の項はうまく消えて，x を得ます (うまく消えるのではなく，これが消えるように，商を立てたのです)。

$$\begin{array}{rr} & 2x \\ x+3 \,\big) & \overline{2x^2+7x+5} \\ & \underline{2x^2+6x} \\ & x \end{array}$$

数の割算と同じように，一番上にある 5 を下ろしてきます。

$$\begin{array}{rr} & 2x \\ x+3 \,\big) & \overline{2x^2+7x+5} \\ & \underline{2x^2+6x} \\ & x \;\; +5 \end{array}$$

これによってできた式 $x+5$ の最高次数の項 x と，割る式 $x+3$ の最高次数の項 x で割算をします。つまり $x \div x$ を計算します。これは簡単に計算できて，商は 1 です。そこで，商 1 を立てます。

$$\begin{array}{rr} & 2x \;\; +1 \\ x+3 \,\big) & \overline{2x^2+7x+5} \\ & \underline{2x^2+6x} \\ & x \;\; +5 \end{array}$$

このようにして立てた商 1 と割られる式 $x+3$ のかけ算を計算し，下に書き，上の式から下の式を引きます。すると，x の項が消えて，2 を得ます。

$$\begin{array}{rr} & 2x \;\; +1 \\ x+3 \,\big) & \overline{2x^2+7x+5} \\ & \underline{2x^2+6x} \\ & x \;\; +5 \\ & \underline{x \;\; +3} \\ & 2 \end{array}$$

整数の割り算のときは，余りが割る数より小さくなったとき計算が終わりました（商を整数に保つときはです）。これと同様に，整式の割り算は余りの次数が割る式の次数より小さくなったとき計算が終わります。今の場合，割る式 $x+5$ は 1 次式，余りの 2 は定数で 0 次式ですから，ここで計算が終わります。

以上の計算から，商は $2x+1$ ，余りは 2 となるわけです。 **(例終)**

上に説明したように，かなりの部分が整数の割り算と同様です。しかし，若干（じゃっかん）異なる部分もあります。それがはっきりするような例を挙げましょう

例題 5 $(2x^4+x^3-x+2) \div (2x^2+3x+1)$ を計算せよ。

解説　ここでは文字だけで解説していきます。以下の文章を読みながら，どのように計算しているのか，実際にノートに書き下していってください。この例題の最後に解答例として，計算したものを掲(かか)げておきます。自分で計算したものと，同じように書かれているかどうか，確かめてください。

まず割られる式に x^2 の項がないことに注意してください。これは 2104 のように空白の位があることに相当します。式の場合は数のように空白の位を表わす記号がありません。そこで計算するときにはその部分をあけておく必要があります。下の計算で，割られる式が $2x^4 + x^3 \qquad - x + 2$ となっているのはそのためです。

さて計算ですが，まずは x^2 が立ちます。これと割る式 $2x^2 + 3x + 1$ をかけて $2x^4 + 3x^3 + x^2$ ができます。ここまでは上の例と同じです。

次に，これを割られる式から引きます。最高次の項 $2x^4$ が消えるのは問題ないでしょう。しかし次に x^3 から $3x^3$ を引くことになります。整数の割り算のときにはこのようなことは起きませんでした（起きたとしたら商の立て方が間違っていたことになります)。式の場合にはこの引き算を計算することができて，$-2x^3$ を得えます。

さらに次に x^2 を引くことになりますが，割られる式には x^2 の項がありません。

これは $0 - x^2$ を計算すると考えます[9]。よって $-x^2$。

以上をまとめると，$2x^4 + 3x^3 + x^2$ を引くことによって $-2x^3 - x^2$ を得ます。

次に割られる式の $-x$ をおろし，上の $-2x^3 - x^2$ とあわせて $-2x^3 - x^2 - x$ ができます。

商として $-x$ が立ちます。

割る式との積を計算すると $-2x^3 - 3x^2 - x$。これを $-2x^3 - x^2 - x$ から引きます。

まず $-2x^3$ から $-2x^3$ を引くので，先と同じように最高次の項は消えます。次は $-x^2$ から $-3x^2$ を引く。つまり $-x^2 + 3x^2$ を計算することになります。**ここは間違えやすいところですから，慣れるまでは十分に注意すること !!**

そして $-x$ から $-x$ を引く。これも上と同様の注意が必要となります。

で，結局 $2x^2$ が残ります。

最後に定数の 2 をおろし，$2x^2 + 2$ で同様のことをします（ x の項がないことに注意！)。

そして，割られる式の次数が割る式の次数より小さくなったところで，計算が終わります。

[9] 数の割り算では，このようなときには繰り下がりがおきましたが，式のときにはそれがありません。その分計算が少し楽になりますね。

解答例

$$
\begin{array}{r|rrrrr}
 & x^2 & -x & +1 & & \\ \cline{2-6}
2x^2+3x+1 & 2x^4 & +x^3 & & -x & +2 \\
 & 2x^4 & +3x^3 & +x^2 & & \\ \cline{2-6}
 & & -2x^3 & -x^2 & -x & \\
 & & -2x^3 & -3x^2 & -x & \\ \cline{3-6}
 & & & 2x^2 & & +2 \\
 & & & 2x^2 & +3x & +1 \\ \cline{4-6}
 & & & & -3x & +1
\end{array}
$$

$$\text{商 } x^2-x+1\text{ , 余り }-3x+1 \cdots \textbf{(答)}$$

(解答例終)

練習 29 次の計算をし，商と余りを求めよ。

(1) $(x^2+3x-9)\div(x+2)$

(2) $(4x^2-4x+3)\div(2x+1)$

(3) $(3x^3-8x^2+4)\div(x^2-3x-2)$

(4) $(x^3-1)\div(x^2+x+1)$

少しは割り算のコツがつかめてきたでしょうか？

さて，少し理論的なことに触れておきましょう。

整式の割り算において，割られる式，割る式，商，余りの間には次のような関係式が成り立っています。

定理 (除法の原理)　整式 A を整式 B で割ったときの商を Q ，余りを R とするとき[10],

$$A=BQ+R$$

ただし，$R=0$ または（R の次数）$<$（B の次数）

問 18 上の問で計算した割算において，$BQ+R$ を計算し，これが A に等しいことを確かめよ。

証明は補講に与えておきました。興味のある人は，ご覧ください。

さて，これまでのように単なる計算だけをやっているときには，上の定理は特に必要とはなりません。しかし，今後さまざまな場面で理論的な根拠を求められ

[10]整数のところにも除法の原理がありました。整数の大きさに対応するものとして，整式の次数が使われていることに注目してください。

ます。そのときに，上の定理が要石（かなめいし）として使われます。具体的な問題は，後で例題として取り上げることにします。

それほど複雑ではない問題として，

例題 6 整式 $2x^3 - x + 2$ をある整式で割ると，商が $x - 2$，余りが $6x + 4$ になった。この整式を求めよ。

解説　まず除法の原理を使って表わしましょう。その際，割る式がわからないので，これを A とでもおきましょう。すると，

$$2x^3 - x + 2 = A(x - 2) + (6x + 4)$$

求めるべきは A です。

これは，上の式を A に関する方程式とみなして解けばいいわけです[11]。

まず $6x + 4$ を移項すると，

$$(2x^3 - x + 2) - (6x + 4) = A(x - 2)$$

よって

$$2x^3 - 7x - 2 = A(x - 2)$$

ゆえに A は両辺を $x - 2$ で割ることで得られます。つまり

$$A = (2x^3 - 7x + 2) \div (x - 2) = 2x^2 + 4x + 1$$

解答例　求める式を A とすると[12]，

$$2x^3 - x + 2 = A(x - 2) + (6x + 4)$$

[11] あっさりと書きましたが，こういった見方，考え方に初めて出会った人もいるかもしれません。

整式の展開のところで式を一まとまりのものと見る，という考え方を紹介しました。ここはそういった考え方をするのです。それを促すために $6x + 4$ にカッコをつけてみました。

何を一まとまりのものとみなして計算をしているか，具体的な変形の仕方は解説をよく観察するように。

それでもわかりにくければ，

$$5 = 2a + 3$$

という方程式を丹念（たんねん）に解いてみてください。ここの変形は，この方程式を解くプロセスと同様なのです。よく見比べて，同じであるということを納得してください。

[12] 上の解説と解答例をよく見比べてください。解説では触れたものの，解答例では省略されている部分があることに気がつくでしょう。

このように，数学の答案では書くべき部分と書かなくてもよい部分があります。

何を書くべきで何を省略してもよいのか，すぐには判断できないかもしれませんが，これらを見比べることで少しずつできるようになってください。

$6x+4$ を移項して整理すると,

$$2x^3-7x-2=A(x-2)$$

両辺を $x-2$ で割って

$$A=(2x^3-7x+2)\div(x-2)=2x^2+4x+1$$

よって,

$$2x^2+4x+1\cdots\textbf{(答)}$$

(解答例終)

練習 30 整式 $6x^3-5x^2+1$ を割ると, 商が $3x-1$, 余りが $-4x+2$ となる。この整式を求めよ。

2.7 因数分解

2.7.1 因数分解

整式の割り算で特別な場合に数学的な興味があります。これは整数のときと同じです。

まずは言葉から定めましょう。

定義 (割り切れる) 整式 A を整式 B で割ったとき, 余りが 0 になるとき, A は B で **割り切れる** という。 **(定義終)** **割り切れる**

例 $(x^2-3x-10)\div(x+2)$ を計算すると, 商が $x-5$, 余りが 0 となります。

つまり, $x^2-3x-10$ は $x+2$ で割り切れます。 **(例終)**

割り算をしたとき, いつでも割り切れるわけではありません。その意味で割り切れる場合というのは特別な状況です。このように特殊な場合に数学は興味を持つことが多いのです。どのように面白いのか, は深い数学を勉強するうちに理解できてくるでしょう。

さて,

定義 (因数, 因数分解) 一つの整式が二つ以上の整式の積として表わされるとき, それらの整式をもとの整式の **因数**(いんすう) という。 **因数**

また, 与えられた整式を二つ以上の整式の積として表わすことを, その積を**因数分解する** という[13]。 **(定義終)** **因数分解**

たとえば上の例で考えると，$x^2-3x-10$ は因数分解でき，

$$x^2-3x-10=(x+2)(x-5)$$

ですから，$x+2,\ x-5$ は $x^2-3x-10$ の因数です。

2.7.2　公式による因数分解

どんな式でも因数分解できる，というわけではありませんし，展開のように地道に分配法則を適用していけば答えが得られるというわけでもないので，たくさん練習して勘（かん）を養うことが必要となります。ここでは公式を適用すれば因数分解できるような，比較的単純なものばかりを扱います。

展開のときと同様に，よく現れる因数分解は公式として記憶しておくのが便利です。公式はいくつかあります。まずは中学校で習ったものの復習から。

定理 (因数分解の公式　その１)

(1) $ma+mb=m(a+b)$

(2) $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2,\qquad a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$

(3) $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

(4) $x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$

注意　これらは展開公式の左辺と右辺を入れ替えただけにすぎません。よって証明するまでもないでしょう。

展開のときと同様に,（2）を「2 乗（平方）の因数分解の公式」,（3）を「和と差の積」と呼びます。

また（1）のように変形することを「共通因数 を 括（くく）り出す」といいます。　**(注意終)**　**共通因数**

例を挙げましょう。今回は上の定理と例とが対応させてあります。

例　（1）　$2xy^2-4x^3y=2xy(y-2x^2)$

共通因数を括り出している例です。この場合，共通因数は $2xy$ です。

（2）　$x^2-6x+9=x^2-2\times 3x+3^2=(x-3)^2$

2 乗の因数分解の公式の適用例です。定数項が平方数，つまりある数の 2 乗の形のとき（今の場合は 9）には定理の（2）の公式が使えないかどうか，検討するといいでしょう。

---

[13]第 1 章「整数の性質」で「素」因数分解というものをやりました。これに対応するのが因数分解です。

一つ問題を提起しておきましょう。整数には素数というものがありました。整式の世界で素数に対応するものは何でしょう？　準備が整ったところで説明をする予定ですが，自分なりに考えてみておいてください。

（3） $9x^2-4=(3x)^2-2^2=(3x+2)(3x-2)$

和と差の積の公式の適用例です。１次の項がないとき，そして係数や定数項が平方数であるとき，適用できないかどうかを考えるとよい。

（4） $x^2-x-2=x^2+\{2+(-1)\}x+1\times(-2)=(x+1)(x-2)$

共通因数もない，平方数もないときに適用を考えるとよい。その際，定数項から手がかりを探すと見つけやすい（あくまで経験則ですが）。この例の場合，かけて -2 となる数の組み合わせ，1 と -2， -1 と 2 のうち，足して -1 となるものを探します。すると後者であることが（今の場合はすぐに）分かります。 **(例終)**

まずはここまでの練習をしてもらいましょう。どの公式を使えばよいのか，確認しながらやるように。

練習 31 次の式を因数分解せよ。

(1) a^2-ab^2
(2) $a(x+y)+b(x+y)$
(3) y^2-6y+9
(4) $4x^2-25y^2$
(5) $x^2+3x-28$
(6) $4x^2y-2xy^2+6xyz$
(7) $4x^2+12x+9$
(8) $(x+y)^2-10(x+y)-24$

展開公式の右辺と左辺を逆に見れば，因数分解の公式が得られます。展開公式にはこれ以外にいくつかありました。それから得られる因数分解の公式を挙げましょう。若干（じゃっかん）複雑なので，一つずつ挙げることにします。

定理 (因数分解の公式　その２)

（5） $acx^2+(ad+bc)x+bd=(ax+b)(cx+d)$

定理が成り立つことはいいでしょう。ではこの公式をどのように適用すればよいのでしょうか。例を用いて説明しましょう。少し説明が長く，複雑なので，よく読んでください。

例　$4x^2+7x+3$ の因数分解

これは公式が適用できるタイプのものです。

これが因数分解できたとすると，

$$4x^2+7x+3=(ax+b)(cx+d)$$

となります。右辺の a, b, c, d を何とかして見つけなければなりません。そのために，右辺を展開してみます。すると

$$4x^2+7x+3=acx^2+(ad+bc)x+bd$$

となります。両辺を比較すると

$$
\begin{aligned}
ac &= 4 \\
ad + bc &= 7 \\
bd &= 3
\end{aligned}
$$

でなければならないことが分かります[14]。2 番目の式を手がかりにするのは難しい。しかし 1，3 番目の式は手がかりとなります。つまりかけて 4（$ac = 4$）とかけて 3（$bd = 3$）となる数の組をまず考えればよいのです。このような数は無数にありますが，我々が出会う因数分解はたいてい係数が整数です。もちろんそうでないような例もたくさんありますが，まずは整数で候補を探し，どうしても見つからなければ他の方法を考える，という二段構えでいくことにしましょう。

はじめの方を満たす数の組は $a = 4,\ c = 1$ と $a = 1,\ c = 4$，それから $a = 2,\ c = 2$ である……，としたいところですが，ちょっと気をつけましょう。かけて正になる数は，二つとも正の場合と二つとも負の場合の二通りあります。よって上の三つ以外に，$a = -1,\ c = -4$ と $a = -4,\ c = -1$ と $a = -2,\ c = -2$ の三つも候補となります（実は今の場合はじめの三つだけを考えればよい。なぜか？この例を読み終わったら考えてみてください）。

同じようにしてかけて 3 になる組み合わせを探すと，$(b,\ d)$ として $(1,\ 3), (3,\ 1), (-1,\ -3), (-3,\ -1)$ の四つが候補となります。

しかし，これだけではどれがあてはまるものか判断することはできません。そこでさっきの 2 番目の式を手がかりとして使うのです。

つまり，上の候補をさらに組み合わせ，$ad + bc$ が 7 となるものを探すのです。たとえば，$a = 4,\ c = 1$ と $b = 1,\ d = 3$ を組み合わせて $ad + bc$ を計算すると，

$$ad + bc = 4 \times 3 + 1 \times 1 = 13$$

となり，これは 7 に等しくないので，この組み合わせは没（ぼつ）です。次に $a = 4,\ c = 1$ と $b = 3,\ d = 1$ とすると……，と繰り返します（実は今の場合これが当たり。各自確かめてください）。

この例の場合，a と c の組み合わせが六つ，b と d の組み合わせが四つあるので，全部で 24 通りの組み合わせが候補となります（実はもっと少ない。なぜか？これも考えてください）。想像しただけでも大変な感じがしますが，人間訓練すればたいてい場合勘（かん）が働くようになります。それゆえ見かけほど大変ではありませ

[14] この考え方は初めて出てきました。二つの整式は対応するそれぞれの項の係数が等しいとき，等号で結ばれます。この例の場合，$4x^2$ と acx^2，$7x$ と $(ad + bc)x$，3 と bd がそれぞれ対応する項であり，それぞれの係数は 4 と ac，7 と $ad + bc$，3 と bd です。そしてこれらが等しいので，上の三つの等式が得られるわけです。

このような考え方を **係数比較の方法** ということがあります。あとでまた出てくるのですぐに理解できなくてもいいですが，頭の隅にでも入れておいてください。

ん(もっとも，勘が働くようになるまでには，少しがんばらねばなりませんが[15])。またもちろん一つ見つかればそこでやめて，残りを試す必要はありません。

確かにはじめのうちはなかなか見つからず，イライラするかもしれませんが，たくさん練習することで勘を養ってください。それから残念ながら，このタイプの因数分解を簡単に行う方法はありません。地道にやってください

とはいうものの，上のやり方ではあまりにも面倒。次のようにやると若干楽になります。

$a,\ b,\ c,\ d$ に対して $ad+bc$ を計算するのでした。そこでまず四つの数を下のように配置します（$a,\ b,\ c,\ d$ の見つけ方と配置の仕方の違いに注意)。

$$\begin{array}{ccc} a & & b \\ c & & d \end{array}$$

これらをそれぞれ斜めにかけると，ad と bc ができます。

で，一番右側の二つの数を上下で足しあわせれば $ad+bc$ となります。

$$\begin{array}{ccccr} a & & b & \longrightarrow & ad \\ c & & d & \longrightarrow & bc \\ \hline & & & & ad+bc \end{array}$$

上の $a=4,\ c=1$ と $b=1,\ d=3$ でやってみると，下のようになり，最後に得られた数を見ることで，正しい組み合わせかどうかを判断することができます。

$$\begin{array}{ccccr} 4 & & 1 & \longrightarrow & 1 \\ 1 & & 3 & \longrightarrow & 12 \\ \hline & & & & 13 \end{array}$$

このようなやりかたを **たすきがけ法** と呼ぶことがあります[16]。 **たすきがけ法**

で，結局うまくいくものは，(4, 1), (3, 1) の組合せであることが分かるので，$4x^2+7x+3=(4x+3)(x+1)$ と因数分解されることがわかります(たすきがけの表を作り，確かにこのように因数分解できることを確かめてください)。たすきがけで作った表における数の配置と因数分解された式 $(4x+3)(x+1)$ に出てくる係数の位置関係に注目せよ！)。 **(例終)**

どうやればいいか，感じはつかめたでしょうか　もう少し例を挙げましょう。いずれも たすきがけ で，できるものです

例　$6x^2-7x-10$ の因数分解

かけて 6 になるものと，かけて -10 になるものを候補とします。かけて 6 の方は問題ないでしょう。では，かけて -10 になるものはどうでしょう。これは

[15]誰が言ったか覚えていませんが,「勘」とは「甚(はなは)だしい力」だそうです。

[16]なぜ「たすきがけ」というかわかりますか？　わからない人は，ちょっと年のいった方にたすきのかけ方を教えてもらいなさい。そしてその後ろ姿を眺(なが)めるように。

$(1,-10)$, $(-1,10)$, $(2,-5)$, $(-2,5)$ の四つです。今の場合下のように選ぶとうまくいきます

$$\begin{array}{ccrcr} 1 & \diagdown\!\!\!\!\diagup & -2 & \longrightarrow & -12 \\ 6 & & 5 & \longrightarrow & 5 \\ \cline{5-5} & & & & -7 \end{array}$$

よって $6x^2-7x-10=(x-2)(6x+5)$ **(例終)**

例　$8a^2-2ab-3b^2$ の因数分解

見た目難しそうです。しかしここまでに挙げた例と本質的に異なるものではありません

この式を a に関して整理すると，a^2 の係数は 8 ，a の係数は $-2b$ ，定数項は $-3b^2$ です。よってかけて 8 になるものと，かけて $-3b^2$ となるものを候補とします。はじめの方は問題ありません。一方，かけて $-3b^2$ となるものは，$(1,-3b^2),(-1,3b^2),(b,-3b),(-b,3b)$ の四つが候補となります。たすきがけした結果が $-2b$ になるものを探しているので，はじめの二つがだめなことはすぐ分かります（理由を考えよ！　ヒント：たすきがけした結果の次数と，a の係数の次数をくらべよ）。結局下の結果から，$8a^2-2ab-3b^2=(2a+b)(4a-3b)$ を得ます。

$$\begin{array}{ccrcr} 2 & \diagdown\!\!\!\!\diagup & b & \longrightarrow & 4b \\ 4 & & -3b & \longrightarrow & -6b \\ \cline{5-5} & & & & -2b \end{array}$$

(例終)

このタイプの因数分解は，かなり面倒ですね。次に少し多めにおいておきますので，よく練習してください。

練習 32 次の式を因数分解せよ。

(1) $3x^2+5x+2$　(2) $4x^2-7x+3$　(3) $2x^2+x-3$
(4) $2x^2+13x+6$　(5) $6x^2+7x-3$　(6) $6x^2+13x+6$
(7) $4x^2-16x+15$　(8) $10x^2+7xy-12y^2$　(9) $35x^2-13xy-12y^2$

因数分解の公式の紹介を続けましょう。

定理 (因数分解の公式　その３)
(6)　$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$
(7)　$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

これらは初めて出てきました。

右辺の式の形に注意！　ab の係数に 2 は入っていません!!　また $+$，$-$ の符号の対応もよく観察しておくように!!

問 19 （6）と（7）の右辺をそれぞれ展開することで左辺が得られることを確かめよ。

例

$$\begin{aligned} x^3 + 27 &= x^3 + 3^3 \\ &= (x+3)(x^2 - 3x + 9) \end{aligned}$$

(例終)

練習 33 次の式を因数分解せよ。

(1) $x^3 + 1$　(2) $x^3 - 1$　(3) $8x^3 + 1$
(4) $x^3 - 64$　(5) $8a^3 - 27b^3$　(6) $64x^3 - 125y^3$

以上で因数分解の基本を終わります。さらに複雑な式の因数分解の練習を，演習編で紹介します。

本章の終わりにあたって，因数分解の復習のための問いを出しておきます。力試しをかねて，順不同（じゅんふどう）でならべてあります。どの公式を使えばいいのか，よく考えながら解いてみてください。もちろん公式を忘れてしまっていたら，前を見ても構いません。しかしもし覚えていないときには，覚えられるまで繰り返しこの問いを解き直すようにしてください。

練習 34 次の式を因数分解せよ。

(1) $x^2 + 4x + 4$　(2) $x^3 - 125$
(3) $64x^2 - 25y^2$　(4) $a^3 + a^2b^2 - a^2b$
(5) $4x^2 - 12xy + 9y^2$　(6) $3x^2 - 7x - 20$
(7) $27m^3 + 8n^3$　(8) $x^2 + x + \frac{1}{4}$
(9) $a^2 + 2ab + b^2$　(10) $9a^2b^2 - c^2$

2.8 さらに勉強するために

本章は計算の方法の説明に終始しました。これだけでは，何に使うのかわからないことと思います。はじめにも書きましたように，本章で紹介した計算はこれから説明していくお話しの中であたりまえのように，使うものです。そのことに意を用いて，十分計算になれておいてほしいと思います。

それはさておき，因数分解はちょっとしたパズルのようで面白さを感じた人もいるかもしれません。因数分解だけでも，かなりいろいろなタイプの問題があり，これから準備ができしだい，紹介していくつもりです。