

## 付録 A 力学

Newton 力学は質点に対する運動を記述する学問である。ここで質点とは何か？質点とは粒子があった場合、その重心の一点の座標を  $r$  として、この一点に対応する「対象物」の事を意味している。Newton 方程式はこの質点に対する時間変化を決定する方程式である。座標が時間によるというのは場の理論になれている人からすると、多少奇異な感じがする。しかし、粒子が動くわけだからその時間変化を追うのは、ある意味では理解できる事である。この時間変化を決める Newton 方程式は質量  $m$  の質点に力  $F$  が働いている時

$$m\ddot{r} = F$$

と書く事が出来る。ここで、

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt}, \quad \ddot{r} = \frac{d^2r}{dt^2}$$

は便利さのために導入されたものである。力  $F$  は、重力の場合は

$$F = -G \frac{Mmr}{r^3}$$

と与えられている。ここで  $G$  は重力定数であり、 $M$  は力を生み出している相手方（例えば、地球の運動を考える場合、太陽）の質量である。ただし、ここでは重心と相対座標の問題とか地球の大きさの問題などの細かい事は全て省略してある。いずれにしても、この Newton 方程式は 2 階の微分方程式であり、その答えを何処かから持ってくれば、例えば地球が太陽の周りをどのように回転して行くのかの問題は完全に解けてしまうのである。

力学の解説としては、以下に 2 つの実例を挙げよう。それをしっかり理解すれば基本的には力学は理解された事になると思う。但し、ここでは議論しないが、力学で最も面白い点は剛体の力学を記述できる事であり、剛体に関する問題をしっかり解いたり理解する事は難しいものではあるが、最高に楽しいものでもある。また、力学の方程式の諸性質を理解する上で重要になる Lagrange 形式と系のガリレイ変換とローレンツ変換に対する不変性を議論しよう。この事より、相対性理論の重要性も認識できるものと思っている。

## A.1 保存力

Newton 力学の問題の解説を具体的にする前に、保存力に関して一つ重要なコメントをしておこう。どの力学の教科書にもこのような問題は議論されていないが、しかし、物理をしっかりと理解するためにはどうしても考えておく必要がある。それは、「力」という概念は Newton 力学だけで使われているということである。すなわち、量子力学でも電磁気学でも力という概念は不要である。常に「ポテンシャル」という概念のみが現れる。Newton 力学では力が

$$\mathbf{F} = -\nabla V(r)$$

と書けるものを保存力という。この時に確かにエネルギー保存が導かれるからである。しかし、この式を Newton 力学内で証明する事は出来ない。何故、ベクトルである力  $\mathbf{F}$  がスカラーであるポテンシャルの微分で書かれるのか、これには何か条件がないといけない。数学的には

$$\nabla \times \mathbf{F} = 0$$

であれば確かに保存力となる。しかし、この式は Newton 力学の範囲では示す事が出来ないのである。

それではどうしてこのように力がポテンシャルの微分で書けたのであろうか？その理由は、Newton 力学が基本方程式ではない事と関係している。Newton 方程式は他の基本方程式から導出されるべきものであるからである。すなわち、Newton 方程式は量子力学の Schrödinger 方程式から導く事ができる。そして、この時にもととの Schrödinger 方程式には力という概念はなくてポテンシャルのみがあり、その微分として Newton 力学の方程式が得られたから、Newton 力学では常にポテンシャルの微分として力が定義されているのである。

Newton 力学の方程式に保存力以外の力が現れる場合がある。これはどのような力であろうか？このような力が現れる原因を探る事はそれ程難しいものではない。多体問題を 1 体問題に無理やりなおす事をすると、どうしても複雑な力が現れてしまう事が簡単にわかるものである。例えば、摩擦力を考える場合がある。水滴が落下する時、その水滴は重力による力を感じるわけであるが、実際にその水滴の運動を記述するには、重力に加えて摩擦力を考えると比較的簡単にその運動を理解できる場合があるということである。これは水滴が空気と相互作用するからであり、この力は多体問題から派生する力となっている。これをきちんとミクロから計算する事は事実上不可能であるが、しかし摩擦力として 1 体問題により水滴の運動を取り扱う事はそれ程悪い近似ではない。

## A.2 1次元調和振動子

これはバネの問題である。この場合、力は変位  $x$  に比例する事が実験でわかっている。勿論、これは変位が小さい時のみ成り立っている。この比例係数を  $k$  とすると力  $F$  は  $F = -kx$  と書けるので Newton 方程式は

$$m\ddot{x} = -kx$$

となる。この微分方程式の解は  $\omega \equiv \sqrt{\frac{k}{m}}$  を導入すると覚えやすい形になる。一般解は物の本から引っ張ってきて

$$x = A \sin \omega t + B \cos \omega t$$

と書けることがわかる。これが微分方程式の解になっている事を示すには、この式を入れてみれば、容易に納得できるものである。この時、 $A$  と  $B$  は条件を自分で入れないと決まらない定数である。例えば、初期条件として  $t = 0$  で  $x = 0$  と  $\dot{x} = v_0$  であるとすれば

$$x = \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t$$

と求められるのである。この答えを見てわかる事は、質点が振動しているという事である。その振動の形が  $\sin$  か  $\cos$  かという事は大して重要ではない。大切な事はそれが振動する、すなわち質点の座標が行ったり来たりの運動をしているという事である。そうするとその運動の周期はいくらかという事を知りたくなる。行って戻るわけだから、これを周期と言うのは確かに合理的である。この振動子の場合は周期  $T$  が  $T = \frac{2\pi}{\omega}$  と与えられる事はグラフを書いてみれば直ぐわかる事である。

## A.3 Kepler 問題

力学で最も重要な問題は、勿論、Kepler 問題である。この問題をしっかり理解する事が力学を学ぶ事の意義の大半を占めている。Newton の運動方程式は

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -G \frac{Mm\mathbf{r}}{r^3}$$

となる。これをそのまま解くのは結構大変である。しかし、テクニックは同時に良く知られている。この場合は、まず上式の両辺に  $\dot{\mathbf{r}}$  を掛けるのである。そ

うすると

$$m\dot{\mathbf{r}} \cdot \ddot{\mathbf{r}} = -G \frac{Mm\dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}}{r^3}$$

となる。ところがこれは直ちに变形できて

$$\frac{m}{2} \frac{d\dot{\mathbf{r}}^2}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{GMm}{r}$$

となり、これはすでに解けた形になっていて、積分定数を  $E$  と置くと

$$E = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{r}}^2 - \frac{GMm}{r}$$

となる。しかし、この式は1個しかなく、もともと3個あったわけだから、あと2個の式を導き出す必要がある。ここで角運動量  $L$  を  $L = \mathbf{r} \times m\dot{\mathbf{r}}$  と定義する。何故、この様な角運動量を定義するのかと言うと、それはこの  $L$  が保存量になっているからである。すなわち、

$$\frac{dL}{dt} = \dot{\mathbf{r}} \times m\dot{\mathbf{r}} + \mathbf{r} \times m\ddot{\mathbf{r}} = -\mathbf{r} \times G \frac{Mm\mathbf{r}}{r^3} = 0$$

となっていて、時間に依らない事が簡単に証明できるのである。ここでベクトル積においては  $\mathbf{a} \times \mathbf{a} = 0$  である事は具体的に入れてみればすぐに証明できる事である。これまででわかった事は、重力下での Newton 方程式では、角運動量  $L$  が保存量になっているので、これは定数である。従って、この  $L$  の方向を  $z$ -軸に選ぶ事にしても、一般性を失う事はない。こうすると、実は運動は  $x-y$  平面になる。これは明らかで、運動を表す座標は  $r$  であるが、

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{L} = \mathbf{r} \cdot \mathbf{r} \times m\dot{\mathbf{r}} = m\mathbf{r} \times \mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}} = 0$$

であるから、運動は  $L$  と直交している事になり、それはすなわち  $x-y$  平面となっているわけである。角運動量  $L$  の方向は  $z$ -軸にとっているので、その大きさを  $\ell = |L|$  と置くと、2次元極座標表示では

$$\ell = |L| = L_z = mr^2\dot{\varphi}$$

となっている。ここで、2次元極座標表示では

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi$$

となっており、その時間微分は

$$\dot{x} = \dot{r} \cos \varphi - r\dot{\varphi} \sin \varphi, \quad \dot{y} = \dot{r} \sin \varphi + r\dot{\varphi} \cos \varphi$$

となっている。この事より、エネルギー  $E$  の式は極座標で書けて

$$E = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - \frac{GMm}{r}$$

ここで、 $\ell = mr^2\dot{\varphi}$  を用いれば

$$E = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + \frac{\ell^2}{m^2r^2}\right) - \frac{GMm}{r}$$

となり、これは  $r$  に対する 1 階の微分方程式になっている。これは少し面倒ではあるが、きちんと解析的に解けて、もし  $E$  がマイナスの場合は確かにこの地球の運動は楕円運動になることが示される。

## A.4 Lagrange 形式

Kepler 問題などの自然現象を理解するためには、運動方程式を解く事が重要であり、それは Newton 力学では微分方程式を解く事に対応している。この時、どの座標系で解くのが一番有利であるかと言う問題は、一般にはポテンシャルの形による。通常はデカルト座標系  $(x, y, z)$  を用いているが、極座標  $(r, \theta, \varphi)$  も良く使われる。これらを総称して一般座標と呼んでいる。現実の問題を解こうとする時、運動方程式の段階から座標系を選ぶよりも、座標系を固定しない一般座標で Newton 方程式を定式化したものが存在し、それが Lagrange 形式と呼ばれるものである。導入の段階で少し複雑に見える数学を使うのだが、実際には簡単であり、この Lagrange 形式の方が、ほとんど全ての場合において便利で簡単になる。この事は、小学生の頃に解いた鶴亀算はかなり難しいものだが、同じ問題を方程式を使って解くと割合簡単に解けたという事と状況は良く似ているのである。

それでは、Lagrange 形式とは何か？この事を出来るだけ簡潔に解説したい。ただし、Lagrange 形式自体は物理的な意味合いはほとんど無い。一般座標でも簡単に Newton 方程式が求められるという事のみが、物理的な意味である。最も簡単に Lagrange 形式による方程式を求める方法は最小作用の原理を用いる事である。これは作用という物理量を定義し、それを最小にする事で Lagrange 方程式が求められるというものである。まず、作用  $S$  を以下の様に定義する。

$$S = \int_{t_0}^{t_1} L(q_i, \dot{q}_i) dt$$

ここで  $L(q_i, \dot{q}_i)$  は Lagrangian と呼ばれるものであり、

$$L(q_i, \dot{q}_i) = T(\dot{q}_i) - V(q_i)$$

で与えられる。この時、 $q_i$  と  $\dot{q}_i$  は一般座標で書いた座標とその時間微分である。例えば、極座標だと  $q_1 = r, q_2 = \theta, q_3 = \varphi$  と書けば、 $\dot{q}_1 = \dot{r}, \dot{q}_2 = \dot{\theta}, \dot{q}_3 = \dot{\varphi}$  となっている。質量  $m$  の質点の運動エネルギー  $T(\dot{q}_i)$  は

$$T(\dot{q}_i) = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\dot{\varphi}^2)$$

となっている。また、Kepler 問題の場合、 $V(q_i)$  は

$$V(q_i) = -G\frac{Mm}{r}$$

となっている。

#### A.4.1 最小作用の原理

ここで、最小作用の原理を用いる時、変分法を利用する。これは Euler によって発展させられた数学の形式である。今、時間  $t_0$  から  $t_1$  まで  $L(q_i, \dot{q}_i)$  という物理量を時間で積分し、積分量  $S$  を最小にするような  $q_i = q_i(t)$  の関数形はどのようにしたら決定できるかという問題である。Euler は  $q_i$  の関数形を少し変えたもの  $q_i + \delta q_i$  と元々のものとの差を  $\delta S$  として、 $\delta S = 0$  が最小値を与える事より、この条件から、運動方程式が求まるという事を証明したのである。すなわち、

$$\delta S \equiv \int_{t_0}^{t_1} L(q_i + \delta q_i, \dot{q}_i + \delta \dot{q}_i) dt - \int_{t_0}^{t_1} L(q_i, \dot{q}_i) dt = \sum_{i=1}^3 \int_{t_0}^{t_1} \left( \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i = 0$$

の式から、任意の  $\delta q_i$  に対して上式が成り立つ事から、

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0 \quad (i = 1, 2, 3)$$

という Lagrange 方程式が求まる。そしてこの方程式は一般座標で書かれた Newton 方程式そのものになっているのである。

この式を得る上での数学上のポイントは、一度、部分積分をする事である。この時、部分積分の公式を利用した際に積分が外れた項は  $\delta q_i(t_0) = \delta q_i(t_1) = 0$  である事から、ゼロである。この事は最小作用の原理を用いて方程式を導出する時、常に重要な役割を果たしている。ところで、 $\delta q_i(t_0) = \delta q_i(t_1) = 0$  の条件は何故必要なのであろうか？これは変分法そのものに関係している。変分法は関数形を変化させる事であり、この関数形の変化は時間の両端 ( $t = t_0, t = t_1$ ) を止めておかないと出来なく、従って  $\delta q_i(t_0) = \delta q_i(t_1) = 0$  を課するのは当然の条件となっているのである。

### A.4.2 一般座標での Newton 方程式

上記の Lagrange 方程式は Newton 方程式を一般座標に変換する事により求められる。簡単な数学だけだから、以下に示しておく。この事より、確かに最小作用の原理を用いた変分法が正しい事がよりわかり易い形で納得できると思う。まずは、 $(x, y, z)$  から  $(q_1, q_2, q_3)$  への変数変換を考える。 $x = x(q_1, q_2, q_3)$ ,  $y = y(q_1, q_2, q_3)$ ,  $z = z(q_1, q_2, q_3)$  であるので、それぞれの座標の時間微分は

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \frac{\partial x}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial x}{\partial q_2} \dot{q}_2 + \frac{\partial x}{\partial q_3} \dot{q}_3 \\ \dot{y} &= \frac{\partial y}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial y}{\partial q_2} \dot{q}_2 + \frac{\partial y}{\partial q_3} \dot{q}_3 \\ \dot{z} &= \frac{\partial z}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial z}{\partial q_2} \dot{q}_2 + \frac{\partial z}{\partial q_3} \dot{q}_3\end{aligned}$$

となる。これより、

$$\frac{\partial x}{\partial q_i} = \frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{q}_i}, \quad \frac{\partial y}{\partial q_i} = \frac{\partial \dot{y}}{\partial \dot{q}_i}, \quad \frac{\partial z}{\partial q_i} = \frac{\partial \dot{z}}{\partial \dot{q}_i}, \quad (i = 1, 2, 3)$$

がすぐに求められる。ここで  $V = V(x, y, z)$  であり、さらに、次の量  $I$  を考えてみる

$$I \equiv -\frac{\partial V}{\partial q_i} = -\left( \frac{\partial V}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial q_i} + \frac{\partial V}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial q_i} + \frac{\partial V}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial q_i} \right)$$

Newton 方程式は  $m\ddot{x} = -\frac{\partial V}{\partial x}$ ,  $m\ddot{y} = -\frac{\partial V}{\partial y}$ ,  $m\ddot{z} = -\frac{\partial V}{\partial z}$  なので、 $I$  は

$I = m \left( \ddot{x} \frac{\partial x}{\partial q_i} + \ddot{y} \frac{\partial y}{\partial q_i} + \ddot{z} \frac{\partial z}{\partial q_i} \right)$  であるから

$$I = m \left\{ \frac{d}{dt} \left( \dot{x} \frac{\partial x}{\partial q_i} \right) - \dot{x} \frac{\partial \dot{x}}{\partial q_i} + \frac{d}{dt} \left( \dot{y} \frac{\partial y}{\partial q_i} \right) - \dot{y} \frac{\partial \dot{y}}{\partial q_i} + \frac{d}{dt} \left( \dot{z} \frac{\partial z}{\partial q_i} \right) - \dot{z} \frac{\partial \dot{z}}{\partial q_i} \right\}$$

と書き直す事が出来、さらに  $\frac{\partial x}{\partial q_i} = \frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{q}_i}$  等の式を使って

$$I = m \left\{ \frac{d}{dt} \left( \dot{x} \frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \dot{x} \frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{q}_i} + \frac{d}{dt} \left( \dot{y} \frac{\partial \dot{y}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \dot{y} \frac{\partial \dot{y}}{\partial \dot{q}_i} + \frac{d}{dt} \left( \dot{z} \frac{\partial \dot{z}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \dot{z} \frac{\partial \dot{z}}{\partial \dot{q}_i} \right\}$$

と書ける事が簡単にわかる。これらより運動エネルギーを  $T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$

と書くと  $I$  は

$$I = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = -\frac{\partial V}{\partial q_i}$$

と書き表す事ができる。ここでポテンシャル  $V$  は座標のみの関数と仮定するので  $\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_i} = 0$  である。よって、Lagrangian を  $L = T - V$  と書けば、上式は

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = \frac{\partial L}{\partial q_i} \quad (i = 1, 2, 3)$$

となり、確かに Lagrange 方程式が求まるのである。この事はかなり重要な意味を持っている。Newton 方程式を一般座標に書き直したら、必然的に Lagrange 方程式になったと言う事であり、この事実は最小作用の原理が確かに正しい事を示しているのである。従って、これからは最小作用の原理を基本原理として使っても安心できると言うものである。実際、最小作用の原理による変分法は数学的な取り扱いが簡単であり、利用価値が高いものである。とはいっても、変分法に関する数学的な厳密さは物理屋としては興味が無いし、こちらの方は数学者に任せておけば良いと思われる。

## A.5 正準形式

解析力学では常に正準変換の形式が議論されている。確かに、正準変換はかつて古典力学から量子力学を導出する際に必要であった。特に Poisson 括弧は、量子力学での交換関係と似せて議論されていたものである。しかしながら、現在の理論形式はこの本で議論しているように、むしろ量子力学自体が最初からあった方程式であるという考える方がむしろ自然であるという事である。従って、物理的には正準形式自体はそれ程意味のある事ではないが、しかし理論としてはやはり大変面白い手法である。さらには、量子力学を  $\hbar \rightarrow 0$  の極限で得られる方程式は Hamilton-Jacobi の方程式であり、これはそれなりに理解しておく必要があると思われる。

### A.5.1 正準変換

一般座標  $(q, p)$  で書かれている系を適当に座標変換して  $(Q, P)$  の世界に行ったとしよう。この時、Hamilton 方程式は同じ形で成り立つとする。すなわち

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} \quad \Rightarrow \quad \dot{Q} = \frac{\partial H'}{\partial P}, \quad \dot{P} = -\frac{\partial H'}{\partial Q}$$

が成立する時、この変換を正準変換という。これは作用を見れば簡単である。作用  $S$  は

$$S = \int pdq - H(q, p)dt$$

となっていて、この時この作用を最小にする方程式が上記の Hamilton 方程式である。従って、 $(Q, P)$  系に対しても

$$S = \int PdQ - H'(Q, P)dt$$

となっていれば当然 Hamilton 方程式が成立する事になっている。しかし、この時も一つ自由度が残っている。それは

$$S = \int PdQ - H'(Q, P)dt + dF$$

でも良いのである。ここで  $F$  は任意の関数であるが、

$$dF = pdq - PdQ + (H' - H)dt$$

を満たしているもので、母関数と呼ばれている。これは、この  $F$  により正準変換が求められるからである。微分の公式から

$$dF(q, Q, t) = \frac{\partial F}{\partial q}dq + \frac{\partial F}{\partial Q}dQ + \frac{\partial F}{\partial t}dt$$

である事から

$$p = \frac{\partial F}{\partial q}, \quad P = -\frac{\partial F}{\partial Q}, \quad H' = H + \frac{\partial F}{\partial t}$$

が求められるのである。

## A.5.2 Hamilton-Jacobi の方程式

新しい母関数として

$$\Phi = F + PQ$$

を導入すると

$$p = \frac{\partial \Phi}{\partial q}, \quad Q = \frac{\partial \Phi}{\partial P}, \quad H' = H + \frac{\partial \Phi}{\partial t}$$

となる。ここで、作用  $S$  を変数とみなして

$$S = \int_{t_0}^t [pd\dot{q} - H(q, p)]dt$$

とした時、上式を  $t$  で微分する事より

$$dS = pdq - Hdt = \frac{\partial S}{\partial q}dq + \frac{\partial S}{\partial t}dt$$

が示され、この式より

$$p = \frac{\partial S}{\partial q}, \quad H + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$$

である事がわかる。これは母関数  $\Phi = S$  とした時に一致している。従って、この時

$$H' = 0, \quad Q = \frac{\partial S}{\partial P}$$

である。ここで、新しく変換されるべき  $(Q, P)$  は勝手に取る事が出来るからである。これが Hamilton-Jacobi の方程式である。ここで

$$S = -Et + S_0(q), \quad H = \frac{p^2}{2m} + V(q)$$

とすれば、

$$E = \frac{1}{2m} \left( \frac{\partial S}{\partial q} \right)^2 + V(q)$$

となり、これは作用  $S_0$  に対する微分方程式になっている。この微分方程式を解いて、その積分定数と  $E$  を新しい正準座標  $(Q, P)$  に対応させれば Newton 方程式を解いたものと同じ結果が求められるのである。

### 調和振動子の例

ここで実例として調和振動子の場合を挙げておこう。これを理解すれば十分であると思われる。この時、 $S_0$  は

$$S_0 = \int \sqrt{2m \left( E - \frac{1}{2}m\omega^2 q^2 \right)} dq$$

となる。今、 $P = E$  と対応させ、さらに  $Q = \alpha$  (定数) としよう。この時、

$$\alpha = \frac{\partial S}{\partial E} = -t + \frac{\sqrt{2m}}{2} \int \frac{1}{\sqrt{E - \frac{1}{2}m\omega^2 q^2}} dq = -t + \frac{1}{\omega} \sin^{-1} \left( \frac{q}{q_0} \right)$$

となり、これは調和振動子の解になっている。

## A.6 運動方程式と相対性理論

粒子の運動を記述する運動方程式はどの慣性形でも同じ形をしているべきであるという事が相対性理論の基本原則である。ここでは、Newton 方程式と Maxwell 方程式がガリレイ変換とローレンツ変換に対してどの様に振舞っているのかを具体的に見て行きたい。そうすれば、変換した時の形がいかに大切であるか良くわかると思う。

### A.6.1 Newton 方程式とガリレイ変換

これからの議論は全て S-系の運動は  $x$ -軸方向に速度  $v$  で動いているとする。従って、 $y$ -軸 と  $z$ -軸 は常に不変であるとして十分である。ガリレイ変換の場合、変換則は

$$x = x' + vt', \quad t = t'$$

である。Newton 方程式は  $x$ -軸方向のみが変換を受ける可能性があるので、変換してみると

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{\partial U}{\partial x} \quad \rightarrow \quad m \frac{d^2 x'}{dt'^2} = -\frac{\partial U}{\partial x'}$$

となり、方程式は不変である事がわかる。

### A.6.2 Newton 方程式とローレンツ変換

ローレンツ変換の場合、変換則は

$$x = \gamma(x' + vt'), \quad t = \gamma\left(t' + \frac{v}{c^2}x'\right)$$

となっていて、ただし  $\gamma$  は  $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$  であった。従って、座標の時間微分は

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx' + v dt'}{dt' + \frac{v}{c^2} dx'} = \frac{\frac{dx'}{dt'} + v}{1 + \frac{v}{c^2} \frac{dx'}{dt'}}$$

さらに 2 階微分は

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{1}{\gamma(dt' + \frac{v}{c^2} dx')} d\left(\frac{\frac{dx'}{dt'} + v}{1 + \frac{v}{c^2} \frac{dx'}{dt'}}\right) = \frac{\frac{d^2 x'}{dt'^2}}{\gamma^3 \left(1 + \frac{v}{c^2} \frac{dx'}{dt'}\right)^3} \neq \frac{d^2 x'}{dt'^2}$$

となり、Newton 方程式は全く別物になっている。すなわち、Newton 方程式はローレンツ変換に対して不変ではないのである。

### A.6.3 Maxwell 方程式とガリレイ変換

Maxwell 方程式のガリレイ変換による性質を考えるためには、物質が無いときで十分である。この時、Maxwell 方程式は電場  $E$  に対して

$$\left( \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right) \mathbf{E} = 0$$

となっている。ガリレイ変換の式は

$$x = x' + vt', \quad t = t'$$

であるから、

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x'} \quad \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t'} - v \frac{\partial}{\partial x'}$$

となる事がわかる。よって

$$\left[ \frac{1}{c^2} \left( \frac{\partial}{\partial t'} - v \frac{\partial}{\partial x'} \right)^2 - \nabla'^2 \right] \mathbf{E}' = 0$$

となり、Maxwell 方程式はガリレイ変換に対して不変ではない事がわかった。

### A.6.4 Maxwell 方程式とローレンツ変換

ローレンツ変換においては

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t'^2} - \nabla'^2$$

であるから、Maxwell 方程式がローレンツ変換に対して不変である事は明らかである。と言うか、Maxwell 方程式が不変になるようにローレンツ変換を決めたのである。

## A.7 力学演習問題

力学に対する感覚を身につけるためには、どうしても基本的ないくつかの演習問題を解いて見る必要がある。力学演習書は何処にもあるので、ここでは簡単でしかし重要であると思われ問題を議論したい。

### A.7.1 単振り子

単振り子は力学演習で最も標準的でしかし重要な問題である。これをしっかり理解すれば、力学の本質はかなり理解される事になると思う。単振り子の問題は、質量  $m$  の質点を伸び縮みしない軽くて長さ  $l$  の紐でつるし、このつるした点を座標の原点とする。この質点を静かに垂らした方向を  $y$ -軸とする。従って、 $y$ -軸の向きに関しては、下向きを正の方向とする。この質点を静かに  $x$ -軸方向にずらし、単振り子の振動を開始する。この時、質点の座標を  $(x, y)$  とし、質点が  $y$ -軸となす角度を  $\theta$  と定義する。これですべての準備が整った事になる。この時、質点の座標  $(x, y)$  は、 $x = l \sin \theta$ ,  $y = l \cos \theta$  と書くことが出来る。この時、これらの時間微分は  $\dot{x} = l\dot{\theta} \cos \theta$ ,  $\dot{y} = -l\dot{\theta} \sin \theta$  となる。従って、この質点の運動エネルギー  $T$  は

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2$$

である事が容易に確かめられる。一方、この質点にかかるポテンシャル  $V$  は  $V = -mgy = -mgl \cos \theta$  と書くことが出来る。ここで、マイナスの符号は  $y$ -軸の方向を下向きに取った事から当然である。この時、Lagrangian は  $L = T - V$  と書けるので

$$L = T - V = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + mgl \cos \theta$$

となる。Lagrange 方程式は一般座標として  $\theta$  を取れば良いので

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = ml^2\ddot{\theta} + mgl \sin \theta = 0$$

となる。これが単振り子に対する運動方程式である。微小振動の場合、 $\theta \ll 1$  とするので、運動方程式は  $\ddot{\theta} + \omega^2\theta = 0$  となる。但し、ここで  $\omega$  を  $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$  と導入した。この微分方程式はバネの問題と全く同じなのですぐに解く事が出来る。そして、この運動の周期  $T$  は  $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$  で与えられる事がわかるのである。

### A.7.2 スケール変換

このスケール変換の問題は、演習問題としては難し過ぎると思われる。しかし、内容が面白いし、計算は簡単なのでここで取り上げよう。今、以下の様な Lagrangian を考えよう。

$$L = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{r}}^2 - Kr^n$$

ここで、 $K$  は定数であり、また  $n$  は整数である。例えばクーロン力の場合は  $n = -1$  であり、調和振動子ならば  $n = 2$  である。ここで次のような変数変換を行う。

$$t = \alpha t', \quad \mathbf{r} = \beta \mathbf{r}'$$

この時、Lagrangian は

$$L = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{r}}^2 \frac{\beta^2}{\alpha^2} - K(r')^n \beta^n$$

ここで、 $\alpha^2 = \beta^{2-n}$  であると仮定しよう。この時、Lagrangian は

$$L = \beta^n \left( \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{r}}'^2 - K(r')^n \right)$$

となり、元の Lagrangian に定数倍しただけのものになる。この場合、明らかに運動方程式は変わらないので、

$$\alpha = \beta^{(1-\frac{n}{2})}$$

が特別な意味を持つ事になる。すなわち、この式が成り立つようなポテンシャルの場合は上式の関係式がある程度、力学を知っている事に対応している。さらに、 $\alpha$  と  $\beta$  は時間と空間のスケールを表しているので、これを典型的な定数で代表させるとこのポテンシャルが持っている力学の一部がわかる場合がある。

重力の場合 ( $n = -1$ )

この場合、 $\alpha \sim T$  と  $\beta \sim a$  とすると、 $T^2 \propto a^3$  と書ける。これは Kepler の第 3 法則そのものである。すなわち、太陽の周りを回っている地球の楕円軌道の性質として、楕円の長半径  $a$  の 2 乗はその周期  $T$  の 3 乗に比例すると言うものであった。

単振り子の場合 ( $n = 1$ )

この場合、 $\alpha \sim T$  と  $\beta \sim \ell$  とすると、 $T \sim \sqrt{\ell}$  と書ける。これは単振り子の周期が  $T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$  であるので、確かに一致している。

バネの場合 ( $n = 2$ )

この場合、 $\alpha \sim T$  と  $\beta \sim a$  とすると、 $T \sim a^0$  と書ける。これはバネの周期が  $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$  であるので、周期  $T$  は長さの次元には依ってなく確かに一致している。

### A.7.3 Kepler 問題 (軌道は楕円)

地球が太陽の周りを回転しているのであるが、その軌道は楕円である。以下にその楕円軌道を導出しよう。Kepler 問題のところで解説したように、保存量としてエネルギー  $E$  と角運動量  $\ell$  がある。今の場合、変数  $(r, \varphi)$  が時間の関数となっている。これをもう一度書くと角運動量は  $\ell = mr^2\dot{\varphi}$  でエネルギーは

$$E = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + \frac{\ell^2}{m^2r^2}\right) - \frac{GMm}{r}$$

と表されている。ここで  $\dot{r} = \dots$  と  $\dot{\varphi} = \dots$  の形に書き直し、さらに  $\frac{dr}{d\varphi} = \frac{\dot{r}}{\dot{\varphi}}$  である事を用いて、

$$\frac{dr}{d\varphi} = \frac{r^2}{\ell} \sqrt{2m\left(E - \frac{\alpha}{r} - \frac{\ell^2}{2mr^2}\right)}$$

と書き直す事ができる。但し、 $\alpha = GMm$  を導入した。さらにここで積分を簡単に解ける形にするために  $r = \frac{1}{s}$  の変数変換をする。そうすると上式は

$$-d\varphi = \frac{\ell ds}{\sqrt{2m\left(E - \alpha s - \frac{\ell^2 s^2}{2m}\right)}} = \frac{ds}{\sqrt{\left(\frac{2mE}{\ell^2} - \frac{2m\alpha}{\ell^2}s - s^2\right)}}$$

ここでルートの中は  $s$  の 2 次関数だから、必ず因数分解した形に書き直す事が出来る。従って、上式は

$$-d\varphi = \frac{ds}{\sqrt{(s - s_1)(s_2 - s)}}$$

と書かれ、 $s_1$  と  $s_2$  はルートの中をゼロとした時の根であり、

$$s_1 = \frac{m\alpha}{\ell^2} - \sqrt{\left(\frac{m\alpha}{\ell^2}\right)^2 + \frac{2mE}{\ell^2}}$$

$$s_2 = \frac{m\alpha}{\ell^2} + \sqrt{\left(\frac{m\alpha}{\ell^2}\right)^2 + \frac{2mE}{\ell^2}}$$

で与えられる。この積分は

$$s = s_1 + (s_2 - s_1) \sin^2 \theta$$

と置き換えると直ちに出来てしまい、答えは

$$\varphi_0 - \varphi = 2\theta$$

である。 $\theta$  を  $s$  に戻し、さらに  $s$  を  $r$  に戻して、後は細かい係数を入れてやると

$$r = \frac{A}{1 + \varepsilon \cos \varphi}$$

と書き直すことが出来る。但し、積分定数  $\varphi_0$  をここでは  $\varphi_0 = \pi$  と取っている。また  $A$  と  $\varepsilon$  は

$$A = \frac{\ell^2}{m\alpha}, \quad \varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2E\ell^2}{m\alpha^2}}$$

と与えられている。この事より、 $E$  が負であれば  $\varepsilon < 1$  となるので、確かに軌道が楕円である事がわかる。(Kepler の第 1 法則)

### 面積速度一定

Kepler 問題には面積速度一定の法則がある。これは角運動量保存則そのものである。それは簡単で、楕円における微小面積は  $\Delta S = \frac{1}{2}r^2\Delta\varphi$  と書けるので、面積速度は  $\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2}r^2\dot{\varphi}$  となるのである。ところが、 $\ell = mr^2\dot{\varphi}$  であるから、

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\ell}{2m}$$

となり、面積速度一定が導かれるのである。(Kepler の第 2 法則)

周期の2乗が長半径の3乗に比例

Kepler 問題には周期の2乗が長半径の3乗に比例するという法則がある。これも楕円の式が導かれた事から簡単にわかる事である。それは楕円の長半径  $a$  と短半径  $b$  は平面幾何の問題を解いて

$$a = \frac{A}{1 - \varepsilon^2}, \quad b = \frac{A}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}}$$

で与えられる事がわかり、また楕円の面積  $S$  は  $S = \pi ab$  である。一方、面積速度の式を全体で一周するとこれが周期  $T$  に対応するので  $S = \frac{\ell}{2m}T$  が求められる。従って、

$$S = \pi ab = \frac{\pi A^2}{(1 - \varepsilon^2)^{\frac{3}{2}}} = \pi \sqrt{A} a^{\frac{3}{2}} = \frac{\ell}{2m}T$$

となり、 $T^2 \propto a^3$  となっている。(Kepler の第3法則)

この式は積分を直接行っても当然求められる。それは  $\dot{\varphi} = \frac{\ell}{mr^2}$  を周期  $T$  に渡って積分すれば得られる。

$$\frac{\ell}{m} \int_0^T dt = \int_0^{2\pi} r^2 d\varphi = A^2 \int_0^{2\pi} \frac{1}{(1 + \varepsilon \cos \varphi)^2} d\varphi$$

この積分は積分公式を参照するか、または  $\varepsilon$  で展開する事により直ちに計算されて

$$\frac{\ell}{m}T = \frac{2\pi A^2}{(1 - \varepsilon^2)^{\frac{3}{2}}}$$

となり、幾何学的に求めた結果と一致している。



## 付録B 電磁気学

電磁気学は電場  $E$  と磁場  $B$  に対する Maxwell 方程式が基礎方程式であり、これは実験から求められたものである。その意味では、Maxwell 方程式が何か別のより基本的な方程式から導かれると言う事はない。この点は Newton 方程式と異なる。Newton 方程式もある意味では実験を記述するために作られたものであるが、しかし原子中の電子の運動は全く記述できなく、さらには運動が相対論的になると正しくはないので、その意味では基本方程式とは言えない。一方、Maxwell 方程式はどの段階においても常に正しい方程式である事がわかっている。

ここで電磁気学の難しさと関係している事でもあるが、言葉を厳格に使うとすると、 $B$  は磁束密度と呼ばれている量である。これは物質中に磁気能率の集団があると磁場が影響して少し変わってしまうからである。しかし、通常の議論では磁場と磁束密度を混乱して使用しても物理に影響はないので、 $B$  をそのまま磁場として使っていく。

この付録の最後に電流についてお話ししようと思う。これまで、古典力学の方程式で電流と抵抗を理解しようとした教科書が主流であると思うが、あの描像は若い人々をひどく混乱させるものであり、物理的に正しいものではない。伝導電子のエネルギーは非常に小さく、従って完全に量子力学的である。すなわち、電流とは何かといえば、電子が電位差を感じた瞬間に近隣の原子に飛び移る事によって生じる情報の流れである。これはおよそ古典力学的な描像とは相容れないものであり、抵抗を Newton 力学での摩擦として理解する事は、やはり避けるべきである。また、量子力学において状態の平均を取ると確かにそれは古典力学の方程式になるのであるが、電流を考える場合確かに平均を取る必要があるが、しかしこの平均は統計的な平均であり、量子力学的な期待値としての平均ではない事に注意する必要がある。

## B.1 Maxwell 方程式

Maxwell 方程式は次の 4 個の方程式から成り立っている。

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{\rho}{\varepsilon_0}, & \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, & \nabla \times \mathbf{B} &= \mu_0 \mathbf{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\end{aligned}$$

ここで  $\rho$  と  $\mathbf{j}$  は電荷密度と電流密度を表し、これは外から与えるべき物理量である。すなわち、Maxwell 方程式は電荷密度  $\rho$  と電流密度  $\mathbf{j}$  が与えられた時に、電場と磁場がどのように決定されるのかを示す方程式である。この電場  $\mathbf{E}$  と磁場  $\mathbf{B}$  が場であるという意味はこれが時空点の関数になっていると言う事である。すなわち、 $\mathbf{E} = \mathbf{E}(t, \mathbf{r})$ ,  $\mathbf{B} = \mathbf{B}(t, \mathbf{r})$  となっているのである。一方、 $\rho$  と  $\mathbf{j}$  は電磁場とは無関係であり、それらは物質が作っている。今の場合、基本的には電子かイオンで作られていると考えて良い。ここでそれぞれの方程式の物理的な意味を解説しておこう。

### B.1.1 Gauss の法則

最初の方程式  $\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$  は Gauss の法則と呼ばれていて、静的な電磁気学の基本方程式である。例えば磁場が存在しない場合、良くこの方程式を使って問題を解く事が大学での電磁気学演習問題に出題されている。しかしこの時、実は一つ重要な事がある。この Gauss の法則だけでは、この方程式を解く事は出来ないのである。これは何故かと言えば、方程式は 1 個しかないのに、未知関数である電場は 3 個の自由度を持っているからである。すなわち、 $\{E_x, E_y, E_z\}$  である。しかし、この事で問題が解けなくなったりする事を心配する必要は無い。次の方程式 (Faraday の法則) において磁場が無いと  $\nabla \times \mathbf{E} = 0$  となっていて、これは 2 個の方程式を含んでいるから、確かに未知変数と方程式の数は一致していて、正しい解が求められるのである。

#### Poisson 方程式

静電場の場合、電位  $\phi$  を  $\mathbf{E} = -\nabla\phi$  と導入する事が良く行われ、この時 Gauss の法則から得られる方程式が Poisson 方程式

$$\nabla^2 \phi = -\frac{\rho(\mathbf{r})}{\varepsilon_0}$$

と呼ばれている。点電荷  $q$  が点  $\mathbf{a}$  にある場合、電荷密度は  $\rho(\mathbf{r}) = q\delta(\mathbf{r} - \mathbf{a})$  となるので、これは直ちに解けて、任意の点  $\mathbf{r}$  における電位  $\phi(\mathbf{r})$  は

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{|\mathbf{r} - \mathbf{a}|}$$

と求められる。

### Gauss の法則の積分形

電磁気学の演習問題では良く Gauss の法則の積分形というのが出てくる。それは

$$\int_S E_n dS = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho(\mathbf{r}) d^3r$$

と書かれ、ここで左辺の積分は今「自分が考えている体積  $V$ 」を囲む表面積  $S$  上での積分を意味し、右辺の積分は体積  $V$  での積分を意味している。式が 1 個なのに何故、電場が求められるのであろうか？答えは簡単で、この式が使えるのは電荷分布が球対称性とか無限平面であるとかの特別な対称性がある場合に限り、その体積の表面での電場が求められると言っているのである。すなわち、電荷密度が例えば球対称を持っていればこの場合、未知変数である電場は 1 個の成分  $E_r$  しか持っていない。このために、1 個の方程式 (Gauss の法則の積分形) から電場が決まってしまうのである。

### B.1.2 単極子が存在しない

次の方程式  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$  は電荷に対応する「磁荷」(単極子, モノポール) なるものが存在しないと言う事を示している。これはかなり重要な事を意味しており、もし「磁荷」なるものが存在したとするとこの部分の方程式が時間反転不変性を破ってしまう事になっていて、これは大変な問題を引き起こす事になりかねなかったのである。従って、Dirac のモノポールと言われている単極子が存在しないと言う事は電磁気学の基本方程式が時間反転不変性を破らない方程式である事から、当然の事なのである。恐らくは、Dirac はこのモノポールの存在が方程式の重要な対称性を破ってしまうと言う事を理解はしていなかったものと推測される。

### B.1.3 ファラデーの法則

3番目の方程式  $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$  はファラデーの法則と呼ばれている式で、これは磁場が時間変化すると起電力が生じると言う良く知られている現象を記述する方程式である。実際、モーターによる起電力がどの様に生じるのかと言う事は、すでに高校における物理学の重要なテーマにもなっている。理論的には、後で見ると、ベクトルポテンシャルを導入してその時の電場と磁場をベクトルポテンシャルで書き表すのであるが、この時ファラデーの法則はゲージ不変性を考える上で非常に重要な役割をする方程式になっている。

### B.1.4 アンペールの法則

最後の式  $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$  はアンペールの法則である。しかし、アンペールの法則は右辺の第2項である  $\frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$  が存在しない場合であった。ところがこの最後の項が無いと、連続方程式が満たされなくなってしまうのである。連続方程式とは

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0$$

の事であり、これが成り立たないと物質が何処かに消えてしまう事になり、考えている理論模型が正しい理論では無くなってしまいう事を意味している。この連続方程式が成り立つようにアンペールの法則を書き直したのが Maxwell である。従って、最後の式の第2項は非常に重要な項であり、この項をアンペールの法則に取り入れた事は、物理学においては最も重要な発見の一つである。

アンペールの法則  $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}$  自体は静磁場の演習問題でよく出てくる基本方程式である。この場合の物理的な意味は明白であり、電流密度  $\mathbf{j}$  が与えられた時、それに対応してどのような磁場が作られるかという事である。ここで、静電場と同じ様に、アンペールの法則の積分系

$$\int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 J$$

も良く使われる。この時、電流  $J$  は  $J = \int \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S}$  で与えられている。このアンペールの法則の積分系により磁場が求められるのは、電流が特別な対称性を持つ場合に限ると言う事は静電場の場合と同じである。

以上、これら4つの方程式を解けば、電磁気における自然現象は理解できる事になっている。具体的な解き方は、やはり演習書をしっかり解いてゆく事以外に学ぶ方法は無い。しかし、ほとんどの場合は、微分方程式を解く事になるので、それはしっかりと覚えて行く事が、最も大切である。逆に言えば、微分方程式を解くのが非常に早くて正確でも物理を理解する事にはならない場合が多いので、じっくり物理を考える事の方が重要である。

### B.1.5 電気双極子と磁気双極子

基本的な法則に加えて、現実の世界に極めて重要な役割を担う物理量が電気双極子と磁気双極子モーメントである。これを「モーメント」と呼んでいるのはそのオペレータがベクトルになっている事に起因している。オペレータを2重極、4重極そして8重極と展開する事により、電磁気的な相互作用を分類しているからである。しかし簡略してモーメントを省略する事もしばしばである。

#### 電気双極子

電気双極子モーメントは、正負の電荷が近接して存在する場合に作られる電場を遠くで観測した場合、あたかも1個の「電気双極子」が作る場として理解した方がわかり易い事によっている。負の電荷と正の電荷の距離を  $d$  とし、それに電荷  $e$  を掛けた量  $p = ed$  を電気双極子モーメントという。この時、この電気双極子モーメントが作る電位  $\phi_p(\mathbf{r})$  は

$$\phi_p(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^3}$$

となる。電場は勿論  $\mathbf{E} = -\nabla\phi_p$  により求められる。

#### 磁気双極子

磁気双極子モーメントは円電流に対応している。原点を中心とした半径  $a$  の円周上を電流  $I$  が流れている時、その電流が作るベクトルポテンシャル  $\mathbf{A}$  は

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{d\mathbf{s}}{|\mathbf{s} - \mathbf{r}|} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{1}{r^3} \int (\mathbf{r} \cdot \mathbf{s}) d\mathbf{s} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{r}}{r^3}$$

と求められる。ここで  $m$  は磁気モーメントであり、今の場合

$$\mathbf{m} = \pi a^2 I \mathbf{e}_z$$

と書く事ができるのである。この時、磁場  $B$  は

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{A} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \times (\mathbf{m} \times \nabla) \frac{1}{r} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \left[ \frac{\mathbf{m}}{r^3} - \frac{3(\mathbf{r} \cdot \mathbf{m})\mathbf{r}}{r^5} \right]$$

となる。ここで磁気ポテンシャルを  $\phi_m$  として

$$\phi_m(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \cdot \mathbf{r}}{r^3}$$

を導入すると、上記の磁場は

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = -\nabla \phi_m(\mathbf{r})$$

と書ける事も覚えておくと便利である。しかし、 $\phi_m(\mathbf{r})$  の物理的な意味は特にあるわけではない。

## B.2 ゲージ場

Maxwell 方程式は電場と磁場に対する方程式になっているが、この式を別の変数で書いた方が便利である場合がある。特に、 $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$  であるから、ここでベクトルポテンシャル  $\mathbf{A}$  を導入して磁場  $\mathbf{B}$  を  $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$  と置くと、この時は  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$  は常に成り立っている事がわかる。さらにファラデーの法則から電場  $\mathbf{E}$  も  $\mathbf{E} = -\nabla \phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$  と書ける事が容易に確かめられる。ここで  $\phi$  は新しく導入されたポテンシャルで静電ポテンシャルと言う事がある。場の理論ではベクトルポテンシャル  $\mathbf{A}$  と静電ポテンシャル  $\phi$  をまとめて4元ベクトル  $A^\mu = (\phi, \mathbf{A})$  と書き、ゲージ場とも呼ばれている。これら  $\mathbf{A}$  と  $\phi$  がゲージ場と呼ばれている理由は次のゲージ変換と言われる変換に対して、電場  $\mathbf{E}$  と磁場  $\mathbf{B}$  が不変であるからである。ゲージ変換とは

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla \chi, \quad \phi' = \phi - \frac{\partial \chi}{\partial t}$$

であり、ここで  $\chi$  は  $\chi = \chi(t, \mathbf{r})$  であるような時空点に依存している任意の関数である。実際、 $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$  と  $\mathbf{E} = -\nabla \phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$  の式に対してゲージ変換

を行うと  $B = \nabla \times A'$  と  $E = -\nabla\phi' - \frac{\partial A'}{\partial t}$  となり、ゲージ変換をしても、電場と磁場は  $\chi$  には依らない事がわかるのである。このゲージ変換は単なる数学であるが、実は物理学に大変重要な結果をもたらしてくれるのである。すなわちこのゲージ変換は電子と電磁場との相互作用を決めようとする時の指導原理として使う事が出来るのである。

### B.2.1 電子と電磁場の相互作用

Maxwell 方程式を基本法則と考えた時、電子は電磁場とどのような力をおよぼし合うのであろうか？これは実はゲージ不変性から決定されるのである。電磁気学の Lagrangian を書こうとするとどうしても Lagrangian 密度を考える必要がある。それは電磁場が場の理論そのものだからである。電磁場の Lagrangian 密度の方は付録 E の「場の理論」の方に任せて、ここでは古典力学と電磁場の相互作用を考えて行こう。古典力学では自由電子の Lagrangian は  $L = \frac{1}{2}m\dot{r}^2$  である。これが電磁場と相互作用する時、Lagrangian がゲージ変換に対して不変であると仮定する。この時、Lagrangian は次の形しかない事が示される。

$$L = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + e(\dot{r} \cdot \mathbf{A} - \phi)$$

この Lagrangian はゲージ変換  $A' = A + \nabla\chi$ ,  $\phi' = \phi - \frac{\partial\chi}{\partial t}$  に対して

$$L = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + e(\dot{r} \cdot A' - \phi') - e\frac{d\chi}{dt}$$

となる。ところが、Lagrangian に全微分項  $e\frac{d\chi}{dt}$  を加えても Lagrange 方程式は不変である。従って、この Lagrangian はゲージ変換に対して不変であると言う事がわかるのである。

この Lagrangian により、電子と電磁場の相互作用は古典力学の範囲で決まった事になる。実際、この Lagrangian から運動方程式を求めると

$$m\ddot{r} = e\mathbf{E} + e\dot{r} \times \mathbf{B}$$

となり、良く知られているクーロン力とローレンツ力が導出されるのである。すなわち、電子と電磁場の相互作用の形は、その Lagrangian がゲージ変換に対して不変であるという要請をすると、結合定数  $e$  を除いて一意的に決まっ

てしまうのである。ゲージ変換自体は、電場と磁場をベクトルポテンシャルで書いて、Maxwell 方程式を書き直したら、そのベクトルポテンシャルが持っていた単に数学的な対称性の事であった。しかし、これを拡張して電子と電磁場の Lagrangian 全体がゲージ変換に対して不変であるという要請は物理的なものである。そして、実際にそれを要請して作った Lagrangian から運動方程式を求めたら、実験で必要とされているクーロン力とローレンツ力が導出されたのである。今後、場の理論に移行して行く時にもこのゲージ原理を一つの指導原理にしたいと考えるのは、極めて自然なものであると思われるし、実際、そのようにゲージ不変性を考慮した場の理論が量子電磁力学であり、実験を良く記述している。この量子電磁力学は、電磁場の方は基本的にそのままであり、ただ場の量子化という手立てを施す必要があるが、電子の方は Dirac 場を持つてくる必要がある。この辺の所は、後で付録 E の「場の理論」で解説して行きたい。

## B.3 電場と磁場のエネルギー

電場  $E$  がある時、そのエネルギーは

$$U = \frac{1}{2} \epsilon_0 \int |\mathbf{E}|^2 d^3r$$

で与えられる。以下に、この式がどのようにして得られるのかを解説したい。その導出は簡単であるが、しかしこの結果をしっかりと覚えておく事の方が実は重要である。

### B.3.1 クーロン力

点  $r_1$  に電荷  $q_1$  があり、点  $r_2$  に  $q_2$  がある時、その間にはクーロン力が働き、そのポテンシャルエネルギーは

$$U_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}$$

である。また、この電荷が  $N$  個ある時、ポテンシャルエネルギー  $U$  は

$$U = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1, j \neq i}^N \frac{q_i q_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|}$$

である。ここで  $\frac{1}{2}$  が現われているのは、 $i$  と  $j$  の和がそれぞれ  $N$  まで走ると 2 回数えてしまうので、半分にしたのである。一方、 $i$ -番目の電荷が感じる電位を  $\phi_i$  とすると、これは  $i$ -番目の電荷以外の全ての電荷が作るものに対応している。そしてそれは

$$\phi_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{j=1, j \neq i}^N \frac{q_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|}$$

と書ける。従って、ポテンシャルエネルギー  $U$  は

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i \phi_i$$

と書く事ができたのである。

### B.3.2 電場のエネルギー

これらの式の連続極限をとると

$$\sum_i \rightarrow \int d^3r, \quad \phi_i \rightarrow \phi(\mathbf{r}), \quad q_i \rightarrow \rho(\mathbf{r})$$

となる。従って、

$$U = \frac{1}{2} \int \rho(\mathbf{r}) \phi(\mathbf{r}) d^3r$$

となる。ここで、Poisson 方程式  $\nabla^2 \phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$  を使うと

$$U = -\frac{1}{2} \epsilon_0 \int (\nabla^2 \phi(\mathbf{r})) \phi(\mathbf{r}) d^3r = \frac{1}{2} \epsilon_0 \int \nabla \phi(\mathbf{r}) \cdot \nabla \phi(\mathbf{r}) d^3r$$

ここで、部分積分をしたときに、無限遠方では  $\phi$  はゼロであるとした。よって、

$$U = \frac{1}{2} \epsilon_0 \int |\mathbf{E}|^2 d^3r$$

となり、確かに電場のエネルギーが求められたのである。

### B.3.3 磁場のエネルギー

磁場のエネルギーも元々電子が運動する事により磁場が作られ、その電子と磁場との相互作用が磁場のエネルギーに対応している。このエネルギー密度は

$e\mathbf{j} \cdot \mathbf{A}$ であった。従って、これを全空間で積分すれば磁場のエネルギーが求められる。すなわち、

$$U = \frac{1}{2}e \int \mathbf{j} \cdot \mathbf{A} d^3r$$

であり、ここで  $\frac{1}{2}$  が現われているのは、全て積分すると電子自身が作った磁場とその電子との相互作用が入ってしまうからである。ここでアンペールの法則  $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}$  を用いると、磁場のエネルギーは

$$U = \frac{1}{2\mu_0} \int \nabla \times \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} d^3r$$

となる。ここで一度部分積分をして、無限遠方でゼロとすると

$$U = \frac{1}{2\mu_0} \int \mathbf{B} \cdot \nabla \times \mathbf{A} d^3r = \frac{1}{2\mu_0} \int |\mathbf{B}|^2 d^3r$$

となる。

## B.4 物質中の電場と磁場

電磁気学において、導体や誘電体があるとそれらが電場に与える影響を正しく扱う事は、基本的にかなり難しいものである。導体の近くに電荷を置くとそれが作る電場は導体中に誘起される電荷により微妙に変化するし、また誘電体があるところに電場をかけると誘電体中に電気双極子が作られ、その影響で微妙に電場が変わってくるのである。以下において、なるべく直感的にその物理が理解できる様に解説して行きたい。

### B.4.1 鏡像法

電磁気学の問題を解こうとする時に、境界値問題になると一気に難しくなる事が知られている。例えば、無限に広い導体を考え、その導体平面  $(x, y)$  上から測った  $z$ -軸上の  $z = a$  の点  $\mathbf{a}$  に電荷  $q$  を置いた時、その電荷が作る電位  $\phi$  を求めよと言う問題を考える。この時、考えている空間が全空間の時は、点  $\mathbf{r}$  での電位  $\phi(\mathbf{r})$  は直ちに求められて  $\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{|\mathbf{r} - \mathbf{a}|}$  となる事は Gauss の法則からすぐに計算できる。しかしながら、ここで  $(x, y)$  平面上での電位を  $\phi(x, y, 0) = 0$  と置くと、問題は一気に難しくなるのである。しかし、この時問題を解く手法は良くわかっていて、Poisson 方程式  $\nabla^2 \phi = -\frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon_0}$

に対して、右辺がゼロの場合の Laplace 方程式  $\nabla^2\phi = 0$  の解を Poisson 方程式の解に足せば良いのである。電位が  $\phi(x, y, 0) = 0$  を満たすためには

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q}{|\mathbf{r} - \mathbf{a}|} - \frac{q}{|\mathbf{r} + \mathbf{a}|} \right)$$

とすれば良く、実際この  $\phi(\mathbf{r})$  は Poisson 方程式を満たしている。この式の第 2 項は確かに Laplace 方程式の解になっている。従って、これは何を意味しているかと言えば、境界条件を満たすためには、 $(-q)$  の電荷を点  $(-\mathbf{a})$  に置いた時に作られる電位を足せばよいと言う事がわかり、これを鏡像法と呼んでいるのである。

### B.4.2 誘電体

誘電体とは何かという事が良く学生から質問されるし、ある意味では難しい問題である。誘電体は本質的に物質の事をしっかり理解しなければならないので、この点がどうしても不明瞭になる。ここでは、なるべく明確な描像を作るべく解説して行きたい。誘電体は基本的には、電気双極子の集まりであると考えて良い。物質に電場をかけたとすると、この時束縛の弱い電子は原子から少しずれると考えられる。そうするとこれは電気双極子を作る事になっている。この電気双極子を  $\mathbf{p}$  としてこの電気双極子の分布関数を  $n(\mathbf{r})$  とする。ここで、点  $\mathbf{R}$  にある電気双極子  $\mathbf{p}$  が作る電位  $\phi_p(\mathbf{r})$  は良く知られているように

$$\phi_p(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{R})}{|\mathbf{r} - \mathbf{R}|^3}$$

で与えられる。従って、物質中では電気双極子  $\mathbf{p}$  が分布関数  $n(\mathbf{r})$  で分布しているので、この時の電位  $\phi_p(\mathbf{r})$  は

$$\phi_p(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int n(\mathbf{R}) \frac{\mathbf{p} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{R})}{|\mathbf{r} - \mathbf{R}|^3} d^3R$$

で与えられる。ここで数学の恒等式

$$\frac{\mathbf{r} - \mathbf{R}}{|\mathbf{r} - \mathbf{R}|^3} = \nabla_{\mathbf{R}} \left( \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{R}|} \right)$$

を用いて上式を書き直すと

$$\phi_p(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\nabla_{\mathbf{R}} \{n(\mathbf{R})\mathbf{p}\}}{|\mathbf{r} - \mathbf{R}|} d^3R$$

となる。ただし、ここで境界上での面積積分はゼロであると仮定している。さらに、偏極ベクトル  $P$  を  $P = n(\mathbf{R})\mathbf{p}$  と定義し、また分極電荷密度  $\rho_p$  を

$$\rho_p(\mathbf{R}) = -\nabla_{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{P}$$

と定義すると

$$\phi_p(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho_p(\mathbf{R})}{|\mathbf{r} - \mathbf{R}|} d^3R$$

となる。これは分極電荷密度  $\rho_p$  が作る電位そのものである。この事は Gauss の法則が

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho + \rho_p}{\epsilon_0}$$

とある物質中では変更を受ける事を示している。これは勿論、物質中に電気双極子が誘起されたからである。一般的に良く書かれている表現は、物質中では Gauss の法則が修正されて、電束密度で書き直した式である。これは、簡単で上式において偏極ベクトル  $P$  を用いて書き直すと

$$\epsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E} + \nabla \cdot \mathbf{P} = \rho$$

であるが、この偏極ベクトル  $P$  は電場  $E$  に比例する 경우가多く、 $P = \epsilon_0 \chi E$  とおく事が出来る。ここで電束密度  $D$  を  $D = \epsilon_0(1 + \chi)E = \epsilon E$  とすれば、Gauss の法則は確かに変更されて

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$$

という簡単な式に書き換えられた事になる。ここで  $\epsilon$  を物質の誘電率と言い、これは定数であると仮定されている。

### B.4.3 磁性体

物質中にひよろひよろ電子が存在するとき、外部磁場をかけるとそれらの電子は Larmor 運動をすることになる。この場合、円電流が発生した事に対応し、従って、これは磁気双極子に対応する。すなわち、物質中に沢山の磁気双極子が出来た事になる。原点に磁気双極子  $m$  が作るベクトルポテンシャルは

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{r}}{r^3}$$

であった。従って、この磁気双極子  $m$  が分布関数  $n(\mathbf{r})$  で物質中に存在している時、ベクトルポテンシャルは

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{n(\mathbf{r}') \mathbf{m} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d^3r'$$

となる。ここで磁化  $\mathbf{M}(\mathbf{r}') = n(\mathbf{r}') \mathbf{m}$  と置き、式を変形すると

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \mathbf{M}(\mathbf{r}') \times \nabla' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3r' = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\nabla' \times \mathbf{M}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3r'$$

となる。この式の変形で部分積分を行い、十分遠方では場がゼロである事を使っている。ここで  $\mathbf{i}_M(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{M}(\mathbf{r})$  と定義するとベクトルポテンシャルは

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{i}_M(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3r'$$

となり、電流がその分だけ変更された事になっている。この時、Ampere の法則は

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{i} + \mathbf{i}_M)$$

と変更されている。  $\mathbf{i}_M(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{M}(\mathbf{r})$  を戻すと

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{i} + \nabla \times \mathbf{M}(\mathbf{r}))$$

である事から、

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} - \mathbf{M}$$

と定義すれば、

$$\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M}) = \mu \mathbf{H}, \quad \mu = \mu_0(1 + \chi_m)$$

と書く事が出来、  $\chi_m$  を磁気感受率という。この磁気感受率の性質をまとめると

$$\begin{aligned} \chi_m > 0 \text{ の時: } & \quad \text{常磁性体} \\ \chi_m < 0 \text{ の時: } & \quad \text{反磁性体} \\ \mathbf{B} \text{ と } \mathbf{M} \text{ が非線形の時: } & \quad \text{強磁性体} \end{aligned}$$

となる。

## B.5 電磁気学の難しさ

電磁気学は Maxwell 方程式を解けば電場と磁場は求められるのであるが、実際の問題はかなり複雑で難しい物となる。その一つの原因としては、例えば電流を考える時、それは電子の流れではあるが物質中を流れるので実際に真空中を流れる場合とは、本質的に異なっている事によっている。さらに Maxwell 方程式に加えて、良く議論されるものとして、オームの法則がある。この法則は  $j = \kappa E$  (但し、 $\kappa$  は定数) と近似的に表せるが、この方程式自体が時間反転不変性を破っている式であり、経験的にある種の物質では良く成り立っていると言う事である。従って、オームの「法則」と言っているがこれは基本法則ではなく、むしろ「経験則」と呼ばれるべきものである。とはいっても、この経験則は物理において非常に重要な役割を果たしている事は間違いない。オームの法則があるから、実際の現象の理解が簡単になっているし、大変役に立ってもいるのである。

しかしながら、電磁気学の立場からすると、物事がかなり複雑になっている。それは物質は電磁気学の知識だけでは作れないし、その振る舞いは電磁気学だけでは理解できないからである。物質が無い場合の電磁気学は明解であり、単純である。これは光同士が相互作用しないからである。すなわち、物質がなければ、電磁気学は基本的に自由フォトンだけの世界となり、これは厳密に解かれているし、解もしっかりとわかっている。ところが、物質があると、それが電荷分布を惹き起こしたり、電流を生み出したり、さらには双極子モーメントの集団が物質の中に存在したりするのである。これらがあると、それに応じて電場や磁場が生成されるのであるが、その電磁場を求める事は現実問題として不可能な場合が多いのである。

## B.6 電流とは何か？

電流とは何か？という問題提起をしたら、そんな事わかり切っているのではないかと思われるかも知れない。しかし、普通の電磁気学の教科書に書いてある電流の記述は、およそ物理的に現実離れしている事がほとんどである。電流は電子の流れであると言う事は、勿論正しい事である。しかしながら、その電子の運動を古典力学で扱っている場合がほとんどであるが、これは正しい記述になっていない事は明らかである。伝導電子のエネルギーは極めて小さく、従ってこの電子は当然量子力学的に扱う必要がある。古典力学では全く誤った描像になるのであるが、抵抗値が理解できると思い込んでしまい、これが電流に対

する電磁気学の教科書の標準的な描像になっているようである。

### B.6.1 導体中

それでは、電流の正しい描像は何であろうか？それは「電流とは導体中の電子が一斉に近隣の原子にそれぞれ遷移する事から起こる現象」というものである。古典力学描像のようにある電子に注目してそれが抵抗を受けながら流れるわけではない。導体中の電子に電場が掛かった時、全ての電子に一斉に掛かり、遷移するのである。従って、電流の伝わる速さは電子が近隣の原子に遷移するのにかかる時間と関係している。すなわち、光速とほとんど同じである。

### B.6.2 電離した水溶液

電子が近隣の原子に移る事が電流であると言う事がわかると、ある種の電離した水溶液中では電流が流れるわけであるが、これは非常に理解しやすいのである。液体の場合、やはり電子が近隣のイオンに移る事が電流である。これも全体が一気に起こる現象なので、電流が流れる事が良く理解されるのである。

### B.6.3 マクロな物理量

量子力学において、その運動を電子の状態関数で平均(期待値をとる)すると、確かに古典力学の方程式になっている。しかし、伝導電子による物理量である電流においては、その場合の平均は多体問題による統計的平均である。この事により、電流がマクロな物理量として観測されるのである。この伝導電子による電流についてより深く理解しようとする事は非常に楽しい事に違いないが、しかしひどく難しい気がする。統計的な平均は常に「状態」による平均である。伝導電子がマクロスケールで存在していてその統計的平均は伝導電子と格子運動を含む全体の状態で平均して始めて観測量に結びつくのである。

しかしながら、ミクロの理論をあてはめて模型計算を行っても、それからどのようにしたらマクロの物理量がしっかり求められるのかに関する理論が抜けている。このミクロとマクロを接続する事は、今後の基本物理の最も重要な仕事になるものと思われる。

### B.6.4 電気抵抗

電流とは電子が隣の原子の一斉に飛び移る事であるという描像を解説したが、それでは電気抵抗とは何であろうか？恐らく、電気抵抗の最も重要な原因は電子と格子振動との相互作用であろうと思われる。電子が飛び移った瞬間、電子の運動エネルギーが原子の励起を起こすか、または格子振動のエネルギーに変換されるかのどちらかの現象が起こった時に「電気抵抗」としてマクロレベルで観測されるのであろう。しかし、この電流自体がミクロの理論からマクロな観測量に接続する手法が全く確立されていないため、電流がほとんどわかっていないと言う事になっているのである。

## B.7 モノポール、EDMと時間反転不変性

これまで見てきたように、Maxwell 方程式は時間反転に対して不変である。現在までの所、電磁場で時間反転不変性を破る力は見つかっていない。多くの実験家が時間反転不変性を破る力の発見に努力しているのは、それがたとえ微小でも新しい相互作用が存在する可能性を示す事になるからである。孤立系においてモノポールか電気双極子モーメント (EDM) の存在が確かめられれば、物理学にとって大変重要な意味を持つてくる事になる。

### B.7.1 モノポール

モノポールが自然界に存在したとすると  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$  は次のように修正される

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \rho_m$$

ここで  $\rho_m$  はモノポールの密度分布を表す。実はこの項が時間反転不変性を破るものになっているのであるが、そのチェックは簡単である。まず、 $\mathbf{E}$  と  $\mathbf{B}$  の場合、時間反転に対して

$$t \rightarrow -t \quad : \quad \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} \rightarrow -\mathbf{B}$$

である。これは Maxwell 方程式を見れば明らかである。従って、モノポールがあるとこの式は時間反転不変性を破るものになっているのである。現在まで、モノポールは見つかっていないが、実験家がそれを見つけようと努力する事の物理的な意味は十分あるのである。

### B.7.2 EDM

最近では、時間反転不変性を破る力の発見に関して言えば、むしろ孤立系の電気双極子モーメント (EDM) の実験的研究が盛んである。EDM があると Gauss の法則  $\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$  は

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} (\rho + \mathbf{d} \cdot \nabla \rho)$$

と修正される。ここで  $\mathbf{d}$  は孤立系の持っている EDM に対応している。この場合、 $\mathbf{d}$  はスピンの比例している

$$\mathbf{d} = g\boldsymbol{\sigma}$$

と書ける事が理論的にわかっている。このため、時間反転に対して

$$t \rightarrow -t \quad : \quad \mathbf{d} \rightarrow -\mathbf{d}$$

となるので、EDM があると時間反転不変性を破る事に対応している。

この EDM 測定に関しては、現在まで多くの実験が様々な孤立系に対してなされてきている。最も良く知られている実験は中性子の EDM 測定である。もし中性子の EDM が有限で見つければそれは時間反転不変性を破る力が存在している事を示している。現在までのところ、すべての実験結果は有限ではないという事である。最近の実験による中性子 EDM  $d_n$  は

$$d_n \simeq (1.9 \pm 5.4) \times 10^{-26} \text{ e} \cdot \text{cm}$$

となっていて、まだゼロと矛盾していない。この先、どの程度で EDM の有限値が見つかるのか、大変興味深い問題である。

### B.7.3 モノポールと EDM の Hamiltonian

上記の EDM オペレータは下記の Hamiltonian 密度

$$\mathcal{H}_{edm} = \frac{i}{2} d_n \bar{\psi} \sigma_{\mu\nu} \gamma_5 \psi F^{\mu\nu}$$

から得られる。これは、Lagrangian 密度のなかにこの項を入れて計算すれば Lagrange 方程式から

$$\partial_k F^{k0} = j^0 - \frac{i}{2} d_n \partial_k (\bar{\psi} \sigma^{k0} \gamma_5 \psi)$$

となる。ただし、 $j^0 = \rho$  は密度を表し、また  $F^{k0}$  は  $F^{k0} = \partial^k A^0 - \partial^0 A^k = E^k$  であり、電場に対応している。また、 $\frac{i}{2}\bar{\psi}\sigma^{\mu 0}\gamma_5\psi$  は  $\sigma\rho$  に対応しており、この事から上式は

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho + \mathbf{d} \cdot \nabla \rho$$

となることがわかる。但し、ここでは簡単のため  $\varepsilon_0 = 1$  の表示を取っている。この事から、EDM オペレータの場合は対応する Hamiltonian が存在し、それ故 EDM によるエネルギーのズレが観測できる事を意味している。

それに対して、モノポールの場合、対応する Hamiltonian は存在していない。これは運動方程式を変更しただけであり、その基本となる Maxwell 方程式である  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$  は、Lagrange 方程式から得られるわけではなく、ベクトルポテンシャルで書いた時には、自動的に満たすべき方程式になっているからである。その意味では、モノポールが存在した場合、何が物理的な観測量になるのか、今ひとつ明確にわかっているわけではなく、今後研究する必要があると考えられる。

## B.8 電荷とは何か？

電荷とは何かという設問は電磁気学を勉強しようとしている学生にはまだ無理であると思う。しかし電磁気学の問題で電荷が一様に分布している場合を解く問題がよく出されているし、やはりここでしっかり考えておく必要があると思われる。電荷  $e$  の実態は勿論電子かイオンでありそれ以外ない。それどころか、通常の意味での電荷を表す  $e$  は電氣的な力の強さを表しているのみであり、場の理論の言葉で言うとそれは結合定数を表している。それでは電荷とは何かと言え、それは粒子が持っている「量子数」とであると答えるのが最も妥当である。そうすると、この電荷という「量子数」とは何かという疑問が生じてくるのであるが、残念ながら、これに対して現在の理論物理では明確な解答を与える事が出来ない。例えば、 $W^-$  ボソンはマイナスの電荷を持っている素粒子であるが、しかしこの粒子は電氣的な力を及ぼす事はない。電荷という「量子数」をもう少し深いところでしっかり理解する事は今後の重要な課題であるし、大変面白い問題であると考えている。あるいは、何か重要なそして面白い物理がそこにあるような気がしている。

## B.9 電磁気学演習問題

Maxwell 方程式を理解するためには、やはり演習問題を解くのがベストであると考えられる。この場合、現実的ではない状態を仮定する事が多いが、理解を深めるためには仕方が無いものである。以下に議論する基本的な問題をきちんと理解すれば、電磁気学の本質は理解できるものと思う。

### B.9.1 (1) 球の表面に電荷 $Q$ がある時の電場

今、半径  $a$  の球の表面に電荷  $Q$  が一様に分布しているとしよう。この時、表面電荷密度を  $\sigma$  とする時、 $4\pi a^2 \sigma = Q$  である。まずは、この電荷分布が生み出す電位  $\phi$  を求めてゆこう。出発の方程式は Gauss の法則  $\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$  である。静電場の場合、 $\nabla \times \mathbf{E} = 0$  であるから、 $\mathbf{E} = -\nabla \phi$  と置く事ができる。従って、Gauss の法則は

$$\nabla^2 \phi(\mathbf{r}) = -\frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon_0}$$

と書けて、これは Poisson 方程式と呼ばれている。この方程式は

$$\nabla^2 \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = -4\pi \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$$

である事に注意すると簡単に解けて

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3r'$$

と求められる。この式の証明は簡単で、Poisson 方程式に入れてみれば直ちに示される。ここで、半径  $a$  の球の表面に電荷  $Q$  が一様に分布している場合の電荷密度は  $\rho(\mathbf{r}) = \sigma \delta(r - a)$  と書かれるので、これを上式に代入すると電位  $\phi$  が容易に求まる。すなわち

$$\phi(\mathbf{r}) = \begin{cases} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{a} & r < a \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r} & r > a \end{cases}$$

となる。この時、電場  $\mathbf{E}$  は  $\mathbf{E} = -\nabla \phi$  より直ちに求められて

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \begin{cases} 0 & r < a \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \mathbf{e}_r & r > a \end{cases}$$

と計算されるのである。実は、この電場の答えは球対称性があるために、Gaussの法則の積分系を使うとすぐに求まる。すなわち

$$\int_S E_n dS = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho(\mathbf{r}) d^3r$$

であるから、 $r < a$  の時は明らかにこの体積の中に電荷はないので  $E = 0$  である。一方、 $r > a$  の時は今半径  $r$  の球を自分で考えるとこの中にある電荷は全部で  $Q$  だから  $E_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2}$  と求められるのである。

### B.9.2 (2) Biot-Savart の法則

Biot-Savart の法則は、結構複雑で計算も一般に面倒くさいものである。しかし、物理は明瞭で電流が流れている時にどのような磁場が作られるかと言う、アンペールの法則を積分で表したものである。この Biot-Savart の法則自体の求め方を以下に記そう。まず、アンペールの法則  $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}$  において、 $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$  というベクトルポテンシャルで書き、さらにゲージ条件としてクーロンゲージ  $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$  を取ろう。この時、アンペールの法則は

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{j}$$

と書き直す事が出来る。ここでゲージ条件  $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$  を使っている。この式は直ちに解けてしまい、

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{R})}{|\mathbf{r} - \mathbf{R}|} d^3R$$

となる。従って、磁場  $\mathbf{B}$  は  $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$  だから

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{A} = \nabla \times \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{R})}{|\mathbf{r} - \mathbf{R}|} d^3R = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{J d\mathbf{R} \times (\mathbf{r} - \mathbf{R})}{|\mathbf{r} - \mathbf{R}|^3}$$

となる。ここで  $J d\mathbf{R} \equiv \int_S \mathbf{j}(\mathbf{R}) dS_R$  と定義している。この時の面積積分は電流の流れと直交する面での面積積分に対応している。そして、この式が Biot-Savart の法則と呼ばれるものである。また、 $d\mathbf{R}$  は線積分を表している。

### B.9.3 (3) 直線電流が作る磁場

静磁場の演習問題として、 $z$ -軸上に下から上に向かって電流  $J$  が流れている時、その電流が作る磁場はどうか? という問題がよく出題される。この問題

をまず Biot-Savart の法則を使って解いてみよう。ここで、観測する点は  $x-y$  平面上の点  $(x, y, 0)$  としよう。従って、この点を円筒座標で書くと  $\mathbf{r} = r\mathbf{e}_r$  となる。一方、線積分に現われる  $\mathbf{R}$  は  $\mathbf{R} = Z\mathbf{e}_z$  と書ける。これを Biot-Savart の法則の式に代入すると

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 J}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{r\mathbf{e}_\varphi dZ}{(r^2 + Z^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 J}{2\pi r} \mathbf{e}_\varphi$$

と求められ、よく知られている答えになるのである。上式を計算する時に積分公式を使っているが、数学の公式は何処に書いてあるかを知っていれば良い。

一方、この問題はアンペールの法則の積分形によっても解く事が出来る。それは、今の場合特別な対称性を持っているからである。アンペールの法則の積分形は

$$\int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 J$$

となっている。ここで円筒座標の対称性があることがわかるので、 $\mathbf{B} = B_\varphi \mathbf{e}_\varphi$  と書け、さらに  $d\mathbf{s} = r\mathbf{e}_\varphi d\varphi$  なので、

$$\int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = B_\varphi \int_0^{2\pi} r d\varphi = B_\varphi 2\pi r = \mu_0 J$$

よって磁場  $B_\varphi$  が

$$B_\varphi = \frac{\mu_0 J}{2\pi r}$$

となり、Biot-Savart の法則により求めたものと一致しているのである。



## 付録C 量子力学

Newton 力学は地球の運動を記述したり、バネの運動を記述することに関しては非常に大きな成功を収めた。これは紛れも無い事実である。しかしながら、Newton 力学は原子における電子を記述しようとするとは全く無力であった。電子のエネルギー準位を記述できる理論は量子力学である。特に、電子が束縛されるという状態自体は、力学と同じではあるが、しかし、その束縛状態のエネルギーは、飛び飛びの値を取っている。これは、力学ではどうしても理解できる事ではなく、量子化という事を考えざるを得ない。その量子力学の基本方程式は Schrödinger 方程式であるが、実は電磁気学の基本方程式である Maxwell 方程式は Schrödinger 方程式の方に近いのである。場の理論としては、電磁気学と量子力学はほとんど同じであると思ってよい。

基本的には、量子力学は原子における電子の力学を記述するものであると考えて良い。その場合、量子力学では電子の運動そのものにはそれほど興味が無い。ここで「運動」と言っているのは、力学における粒子の運動、すなわち粒子の座標の時間発展の意味である。その代わりに、量子力学では電子の状態を記述する事になり、そしてその状態を表す物理量が波動関数  $\Psi(t, r)$  である。量子力学では、水素原子において電子が陽子の周りをどの様に回転しているかと言う事には、興味が無いのである。というか、量子力学は「電子の状態」を記述する事が出来るため、もし、電子の運動に興味がある人に対しては、平均したら電子が何処にいるかを教える事が出来るのである。

### C.1 Schrödinger 方程式

電子の力学を記述できる方程式が Schrödinger 方程式である。基本的には、電子が陽子に束縛されている水素原子をしっかりと理解する事が量子力学の最も重要な目標であり、これが達成されれば、後は細かい事であり、それらは頑張れば何時でも理解できるものと思う。

まずは、もう少し一般的に、ポテンシャル  $V(r)$  に束縛されている場合の

質量  $m$  の粒子に対する Schrödinger 方程式を書くと

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(t, \mathbf{r})}{\partial t} = \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\mathbf{r}) \right) \Psi(t, \mathbf{r})$$

となる。この式が古典力学からどのように求められるかと言う事には興味がなく、むしろ Schrödinger 方程式を量子力学の出発点と考えて行くのが最も自然である。勿論、科学的にはまた別の興味があって当然であるが、物理学としては古典力学はあくまで量子力学の  $\hbar \rightarrow 0$  の極限模型として求められるものと考えべきである。

まずは、物理量の期待値を取ると、これが Newton 方程式となるのであるが、この Ehrenfest の定理を見て行きたい。

### C.1.1 Ehrenfest の定理

今、オペレータ  $\hat{A}$  の期待値を次式で定義する。

$$\langle \hat{A} \rangle \equiv \langle \Psi | \hat{A} | \Psi \rangle \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^*(x, t) \hat{A} \Psi(x, t) dx$$

運動量オペレータを  $\hat{p} \equiv -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$  そしてエネルギーオペレータを  $\hat{E} \equiv i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$  とする時、

$$\langle \hat{E} \rangle = \langle \frac{\hat{p}^2}{2m} \rangle + \langle U(x) \rangle, \quad \frac{d}{dt} \langle x \rangle = \frac{1}{m} \langle \hat{p} \rangle, \quad \frac{d}{dt} \langle \hat{p} \rangle = - \langle \frac{\partial U}{\partial x} \rangle$$

が成立する事が簡単に示される。これを Ehrenfest の定理という。これは Newton 方程式そのものである。すなわち、当然のことではあるが、場の方程式である Schrödinger 方程式の方が情報量は無限に多いのであり、従って、状態によるオペレータの期待値が結局古典力学に対応していたと言う事である。

### C.1.2 束縛状態

定常状態の場合、波動関数  $\psi$  は  $\Psi(t, \mathbf{r}) = e^{-iEt/\hbar} \psi(\mathbf{r})$  と置く事が出来るので、この時 Schrödinger 方程式は

$$\left( -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\mathbf{r}) \right) \psi(\mathbf{r}) = E\psi(\mathbf{r})$$

となる。ここで  $E$  が粒子のエネルギー固有値を表している。束縛状態の場合、 $E$  が負となる事が条件になる。それは、ポテンシャルが無限遠方でゼロであるように、基準値を選んでいる事に対応している。従って、粒子が束縛されて外に飛んでゆかないためには、どうしても  $E < 0$  が Schrödinger 方程式を解く上での条件になっている。尤も、この事は力学でも同じであり、地球の公転においては、よく知られているようにエネルギー  $E < 0$  は負であり、この事が地球の公転軌道が楕円である事に対応している。

### C.1.3 表示の問題

量子力学では Hamiltonian の固有関数である波動関数を状態関数という言い方をしており、その書き方がまちまちである。例えば、 $\psi_n(x)$  と書けば、それは  $n$  という固有値を持った状態を表している。この時、量子力学では

$$\psi_n(x) = |\psi_n\rangle = |n\rangle$$

などと、色々な書き方をする事が一般的である。これにはそれなりの理由があるのだが、特に量子力学では固有値を指定するとその状態が決まってしまうと言うことが最も大きな理由である。ここで、 $\langle n|$  をブラ状態と言い、 $|n\rangle$  をケット状態という言い方をしている。何故このような表示を使うのか？それは、常に内積の事を考えているからである。 $\langle n|$  のブラ状態と  $|n'\rangle$  のケット状態で内積を作ると

$$\langle n|n'\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_n^\dagger(x)\psi_{n'}(x)dx$$

となっている。わざわざブラとケットを作ったのは、この内積の事を考えているからであり、逆に言えば、それ以上の事ではない。多少便利である事は確かであると思うが、表示自体には物理的にも数学的にも特に意味があるわけではないので、注意した方がよい。

## C.2 水素原子

量子力学を理解するには、水素原子の Schrödinger 方程式をしっかりと解いて、その束縛状態のスペクトルを理解し、覚えてしまう事が最も手っ取り早いものである。学生が最も苦労する所は角運動量の様々な性質とその固有関数であるが、まずは原子核の電荷を一般的にした水素型原子に対する Schrödinger 方程

式を書くと

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 - \frac{Ze^2}{r}\right)\psi(\mathbf{r}) = E\psi(\mathbf{r})$$

である。ただし、 $\nabla^2$  は

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) - \frac{1}{\hbar^2} \frac{\mathbf{L}^2}{r^2}$$

と書くことができる。ここで角運動量演算子は

$$\mathbf{L}^2 = -\hbar^2 \left( \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \left( \sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta} \right) + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} \right)$$

で与えられている。 $\mathbf{L}^2$  と  $L_z$  の固有関数は球面調和関数で与えられ

$$\mathbf{L}^2 Y_{\ell m}(\theta, \varphi) = \hbar^2 \ell(\ell+1) Y_{\ell m}(\theta, \varphi), \quad L_z Y_{\ell m}(\theta, \varphi) = \hbar m Y_{\ell m}(\theta, \varphi)$$

である。よって、水素型原子の Schrödinger 方程式の動径部分に対する方程式は

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{\hbar^2 \ell(\ell+1)}{2mr^2} - \frac{Ze^2}{r}\right) R_{n\ell}(r) = ER_{n\ell}(r)$$

となる。この時、水素型原子の Schrödinger 方程式の固有値と固有関数は

$$\psi_{n\ell}(\mathbf{r}) = R_{n\ell}(r) Y_{\ell m}(\theta, \varphi), \quad E_n = -\frac{mZ^2 e^4}{2\hbar^2 n^2} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

で与えられる。後は、この固有関数の具体的な形を  $n = 1, 2$  と  $\ell = 0, 1$  くらいに対してしっかり覚えてしまう事である。どの教科書にも書いてある事なので、ここでは省略しよう。

### C.3 Maxwell 方程式と Schrödinger 方程式

電磁気学のところで述べている様に、Maxwell 方程式はすでに量子化されている方程式である。その事をより具体的にみるために、物質が無い場合の Maxwell 方程式を考える。この場合、 $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$  というクーロンゲージを取る。これは、勿論、議論を簡単にするが、同時に一般性を失う事はない。

### C.3.1 類似点

この時、Maxwell 方程式を書き直すと Maxwell 方程式は次のようになる。

$$\left( \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right) \mathbf{A}(t, \mathbf{r}) = 0$$

一方、自由粒子の場合の Schrödinger 方程式は

$$\left( i\hbar \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \right) \psi(t, \mathbf{r}) = 0$$

となっており、大変よく似ている。要するに場の方程式としては、2 つとも同じものなのである。これはすなわち、電磁場の方程式はすでに第一量子化を知っていた事を示している。これは何を意味しているのであろうか？科学史は別にして、量子化という過程は原理的なものではない事を意味している。つまり、場の方程式が出発点であるべきである。この当然な事がこれまで見過ごされていたのは、一つには古典力学が最初に作られ、その力学をより一般的にした正準理論が発展してきた事にも依っているとと思われる。さらに、電磁気学の方程式が古典論の極限を持っていないと言う事実は、確かに量子化自体が基本原理ではない事を物語っている。

### C.3.2 相違点

Maxwell 方程式と Schrödinger 方程式の相違点は何であろうか？一番大きな点は、やはり電磁場の方程式には束縛状態が存在しないと言う事であろう。つまり光子は束縛される事はなく、常に自由粒子の状態のみが、物理上許されているのである。恐らくは、この事が、電磁場の方程式が発見されてからかなり時間が経ってから量子力学の方程式が発見された一つの理由であろうと思われるのである。

もう一つ、重要な相違点がある。それは古典論の極限の存在である。Schrödinger 方程式は  $\hbar$  をゼロに持ってゆく極限が存在していて、これが Newton 方程式に対応している。一方、Maxwell 方程式はこの極限が存在していない。そもそも Maxwell 方程式には  $\hbar$  が現れてはいないのである。従って、Planck がフォトンエネルギーを

$$E = \sum_{n=0}^{\infty} n\hbar\omega$$

と書いた時、それがたとえ黒体輻射の実験結果を再現する事ができる新しい物理であったとしても、やはり怖かったのであると思う。このエネルギーの式は  $\hbar$  をゼロとする極限が存在していないのである。この事は物理を理解する上でかなり重要な意味を持っている気がする。Maxwell 方程式は場の方程式であるが、その場はオペレータとしては定義されていない。すなわち、Maxwell 方程式自体は場の量子化について何も教えてくれないのである。従って、場を量子化した後の電磁場のエネルギーが  $\hbar$  の単位で測られるという事は実験からしか我々は知る事が出来ないのである。少なくとも理論的にそれ以上のレベルで理解しようとするには、まだ何か重要な事がわかっていないと言う事であると考えられる。

## C.4 場の理論としての Schrödinger 方程式

Schrödinger 方程式における波動関数  $\psi(t, \mathbf{r})$  は場である。従って、量子力学は場の理論であり、この Lagrangian 密度を作る事が出来る。

### C.4.1 Lagrangian 密度

Schrödinger 場の Lagrangian 密度は

$$\mathcal{L} = i\psi^\dagger \frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{1}{2m} \frac{\partial \psi^\dagger}{\partial x_k} \frac{\partial \psi}{\partial x_k} - \psi^\dagger V \psi$$

と書く事が出来る。この式では、 $\hbar = 1$  と  $c = 1$  の表記を取っている。場の理論では良くこの表記を使うがこれも単に簡単化のため以外に理由はない。ここで、ポテンシャル  $V$  は外場として導入している。この時、 $k$  が 2 回繰り返して出てきたときは、和を意味しているものと仮定している。すなわち、 $k = 1, 2, 3$  の和が取られるものと仮定している。この表記は簡単にする事以上の意味は全く無い。表記の意味するところは

$$\frac{1}{2m} \frac{\partial \psi^\dagger}{\partial x_k} \frac{\partial \psi}{\partial x_k} = \sum_{k=1}^3 \frac{1}{2m} \frac{\partial \psi^\dagger}{\partial x_k} \frac{\partial \psi}{\partial x_k} = \frac{1}{2m} \nabla \psi^\dagger \cdot \nabla \psi$$

と言う事である。ここで、Lagrange 方程式は

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \psi)} \equiv \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} + \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\frac{\partial \psi}{\partial x_k})} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi}$$

となる。

### C.4.2 Bjorken-Drell のメトリック

ここで  $\mu$  が 2 回繰り返して出てきたときは、 $\mu = 0, 1, 2, 3$  の和が取られるものと仮定している。ただし、4次元微分演算子を

$$\partial_\mu \equiv \left( \frac{\partial}{\partial x_0}, \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right) = \left( \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) = \left( \frac{\partial}{\partial t}, \nabla \right)$$

と定義している。また、4元ベクトルを

$$x^\mu = (t, \mathbf{r}), \quad x_\mu = (t, -\mathbf{r}), \quad p^\mu = (E, \mathbf{p}), \quad p_\mu = (E, -\mathbf{p})$$

とする時、4次元での内積を

$$x^\mu x_\mu = t^2 - \mathbf{r}^2, \quad p^\mu p_\mu = E^2 - \mathbf{p}^2, \quad x^\mu p_\mu = tE - \mathbf{r} \cdot \mathbf{p}$$

と定義する。この時、これはローレンツ変換に対して不変な式になっている。この4元ベクトルの表記は Bjorken-Drell の教科書で導入され、非常に便利で合理性があるため、現在ではほとんどの場の理論の教科書が使っている。

### C.4.3 Lagrange 方程式の導出

Lagrange 方程式の導出は古典力学の場合を一般化しただけである。作用  $S = \int \mathcal{L}(\psi, \partial_\mu \psi) d^4x$  を極小にする事により Lagrange 方程式が求められる。

$$\delta S = \int \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} \delta \psi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \psi)} \delta (\partial_\mu \psi) \right] d^4x = \int \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} - \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \psi)} \right) \right] \delta \psi d^4x = 0$$

上式では一度部分積分を行い、さらに境界での3次元表面積分はゼロであるとした。これより、

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} = \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \psi)} \right)$$

となり、確かに場  $\psi$  に対する Lagrange 方程式が求められたのである。ここで、場  $\psi^\dagger$  に対する Lagrange 方程式も同様に得られる事に注意したい。

### C.4.4 Schrödinger 場

Schrödinger 場は非相対論的なのに、何故相対論的な表記で書けるのかと思われるかも知れないが、実は相対論か非相対論かはダイナミクスを議論する

時に重要になるのであり、場の方程式を求める事においては、その間の差は全く無いのである。従って、ここで場の理論に慣れておくと、Lagrange 方程式や Hamiltonian を作る事など、基本的な物理の形式は相対論的な場の理論も全く同じになるので便利であると思う。特に、量子力学に対する正しい直感があると、相対論的な場の理論を理解する上に役立つものと思われる。これらの式から、場に対する方程式を求めると

$$\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 - V(r)\right)\psi(t, \mathbf{r}) = 0$$

となり、Schrödinger 方程式が求められるのである。ここでは  $\hbar$  を元に戻してある。これ以降のほとんどの場合は、 $\hbar = 1$  と  $c = 1$  の表記を取るものと思ってもらいたい。そうでないとよく間違えるからである。

#### C.4.5 Hamiltonian 密度

Lagrangian 密度から Hamiltonian 密度を作る事が出来る。何故、Hamiltonian 密度を作りたいのであるかと言う問題であるが、実は Lagrangian 密度において並進対称性を要求すると下記に定義するエネルギー・運動量テンソル  $T^{\mu\nu}$  が保存量になるからである。

$$T^{\mu\nu} \equiv \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)}\partial^\nu\psi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi^\dagger)}\partial^\nu\psi^\dagger - \mathcal{L}g^{\mu\nu}$$

すなわち

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$$

である事が証明できて、これは  $T^{\mu\nu}$  が保存量である事を示している。そこで Hamiltonian 密度として

$$\mathcal{H} \equiv T^{00} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\psi}}\dot{\psi} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\psi}^\dagger}\dot{\psi}^\dagger - \mathcal{L}$$

を定義し、さらに Schrödinger 場の Lagrangian 密度を代入して全空間で積分すれば Hamiltonian

$$H \equiv \int \mathcal{H} d^3r = \int \left[ \frac{1}{2m} \nabla\psi^\dagger \cdot \nabla\psi + \psi^\dagger V\psi \right] d^3r$$

が得られ、これは確かに保存する物理量となっている。ここで一度部分積分を用いて上式を書き直すと

$$H = \int \left[ -\frac{1}{2m} \psi^\dagger \nabla^2 \psi + \psi^\dagger V\psi \right] d^3r$$

となり、これは通常の Schrödinger 方程式の Hamiltonian を波動関数ではさんで期待値を取った式と一致している。この Hamiltonian は場の量子化の時に重要になるが、古典場の理論の範囲では、物理的な意味は難しい。すなわち、Hamiltonian それ自身ではそれ程物理的に有用ではないのである。この事は、古典力学を良く知っている人には明らかな事であろう。すなわち、古典力学の Hamiltonian もそれ自身はそれ程明確な物理的な意味はない。しかし、Hamiltonian を変分する事により Hamilton 方程式が求められ、これは Newton 方程式そのものなのである。この事情は場の古典論でも同じになる。上記の Hamiltonian を  $\psi$  で変分すると意味のある方程式が求められる。この時、拘束条件を付ける必要がある。それは場  $\psi$  が規格化可能であると言う事である。従って、次の量

$$W = \int \left[ -\frac{1}{2m} \psi^\dagger \nabla^2 \psi + \psi^\dagger V \psi \right] d^3 r - E \left( \int \psi^\dagger \psi d^3 r - 1 \right)$$

を  $\psi$  で変分して極小にする事である。ここで  $E$  は Lagrangian の未定係数と呼ばれる定数である。統計力学では良く使われる数学の技術であり、簡単で大変便利であるから覚えておいた方が良いと思う。今、

$$\begin{aligned} \frac{\delta W}{\delta \psi^\dagger} &= \int \left[ -\frac{1}{2m} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \nabla'^2 \psi(\mathbf{r}') + \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') V(\mathbf{r}') \psi(\mathbf{r}') \right] d^3 r' \\ &\quad - E \int \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \psi(\mathbf{r}') d^3 r' \\ &= -\frac{1}{2m} \nabla^2 \psi(\mathbf{r}) + V(\mathbf{r}) \psi(\mathbf{r}) - E \psi(\mathbf{r}) = 0 \end{aligned}$$

であるから、これは Schrödinger 方程式そのものである。ここで、変分法で唯一覚えておく必要のある式

$$\frac{\delta \psi(\mathbf{r}')}{\delta \psi(\mathbf{r})} = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$$

を使っている。物理屋にとって、変分法はこの上式以外は通常の微分と変わりなく使って構わないものであり、それ以上は何か問題がでてきたら考えれば良い。

この事より、Hamiltonian を変分する事により確かに量子力学の方程式が得られる事になる。結果的には、Hamiltonian で求めても、Lagrangian 密度から変分した Lagrange 方程式から求めても、確かに同じ Schrödinger 方程式が求まり物理は同じである事がわかったのである。しかしながら、ここで注意したい

事は、この Hamiltonian と Lagrangian 密度ともにそれ自体は物理的な観測量には結びつかないのである。これはかなり重要な事である。特に、Lagrangian 密度はエルミートである必要さえなく、実際エルミートにはなっていない。これは明らかに観測量にはなり得ない事を良く示している。但し、場を量子化するときには Hamiltonian が重要な役割をする。この量は保存量である事がわかっているので、物理的に意味のある観測量、すなわち系のエネルギーとなって行くのである。この辺の問題は付録 E で議論して行こう。

## C.5 量子力学演習問題

量子力学をしっかりと理解するためには、結局問題を沢山解いてみるという当り前のコメントに尽きる。量子力学は一般的には数学的な難しさは比較的少ない。むしろ電磁気学の方がはるかに数学的には複雑である。しかし、量子力学の考え方になれる事はそれ程易しい事ではない。最初はどうしても力学的な描像に慣れているので場の理論的な描像に慣れるのに、やはり少し時間がかかり、演習問題を解く事によりその描像が自分のものになって行くのだらうと思う。

### C.5.1 調和振動子

量子力学を学ぶにあたり、必ず理解しておく必要のある問題がこの調和振動子である。この時、Schrödinger 方程式は

$$\left( -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 \right) \psi(x) = E \psi(x)$$

と書けている。ここで境界条件として  $\psi(\pm\infty) = 0$  を入れてこの微分方程式を解けば、確かに答えが求まり、

$$E_n = \hbar \omega \left( n + \frac{1}{2} \right), \quad n = 1, 2, \dots$$

となる。さらに重要な事として、波動関数も解析的に求まってしまうのである。量子数  $n$  の状態の波動関数は  $\psi_n(x)$  は

$$\psi_n(x) = \left( \frac{\alpha^2}{4^n \pi (n!)^2} \right)^{\frac{1}{4}} H_n(\alpha x) e^{-\frac{1}{2} \alpha^2 x^2}$$

$$\text{但し } H_n(\xi) = (-)^n e^{\xi^2} \frac{d^n}{d\xi^n} e^{-\xi^2}$$

であり、また  $\alpha = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}$  と定義している。

この波動関数は最もよく使うものの一つである。しかしながら、調和振動子の問題は現実的ではない。それは、このポテンシャルにおける状態には、散乱状態が存在していないのである。つまり、全ての状態は束縛状態なのである。実際に量子力学を自然界に記述に応用する時は必ず散乱状態が存在しているポテンシャル模型を使う必要がある。

## 生成・消滅演算子

調和振動子のエネルギー固有値やその波動関数を求める時、生成・消滅演算子を用いると非常に便利で簡単である。まず、オペレータ  $a, a^\dagger$  を次のように導入する

$$a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}x + \frac{i}{\sqrt{2\hbar m\omega}}\hat{p}, \quad a^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}x - \frac{i}{\sqrt{2\hbar m\omega}}\hat{p}$$

ここで、 $\hat{p} = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}$  である。この時、

$$[a, a^\dagger] = 1$$

が直ちにチェックできる事である。ここで、数演算子を  $\hat{N} = a^\dagger a$  と定義すると、

$$[\hat{N}, a] = -a, \quad [\hat{N}, a^\dagger] = a^\dagger$$

が計算で示される。さらに、 $\hat{N}$  の固有関数および固有値を  $\phi_n, n$  とすると

$$\hat{N}\phi_n = n\phi_n$$

となる。この時、

$$a^\dagger|\phi_n\rangle = \sqrt{n+1}|\phi_{n+1}\rangle, \quad a|\phi_n\rangle = \sqrt{n}|\phi_{n-1}\rangle$$

である事が簡単に証明できるものである。これらの事より、調和振動子のエネルギー固有値は

$$E_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

で与えられることが容易にわかるものである。

この手法により、波動関数も求める事が出来る。 $a$  が消滅演算子である事から、基底状態  $\phi_0$  の状態に  $a$  をオペレートするとゼロになる。すなわち

$$a\phi_0 = 0$$

である。この式を微分で書き直すと

$$\left(\frac{m\omega}{\hbar}x + \frac{\partial}{\partial x}\right)\phi_0(x) = 0$$

となり、これは直ちに解けて

$$\phi_0(x) = N_0 e^{-\frac{1}{2}\alpha^2 x^2}, \quad \alpha = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}$$

と求められるのである。この基底状態の波動関数が求まると、励起状態の波動関数は

$$\phi_n(x) = N_n \left( \frac{m\omega}{\hbar} x - \frac{\partial}{\partial x} \right)^n \phi_0(x)$$

と決められてしまうのである。この  $\phi_n(x)$  は先に求められたものと勿論一致している。但し、 $N_n$  は規格化定数である。

### C.5.2 摂動論

量子力学において厳密に解けるポテンシャル問題としては、水素原子、調和振動子そして井戸型ポテンシャルがある。しかしこれ以外で物理的にある程度面白いポテンシャル問題で厳密解が求められている場合はほとんどない。従って、物理の議論は基本的に摂動論を使う事になる。摂動論を考える時、非摂動項 Hamiltonian  $H_0$  と摂動項 Hamiltonian  $H'$  が全 Hamiltonian  $H$  であるとする。

$$H = H_0 + H'$$

ここで  $H'$  は  $H_0$  と比べて十分小さいとする。また、摂動論では、 $H_0$  の固有値と固有関数は知られているものとして、それら  $H_0$  の固有値と固有関数で全ての物理量を計算するというものである。この時、

$$H_0 \Psi_n = E_n \Psi_n$$

とする。この時、 $n$  番目の状態に対する 1 次の摂動エネルギーは

$$E_n^{(1)} = \langle \Psi_n | H' | \Psi_n \rangle$$

で与えられる事がすぐわかる。一方、基底状態に対する 1 次の摂動による波動関数の変化  $\Psi'_1$  は

$$\Psi'_1 = \sum_n \frac{\langle \Psi_n | H' | \Psi_0 \rangle}{E_0 - E_n} \Psi_n$$

となる。簡単なために、基底状態に対する 2 次の摂動エネルギー  $E_0^{(2)}$  を書いておくと

$$E_0^{(2)} = \sum_{n \neq 0} \frac{|\langle \Psi_n | H' | \Psi_0 \rangle|^2}{E_0 - E_n}$$

となる。恐らくは、この式が最もよく使われる公式であろうと思う。大切な事は、2 次の摂動エネルギーは常に引力的に振舞うと言う事である。摂動項 Hamiltonian  $H'$  の形に依らず、何時でも 2 次の摂動エネルギーは負になっているのである。

### C.5.3 変分法

自分の経験として、変分法を理解した時に何か量子力学がぐーんと身近に感じたものである。いつも Schrödinger 方程式を解いて固有値問題を計算し、それを求めて行くのは、どうも難しい数学に振り回されている気がしていたのである。これと比べると、変分法は単純明快であり、しかもその系のエネルギーはかなり正確に求められてしまうのである。但し、一つ欠点があり、この手法では基本的にはその系の基底状態、つまり一番エネルギーが低い状態のみが求められるのである。

変分法とは何か？波動関数  $\psi(\mathbf{r})$  の形を適当に変えてみて、エネルギー  $E$

$$E = \int \psi^\dagger(\mathbf{r}) \left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\mathbf{r}) \right] \psi(\mathbf{r}) d^3r, \quad \int \psi^\dagger(\mathbf{r}) \psi(\mathbf{r}) d^3r = 1$$

がなるべく小さくなるように  $\psi(\mathbf{r})$  の形を上手く見つけると言う事である。ここで、波動関数の規格化条件は常に付けておかなければいけない事である。

#### 水素型原子

例えば、水素型原子の場合、 $V(r) = -\frac{Ze^2}{r}$  であり、また最低エネルギー状態は  $\ell = 0$  である事が明らかである。それはエネルギーは

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^\dagger(r) \left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{\hbar^2 \ell(\ell+1)}{2mr^2} - \frac{Ze^2}{r} \right] \psi(r) 4\pi r^2 dr$$

で与えられ、遠心力に対応する項は常に斥力的である事によっている。ここで変分関数として  $\psi(r) = Ne^{-\beta r}$  を取ってみよう。この時、規格化条件より、

$N = \sqrt{\frac{\beta^3}{\pi}}$  である。これよりエネルギーを計算すると

$$E = 4\pi \frac{\beta^3}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\beta r} \left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) - \frac{Ze^2}{r} \right] e^{-\beta r} r^2 dr = \frac{\hbar^2 \beta^2}{2m} - Ze^2 \beta$$

となる事から最低エネルギーは  $E_0 = -\frac{mZ^2 e^4}{2\hbar^2}$  となり、厳密解と一致している。これは波動関数の形を正しいものと同じに選んだ事によっている。一方、もし波動関数を  $\psi(r) = Ne^{-\frac{1}{2}\beta^2 r^2}$  と取ってみると

$$E = \frac{3\hbar^2 \beta^2}{4m} - \frac{2Ze^2 \beta}{\sqrt{\pi}}$$

となる。この時、最低エネルギーは  $E_0 = -\frac{4mZ^2e^4}{3\pi\hbar^2}$  となり、厳密解よりも少しだけ上に出ている。

変分法は何故良いか？

変分法によりエネルギーを求めると、予想以上に厳密解に近い値が得られるものである。それには、勿論理由がある。今、考えている Hamiltonian を  $H$  としてその厳密な固有関数を  $\psi_0$  その固有値を  $E_0$  としよう。この時、変分関数を  $\psi = \psi_0 + \epsilon\psi_1$  とする。ここで、 $\psi_0$  と  $\psi_1$  は直交していると仮定する。すなわち、 $\langle\psi_0|\psi_0\rangle = 0$  である。ここで、変分関数は  $\epsilon$  だけ厳密な波動関数  $\psi_0$  からずれているとしよう。この時、エネルギー  $E$  は

$$E = \frac{\langle\psi_0 + \epsilon\psi_1|H|\psi_0 + \epsilon\psi_1\rangle}{\langle\psi_0 + \epsilon\psi_1|\psi_0 + \epsilon\psi_1\rangle} = E_0 + \epsilon^2 (\langle\psi_1|H|\psi_1\rangle - E_0)$$

となり、厳密解のエネルギー固有値からのずれは  $\epsilon^2$  の大きさになっている。すなわち、波動関数が厳密解から  $\epsilon$  だけずれていても、エネルギー固有値は  $\epsilon^2$  の大きさになり、かなり正しい答えを与えてくれると言う事である。

当然の事ではあるが、ここでコメントしておこう。それは  $\psi$  を本当に変分してしまうとどうなるかであるが、この時は実は Schrödinger 方程式を解く事と同じになるのである。式は簡単で、 $E = \frac{\langle\psi|H|\psi\rangle}{\langle\psi|\psi\rangle}$  を考えて、これを変分する。すなわち、

$$\delta E = \frac{\langle\psi + \delta\psi|H|\psi\rangle}{\langle\psi + \delta\psi|\psi\rangle} - \frac{\langle\psi|H|\psi\rangle}{\langle\psi|\psi\rangle} = \frac{\langle\delta\psi|H\psi - E\psi\rangle}{\langle\psi|\psi\rangle} + O[(\delta\psi)^2] = 0$$

よって、これは  $H\psi - E\psi = 0$  を意味しており、Schrödinger 方程式を解く事に対応している。

#### C.5.4 WKB 法 (準古典近似)

Schrödinger 方程式は  $\hbar$  をゼロに持って行くことにより、古典力学が得られる。この準古典近似の手法は簡単で、まず 1 次元 Schrödinger 方程式

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V(x)\right) u(x) = Eu(x)$$

を解く時、 $u(x) = Ae^{\frac{i}{\hbar}S(x)}$  において  $S(x)$  に対する方程式に書き直す。ここで、 $A$  は定数とする。また、 $S$  を  $\hbar$  でべき展開する

$$S = S_0 + \hbar S_1 + \hbar^2 S_2 + \dots$$

このうち、 $S_0, S_1$  だけを取る近似を WKB 法という。この時、

$$\left(\frac{dS_0}{dx}\right)^2 = 2m(E - V(x))$$

$$i\frac{d^2 S_0}{dx^2} - 2\frac{dS_0}{dx}\frac{dS_1}{dx} = 0$$

であり、 $S_0, S_1$  は解析的に解けてしまう。例えば、 $E < V(x)$  の時は

$$u(x) = \frac{A}{\sqrt{2m(V(x) - E)}} e^{-\frac{1}{\hbar} \int^x \sqrt{2m(V(x') - E)} dx'}$$

が解になっている。

### Hamilton-Jacobi の方程式

Hamilton-Jacobi の方程式は作用を  $S$  とした時、

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H = 0$$

である。ここで、 $S = -Et + S_0$  を代入し、また運動量  $p$  は  $p = \frac{\partial S_0}{\partial x}$  と書ける事から

$$E = \frac{1}{2m} \left(\frac{\partial S_0}{\partial x}\right)^2 + V(x)$$

が求まり、これが時間に依存しない Hamilton-Jacobi の方程式である。この式は  $\hbar$  がゼロの時の WKB の方程式そのものであり、確かに Schrödinger 方程式で  $\hbar$  をゼロに持って行くと古典力学の方程式が得られる事が分かる。

### C.5.5 量子化とエルミート性

ポテンシャルが無い場合の 1 次元 Schrödinger 方程式

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 u(x)}{dx^2} = Eu(x)$$

を  $-\frac{L}{2} \leq x \leq \frac{L}{2}$  の範囲に閉じ込めた場合を考える．基本的には自由粒子は箱に閉じ込めるしか今の所、上手く処理する方法はない．この一般解は

$$u(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}, \quad k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$$

である．ここで、自由粒子は運動量の固有関数である必要があるので、この解が運動量の固有関数である事を要求すると  $u(x)$  は

$$u(x) = Ae^{ikx}$$

となる．この時、 $u(x)$  に対して周期的境界条件を課したとき、 $k$  に対する条件を求めると

$$k = \frac{2\pi}{L}n, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

となる．これが、最も自然な形の自由粒子の波動関数の解である。

量子化条件の式

量子化条件の式は

$$\hat{p}x - x\hat{p} = -i\hbar$$

である．この両辺を上で求めた状態

$$u_n(x) = \frac{1}{\sqrt{L}}e^{i\frac{2\pi n}{L}x}$$

で期待値をとると

$$\langle u_n | \hat{p}x - x\hat{p} | u_m \rangle = -i\hbar\delta_{nm}$$

となり、この時、運動量演算子  $\hat{p}$  のエルミート性を仮定すると

$$(n - m)\frac{2\pi\hbar}{L} \langle u_n | x | u_m \rangle = -i\hbar\delta_{nm}$$

と求まる．この式は  $n = m$  の時、明らかに矛盾している．この矛盾は運動量演算子  $\hat{p}$  のエルミート性が周期的境界条件のもとでは一般的に使えない事によって起るからである．

## 運動量演算子のエルミート性

周期的境界条件を正しく使い、運動量演算子  $\hat{p}$  のエルミート性を使わないで計算すると  $n = m$  の時

$$\langle u_n | \hat{p} x | u_n \rangle = \langle u_n | x \hat{p} | u_n \rangle - i\hbar$$

となり、何処にも矛盾がない事がわかる。ここで注意しておきたいのは、運動量演算子  $\hat{p}$  自身はエルミートである。すなわち、

$$\langle u_n | \hat{p} u_m \rangle = \langle \hat{p} u_n | u_m \rangle$$

は確かに成り立っているのである。

この議論での教訓は微分演算子のエルミート性が一般的であるかどうかの問題である。すなわち、微分演算子に  $i$  を付ければ、その演算子をエルミートとして扱う事が出来るというのは、一般性がある事ではない。これは、波動関数が無限遠方で常にゼロであるという仮定の下に始めて成立する式である。従って、周期的境界条件を持っている波動関数に対しては、運動量演算子のエルミート性をアプリアリに仮定してはいけないという事である。

## 付録D 統計力学

統計力学に関してはそれ程ここで議論する事はない。大切な事は、統計力学では何が計算出来るのかをしっかりと理解する事である。基本的には統計力学における観測量は平均値 (アンサンブル・アベレージ) である。従って、どの分布関数で平均するのかと言う事だけが、物理的な興味である。一般には、ある物理系を考えた時に、その分配関数を計算する事がその主要目的である。すなわち、

$$Z = \sum_n e^{-\beta E_n}, \quad \beta = \frac{1}{kT}$$

を計算する事が基本的には最も重要である。ここで、 $E_n$  は状態  $n$  におけるエネルギー固有値である。従って、例えばエネルギーの平均は

$$\langle E \rangle = \frac{\sum_n E_n e^{-\beta E_n}}{Z} = -\frac{\partial}{\partial \beta} \log Z$$

となる事はすぐに計算できるものである。この事は、逆に言えば  $E_n$  がどの様に計算されて求められているかと言う事が重要になる。そしてこれは量子力学のエネルギー固有値問題を解く事によって得られる事になっている。その意味では、統計力学という「力学」があるわけではない。これが統計力学に関して、大半の学生が混乱する原因でもある。

### D.1 スピンと統計

粒子のスピンが整数の場合、その統計はボーズ統計であるとどの教科書にも書いてあるし、自分もそれに対して疑いを持たなかった。しかしながら、最近のボーズ凝縮の話を書くにおよび何かがおかしいと思い始めた。それはかなり重い原子のボーズ凝縮について議論しているからである。ボーズ凝縮の実験の話を書くとおよそ信じられない事をボーズ凝縮の実験として議論されている。すなわち、重い原子系でその全体のスピンの整数の時にボーズ凝縮が起こっていると言うものである。原子系の物性は電子の振る舞いにより決定されてい

る。原子核のスピンが影響する事はまずあり得ない。もしある原子系でボーズ凝縮が起こったと考えたならば、原子核の中性子を一つ増やしたアイソトープに関しても実験してみて、今度は全スピンの半整数だからボーズ凝縮が起こらないことを証明する必要がある。

しかし、このような現象は現実離れしている。原子核のスピンにより原子系全体のスピンの半整数になったからと言って、系の統計が変わる事は考えられない。物質の性質は全て電子によって支配されている。原子核のスピンが影響するような現象は、余程強い磁場を系にかけたりしない限り、現われる事はない。

実はスピンと統計の問題を調べてみると Feynman も不思議に思ったらしくて、電子の場合とフォトンの場合のスピンと統計は理解できるが、それ以外はわからないから、教えて欲しいと言うようなコメントをしている。

### D.1.1 フォトンはボーズ統計

一つははっきりわかっている事がある。それは光は確かにスピンの1であり、これはボーズ統計に属しているという事である。Planck の黒体輻射の公式もフォトンがボーズ粒子であると仮定して求められているし、実験的にもフォトンがボーズ統計に属するとして全く矛盾がない。しかしながら、基本粒子で整数スピンを持っているのはフォトンだけである。他のボーズ粒子と言っているのは全て複合粒子である。そうすると、一体ボーズ統計とは何かと言う基本的な疑問が出て来るのである。

### D.1.2 フェルミ統計

実験的にはっきりわかっている事は、電子や核子などのフェルミオンは確かにフェルミ統計に属すると言う事である。これは、パウリ原理として良く知られているし、実験的にも疑う所は全くない。Dirac 方程式から始まって、フェルミオン場を反交換関係で量子化するとこのパウリ原理はしっかり理解できるものである。むしろ、ここには理論と実験の矛盾はないし、概念的にも理解していると思われる。

### D.1.3 複合粒子のスピンと統計

それでは、原子の統計はどうであろうか？原子の全スピンが統計に影響するのであるか？これに対する理論的考察は皆無に近い。人々が疑う事無くスピンと統計をこれまでは信じてきた。問題ははっきりしていて、まだ信頼できる実験が何処にも無いと言う事である。理論模型を作るにしても、複合系を考える場合、それが複合系である事がわかるような現象は統計力学では処理できない。統計力学と言っても、ダイナミクスそのものを扱う事は出来なく、考えている粒子が持っている状態関数によって指定されるエネルギーを分布関数に入れて平均操作をする事が、統計力学の本質である。従って、もし複合粒子の内部構造を考える必要があるような物理現象は、統計力学では扱えないと言う事である。

例えば、重い原子系の「ボーズ凝縮」の実験を見る限り、これはただ単に、密度の高いミクロ系を作ったと言う事以上に物理的な意味はあり得ないのである。実験的にわかっている現象としては、 $^3\text{He}$  と  $^4\text{He}$  の超流動の実験がある。この2つは質量が25%も違うので、その意味では2つの振る舞いに実験的な影響が出てきても不思議ではない。しかし、現実はそれ程大きな差は無く、この両者の全スピンの整数か半整数かによる違いは観測されていない。すなわち、基本的な物性は当然電子によって決められているのである。

## D.2 磁気トラップ法

中性原子を磁場によりトラップできる方法がある。この磁気トラップ法の物理を簡単に解説したい。今、原子系全体のスピンを  $S$  としよう。ただし、これも簡単のために原子核のスピンはゼロとしよう。この時、電子のスピンの自由度のみが効いて来る場合を考えて、外部磁場  $B$  を原子系にかけた時の Hamiltonian  $H$  は

$$H = \frac{P^2}{2M_A} - \boldsymbol{\mu} \cdot \boldsymbol{B}$$

と書く事ができる。ここで  $M_A$  は原子系全体の質量である。また、 $\boldsymbol{\mu}$  は原子の磁気能率であり、

$$\boldsymbol{\mu} = \frac{ge\boldsymbol{S}}{2m}$$

と書かれていて、 $g$  は  $g$ -因子である。

この Hamiltonian は見てわかるように、Zeeman 効果を考慮した相互作用が入っているだけである。この相互作用で、何故、中性粒子をトラップ出来るの

であろうか？量子力学で示されている量はエネルギー分裂だけである。ここで、今、磁場を  $Z$ -方向に選び、 $\mathbf{B} = (0, 0, B_0)$  としよう。この時、原子の最低エネルギー  $E$  は

$$E = \frac{\mathbf{P}^2}{2M_A} - \frac{geS}{2m} B_0$$

となる。ここでは、原子の運動エネルギーの部分も省略しないで入れてある。

この段階では、原子のトラップはとても考えられない事である。しかし、この Zeeman 分裂エネルギーは原子系の内部エネルギーを与えているのであるが、原子の重心に対する運動は、まだ何も言及していないのである。ここで、現代の科学技術の進歩は凄いものである。実際、レーザーを照射し続ける事により、この原子系の状態を Zeeman 分裂の一番上の量子状態に持って行く事が可能なのである。すなわち、Zeeman 分裂における最も高いエネルギー状態に原子を持って行き、その状態をキープする事である。そうすると、この系の古典力学系の Hamiltonian  $H_c$  は

$$H_c = \frac{\mathbf{P}^2}{2M_A} + \frac{geS}{2m} B_0$$

と書ける事になる。ここで、磁場をうまく取って、 $B_0 = aZ^2$  ( $a > 0$ ) のような原点から  $Z$ -方向の正負の増加に対して磁場が増加するような磁場勾配が作れたとしよう。但し、この座標  $Z$  は原子の重心の座標を表している。この時、Hamiltonian  $H_c$  は

$$H_c = \frac{\mathbf{P}^2}{2M_A} + \frac{ageS}{2m} Z^2$$

と書け、この古典力学系は常に原点に向かって閉じ込められる力が働いている事になっているのである。すなわち、原子はレーザーを照射される事により、徐々にこの系の原点に向かって動いて行く事になるのである。

### D.2.1 レーザー冷却

ここで、レーザーを照射する時 Zeeman 分裂のエネルギーギャップよりも少し低いエネルギーのレーザーを照射する事にしよう。その場合、レーザーの方向に向かって来る原子はドップラー効果によりエネルギーを獲得して、このレーザーのエネルギーを吸収する事が出来る事になる。そのため、原子が光を放出して基底状態に戻る時に、この少しの運動エネルギーを失う事になっており、この事を繰り返し行う事により、少しずつ原子系全体の冷却になって行く

のである。これがレーザー冷却の本質であるが、非常に面白いアイデアである事は間違いない。しかし、原理は簡単でありドップラー効果を用いたという事である。

## D.3 古典統計力学は意味があるか？

統計力学の教科書には、ほとんどの場合、古典統計力学という解説が出てくる。分配関数を求める時に、古典力学の位相空間で  $e^{-\beta E}$  を積分する公式の事である。1次元の粒子を考える場合、

$$Z = N \int \int dx dp e^{-\beta H}$$

と書き、 $H$  は系の Hamiltonian であり、 $N$  は規格化定数である。これはしかしながら物理的には全く意味をなさない。それは明らかで、古典力学では Hamiltonian 自体は意味を持っていないからである。力学のところで議論したように、Hamilton 方程式を求めて始めて物理的に意味のある量が得られるのである。古典力学ではエネルギーは Newton 方程式を解いた場合の積分定数に対応している。と言う事は、エネルギーはダイナミクスで決まる量ではなく、外から手を入れて決める量である。そのような  $H$  を位相空間で積分しても勿論物理的には全く意味のある物理は出て来ないのである。

### D.3.1 調和振動子

調和振動子の場合を見ると実は良くわかるのである。ここで調和振動子の分配関数を計算しよう。但し、ダイナミクスは量子力学を使う。この時分配関数は

$$Z = \sum_n e^{-\beta E_n} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta \hbar \omega (n + \frac{1}{2})} = \frac{1}{2 \sinh(\frac{\beta \hbar \omega}{2})}$$

となる事が容易に確かめられる。しかし、ここで明らかに古典力学の極限が無いのである。すなわち、 $\hbar \rightarrow 0$  とすると無限大になり、意味がなくなるのである。これは何を意味しているのであろうか？答えは明瞭で、古典統計力学は上手く定義できないと言う事をはっきりと示しているのである。

### D.3.2 直感的理由

古典統計力学が定義できない事の直感的理由は何であろうか?きちんとした物理的な理由付けは今後の研究に任せて、直感的理由のみここで議論する事にしよう。分配関数により全ての計算が実行される統計力学では、状態和と言う事が非常に重要になる。ある粒子を考えたとしても、常にその状態を考えると、すなわち常に場の理論的な発想が重要であると言う事である。一方、古典力学では、状態と言う概念が存在しない。そこでは常に粒子の軌道を考えているのである。すなわち、古典力学では系の時間発展のみが物理量に関係するのである。従って、古典力学で統計的な考え方を導入する事が始めから不可能であったと言う事である。この事は、やはり古典力学が基本方程式ではなく、量子力学から求められるものであると言う事と密接に関係している。すなわち、古典力学は量子力学の近似式として理解されるべきであると言う事である。従って、場の概念で全ての基本的な物理は理解して行く事が重要である事を意味していて、統計力学は最初に近似した古典力学では定義できない事に対応している。

物理では、近似をする段階が重要になる事が良く起こるものである。基本的には、近似はなるべく遅い段階ですべきであると言う事である。方程式の早い段階で近似をしてしまい、その近似された式を使うと良く間違えるのである。例えば、量子力学でミニマル変換により Zeeman 効果の相互作用 Hamiltonian を導出する時、Dirac 方程式の段階でミニマル変換をする事と、近似をした Schrödinger 方程式でミニマル変換をするのでは答えが違っているのである。勿論、Dirac 方程式の段階でミニマル変換をした式が正しく、この場合スピンの依存した Zeeman 効果を与える Hamiltonian が求められるのである。しかしながら、最初に近似して Schrödinger 方程式でミニマル変換をしてもスピンによる項は出てこないのである。

## 付録E 場の理論

新しい量子重力を理解してもらうためには、どうしても基礎的な場の理論を解説しておく必要がある。ここでは直感的にわかりやすい場の理論を簡潔に解説したい。ある程度高度の数学を使わざるを得ないが、しかしながらこの本を理解するためには、全ての数学を追ってゆく必要は無い。その意味で、出来る限り直感的な描像が取れるように解説して行きたいが、しかし、ある程度、結果優先の記述になる事は避けられないかも知れない。従って、詳細を知りたい場合は拙著の教科書を読んで頂く事にしよう。

### E.1 経路積分の問題点

この30年近く、多くの物理屋が経路積分による数値計算を実行してきた。まことに残念ながら、この経路積分による計算は物理的にほとんどは意味のない量を計算した事になっている。何故、この様な事が起こってしまったのであろうか？これには恐らくは様々な要因があるものと考えられるが、数学の形式が先走ってしまい、物理の内容を吟味する事を怠った事が最大の原因であろうと思われる。しかし、現実問題として研究者に与えた影響と言う観点からすれば、Wilsonの「Wilson ループによるクォークの閉じ込め」の論文が最も大きな要因である事は間違いあるまいと思われる。しかし、いつも言う事であるが、これは勿論Wilsonの責任ではない。彼は当然正しいと信じて計算したわけであり、問題はその後の我々物理研究者がしっかりチェックをしなかった事であり、容易に追従した事こそが最も重要な問題点である。

#### E.1.1 QEDでのWilsonのクォーク閉じ込め

Wilsonが「Wilson ループによるクォークの閉じ込め」の論文を発表したのは1974年である。この論文で確かにWilsonはクォークの閉じ込めを議論しているのであるが、しかしこの時に彼が計算した場の理論のモデルは、実は量

子電磁力学 (QED) なのである。この QED の計算にもかかわらず、クォークの線形閉じ込めを「証明」してしまい、おまけにこの論文が高い評価を得てしまったのである。直感的に言っても、QED で閉じ込めてしまったらこれは物理的におかしいと思うべきなのに、どういうわけかこの論文が人々に受け入れられてしまったのである。

この Wilson による閉じ込めの計算は経路積分を用いているのであるが、この計算の基本的な誤りの原因は、たとえそれが QED である事をよしとしても、その他にまだ二つある。一つは、模型計算において、近似をする段階の問題と関係している。近似はなるべく遅い段階でしないと良く間違えるものである。彼の場合、計算したい物理量を格子化して実行するのであるが、彼の提唱した Lagrangian 密度はその段階で連続極限を取れば確かに QED の作用になる事は確かめる事ができるのである。しかし、連続極限を取らないでそのまま先に積分を実行すると間違った計算になってしまうのである。すなわち、彼は連続場の理論の模型ではなく、全く仮想的な模型計算をした事に対応しているのである。一方、Wilson のもう一つの間違いはもっと深刻である。それは、場の理論における経路積分の定式化そのものに関する問題である。後で解説するように、経路積分における場の量子化は、場による積分では場を量子化する事が出来ないのである。この事は、実は Feynman は正しい定式化を行っており、彼のシリーズの論文では、場の経路積分の定式化として、場を自由粒子の状態で展開した時の展開係数による多重積分としており、場による多重積分などしていないのである。パラメータ空間での経路積分は QED の Hamiltonian がそのパラメータにおいて調和振動子となっているので、量子力学の場合と同じで、確かに量子化できるのである。このように、Feynman の原論文を読む限り、経路積分による定式化は十分正しく行われているのであるが、しかし一つわからない事もある。この Wilson の論文の中で、最後に彼は Feynman への謝辞を書いているのである。これは Feynman が Wilson の論文を読んでいる事を意味している。Feynman はこの Wilson の論文をどう評価したのであろうか？この事はしかし物理上で興味ある問題ではないので、これ以上の言及はやめにしよう。

いずれにしても、経路積分の手法に対して、何故このような間違いが一般に流布されたのであろうか？その科学史的なところはわからないが、恐らく最初に間違えた定式化を行ったのは、Fadeyev-Popov の論文であると思う。彼らがこの間違った経路積分により、量子色力学 (QCD) の繰り込み可能性を証明してしまったために、QCD の理解は随分遅れてしまった事になっている。この本では詳しい議論はしないで、簡略にその問題点を述べるにとどめるが、基

本的には、QCD は摂動論が定義できなくそのため繰り込み以前の問題であるという事である。さらに言えば、QCD の経路積分ではもし正しくパラメータ空間での経路積分にしたら、調和振動子にはなっていないとそのパラメータの4乗になっているので、Gauss 積分が出来なく計算自体が不可能であったのである。この事は、QCD が摂動的に計算できないという事と密接に関係しているが、詳細は教科書を参照して貰う事にしよう。

いずれにしても、経路積分における計算ではかなり注意深く実行する必要があり、特に経路積分において Fock 空間をどのように定義したら良いのかと言った基本的な問題はまだ解決されていない。たとえ Feynman による正しい定式化を採用しても問題は残っており、今後の課題である。

## E.1.2 量子力学における経路積分

量子力学における経路積分は量子力学的なある振幅を座標を分割した中間状態をいれて、その状態で積分して、微分方程式を解かないで多重積分に持っていく定式化である。ここでは1次元系を考えよう。今、振幅  $K(x, x' : t)$  を

$$K(x, x' : t) = \langle x' | e^{-iHt} | x \rangle$$

で定義する。ここで  $H$  は系の Hamiltonian を表す。これはある時刻における質点の  $x$  から  $x'$  への伝播を表している。ここで Hamiltonian を

$$H = \frac{\hat{p}^2}{2m} + U(x) = -\frac{1}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + U(x)$$

の形に仮定する。実は、経路積分で最も重要な点は運動エネルギーの形である。 $p^2$  に比例している事が本質的である。ここで、 $t$  と  $x - x'$  を  $n$  分割して中間状態に  $|x_n\rangle\langle x_n|$  を入れて多重積分にすると

$$K(x', x : t) = \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \cdots \int_{-\infty}^{\infty} dx_{n-1} \times \\ \langle x' | e^{-iH\Delta t} | x_{n-1} \rangle \langle x_{n-1} | e^{-iH\Delta t} | x_{n-2} \rangle \cdots \langle x_1 | e^{-iH\Delta t} | x \rangle$$

と書けて、さらに上式を書き直すと

$$K(x', x : t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{m}{2i\pi\Delta t} \right)^{\frac{n}{2}} \times \\ \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \cdots \int_{-\infty}^{\infty} dx_{n-1} \exp \left\{ i \sum_{k=1}^n \left( \frac{m(x_k - x_{k-1})^2}{2\Delta t} - U(x_k)\Delta t \right) \right\}$$

の形が得られる。但し、 $\Delta t = \frac{t}{n}$  である。この式をシンボリックに

$$K(x', x : t) = \mathcal{N} \int [\mathcal{D}x] \exp \left\{ i \int_0^t \left( \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - U(x) \right) dt \right\}$$

と書いた。但し、 $\mathcal{N} \int [\mathcal{D}x]$  は

$$\mathcal{N} \int [\mathcal{D}x] \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{m}{2i\pi\Delta t} \right)^{\frac{n}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \cdots \int_{-\infty}^{\infty} dx_{n-1}$$

と定義されている。

これが経路積分の書き直した結果の全てであり、ここまでは数学の変形だけだから、恐らくは問題ないと思われる。しかしながら、ここで右辺を古典力学の Lagrangian であると主張し始めると話が混乱する。それは量子力学では時間と空間座標が独立であり、どのようにしても右辺を速度と解釈する事は出来ないからである。ただし、逆の事は言えるのである。すなわち、古典力学の Lagrangian が

$$L = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - U(x)$$

で与えられた時、量子力学での振幅は上式で与えられると言う事である。

### E.1.3 経路積分による調和振動子

この振幅  $K(x, x' : t)$  はまだ座標  $x, x'$  に依っているので物理的な観測量には結びついてくれない。 $x = x'$  にして、 $x$  の全空間で積分すれば、物理的な観測量に結びつく場合がある。良く知られているのは調和振動子の場合  $U(x) = \frac{1}{2} m \omega^2 x^2$  であり、

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx K(x, x : t) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-iE_n t} = \int_{-\infty}^{\infty} dx \sqrt{\frac{m\omega}{2i\pi \sin \omega t}} e^{-im\omega x^2 \tan \frac{\omega t}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-i\omega t(n+\frac{1}{2})}$$

である事から、調和振動子のエネルギー固有値が求められる。しかしながら、この手法は恐らくは、調和振動子の特殊性によるものと考えられる。それは境界条件を付ける事なしに解けているからである。調和振動子は特殊であり、散乱状態が存在していないと言う事から、経路積分でも解けたものと考えられる。

### E.1.4 経路積分の限界

経路積分の良い点は Schrödinger 方程式を解く事なしに、多重積分により振幅が求められるという点である。どちらが簡単であるかは別にして、微分方程式を解かないで振幅が計算されたという事実は面白いと思われる。しかしながら、経路積分は一般的に常に量子力学と同じになっているのであろうか？これは上式を見て良く考えて見るとわかる事であるが、経路積分は運動エネルギーの部分<sup>1</sup>が運動量の関数として  $p^2$  と書いている事が本質的である。従って、運動エネルギーが運動量の関数として  $p^2$  ではない場合、例えば Dirac 方程式の場合は経路積分の言葉で書く事は出来ない。この事は Dirac 方程式が古典論の極限を持っていない事と一致している。この事実に意味している事は物理的に重要である。経路積分により振幅を多重積分で書き直した事は一般性があるわけではなく、非相対論の場合の特殊性であるという事である。さらに、多重積分への書き直しは単に数学的な要請からだけであり、物理的な意味はない。実際、経路積分を古典論の軌道の積分と解説する教科書が見られるものがあるが、これは勿論間違いである。一方、一部のしっかりした教科書では、経路積分は古典力学の軌道を足しあげる事とは関係ない事が書いてはある。

これまで見て来て明らかのように、経路積分による利点はほとんど無いと言って良い。それでは何故人々が経路積分を使った計算をやりたがるのであろうか？それは、場の理論における場の経路積分の方法により、他の方法では出来ない事が計算できるという錯覚があったからである。実際には、一つの方法では出来て、他の方法では出来ない計算などは、あり得ない事である。

いかなる理論模型を発展させても、その時に最も重要な事は物理的な観測量の計算である事は明らかである。しかし、この経路積分の方法は、それよりも Feynman グラフの計算手法が簡単に解説できるという事が主な利点であった。しかしながら、場の理論に経路積分を応用した時に間違った定式化が行われてしまい、その手法により QCD の繰り込み理論が議論されてまた実際それが人々に受け入れられてしまったために、極めて深刻な状態に陥ってしまったのである。この辺の歴史的な事情に関しては、科学史に任せる事にして、また詳しい議論は教科書を参照してもらおう事にしたい。

## E.2 場の理論における経路積分

場の理論における経路積分とは何であるか？これは場の量子化と関係している。量子力学も場の理論であり、電磁場とその意味では差があるわけではな

い。しかし、電磁場の場合、光子ができたり消えたりする物理的な過程が存在しているのである。これは、どうしても場を量子化するしか他にしようがないのである。従って、どうしても場の量子化とは何かについて、議論する必要がある。

### E.2.1 電磁場の量子化

電磁場の量子化は実験から始まっている。最も単純なところでは、水素原子における  $2p_{\frac{1}{2}}$  から  $1s_{\frac{1}{2}}$  状態への遷移の際放出される光の問題がある。 $2p_{\frac{1}{2}}$  の状態では電磁場の状態は真空であったのに、 $1s_{\frac{1}{2}}$  状態では1個光子が生成されている。これは通常の電磁場の理論では理解できないのである。そこで考案されたのが、「場の量子化」である。何故量子化と呼ばれるのかと言うと、それは場をオペレータで書くからである。ゲージ場の量子化を式で書くと

$$A(x) = \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\lambda=1}^2 \frac{1}{\sqrt{2V\omega_{\mathbf{k}}}} \epsilon(\mathbf{k}, \lambda) [c_{\mathbf{k},\lambda} e^{-ikx} + c_{\mathbf{k},\lambda}^{\dagger} e^{ikx}]$$

となり、ここで  $\omega_{\mathbf{k}} = |\mathbf{k}|$  である。また、 $\epsilon(\mathbf{k}, \lambda)$  は偏極ベクトルで

$$\epsilon(\mathbf{k}, \lambda) \cdot \mathbf{k} = 0, \quad \epsilon(\mathbf{k}, \lambda) \cdot \epsilon(\mathbf{k}, \lambda') = \delta_{\lambda, \lambda'}$$

を満たしている。量子化とは展開係数  $c_{\mathbf{k},\lambda}$  と  $c_{\mathbf{k}',\lambda'}^{\dagger}$  に対して

$$[c_{\mathbf{k},\lambda}, c_{\mathbf{k}',\lambda'}^{\dagger}] = \delta_{\mathbf{k},\mathbf{k}'} \delta_{\lambda,\lambda'}$$

の関係式を仮定する事である。この時、展開係数  $c_{\mathbf{k},\lambda}$  と  $c_{\mathbf{k},\lambda'}^{\dagger}$  はもはや単なる数ではなくて、オペレータになっている。このため、このオペレータが作用する空間を定義する必要があり、それを Fock 空間と呼んでいる。式で書くと、

$$c_{\mathbf{k},\lambda}|0\rangle = 0$$

を満たす  $|0\rangle$  を真空という。従って、この真空に  $c_{\mathbf{k},\lambda'}^{\dagger}$  をオペレートすると、

$$c_{\mathbf{k},\lambda'}^{\dagger}|0\rangle = |\mathbf{k}, \lambda\rangle$$

となり、これは運動量  $\mathbf{k}$ 、偏極  $\lambda$  をもつ光子の状態が生成された事を意味している。電磁場の量子化に関してはこれが全てである。それ以上の理論的なことはまだ良くわからない。しかし、この手法で現在までのところ、全ての実験と矛盾はしていない。

### E.2.2 場の理論における Feynman の経路積分

Feynman は場の量子化も経路積分で出来ると考えて、その定式化を行っている。しかし、彼はその手法が特に新しいものではない事をよく認識していたのではないかと考えられる。恐らく、基本的な出発点は電磁場の Hamiltonian にあったと思われる。電磁場の Hamiltonian は

$$H_{el} = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}, \lambda} (p_{\mathbf{k}, \lambda}^2 + k^2 q_{\mathbf{k}, \lambda}^2)$$

と書かれていて、 $p_{\mathbf{k}, \lambda}$  は  $q_{\mathbf{k}, \lambda}$  に対するパラメータ空間での運動量に対応していると考えて良い。この時、ベクトルポテンシャル  $A(x)$  は

$$A(x) = \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\lambda=1}^2 \frac{\epsilon(\mathbf{k}, \lambda)}{\sqrt{V}\omega_{\mathbf{k}}} [\dot{q}_{\mathbf{k}, \lambda} \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) + \omega_{\mathbf{k}} q_{\mathbf{k}, \lambda} \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})]$$

と書けている。この時、Feynman は振幅  $K(q_{\mathbf{k}, \lambda}, q'_{\mathbf{k}, \lambda}, t)$  を

$$K(q_{\mathbf{k}, \lambda}, q'_{\mathbf{k}, \lambda}, t) \equiv \mathcal{N} \int [Dq_{\mathbf{k}, \lambda}] \exp \left\{ \frac{i}{2} \int_0^t \sum_{\mathbf{k}, \lambda} (\dot{q}_{\mathbf{k}, \lambda}^2 - k^2 q_{\mathbf{k}, \lambda}^2) dt \right\}$$

と定義した。これは、パラメータ空間での変数  $q_{\mathbf{k}, \lambda}$  の量子化に対応している。従って、これは  $c_{\mathbf{k}, \lambda}$  と  $c_{\mathbf{k}, \lambda}^\dagger$  の量子化に対応しているのであった。この事より、確かにパラメータ空間での経路積分は電磁場の量子化に成功していると考えられる。これは電磁場の Hamiltonian がパラメータ空間で調和振動子であった事に強く依存している。

## E.3 電磁場の Lagrangian 密度

自由電磁場の Lagrangian 密度は

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$$

で与えられる。ここで  $A^\mu$  はゲージ場であり、 $F^{\mu\nu}$  は場の強さと呼ばれるもので

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$$

と書けている。この  $F^{\mu\nu}$  を具体的に書くと

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

となっていて、これは電場と磁場を表している。これは当然で、 $F^{\mu\nu}$  はゲージ不変でありゲージ不変な物理量は電場と磁場であるからである。ゲージ場に対する方程式は

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \partial_\mu \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu \partial_\mu A^\mu = 0$$

この式は4個あるように見えるが、実際には独立な式は3個である。それは明らかで、

$$\partial_\nu \partial_\mu F^{\mu\nu} = \partial_\mu \partial^\mu \partial_\nu A^\nu - \partial_\nu \partial^\nu \partial_\mu A^\mu = 0$$

が恒等的に成り立つからである。そうすると、未知変数は  $A^0, A^1, A^2, A^3$  の4個であるから、方程式の数が1個足りないことになる。この事がゲージ自由度があるという事と関係している。 $A^\mu$  には任意性があるのである。すなわち、この方程式だけからでは  $A^\mu$  を決める事は出来ないという事である。そのため、ゲージ固定する必要がある。大切な事は、ゲージ固定して  $A^\mu$  を決定した時に物理的な観測量である電場と磁場がきちんと求まっている事である。例えば、クーロンゲージを取ると  $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$  であるので、

$$\nabla^2 A_0 - \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{A}) = \nabla^2 A_0 = 0$$

となり、 $A^0$  に対しては拘束条件の方程式になっている。自由場の場合、 $A^0 = 0$  として一般性を失わないので、結局  $\mathbf{A}$  に対する方程式は

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right) \mathbf{A} = 0$$

となっている。この一般解は

$$\mathbf{A}(x) = \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\lambda=1}^2 \frac{1}{\sqrt{2V\omega_{\mathbf{k}}}} \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{k}, \lambda) \left[ c_{\mathbf{k},\lambda} e^{-ikx} + c_{\mathbf{k},\lambda}^\dagger e^{ikx} \right]$$

と書けて、この場合の展開係数をオペレータにする事により、電磁場の量子化が行われる事になる。

## E.4 Dirac 場の Lagrangian 密度

質量  $m$  を持つ質点に対する自由 Dirac 場の Lagrangian 密度は

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\partial_\mu\gamma^\mu - m)\psi = \psi_i^\dagger[\gamma_0(i\partial_\mu\gamma^\mu - m)]_{ij}\psi_j$$

で与えられる。ここで

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \begin{pmatrix} \psi_1(\mathbf{r}, t) \\ \psi_2(\mathbf{r}, t) \\ \psi_3(\mathbf{r}, t) \\ \psi_4(\mathbf{r}, t) \end{pmatrix}$$

$$\psi^\dagger(\mathbf{r}, t) = (\psi_1^\dagger(\mathbf{r}, t) \quad \psi_2^\dagger(\mathbf{r}, t) \quad \psi_3^\dagger(\mathbf{r}, t) \quad \psi_4^\dagger(\mathbf{r}, t))$$

であり、また  $\bar{\psi}$  は  $\bar{\psi} \equiv \psi^\dagger\gamma_0$  と定義されている。

### E.4.1 Dirac 方程式

この時、質量  $m$  を持つ自由なフェルミオンの Dirac 方程式は

$$\left(i\frac{\partial}{\partial t} + i\nabla \cdot \boldsymbol{\alpha} - m\beta\right)\psi(\mathbf{r}, t) = 0$$

と書かれている。

### E.4.2 Dirac 場の量子化

Dirac 場の量子化は電子と陽電子対が生成される事も勿論実験的な要請の一つであるが、実はそれ以上に重要な実験的な要請がある。それはパウリ原理である。電子は一つの状態に 1 個しか入れない。この実験事実を説明するには、Dirac 方程式だけでは不十分である。このため、Dirac 場を反交換関係式で量子化する事がどうしても必要になる。場の量子化の仕方は基本的には電磁場と同じである。まず、フェルミオン場  $\psi$  を自由場の解で展開する。

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{n}, s} \frac{1}{\sqrt{L^3}} \left( a_{\mathbf{n}}^{(s)} u_{\mathbf{n}}^{(s)} e^{i\mathbf{p}_{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{r} - iE_{\mathbf{n}} t} + b_{\mathbf{n}}^{(s)} v_{\mathbf{n}}^{(s)} e^{i\mathbf{p}_{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{r} + iE_{\mathbf{n}} t} \right)$$

ここで  $u_{\mathbf{n}}^{(s)}$  と  $v_{\mathbf{n}}^{(s)}$  は自由 Dirac 方程式のスピンル解であり

$$u_{\mathbf{n}}^{(s)} = \sqrt{\frac{E_{\mathbf{n}} + m}{2E_{\mathbf{n}}}} \begin{pmatrix} \chi_s \\ \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}_{\mathbf{n}}}{E_{\mathbf{n}} + m} \chi_s \end{pmatrix}$$

$$v_n^{(s)} = \sqrt{\frac{E_n + m}{2E_n}} \begin{pmatrix} -\frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}_n}{E_n + m} \chi_s \\ \chi_s \end{pmatrix}$$

と与えられている。さらに

$$\mathbf{p}_n = \frac{2\pi}{L} \mathbf{n}, \quad E_n = \sqrt{\mathbf{p}_n^2 + m^2}$$

を満たしている。また、 $\chi_s$  はスピンの固有関数を表し、 $s$  は  $s = \pm \frac{1}{2}$  である。ここで、Dirac 場の量子化は

$$\{a_n^{(s)}, a_{n'}^{\dagger(s')}\} = \delta_{s,s'} \delta_{\mathbf{n}, \mathbf{n}'}, \quad \{b_n^{(s)}, b_{n'}^{\dagger(s')}\} = \delta_{s,s'} \delta_{\mathbf{n}, \mathbf{n}'}$$

および

$$\{a_n^{(s)}, a_{n'}^{(s')}\} = 0, \quad \{b_n^{(s)}, b_{n'}^{(s')}\} = 0, \quad \{a_n^{(s)}, b_{n'}^{(s')}\} = 0$$

によって行われている。この最後の反交換関係式により、パウリ原理が満たされる事は容易に確かめられる。ここでの場の量子化は、負のエネルギー状態をそのまま使ったものになっている。摂動論で計算を実行する場合、反粒子描像で計算した方が便利である場合が多い。勿論、どちらで計算しても、観測量は同じように得られる事に変わりはない。

## E.5 量子重力場の理論

重力場自体はこれまで実験的にも良く知られて来ている。質量  $m_1$  と質量  $m_2$  がある時、いかなる場合でも2つの質点間に必ず引力が働く。これは実験事実である。これまでのどの観測をみても、例外は無く常に引力である。しかも、その質点間の引力  $V(r)$  は

$$V(r) = -G \frac{m_1 m_2}{r}$$

と書ける事もわかっている。しかしながら、この力を生み出す「場」が何者かわかっていないのである。ある意味で、わかる前に一般相対論の方に人々の興味が移ってしまったと言った方が良いのであろうと思う。それでは、どのような場がその力をつかさどるのであろうか？

### E.5.1 量子重力場の Lagrangian 密度

この問題を解決しているのが、これから議論する Lagrangian 密度である。新しい量子重力場の理論の Lagrangian 密度は重力場を  $\mathcal{G}$  とすると

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - e\bar{\psi}\gamma^\mu A_\mu\psi - m(1 + g\mathcal{G})\bar{\psi}\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\nu\mu} + \frac{1}{2}\partial_\mu\mathcal{G}\partial^\mu\mathcal{G}$$

書く事ができる。この重力場  $\mathcal{G}$  はスカラー場であると仮定している。これはスカラー場による相互作用が常に引力になる事がわかっているからである。スカラー場であるために、Lagrangian 密度の相互作用項として、その質量項の中に入れる事が出来て、重力が常にその質点の質量に比例するという実験結果と整合性のある理論を作る事が出来ているのである。この相互作用の形を考えた人は恐らくこれまで非常に沢山いるものと思われる。

それでは、何故、この相互作用の形式が人々に受け入れられなかったのであろうか？それは、繰り込み理論と関係していると考えられる。これまで長い間、ゲージ理論のみが繰り込み可能であると人々は思い込んできたのであり、それ以外の理論は繰り込み可能性を証明できないから理論としては不十分であると考えられている。このゲージ理論に対する必要以上の「評価」が何処から来ているのかと言う点も、今となっては明らかになっている。第4章で述べたように、ゲージ理論への「信奉」は、基本的には繰り込みが持っていた問題点を回避する唯一の手法であると人々が考えたからである。QEDの繰り込み理論は、その理論の複雑さにもかかわらず、Lambシフトの実験値にしても電

子の磁気能率の実験値にしてもかなりしっかりした精度で再現されているのである。これは繰り込み理論がいかに優れた理論体系であるかを如実に示している。しかしながら、この理論計算にも重大な欠陥があったのである。それはフォトンの真空偏極といわれるものであり、Feynman グラフで計算するとフォトンの自己エネルギーはどうしても2次発散してしまうのである。このため、人々はこの発散を消去するために、様々な事を考えてきたが、最終的には「ゲージ条件」という一見もっともらしい「要請」により、2次発散の部分を消去して残りの Log 発散の部分を繰り込みに入れて計算したのである。このフォトンの自己エネルギーに対する繰り込み後の有限項は、Lamb シフトには効かないし、電子の  $g-2$  にも2ループの大きさで効いて来る程度の影響しかないため、それ程実験との比較では問題にはならず、「ゲージ条件」の要請が正しいものと人々は考えてきたのである。

### E.5.2 量子重力の運動方程式

Lagrangian 密度が得られるとそれから運動方程式が計算できる。Dirac 方程式は

$$i\gamma^\mu \partial_\mu \psi - e\gamma^\mu A_\mu \psi - m(1 + g\mathcal{G})\psi = 0$$

となり、重力場に対する運動方程式は

$$\partial_\mu \partial^\mu \mathcal{G} = -mg\bar{\psi}\psi$$

となる。この重力場に対して、静的近似をする

$$\mathcal{G} = \mathcal{G}_0(\mathbf{r}) + \bar{\mathcal{G}}(x)$$

ここで、 $\mathcal{G}_0(\mathbf{r})$  は時間には依らないと仮定している。この場合、 $\mathcal{G}_0(\mathbf{r})$  に対する方程式は

$$\nabla^2 \mathcal{G}_0 = mg\rho_g$$

となり、これは重力に対する Poisson 型方程式である。ここで  $\rho_g$  は時間に依らない密度を表している。この場合、重力エネルギー  $H_G^S$  は

$$H_G^S = mg \int \rho_g \mathcal{G}_0 d^3r + \frac{1}{2} \int (\nabla \mathcal{G}_0)^2 d^3r = -\frac{m^2 G_0}{2} \int \frac{\rho_g(\mathbf{r}') \rho_g(\mathbf{r})}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|} d^3r d^3r'$$

となる。これは、勿論よく見慣れた方程式であり、常に引力であるし、またそれぞれの質量に比例している。

### E.5.3 重力場の量子化

ここで極めて難しい問題に遭遇する。この重力場は量子化すべきであろうかという事である。これまで繰り返し述べてきたように、場の量子化は現在までの所、実験を記述するために導入したのであるが、その物理的な本質は今ひとつ明解とは言えないのである。はっきりしている事は、電磁場とフェルミオン場はそれぞれ交換関係と反交換関係で場の量子化を行うべきであるという事である。しかし、重力場に対しては、実験的な要請はない。理論的にも重力場を量子化する必要性は全くないのである。

重力場の量子化を行わなければどうなるかと言えば、静的な重力場がフェルミオン間に存在して、これまでの実験的な観測事実と全く矛盾がなく、逆に言えばそれだけである。

重力場を量子化したらどうなるのであろうか？これは実は QED の場合と全く同じように繰り込みの過程を経て Graviton(重力子) が宇宙空間に存在する事になる。しかし、この Graviton は相互作用が非常に弱いため、どの様に宇宙物理的に影響があり得るのかまだ、不明である。

### E.5.4 量子重力の繰り込み理論

重力場を量子化した場合、どうしてもその量子化から派生する発散の問題があり、その無限大を波動関数に繰り込む事が必要がある。これは、しかしながら QED の場合とほとんど同様に処理できる事がわかっており、また多少複雑でもある事からここでは議論しないで、教科書を参照していただく事にしたい。

繰り込みで大切な事は、発散が常に Log 発散であるという事である。フォトンの自己エネルギーのところでも議論したように、Log 発散は実は無限大といっても、現実の数としては、物理では常に有限である。従って、この量を波動関数の再定義の中に入れてしまう事は至極合理的な事である。QED と同様に、重力の場合も Graviton の自己エネルギーは繰り込みに入れてはいけない項になっている。従って、フェルミオンの自己エネルギーだけを、重力とフェルミオンとの相互作用から来る項により計算して繰り込み処理するば正しい計算が得られるのである。

### E.5.5 重力場での Lamb シフト

重力場に束縛されているフェルミオンの場合、水素原子における Lamb シフトと同じ現象が原理的には生じてくる。フェルミオンの自己エネルギーが自由 Fock 空間での繰り込みと束縛状態での繰り込みでどうしても差が出てしまうからである。しかしながら、この物理量は極めて小さくて恐らくは観測不能であると思われる。まだ、具体的な計算は行われていないので、興味のある場合、計算してみる事も面白いかも知れない。その場合、具体的な重力による束縛問題を考える必要があり、余程強い重力場でないと差は出てこないものと思われる。

## 付録F 物理屋の数学公式

物理では常に色々な数学が出てくる。物理学では数学は道具であり、利用するだけである。そもそも数学に対する物理屋の興味は数学者とは本質的に異なっている。我々物理屋は、例えばの話だが、複素積分によってポールをうまく取れば積分値が正しく求まると言う、その事だけで十分である。しかし数学者はそのような当たり前の事には興味を持っていないのである。どんなに頑張っても、物理屋が数学者に数学で対抗できるはずがない。

物理屋にとっては数学の公式が正しい事が全てである。しかし、そうかといって数学の公式を丸呑みして覚えてしまって、そいつを使いこなせるかと言うと、実はなかなか難しいのである。それで、いくつかの数学の公式は、その証明を物理屋なりに理解しておいた方が得策である事が多い。ここでは、基本的に割合重要である公式の解説をしておきたい。但し、証明として使っている手法は、厳密な意味では勿論証明ではない。

### F.1 何故偏微分か？

大学1年生で微分を勉強する時、必ず偏微分が一緒に出てきて多少面食らうものである。何故、偏微分が必要なのかという事が、最初の頃は今一つすっきり納得できないものである。ここでは、数学の最も基本である偏微分について簡単な解説をしたい。

#### F.1.1 偏微分の定義

関数  $f(x, y)$  に対して

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \equiv \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} \quad (y \text{ をとめて } x \text{ で微分})$$

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \equiv \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y} \quad (x \text{ をとめて } y \text{ で微分})$$

が偏微分の定義である。それ以上の意味は全くない。

### F.1.2 2変数関数の偏微分

ここで関数  $f(x(t), y(t), t)$  を全微分したい。すなわち、

$$\frac{df(x(t), y(t), t)}{dt} \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(x(t + \Delta t), y(t + \Delta t), t + \Delta t) - f(x(t), y(t), t)}{\Delta t}$$

を計算したいのである。この時、次のようにある項を引いたり足したりを繰り返して変形して行くとどうしても偏微分を使わざるを得ないのである。すなわち、

$$\begin{aligned} \frac{df(x(t), y(t), t)}{dt} = & \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left\{ \frac{f(x(t + \Delta t), y(t + \Delta t), t + \Delta t) - f(x(t), y(t + \Delta t), t + \Delta t)}{\Delta x} \frac{\Delta x}{\Delta t} \right. \\ & + \frac{f(x(t), y(t + \Delta t), t + \Delta t) - f(x(t), y(t), t + \Delta t)}{\Delta y} \frac{\Delta y}{\Delta t} \\ & \left. + \frac{f(x(t), y(t), t + \Delta t) - f(x(t), y(t), t)}{\Delta t} \right\} \end{aligned}$$

と変形できる。ここで  $\Delta x \equiv x(t + \Delta t) - x(t)$ ,  $\Delta y \equiv y(t + \Delta t) - y(t)$  と定義してある。よって

$$\frac{df(x(t), y(t), t)}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial t}$$

が示される。この式を見てわかるように、偏微分を使うと確かに簡単な形で書く事が出来るし、合理的でもある。

## F.2 $\delta(\mathbf{r})$ 関数

物理では、どの基礎科目でも  $\delta(\mathbf{r})$  関数が出てくるのであるが、この使い方は慣れたら簡単である。従って、それを解説する事は必要ないかも知れない。しかし、学部の2年生くらいだと、まだ、どうしてもこの  $\delta(\mathbf{r})$  関数に違和感を覚えるものである。ここではこの  $\delta(\mathbf{r})$  関数が何故必要になったかに関する数学的な理由を議論したいと思う。

まず、最初にチェックするべき式は

$$\nabla^2 \frac{1}{r} = 0$$

の式である。これはどのように計算しても簡単にわかるものである。ところが、この  $\nabla^2 \frac{1}{r}$  を原点を中心とした半径  $a$  の球全体で積分すると

$$\int_{|\mathbf{r}| \leq a} \nabla^2 \frac{1}{r} d^3r = -4\pi$$

となるのである。この証明は簡単で、Gauss の定理を用いて

$$\int_{|\mathbf{r}| \leq a} \nabla^2 \frac{1}{r} d^3r = \int_{|\mathbf{r}|=a} \left( \nabla \frac{1}{r} \right) \cdot d\mathbf{S} = - \int_{|\mathbf{r}|=a} \frac{\mathbf{e}_r}{r^2} \cdot \mathbf{e}_r r^2 d\Omega = -4\pi$$

である事が直ちにわかるのである。

何故、このような事が起こったのであろうか？答えは簡単で、最初の式は確かに正しいがしかし、この場合常に原点は除かれている。これは式を見れば当然であった。つまりは、原点だけが特殊な役割を担っていたのである。そこで、 $\delta(\mathbf{r})$  関数を定義する必然性が出てくるのである。すなわち、

$$\int \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) f(\mathbf{r}') d^3r' = f(\mathbf{r})$$

と定義するのである。こうすると、 $\nabla^2 \frac{1}{r} = 0$  の式は修正されて

$$\nabla^2 \frac{1}{r} = -4\pi\delta(\mathbf{r})$$

となり、これだと確かに原点での発散がうまく処理されている事になるのである。

$\delta$ -関数に対する別のより直感的な定義式は、1次元の  $\delta(x)$  関数に対して、

$$\delta(x) = \begin{pmatrix} 0 & x \neq 0 \\ \infty & x = 0 \end{pmatrix}$$

とするものである。但し、この無限大は  $\frac{1}{x}$  の発散よりも弱冠弱いとされているが、物理屋にはこのような事は不要であると思う。

### F.2.1 Green 関数

$\delta$ -関数と関係してよく出てくるものに、Green 関数がある。この Green 関数に関しては、大学時代全くわからなかったものである。ひどく難しそうに教えられたのであるが、実際には単に便利であるとして物理屋は使えば良いものである。Green 関数  $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  は例えば Poisson 方程式

$$\nabla^2 \phi(\mathbf{r}) = -\frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon_0}$$

を解こうとする時に利用するものである。Green 関数  $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  を

$$\nabla^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$$

と定義する。この時、Poisson 方程式の解は Green 関数  $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  を使って

$$\phi(\mathbf{r}) = -\frac{1}{\epsilon_0} \int \rho(\mathbf{r}') G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') d^3 r'$$

と書く事が出来る。この証明は簡単で、実際にこの式を Poisson 方程式に入れてみれば良いのである。ちなみに、この  $\nabla^2 \frac{1}{r} = -4\pi\delta(\mathbf{r})$  と Green 関数の定義式と比較すると境界条件がない場合、

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

である事がわかる。実際、この式を Green 関数により  $\phi$  を求めた式に代入すると

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3 r'$$

と求められ、これは良く知られた式になっているのである。ここで大切な事は、微分方程式を解く立場で言うと、境界条件が入ってくると Green 関数に対する方程式を解く方が Poisson 方程式を直接解くより遥かにやさしいと言う事である。

### F.3 Gauss の定理

上記においてもでて来たが、Gauss の定理は確かに物理では頻繁に使う公式である。それは、ある任意の閉じた体積に対して任意のベクトル量  $A$  の発散

量  $\nabla \cdot \mathbf{A}$  を積分する。その結果、この積分量はこの体積を囲む表面積において  $A_n$  という法線方向の成分について積分したものと一致しているというものである。式で書くと

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{A} d^3r = \int_S A_n dS_n$$

というものである。ここで、 $A_n$  は表面でのベクトル  $\mathbf{A}$  の法線方向の成分を表し、また  $dS_n$  はその表面での表面積分を表している。方向は外向きを正としている。

この式の証明は3つのステップに沿って行うとわかり易いと思う。まずは、1辺が  $a$  の立方体を考えて、この立方体の隅の1個を原点にとる。この立方体に対して Gauss の定理が成立する事を証明する。次に、この立方体を8つに切り、1辺が  $a/2$  の立方体に対して Gauss の定理を証明する。この時に、それぞれ小さな立方体に関しては接する面どうしが打ち消し合い、結局全体の表面だけが積分に効いて来る事が示される。最後に、ステップ3として、任意の体積を考え、これを無限小の立方体に分割して考えると、明らかに接する面はお互いに反対向きになり打ち消し合う事が容易にわかる。従って、結局全体の表面積の積分になる事が証明されるのである。

### F.3.1 立方体での Gauss の定理

Gauss の定理の証明をまず立方体で行う。この場合、左辺の積分は

$$\begin{aligned} \int_{0 \leq x, y, z \leq a} \nabla \cdot \mathbf{A} d^3r &= \int \left[ \int_0^a dx \left( \frac{\partial A_x}{\partial x} \right) \right] dydz + \int \left[ \int_0^a dy \left( \frac{\partial A_y}{\partial y} \right) \right] dzdx \\ &\quad + \int \left[ \int_0^a dz \left( \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) \right] dxdy \end{aligned}$$

よって、

$$\begin{aligned} \int_{0 \leq x, y, z \leq a} \nabla \cdot \mathbf{A} d^3r &= \int (A_x(a, y, z) - A_x(0, y, z)) dydz + \int (A_y(x, a, z) - A_y(x, 0, z)) dzdx \\ &\quad + \int (A_z(x, y, a) - A_z(x, y, 0)) dxdy \end{aligned}$$

となり、この右辺は立方体における表面積分である事が直ちにわかるのである。すなわち、

$$\int_{0 \leq x, y, z \leq a} \nabla \cdot \mathbf{A} d^3r = \int_S A_n dS_n$$

が証明されたのである。

### F.3.2 一般の場合の Gauss の定理

Gauss の定理の証明が立方体でわかると、前述したように後は簡単である。まずは立方体を 8 つに切ってそのそれぞれに対して Gauss の定理を示すとわかる事は、それぞれにおいて面が接している所は常に打ち消し合っている事が示されるのである。従って、残るのは全体の表面での積分になってくるのであるが、これは直ぐにチェックできる計算である。この事がわかると、一般の場合も同じように無限小の立方体に分割して見れば明らかなように、接している所は打ち消し合い、最終的に残る積分はすべて表面となるのである。

## F.4 Stokes の定理

Gauss の定理の証明と同じくらい重要な数学の定理に Stokes の定理

$$\int_S \nabla \times \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \int_C \mathbf{A} \cdot ds$$

がある。ここで、 $C$  は閉曲線を表し、 $S$  はその閉曲線で囲まれる面積を表し、この面積積分は右手の法則に従って面積積分の方向を決めている。この証明も一度簡単にしておくとう理解が深まり、また応用の仕方がわかるものと思う。

### F.4.1 長方形での Stokes の定理

Stokes の定理の証明をまず長方形で行う。この長方形の一つの頂点を原点に取り、 $x$ -軸方向に  $a$  そして  $y$ -軸方向に  $b$  の長方形を考える。長方形が  $x-y$  平面にあるため、 $d\mathbf{S}$  の方向は  $z$ -軸である。よって左辺は

$$\int_S \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) dx dy =$$

$$\int_0^b [A_y(a, y, z) dy - A_y(0, y, z)] dy - \int_0^a [A_x(x, b, z) dx - A_x(x, 0, z)] dx$$

となる。これはしかし長方形の周囲を一周積分する事に対応している。すなわち、上式の右辺は原点から  $x$ -軸に沿って  $a$  まで積分し、そこから  $y$ -軸方向に沿って  $b$  まで積分し、さらにそこから  $x$ -軸に沿って  $0$  まで積分し、そして最終的に  $y$ -軸方向に沿って原点まで積分したものである。これは長方形に対して Stokes の定理が証明された事に対応している。すなわち

$$\int_S \nabla \times \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \int_C \mathbf{A} \cdot ds$$

が示された事になっている。

### F.4.2 一般の場合の Stokes の定理

一般の場合の Stokes の定理の証明は、Gauss の定理の時の証明と同じであり、上式の場合の長方形を4つに分割してみる。そうすると、分割されたものの長方形でお互いに接している線積分は打ち消し合い消えてしまう。結局。残るのは外回りの線積分だけになる。よって、この場合も確かに Stokes の定理が証明された事になっている。この事より、一般の閉曲線で囲まれる面積を無限に小さな長方形に分割してみると、やはり重なった部分は打ち消し合い消えてしまう。そして残った線積分はすべて閉曲線そのものの線積分になっているのである。従って、確かに任意の閉曲線で囲まれる面積に対して Stokes の定理が成り立っているのである。

## F.5 線形代数

物理でよく使う数学として、勿論、微分方程式が最も良く出てくる事は明らかだが、線形代数の知識もかなり重要である。ここでは、必要最小限の数学について簡単に解説して行きたい。行列は最初はただ並べただけだが、これに演算を定義する事が出来たという事が大きな点である。この行列の問題は学部学生が最も苦手とする所である。この行列の問題をしっかりと理解するには、2行2列の行列の性質をきちんと理解する事である。そうすれば、一般の行列は類推でできるものである。それでもわからなかったら、数学者に質問して理解する事が一番である。

### F.5.1 エルミート行列

エルミート行列の定義は  $A^\dagger = A$  である。ここで  $A^\dagger$  の定義が必要である。全て2行2列の行列で示す事にする。すなわち具体的に書くと

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad A^\dagger = \begin{pmatrix} a_{11}^* & a_{21}^* \\ a_{12}^* & a_{22}^* \end{pmatrix}$$

であり、エルミート行列は従って

$$A = \begin{pmatrix} a + d & b - ic \\ b + ic & a - d \end{pmatrix} = a + b\sigma_x + c\sigma_y + d\sigma_z$$

と書けることが簡単にわかる。ここで、 $a, b, c, d$  は実数である。また、 $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$  は Pauli 行列であり

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

と表されている。

### F.5.2 ユニタリー行列

ユニタリー行列の定義は  $U^\dagger U = 1$  である。この時、 $U$  は

$$U = e^{i(a+b\sigma_x+c\sigma_y+d\sigma_z)}$$

と書く事ができる。これは明らかで、 $U^\dagger = e^{-i(a+b\sigma_x+c\sigma_y+d\sigma_z)}$  であるので、常に

$$U^\dagger U = e^{-i(a+b\sigma_x+c\sigma_y+d\sigma_z)} e^{i(a+b\sigma_x+c\sigma_y+d\sigma_z)} = 1$$

と言う条件を満たしている。

### F.5.3 行列式

行列式は 2 行 2 列の行列の場合は簡単で

$$\det A = A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21}$$

である。一般の場合は

$$\det(A) \equiv \sum_P \epsilon_{(m_1 \dots m_n)} A_{1m_1} \cdots A_{nm_n}$$

となる。ここで、 $\epsilon_{(m_1 \dots m_n)}$  は偶置換の場合は  $+1$  であり、奇置換の場合は  $-1$  とする。

### F.5.4 行列式の公式

行列式の公式でよく使うものとして覚えていた方が便利なものに

$$\det A = e^{\text{Tr}(\ln A)}$$

というものがある。この公式の簡単でしかし厳密さは全く無い証明を書いておく。

証明： まず、 $A$  が  $x$  によっているとする。この時  $\det A$  の微分は

$$\begin{aligned} \frac{d\det(A(x))}{dx} &= \sum_{ij} \Delta_{ij} \frac{dA(x)_{ij}}{dx} = \sum_{ij} \det(A(x)) (A^{-1})_{ji} \frac{dA(x)_{ij}}{dx} \\ &= \det(A(x)) \operatorname{Tr} \left( A^{-1} \frac{dA}{dx} \right) \end{aligned}$$

であり、 $\Delta_{ij}$  は小行列式である。ここで  $A(x) = e^{xB}$  とし、また  $B$  は定数行列であるとすると、

$$\frac{d\det(e^{xB})}{dx} = \det(e^{xB}) \operatorname{Tr}(e^{-xB} e^{xB} B) = \det(e^{xB}) \operatorname{Tr}(B)$$

である事がすぐわかる。この微分方程式は直ちに解けて、

$$\ln \det(e^{xB}) = x \operatorname{Tr}(B) + C$$

となる。初期条件として  $x = 0$  を入れると  $C = 0$  が求まる。従って、 $\det(e^{xB}) = e^{x \operatorname{Tr}(B)}$  となる事がわかる。ここで、 $x = 1$  と  $A = e^B$  とすれば

$$\det(A) = e^{\operatorname{Tr}(\ln A)}$$

が証明された事になっている。