

アインシュタインへの伝言

物理は単純明快である。もし、ある理論の解説が不明瞭で理解不能な場合、ほとんどは、その解説者の理解が不十分か、またはその元の理論が間違っているかのどちらかである。

藤田 丈久

はじめに

アインシュタインが20世紀初頭に発表した3編の論文は、物理学上の業績として偉大である事は説明するまでもない事である。特に、光電効果の仕事は物理学に極めて重要な影響をもたらした事は疑い得ない。当時 Planck が提唱し、しかし Planck 自身本当には信じていなかった量子仮説をいち早く光電効果を説明するために応用したセンスは際立っているし、アインシュタインが新しいアイデアと豊かな発想を持っていた事を如実に示している。

しかしながら、一方において、アインシュタインが等身大をはるかに超えて、あまりにも有名になり、過大評価されてしまったために、20世紀後半の理論物理学に対して負の遺産を残してしまった事も事実である。この半世紀間の理論物理学においては、アインシュタインの呪縛により人々の自由な発想がかなり奪われ、制限されてきたのである。そして、この事は予想を超えて重大な影響を理論物理学に与え続けており、それがアインシュタインの本意では無いにせよ、この事実は極めて深刻である。具体例として、近年の素粒子論および宇宙物理学はこの呪縛により、正しい方向性を大幅に失いつつある。例えば最近の超弦理論では、その研究者達自身が物理的観測量を再現する事に関心が無いと言って平気である程である。さらに宇宙論は一点から爆発したというビッグバン模型が全てであるという根拠のない「信仰」にがんじがらめになっていて、この宇宙が閉じた宇宙か開いた宇宙かなどというおよそ非物理的な問題を深刻に議論している。ついに、最近では宇宙の真空からエネルギーが生み出される可能性があるなどと、全く非物理的なレベルの議論さえされているのである。

この呪縛とは何か？、それはアインシュタインの一般相対論の事であり、この奇妙な理論が理論物理学の正常な発展を阻害し続けてきたのである。アインシュタインの一般相対論は1960年代までは、理論物理学が比較的正常な発展をしていたために、物理学的にはほとんどまともに扱われる事はなかったのである。勿論、一般相対論に対する数学上の関心とそれに関連する進展がなされてきた事は事実であるが、これは物理学と関係する自然現象に応用しない限り、何も問題を起こさないものである。ここで正常な発展と言っているのは、1960年代までは、物理学上で理論を発展させた時には、常に実験と比較しながら検証を重ねてきたと言う意味を含んでいる。その当時までに、少数ながらも心ある物理学者達は、一般相対論は水星の近日点移動を観測とは逆に予言し

ている事を知っていたものと思われる。後で見るように、この検証は Newton 力学をきちんと解けばよく、それ程難しい数学を使う事無くできるものであり、学部生でも十分可能である。従って、物理学における観測量は何かと言う問題をしっかり考える物理屋は当然、この水星の近日点移動の問題を検証した可能性があり、従って、観測値は一般相対論では理解出来ない事がわかっていたものと思われる。

しかしながら、1970年代に入ると、ほとんど当然のように一般相対論が信じ始められ、その一般相対論の理論的検証となるとぱったりと止まってしまったのである。この「一般相対論信仰」の一つの根拠になったのが宇宙の背景輻射である。この宇宙は光(電波)で満ちていると言う観測事実自体は大変面白い事であり、発見した二人がノーベル賞を受賞したのも当然である。しかし、この宇宙の2.7度K輻射はある時点で宇宙が非常に熱い時があったと言っているだけであり、それ以上の事を宇宙の背景輻射から学ぶ事は出来ていないし、また良くわからない。

さらに困った事に、現代物理においては、アインシュタインの一般相対論を批判する事がほとんどタブーにさえなっている。しかしながら、アインシュタインが一般相対論を作るにあたり出発点としているのは、Gedanken Experiment (思考実験)なのである。これは科学において最も重要な基本姿勢である「実験を基礎として理論を作る」という大原則をくずしてしまった事に対応している。実際、以下に見るように、一般相対論が基礎を置いている等価原理は相対性原理と矛盾している。そして、彼が量子力学を理解しようとする事よりも一般相対論にこだわってきた事実を見る限り、アインシュタインが相対性原理を深く理解していたとは到底考えられないのである。まずはアインシュタインの呪縛をといて新しい物理学を作って行く事がこれからの理論物理学の緊急課題となっている。その際、現代の我々物理屋にとって重要な事は、「昨日までの専門家が明日も専門家である保障はない」という当たり前の事を常に頭に入れておく事であると思われる。恐らくこの事は、どの分野でも等しく当てはまる事であり、常に新しい事を考えそして理解し続けるためには余程謙虚である事が重要であるという当然の事を忘れてはならないという事であろうと思われる。

この本では若い人達がアインシュタインの呪縛から解放され、自由に物理を考えるための一石になる事の願いを込めて書いている。一般相対論の数学は微分幾何を駆使しているため、かなり複雑である。しかし、その物理は単純である。さらに、一般相対論ではなく、通常の場合の理論の言葉で、重力を理解し、また光が重力と場の理論的に相互作用するという事も解説して行きたい。そして、できる限り平明にして学部の3年生でも、さらには高校生でもしっかり考

えればその本質は理解できるように解説して行くつもりである。これはある意味で、アインシュタインへの伝言でもある。

具体的な内容として、まず宇宙論を紹介しビッグバン模型の問題点を指摘する。次に、相対性原理の持っている意味を解説し、何故それが必要であったかを明確にして行こう。そして、この事を踏まえて、一般相対論の問題点をしっかり理解出来るようにしたいと思う。さらに、新しい重力理論を解説して行き、それに基づく新しい宇宙論にも触れてゆきたい。特に、宇宙論の具体的な問題に関しては、今後の若手の研究を待つ事になる問題が多くある。最後に、今後の物理学の展望を議論する。特に、何が物理学で基本原理として信頼して良いかと言う問題を取り上げている。いずれにせよ、この本を読みそして相対論について考える事により、新しい理論体系をしっかりと作ってゆくための基礎的な頭のトレーニングになる事を願っている。

物理の非専門家にとっては、この本の一部を理解しその他は読み飛ばしても必ず何か得るものがあるようにと、本の構成を考えている。細かい数式は理解できなくても、現代物理が抱えている問題点は理解して、さらには将来の物理の方向も見据えられるように理解を深めて貫きたいと思っている。数式を使った解説は基本的には付録に入れてある。付録はある程度物理の素養がないと読んで面白いと思う事は難しいかも知れない。しかしながら、付録の一部が若い物理屋にとって新しい問題を見つけるための「雑談場所」として活用されたら最高であるという思いはある。いくつかの問題で、さらに研究されるべき問題点を挙げてあるし、それらが将来発展的に理解される事を望んでいる。

この本を読み進む前に、本の内容とは直接は関係しないのだが、一つコメントをしておきたい。この解説書は、前述したように若い人達が一般相対論に代わる新しい量子重力の物理を出来るだけしっかりと理解できる様、そして基本的な物理学をわかり易く説明するように最大限の努力をしている。しかし、これは物理学において、「自転車の乗り方」を教える事に対応している。この「自転車の乗り方」を正しく理解する事は当然若い人達にとって重要である。しかしながら、だからと言って簡単に物理がわかるわけではない。物理がしっかりわかって、実際に計算が出来るようになるためには別の大変さがある。それは自転車で言ったら、実際に「自転車に乗れる事」である。自分が「自転車に乗れている」場合、物理学で言ったら具体的な計算までしっかり出来る事を意味している。この本を読んでみて、具体的な計算を試みたくなり、実際それが出来るようになったら、それは物理学において「自転車に乗れた事」に対応している。恐らくは、物理で自転車に乗れるレベルまで行くためには、もう少しアドバンストな教科書を読み、その内容を自分で検証する事が必要になる

事と思われる。しかし、誤解しないでほしいのは、物理学の理解は数学の理解とは違う事である。数学における式の変形は複雑な場合が多いが、それは困れば誰かに、例えば数学者に聞けば良いのである。むしろ物理屋にとって、数学関係で必要な事は単純計算（掛け算とか三角関数の変形とか）をいつもしっかり行い、その体力をつけておく事であると思う。物理学の理解はやはり自分でその現象をまずしっかり理解して、自分の頭の中で絵を描く事である。正しい絵を描ければ、たとえ数学での計算が多少間違っていたり、式の変形が遅かったりしても、全く問題なく物理学を深く理解でき、そしてその楽しさが良くわかるものである。常に、自然現象に対する正しい絵を描く直観力を大切にして欲しいものである。

これまで、物理学における日本の「秀才学生」とは、どちらかと言えば、「翻訳者の」人達が主流であった気がする。少なくとも、大学受験に強い事は必ずしも物理の理解力と関係あるとは言えず、それどころかじっくり考える力と言う観点からすれば、むしろマイナスになっていると思った方が良い程である。実際、現在においても、教科書の理解が速かったり、試験においてもその理解が速くて、その速さを誇示する事が秀才である事の条件であった様に思われてならない。しかし、研究者になった途端、現実とは全く逆で、遅くてもいいから、じっくりしかも深く物理学を理解する事しか、面白くて新しい研究は出来ないのである。従って、これからの若い人達はゆっくりそして楽しく物理学を勉強して行って欲しいものであるし、物理において考える力をしっかり身につけて行く事を切に望んでいるものである。

なお、ある程度理論物理学を理解している若い人々のために、数式を使った新しい重力理論と場の理論についての解説を付録に入れてある。数式は言葉と同じでそれに慣れていないとなかなか自分の中に入ってくる事は難しいと思う。逆に言えば、慣れればその方が簡単であるということを意味している。さらに、これから物理を学ぼうとする若い人達用に、力学、電磁気学、量子力学、場の理論といった基本的で重要な物理学を解説してある。これら基本的な物理学をぶれる事無く、しっかり理解して行けば、一般相対論の問題点だけではなく、今後の物理学をしっかりした物にして行く上において、若い研究者には必ずプラスになると考えている。しかしながら、専門的な記述はどうしても不十分になっているので、もしこのレベルを超えてより具体的な詳しい専門書が必要な場合、拙著「Symmetry and Its Breaking in Quantum Field Theory」(第2版、Nova Science 社)を参考にして頂ければ幸いである。

目次

第1章 宇宙は点から創生？	1
1.1 ビッグバン模型	1
1.1.1 宇宙の背景輻射	3
1.1.2 ヘリウム原子のアバンダンス (存在比)	3
1.1.3 双子の星の存在	4
1.2 ビッグバン宇宙論への反証	5
1.2.1 銀河形成	5
1.2.2 反物質世界がない	5
1.2.3 フォトン・バリオン比	6
1.3 時間と空間	8
第2章 相対性原理と特殊相対論	11
2.1 相対性原理	11
2.1.1 特殊相対論	12
2.2 ガリレオの相対性理論	13
2.3 アインシュタインの相対性理論	15
2.3.1 ローレンツ変換	15
2.3.2 相対論における速度の和	16
2.3.3 運動量	17
2.4 相対性理論の具体例	19
2.4.1 大気圏で生成された μ -粒子測定	19
2.4.2 光のドップラー効果	20
2.5 相対性理論の適用範囲	22
第3章 一般相対論とその問題点	23
3.1 一般相対論の方程式	24
3.1.1 一般相対論の直感的導出	24
3.1.2 エネルギー・運動量テンソル $T^{\mu\nu}$	25

3.1.3	一般相対論の数学は複雑、物理は単純	25
3.1.4	自然は複雑、数学は単純明解	26
3.1.5	計量テンソル $g^{\mu\nu}$ の問題点	26
3.1.6	物質に対する方程式の欠如	27
3.2	等価原理	29
3.3	重力ポテンシャルと Dirac 方程式	31
3.3.1	量子数と電荷	31
3.3.2	物理学の方向性	32
第 4 章	新しい重力理論と宇宙論	35
4.1	新しい量子重力の理論	35
4.1.1	古典場と量子場	36
4.1.2	重力を含む Lagrangian 密度	37
4.1.3	重力場の方程式	38
4.1.4	重力場中の Dirac 方程式	38
4.2	光と重力場の相互作用	40
4.2.1	光と重力場の相互作用の検証	40
4.3	重力場中の Dirac 方程式の非相対論極限	41
4.3.1	Foldy-Wouthuysen 変換	41
4.3.2	水星の近日点移動	42
4.3.3	水星の近日点移動の観測値	43
4.3.4	GPS 衛星の進み	44
4.3.5	地球の公転の進み – うるう秒	45
4.3.6	うるう秒年代測定	46
4.4	一般相対論の予言	47
4.4.1	重力崩壊	47
4.4.2	水星軌道の遅れ	48
4.4.3	これまでの理論計算の予言	48
4.5	新しい宇宙論	51
4.5.1	コスミックファイアボール	51
4.5.2	前宇宙の残骸	51
4.5.3	無限の過去・未来と無限の空間	52
4.5.4	新しい宇宙像	53
4.5.5	宇宙の無限性と背景輻射	54

第5章 物理学の展望	57
5.1 量子化	57
5.2 Dirac 方程式の導出	59
5.2.1 Dirac による Dirac 方程式導出	59
5.3 Dirac 方程式の新しい導出法	61
5.3.1 電磁場の Lagrangian 密度	61
5.3.2 ゲージ不変性	62
5.3.3 ゲージ不変な Lagrangian 密度	62
5.4 基本は場の理論	64
5.4.1 実スカラー場	64
5.4.2 複合粒子に対する Klein-Gordon 方程式	66
5.4.3 電磁場とスカラー場の相互作用	66
5.4.4 ゲージ場とスカラー場の相互作用	66
5.4.5 Higgs 機構とその問題点	67
5.4.6 Higgs 粒子の実験結果	69
5.5 量子色力学 (QCD) の問題点	70
5.5.1 摂動論が定義できない!	71
5.5.2 QCD における観測量	72
5.5.3 QCD 理論計算の展望	74
5.6 場の量子論 – 無限大との戦い	76
5.6.1 ゲージ理論信仰の崩壊	77
5.6.2 朝永の推論	80
5.7 繰り込み理論とアノマリー	83
5.7.1 フェルミオンの自己エネルギー	83
5.7.2 バートックス補正	84
5.7.3 Ward の恒等式	85
5.7.4 Lamb シフト計算の困難	86
5.7.5 フォトンの自己エネルギー	87
5.7.6 三角形ダイアグラム	88
5.7.7 アノマリー方程式の消滅	89
5.7.8 フォトンの自己エネルギーと繰り込み	89
5.8 弱い相互作用の繰り込み理論	90
5.8.1 Lorentz 条件 ($k_\mu \epsilon^\mu = 0$) の導出	90
5.8.2 有限質量ベクトルボソンの伝播関数	91
5.8.3 ベクトルボソンによるバートックス補正	92

5.9	場の理論のまとめ	93
5.10	溶液の物理	94
付録 A 力学		95
A.1	保存力	96
A.2	1次元調和振動子	97
A.3	Kepler 問題	97
A.4	Lagrange 形式	99
A.4.1	最小作用の原理	100
A.4.2	一般座標での Newton 方程式	101
A.5	正準形式	102
A.5.1	正準変換	102
A.5.2	Hamilton-Jacobi の方程式	103
A.6	運動方程式と相対性理論	105
A.6.1	Newton 方程式とガリレイ変換	105
A.6.2	Newton 方程式とローレンツ変換	105
A.6.3	Maxwell 方程式とガリレイ変換	106
A.6.4	Maxwell 方程式とローレンツ変換	106
A.7	力学演習問題	107
A.7.1	単振り子	107
A.7.2	スケール変換	108
A.7.3	Kepler 問題 (軌道は楕円)	109
付録 B 電磁気学		113
B.1	Maxwell 方程式	114
B.1.1	Gauss の法則	114
B.1.2	単極子が存在しない	115
B.1.3	ファラデー の法則	116
B.1.4	アンペールの法則	116
B.1.5	電気双極子と磁気双極子	117
B.2	ゲージ場	118
B.2.1	電子と電磁場の相互作用	119
B.3	電場と磁場のエネルギー	120
B.3.1	クーロン力	120
B.3.2	電場のエネルギー	121
B.3.3	磁場のエネルギー	121

B.4	物質中の電場と磁場	122
B.4.1	鏡像法	122
B.4.2	誘電体	123
B.4.3	磁性体	124
B.5	電磁気学の難しさ	126
B.6	電流とは何か?	126
B.6.1	導体中	127
B.6.2	電離した水溶液	127
B.6.3	マクロな物理量	127
B.6.4	電気抵抗	128
B.7	モノポール、EDM と時間反転不変性	128
B.7.1	モノポール	128
B.7.2	EDM	129
B.7.3	モノポールと EDM の Hamiltonian	129
B.8	電荷とは何か?	130
B.9	電磁気学演習問題	131
B.9.1	(1) 球の表面に電荷 Q がある時の電場	131
B.9.2	(2) Biot-Savart の法則	132
B.9.3	(3) 直線電流が作る磁場	132
付録 C	量子力学	135
C.1	Schrödinger 方程式	135
C.1.1	Ehrenfest の定理	136
C.1.2	束縛状態	136
C.1.3	表示の問題	137
C.2	水素原子	137
C.3	Maxwell 方程式と Schrödinger 方程式	138
C.3.1	類似点	139
C.3.2	相違点	139
C.4	場の理論としての Schrödinger 方程式	140
C.4.1	Lagrangian 密度	140
C.4.2	Bjorken-Drell のメトリック	141
C.4.3	Lagrange 方程式の導出	141
C.4.4	Schrödinger 場	141
C.4.5	Hamiltonian 密度	142

C.5	量子力学演習問題	145
C.5.1	調和振動子	145
C.5.2	摂動論	147
C.5.3	変分法	148
C.5.4	WKB 法 (準古典近似)	149
C.5.5	量子化とエルミート性	150
付録 D	統計力学	153
D.1	スピンと統計	153
D.1.1	フォトンとボーズ統計	154
D.1.2	フェルミ統計	154
D.1.3	複合粒子のスピンと統計	155
D.2	磁気トラップ法	155
D.2.1	レーザー冷却	156
D.3	古典統計力学は意味があるか?	157
D.3.1	調和振動子	157
D.3.2	直感的理由	158
付録 E	場の理論	159
E.1	経路積分の問題点	159
E.1.1	QED での Wilson のクォーク閉じ込め	159
E.1.2	量子力学における経路積分	161
E.1.3	経路積分による調和振動子	162
E.1.4	経路積分の限界	163
E.2	場の理論における経路積分	163
E.2.1	電磁場の量子化	164
E.2.2	場の理論における Feynman の経路積分	165
E.3	電磁場の Lagrangian 密度	165
E.4	Dirac 場の Lagrangian 密度	167
E.4.1	Dirac 方程式	167
E.4.2	Dirac 場の量子化	167
E.5	量子重力場の理論	169
E.5.1	量子重力場の Lagrangian 密度	169
E.5.2	量子重力の運動方程式	170
E.5.3	重力場の量子化	171
E.5.4	量子重力の繰り込み理論	171

E.5.5	重力場での Lamb シフト	172
付録 F	物理屋の数学公式	173
F.1	何故偏微分か?	173
F.1.1	偏微分の定義	173
F.1.2	2 変数関数の偏微分	174
F.2	$\delta(\mathbf{r})$ 関数	174
F.2.1	Green 関数	176
F.3	Gauss の定理	176
F.3.1	立方体での Gauss の定理	177
F.3.2	一般の場合の Gauss の定理	178
F.4	Stokes の定理	178
F.4.1	長方形での Stokes の定理	178
F.4.2	一般の場合の Stokes の定理	179
F.5	線形代数	179
F.5.1	エルミート行列	179
F.5.2	ユニタリー行列	180
F.5.3	行列式	180
F.5.4	行列式の公式	180
閑話休題 1	小泉のラウエの斑点	183
閑話休題 2	西島和彦先生との議論	189
閑話休題 3	Max-Planck 研究所での大陸浪人	195
閑話休題 4	テニスの上達法	201
閑話休題 5	物理は 50 歳台から	209

第1章 宇宙は点から創生？

宇宙は広大である。その広大さは、銀河の広がりを見て判断している。およそ1千億個程度の銀河がこの宇宙には存在していると考えられている。銀河は星の集団であり、およそ100億個程度の星から成り立っていると考えられている。これらの星および銀河の運動は基本的には4つの力により記述されるものと考えて良い。星が粒子(核子と電子)の集団から形成され、銀河が星の集団で形成されて、そしてこの宇宙が銀河の集団で形成されている。従って、またこの宇宙がさらに大きな集団(極宇宙?)の一部であるとしても不思議な事でもないし、十分ありうる事であると考えられる。但し、我々の世界との相互作用は恐らくは無視できるほど小さいであろうから、観測は不可能である。しかしながら、現在の宇宙論はこの我々の宇宙が全てであるという描像を取っている。それはアインシュタインの一般相対論を基礎にしたビッグバン模型が宇宙論の中心であり、宇宙の描像はそれから作られているからである。しかしながら、この不思議な模型のために、宇宙物理学が物理屋にとって科学として受け入れがたく、なかなか「物理」になれない一つの原因であると思われる。多くの学部学生が一度は宇宙物理学に興味を持つ事がよく見られるが、それは宇宙物理学には夢があるからであると思われる。しかし、ちょっと油断すると単なる夢に終わってしまい、科学になり得ない「お話」のレベルになっているため、本当に宇宙物理を物理学として研究したいと思う学生は大半が失望してしまうのである。科学はSFではない。だから、どんな些細な現象の理解でも証明でもほとんどの場合はひどく難しく大変なのである事は言うまでも無い。

1.1 ビッグバン模型

現在、物理屋の大半はビッグバン模型を信じていると考えられる。しかしながら、その「お話」はとても科学になっているとは言えないものである。つまりはビッグバン模型が物理になっているとは到底言えない模型であるが、しかし基本的にはこの宇宙が膨張している観測事実を基にして、それを時間的に元

に戻してゆくと1点に凝縮するではないかという素人的な発想がその出発点である。このような、宇宙が何も無いところから新しく作られるという発想には、西洋社会が慣れ親しんできた「天地創造」の考え方の影響が多分にある気がする。全てのものは何か新しく創生されるという固定概念にとらわれている結果、このビッグバン模型が受け入れられ、そして信じられて来たのではないかと考えられる。一方において、東洋の思想はこれとは異なり、物は形を変えながら繰り返してゆくという思想の方がより受け入れられていると思われる。この思想の科学的な根拠は勿論あるわけではないが、しかしこの宇宙の創造に関しては、繰り返しの考え方に近いものであるとした方が矛盾がなく、ビッグバン模型はやはり「神話」であったと言える事がこの本を読み進みそして理解して行けば、明確になるものと思う。科学的な立場からすれば、このどちらもそれなりの意味を持っているのであるが、科学はむしろその独自の立場から自然を理解して行く事を優先して行く事になり、思想との整合性はその後に行う事が最も自然な事である。

ビッグバン模型が出発点としている事、すなわち「何かが爆発して宇宙が膨張したという事」は観測事実であると考えられるが、だからといって宇宙が一点から爆発して膨張したと短絡するのは科学者の考える所ではない。そもそも一点から爆発して膨張したとする時のその一点のエネルギーは何処から来たのか全く分からない。それはこれまで知られているエネルギー源には無いからである。このような御伽噺程度の理論を何故、人々が信じる事になったのだろうか？その根拠になっているのが一般相対論である。実際、アインシュタインは一般相対論を作るにあたり、恐らくは、電磁場と同じような方程式を重力場に対しても作りたいと思った事が出発点であろうという事は想像出来る。しかしながら、電磁場を場の理論として深く理解すると言う事が必ずしも十分ではなかった1910年代であるため、この一般相対論には様々な問題点があり、およそ信頼できるという理論形式ではない。さらに言えば、アインシュタインは自然界において、一般相対論で何を具体的に記述したかったのであろうかと言う、その対象が存在していないのである。従って、一般相対論は宇宙全体を記述したいと言うような荒唐無稽で抽象的な問題になっているため、自然現象を記述するという物理にはなっていないのである。このため、一般相対論は数学は複雑、物理は簡単という奇妙な理論になっていると言えるのである。しかし、この事はあとで詳しく解説して行く事にして、まずは観測事実から検討して行きたい。

1.1.1 宇宙の背景輻射

我々の宇宙は光(電波)で満ちている。これは携帯電話の電波が地球上に飛び交っていると言うレベルの話ではない。この宇宙の背景輻射に対応している電波はPenziasとWilsonにより1960年代に偶然発見されたものである事は良く知られている。彼らは人工衛星からくる電波をより精度良く観測しようとして検出器の改良を重ねていた。当時の人工衛星から発せられる電波は非常に弱く、それをいかに正確にキャッチするかという純粋に技術的な問題で大変な努力をしていた。しかしながら、どの様に検出器を改良してもついにノイズを消す事が出来なかったのである。すなわち、この宇宙は何処から来たかわからない電波で満ちており、そしてそれが宇宙の背景輻射と呼ばれるものである。現在までのところ、この宇宙の背景輻射は完全に等方的である、つまり、宇宙のどの方向から来ているとは言えなく、どこからも来ているという事が観測事実となっている。さらに、この背景輻射の温度分布を測定する事が出来ていて、それが絶対温度で約2.7度Kとなっており、この温度分布も光が来る方向には依っていない事が観測されている。

1.1.2 ヘリウム原子のアバundance (存在比)

宇宙に存在する原子核を見ると、当然の事ながら陽子が9割を超えている。そして次に多いのがヘリウムである。そして原子量が増えるにつれて急速に存在確率は減って行くのである。何故ヘリウムが多いと不思議なのか？それは原子核の作られ方に依っている。もし原子核の生成が星が燃えて行く過程で行われるとするならば、その過程ではヘリウムはほとんど燃えてしまう事がわかっている、ヘリウムの量は少ないはずである。ところが、観測事実は宇宙に存在するヘリウムの量は陽子について多いのである。そして、ヘリウムよりさらに重い原子核はより少なくなっていくのが観測されている事実でもある。

この事を理解する最も手っ取り早い方法は、宇宙初期に何か熱い状態を仮定して、その暑い内にヘリウムを作ると言うものである。その状態の温度が十分熱い場合で、熱的な平衡状態にある時は、中性子と陽子はほぼ同じ割合で存在するはずである。宇宙が膨張して温度が下がり始めると、中性子が崩壊し始める。この寿命は10分少しである。この間にまずは重水素を作る必要がある。近くに陽子と中性子が存在する限り、重水素は簡単に出来る。そして、重水素が沢山作られるとそれらは次々とヘリウムになって行くのである。しかし、宇宙が爆発(膨張)している限り、温度は下がって行き、ヘリウムを作れな

くなるのである。さらに、ヘリウムが2個融合するとベリリウム8になるのだが、これは安定な原子核ではないのでここから先の原子核が簡単には出来ない。このベリリウム8が不安定であるという事が、ヘリウム原子がこの宇宙に数多く存在している最も重要な原因になっていると考えられる。恐らくは、これより重い原子核は星の内部における核融合反応で作られて行くものと考えられている。この宇宙において、エネルギー源として存在しているものに主として3つある。一つは核融合・核分裂等の原子核の束縛エネルギーの開放と関連するものである。もう一つは重力エネルギーである。この重力によるポテンシャルエネルギーはいかなる質量を持った粒子に対しても常に引力であるために、全体としては巨大なエネルギーになっている。最後に、もう一つのエネルギーを挙げよう。これは素粒子のもつ運動エネルギーである。例えば、光子は物質に吸収されない限り、常に一定の運動エネルギーを持っている。波長が十分大きくて電波領域のエネルギーになってこの宇宙にフラフラと存在しているのが、宇宙の背景輻射の光子である。この場合、電波領域のエネルギーは通常の原子による吸収ではかなり困難である。すなわち、自然界に存在する無機質による吸収は実質的にはかなり困難であると考えられる。従って、ひとたび生成された背景輻射の光子はこの宇宙に長い間、漂い続ける事になると思われるのである。

1.1.3 双子の星の存在

現在までにいくつかの双子の星(クエーサー)が見つかっている。その星達から来る光のスペクトルからどう見てもこの双子の星(クエーサー)は同じ星を見ているとしか考えられない場合がある。それらの双子の星は1個の星から来た光がその途中にあると考えられる強い重力源によりレンズの様に曲げられて、2つの像を作っているのではないかと考えられている。これまで、このレンズの役割を一般相対論が担ってきたと考えられている。しかしながら、後述するように、新しい重力理論によれば、光がFeynmanグラフの4次の効果で確かに重力と相互作用することがわかっている。この相互作用の形は通常のクーロン力との力によるものと同じ形であり、光が強い重力によって曲げられ、レンズによる散乱と同じように2つの像を作るものとする事が出来るのである。この辺の問題については、第4章で詳しく議論する事にしたい。

1.2 ビッグバン宇宙論への反証

それでは、一点から爆発したというビッグバン宇宙論に対して、何らかの観測上の反証は存在しているのでしょうか？

1.2.1 銀河形成

実は最も基本的で観測との整合性が取れない問題として、銀河形成がある。ビッグバンは一点から爆発したと考えているので、当然その後のエネルギー放出は等方的であり、また極めてユニフォームであるべきである。この場合、それではどうしたら対称性を壊して銀河形成ができるのであろうか？その答えは、勿論「不可能」である。総計的なゆらぎから銀河を作る事が出来ない事は良く知られているし、直感的にもそれが難しいであろう事は想像に難くない。

最近では、銀河系集団の分布にかなり奇妙な構造がある事が知られている。これは「宇宙の大規模構造」と言われているものであり、何か壁のように並んでいる銀河系集団が発見されている。この様な銀河系集団の構造は、ビッグバン宇宙論ではどのようにしても説明不能である。この銀河系集団の大規模構造こそが、新しい宇宙論を考える上で重要な参考になるべきものである。くり返し言う事になるが、理論のモデルは常に観測から出発するべきであり、宇宙論もその例外ではあり得ないのである。但し、宇宙物理が科学として難しいのは、繰り返しの実験が不可能である事によっている。従って、観測された事実から、整合性を保つ事ができる理論を構築してゆくしか他にしようが無いのである。

1.2.2 反物質世界がない

ビッグバンにおいて宇宙が一点から爆発したとすると、その最初の物質は明らかにエネルギーだけの塊である。従って、それはバリオン数で言ったら、バリオン数はゼロの世界である。ここで、バリオン数とは陽子や中性子の状態を1として定義している量子数であり、従って質量数 A の原子核のバリオン数は A となる。しかし、我々の宇宙は物質の世界(バリオン数がプラス)である。これはどうして可能なのであろうか？現在の所、バリオン数を破る力は実験的に見つかっていない。理論的には、ある時期に「大統一理論」というのが流行していた事があったが、この理論は、自発的対称性の破れの物理を正しく理解できていなかった頃に作られたものであり、2つの問題点がある。一つは、自発的対称性の破れを応用しているのであるが、残念ながら基本的なところで

間違っている。対称性の破れとは場の理論の真空（負のエネルギー状態）が、ある種の対称性の場合、それを破った方がエネルギー的により低くなり、真の真空として実現されているという事を言っているにすぎない。破れた真空が実現されたからといって、何か模型に変更を受けたりするものではない。2つ目の問題点として、「繰り込み群」の応用がある。この「繰り込み群」は繰り込み理論を誤解した事により作られた理論に基づいており、全く意味の無い理論体系である。これらの事より、今となっては、大統一理論に関して言えば、信頼できるできない以前の問題であり、およそ正しい理論とはいえないものである。1970年代の素粒子理論は極端に言えば、新しければ何でも良いという風潮があったように思われてならない。

実験の観点からしても、バリオン数を破る力は陽子崩壊の実験事実から言って、ほぼ否定されたと見て良いと思われる。直感的にも、陽子崩壊の実験を考える時、1万トンの中の水の中には約 3×10^{32} 個の陽子がある。もし陽子の寿命が 3×10^{32} 年だとしたら、1年間この水を観測したら1個の陽子崩壊が起こる事に対応している。最近の実験データはすでにこの寿命を超えており、陽子崩壊は起こらない事を示している。また、理論的な必然性はさらに無く、全く必要ないものである。

一方、反物質の存在に関しては、観測の方からすると、現在までにおいて反物質の世界の存在を示す証拠は何処にも見つかっていない。宇宙線の中に反陽子は見つまっているが、これは高エネルギーの宇宙線が他の物質と衝突して生成された反陽子が地球周辺で観測されたものと考えられている。

1.2.3 フォトン・バリオン比

宇宙の背景輻射で見たようにこの宇宙には光（電波）が非常に多い。実際、フォトンの方がバリオンと比べて個数で行って10億倍程多いと考えられている。この観測データをどのように解釈したらよいのであろうか？

理論的にはフォトンは常に真空から作られるのに対して、バリオンは最初にあったものからトータルでは増える事はない。その意味では、フォトンは常に増え続ける事になっている。特にエネルギーの低いフォトン（電波領域）は物質に吸収される可能性が低くて、一度生成されるとそれが消滅する事はかなり難しい事になっている。

さらに、フォトンは重力と無視できない強さの相互作用をする事がわかって来ているので、フォトンがバリオンと比べてどの程度の比率が合理的なのかは今後の課題である。しかし、この疑問自体が物理的に意味がある設問かどうか

は、実は良くわからない。この事はバリオン自体が何処で作られたかと言う設問と同じ問題となる。この本で取り扱っている新しい宇宙論によれば、この宇宙の存在自体が無限に遠い過去から存在していたと言う事に基礎を置いている。一般相対論ではバリオンもこの空間もビッグバンと共に作られたと言う思想である。しかし物理学では、時間や空間自体の存在は仮定し、その上で物理学を作る事はできるが、時間と空間を認識し理解する事ができないのである。従って、空間が作られたと考える事には飛躍があり過ぎ、これは科学ではない。

無限に遠い過去

無限に遠い過去にすでにこの宇宙が存在していたという仮定に関しては、「無限に遠い過去」という時間が物理の研究対象にはならないと言う事に基づいている。理解不能である事を議論する事ほど愚かな事はない。従って、この宇宙に存在しているバリオン数は、元々あったものであるとする事が、我々ができる唯一の科学的方法であると考えている。一方において、光子は常にできたり消えたりするために、光子・バリオン比が本当に物理学の対象になると言い切る事ができるかどうか自信はない。しかし、観測事実はそれなりに意味があり、その観測量から何らかの有意な物理的な情報を引き出せるかどうかは今後の研究に待ちたいと思う。

1.3 時間と空間

物理学により自然を記述しようとする場合、必ず、時間と空間がその全ての基礎となっている。宇宙論を議論する時もこの宇宙の広がり（空間）や宇宙の年齢（時間）が研究の対象になっている。しかし、この場合、時間と空間とは一体何者であろうか？良く考えてみるとその時間と空間を理解する事が不可能である事に気付かされる。哲学者の言葉を借りるまでもなく、例えば空間と言っているのは、物質の広がり的事である。物質が存在しない場合、「空間」の認識は出来ない。時間に関してはもっと深刻である。我々は時間と言ってもその瞬間しかわからないのであり、それは時間を認識できた事にはなっていない、従って時間がわかった事にはならない。恐らくは、時間の流れの認識に関しては、何かをあらわす記号により時系列を作り、これにより過去・未来を認識しているものと考えられる。従って、空間の広がりよりもより抽象的な形で時間を認識していると考えて良いと思われる。

物理学では、この時間と空間はパラメータである。すなわち、物質の状態を記述するために必要なパラメータと考えて良く、それ以上の事はわからない。Newton 力学では、物質（正確には質点、すなわち物質の重心）の座標の運動を記述する方程式になっている。この場合、質点の座標が時間と共にどのような変化をするかを記述する学問である。この場合、明らかに空間の座標は質点の座標であり、空間そのものを表しているわけではない。

自然界における物理法則を考える時、常に座標系（慣性系）を導入してその中で物理法則を記述する事になる。その場合、座標系自体を物理学の研究対象にする事は出来ない事である。座標系に対して一つ言える事は、どの慣性系も同等であると言う事であろう。これは相対性原理の基礎になっているが、勿論、証明は出来ない。しかし、現在までのところこの慣性系の同等性の仮定と矛盾している現象は見つかっていない。

このように自然界を記述する物理学は、物質の状態 $\Psi(t, \mathbf{r})$ に対して基本方程式をたてて、それによりあらゆる物理現象を記述しようとする学問である。この場合、時間と空間はパラメータであり、それ自体が研究対象にはなっていない事は前述したとおりである。それは、その物理現象が時間・空間内で起こっており、時間・空間を座標系として利用する事はしても、我々が理解できるのはその物理現象そのものであるという事によっている。

場の理論を正確に理解したならば、アインシュタインの一般相対論が物理学における「理論模型」にはなっていない事が良くわかるものである。アインシュタインは物質が存在すると、その近辺の時間・空間が影響を受けると言う

事を考えて理論体系を作ったのであるが、これが自然現象とはかけ離れている事は場の理論を理解したものにとっては明らかな事である。繰り返すが、時間・空間はあくまでもパラメータであり、物理量は状態 $\Psi(t, \mathbf{r})$ で与えられるからである。

この「時間・空間」と「物理現象」の関係は、演劇における「舞台」と「役者の演技」の関係に似ていると思われる。物理現象は時間・空間の舞台上で起こっている自然の演技であり我々はそれを理解するべく努力しているのである。そして、大切な事は物理学においては自然の演技を理解し評価する事が全ての仕事であり、それ以上の事は不可能であるという事である。時間・空間自体を認識し理解しようとする事は、科学では可能な事ではなくて、それ以外の手法、例えば哲学の問題として考える事になるという事である。しかしながら、Kant の哲学を読む限りにおいては、彼自身も空間の認識は物質があって初めて可能である事を主張している事でもあり、科学的な認識に非常に近いものと考えられるものである。いずれにせよ、科学においては何を解明しようとしているのかという問題が出発点であり、そこから何が解明できるかをしっかり見て行く事が最も重要である。あとで述べるように、一般相対論における「時空のスケール」の変化という様な問いかけは、科学においては意味をなしていない事がいずれ明確になってくるものである。

第2章 相対性原理と特殊相対論

物理学の基本は相対性原理にある。原理と言うからにはそれ自体は証明出来ない事である。相対性原理とは何か？それは、地球上で発展させられた物理の理論がそれと等速直線運動をしている他の系（慣性系）においてもやはり同じ法則が成り立ち同じ観測量が得られるべきであると言う事である。例えば地球上でバネの実験をしたとする。その時その振動数や振幅が求められる。ここで相対性原理とは等速直線運動をしている電車に乗って同じバネの実験を同じ条件でしたとするとやはり地球上と同じ振動数と振幅が観測されるべきであると言う物である。もしこの事が成り立たないとすると、一体、地球上で発展させられた理論は何だったのかという事になる。地球上だけで通用するような理論を作っても嬉しくも何ともない事になる。その意味においても確かに相対性原理は仮定ではあるが、しかしごく合理的なものである事がわかる。

この相対性原理で最も重要な事はそれぞれの系でそれぞれの「時間と空間」が定義されていると言う事である。1つの系で座標系を定義できるという事は、その系に観測者も同時に定義出来るという事を意味している。これは非常に大切なポイントであり、特に一般相対論の問題点をしっかり理解するために重要であり、自分の言葉に焼きなおして理解する必要がある。このような事こそ、余程しっかり考えないと本当には理解できないものである。これからこの本では繰り返し言う事になると思うが、じっくり考え抜いて自分の物にする事はそう簡単な事ではないが、しかしそれこそが物理の本当の面白さである。

2.1 相対性原理

相対性原理を解説するためにはどうしても2つ以上の「系」を考える必要がある。ここで「系」とは何かを説明しておいた方が良いでしょう。我々が住んでいる所、これは地球上である。今の議論には、地球が回転している事は忘れても十分である。この地上で静止している系を「静止系」(または「R-系」)と呼ぼう。これは慣性系でもある。一方、この静止系に対して等速直線運動を

している電車に乗っている人も地上の「慣性系」と同等の慣性系を持つ。この電車の系を「S-系」と呼ぼう。お互いに相手は等速直線運動をしている系となっている。ここで相対性原理の仮定とは何か？それは「どの系でも物理法則は全く同じであり、またすべての観測量は同じである」というものである。この場合、それぞれの慣性系にそれぞれの観測者が定義されて全ての実験・観測を独立に行う事ができる事、さらにそれらの観測結果は全て一致する事である。これは原理であるから証明は出来ないが、現在までのあらゆる観測事実はこの原理が正しい事を示している。従って、これは原理として信用して十分良いものである。

2.1.1 特殊相対論

アインシュタインが相対性理論を「特殊」と「一般」に分けた理由は恐らくは一般相対論が重力理論を含んでいると思い込んだからであろう。相対性理論に一般も特殊もあるはずが無いのだが、この辺も彼がどの程度、相対性原理を理解していたかわからない理由でもある。しかし、言葉の定義は物理の理解には本質的なことではないので、これまでの慣習通りに使っていく事にしよう。

いざれにせよ、特殊相対論とは相対性原理に基づき、どの慣性系でも物理法則は同じであるという事を意味している。今、慣性系 R-系に対して、もう一つの慣性系 S-系が速度 v で等速直線運動をしているとする。この時、2つの系の間の変換則は速度 v が光速と比べて十分小さければ、非相対論的変換則（ガリレイ変換）となり、速度 v が光速と同じ程度になった場合は、相対論的変換則（ローレンツ変換）となる。まずは、速度 v が光速と比べて十分小さい場合の非相対論的変換（ガリレイ変換）について解説して行こう。

2.2 ガリレオの相対性理論

科学史的に厳密な事は別にして、基本的な相対性理論はガリレオにより作られている。今、電車の系である「S-系」が静止系に対して一定速度 v で運動しているとする。この時、電車が走る方向はどちらでも良いからこれを x -軸としよう。ここで大切な事はそれぞれの系に座標系を定義する事が出来るという事である。そしてその座標系には観測者も定義する事が出来る必要がある。これは経験からして、電車の中に人が乗ってれば十分であると考えられる。この時、電車の中の時間も空間も地球上と同等の定義が出来る事が最も重要になる。空間も時間も人間がどれだけ理解し認識出来るか哲学的には難しいところではあるが、慣性系には固有の時間と空間があるとして議論を進めていっても、今の所問題になる現象は見つかっていない。

今、静止系の座標と時間を $R(t, x, y, z)$ と表記しよう。この時、電車の系の座標を $S(t', x', y', z')$ と表記しよう。但し、電車はゆっくり動いていると考える。ゆっくりという時は、常に何と比べてであるかを考える必要がある。物理で相対性理論を議論する時は、比較する速さは光の速度 c である。光は地球を1秒間に7週半回るくらい速い。従って、光の速さは $c \simeq 6400 \text{ km} \times 2\pi \times 7.5 \simeq 3 \times 10^8 \text{ m/s}$ である。この時、時間はどの系でも同じであり、従って $t = t'$ となっている。2つの座標系には次の関係式がある。

$$x = x' + vt', \quad y = y', \quad z = z', \quad t = t'$$

これをガリレイ変換という。これは2つの座標系の原点同士の関係式と考えてよい。バネの力学を記述する方程式は Newton 方程式である。今の場合、地球上 (R-系) でバネの先に質量 m の質点をつるしてバネの振動の実験をしたとする。適当なある点を原点としてそこからバネの伸びを x とすると $m\ddot{x} = -kx$ が運動方程式になる。ここで k はバネ定数。 $\dot{x}$ は Newton 力学の時によく使われている座標の時間微分の表記で $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ であり、従って $\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2}$ となる。この場合、座標は質点の座標を表しているのので、座標が時間によって変化する事になっている。

ガリレイ変換から明らかなように、電車の系 (S-系) でも同じバネの実験をすると、この時は運動方程式が $m\ddot{x}' = -kx'$ となる。ここで x' は適当なある点を原点としてそこからバネの伸びを x' とした事に対応しており、これは地球上で行ったバネの実験と同じである。この2つの方程式を見ると形が同じである。数学では方程式の形が極めて重要な役目を果たしている。2つを並べて書くと

$$\text{R-系: } m\ddot{x} = -kx$$

$$\text{S-系: } m\ddot{x}' = -kx'$$

であり、この時、確かに形が同じになっている。従って、この微分方程式を解いた答えも同じ形になっている。すなわち、2つのバネの振動は全く同じになっているというわけである。この微分方程式の解き方はどの教科書にも書いてあるのでここには書かないが、大切な事は結果を覚えておく事である。ちなみに結果だけ書いておくと

$$x = v_0 \sqrt{\frac{m}{k}} \sin \sqrt{\frac{k}{m}} t$$

という振動になる。ただしこの時、初期条件 ($t = 0$ で $x = 0$, $\dot{x} = v_0$) をつけている。当然の事だが、 x' に対しても全く同じ解になる。

相対性理論はこれ以上の事は何も言っていないし、物理学における理論としてはこれで十分である。この例を見てもわかるように、それぞれの系で観測者の存在を仮定しているのだが、これが相対性理論の本質である。すなわち、どの慣性系でも観測者が独立に定義される事である。

このガリレオの相対性理論では、それぞれの慣性系における時間は全く同じものとしている。これは我々の経験から言っても当然の事として理解できる事である。しかし同時に、空間だけ変えても本当にそれで良かったのかという疑問は残る。それぞれの慣性系に観測者を定義したら、それぞれの観測者が時間を持っていたとしても良さそうな気がする。実際、アインシュタインの相対性理論では、この時間の事が重要になる。

2.3 アインシュタインの相対性理論

話を進めて行こう。現実の電車だともはやその系が地上の系から見て光の速度に近く走る事はある得ないことである。実際、恐らく最も速いと思われるロケットの速度は $v \sim 10 \text{ km/s}$ 程度であるが、これは光速と比べて1万倍以上遅いのである。しかし現実の物理でも光速に近い系を考える必要が出てくる場合がある。それは大気圏に突入する素粒子である。これはしばしば光速に極めて近い速度を持っている場合が観測されている。この場合、この粒子は相対論的であると言う。ここで、相対論的という言葉は、非相対論的という言葉と対比して使われている。粒子の運動が光速と比べて小さい場合を非相対論的と言うからである。

2.3.1 ローレンツ変換

いずれにしても、S-系の速度 v が光速に近い場合の変換則はローレンツにより与えられている。今度の場合、R-系の座標を $R(t, x, y, z)$ とした時、S-系の座標は $S(t', x', y', z')$ となり、時間は別のものになる。それは、どの系でも観測者が定義されないといけないので、ある意味では当然である。しかし、我々の日常の経験とは一致していない。この場合、ローレンツ変換は

$$x = \gamma(x' + vt'), \quad t = \gamma\left(t' + \frac{v}{c^2}x'\right), \quad y = y', \quad z = z'$$

となっていて、ここで γ は $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ と定義されている。この式がどうして出てきたのか？それは簡単で、このローレンツ変換の式のみが電磁場の方程式である Maxwell 方程式が S-系でも R-系でも同じ形の微分方程式になって欲しいという要請を充たすからである。逆にいえば、Maxwell 方程式はガリレイ変換だと S-系と R-系では全く異なった形の微分方程式になってしまうのである。但し、ここで言っているガリレイ変換は形が同じで v をそのまま光速に近づけた場合の事である。

ローレンツ変換の式を見ると直ちにわかる事は、もし速度 v が光速と比べて十分小さい場合、

$$x \simeq x' + vt', \quad t \simeq t', \quad y = y', \quad z = z'$$

となっていて、ガリレイ変換の式と一致しているのである。その意味ではローレンツ変換の式はガリレイ変換の式を含んでいる事になっている。従って、普

段地球上で起こる現象は非相対論の近似式で扱ってもめったに間違える事はないものである。

2.3.2 相対論における速度の和

相対論における速度の和は通常我々が持っている常識では考え難いものになっている。その原因は主として、どの系でも光の速度が一定であるという相対性理論の基本仮定と関係している。逆に言えば、光速を超える事はどのような場合においてもあり得ないという事である。この事は、現在では勿論実験事実として十分証明されていて、この「光速不変」の仮定と矛盾する実験事実は全く見つかっていないし、十分信じて良い事である。

ここで相対論における2つの速度 V_1 と V_2 の和を求めて行こう。まず、ローレンツ変換から

$$x = \gamma(x' + vt'), \quad t = \gamma\left(t' + \frac{v}{c^2}x'\right)$$

であるから、変換された系での速度は

$$V \equiv \frac{dx}{dt} = \frac{dx' + vdt'}{dt' + \frac{v}{c^2}dx'} = \frac{V' + v}{1 + \frac{vV'}{c^2}}$$

となる。言い換えると、速度 V_1 と速度 V_2 の和である速度 V は

$$V = \frac{V_1 + V_2}{1 + \frac{V_1 V_2}{c^2}}$$

となっていて、単なる和ではない。勿論、2つの速度が光速と比べて十分小さい場合、この式は我々が日常よく知っている式 $V = V_1 + V_2$ になっている。

面白い事に、もし一方の速度 V_1 が光速である時、速度の和は

$$V = \frac{c + V_2}{1 + \frac{cV_2}{c^2}} = c$$

となり、やはり光速になっている。すなわち、電車から光を放つとその光の速度はやはり光速 c であるという事を示している。さらには、両方の速度が $V_1 = c$ および $V_2 = c$ と光速である時もやはり和の速度は光速 $V = c$ となっている。このような状況は自然界に実現される事はあるであろうが、理論的には光速を超えないという事実を良く表している。

粒子の速度が光速を超えない理由は、速度の定義式からみたら、当然の事である事がわかる。すなわち、相対論での速度の定義はどうしても運動量を用い

て行わざるを得ないのである。この事は、相対論では運動量が物理量になっている事と関係している。相対論での速度の定義は

$$\frac{v}{c} = \frac{pc}{E} = \frac{pc}{\sqrt{p^2c^2 + m^2c^4}} \leq 1$$

である事から、質点の速度が光速を超える事はありません。

2.3.3 運動量

古典力学では質点の速度が物理量になっていて、速度の時間微分が加速度になり、これが Newton 方程式と直接関係するため、速度は常に重要な役割をしている。ところが、相対性理論を扱う時は、質点の運動量が重要な役割をする。というよりも、速度が物理的に重要になっているのは、実は古典力学だけである。量子力学では運動量が重要になっているがこれも恐らくは、相対論的量子力学がより基本的な方程式であるからであろう。

それでは、質点の運動量はローレンツ変換に対してどの様に影響されるのであろうか？この場合、運動量とともに、常にエネルギーも一緒に考える必要がある。それは、座標では時間と空間座標を一緒に考えていた事と同じである。今、R-系での質点のエネルギーと運動量を $(E, \mathbf{p})$ としよう。この時、R-系に対して x -軸に沿って速度 v で動いている S'-系においては、この質点のエネルギーと運動量 $(E', \mathbf{p}')$ はどうなるのであろうか？これはローレンツ変換により与えられる。すなわち

$$p_x' = \gamma \left(p_x - \frac{vE}{c^2} \right), \quad E' = \gamma (E - vp_x), \quad p_y' = p_y, \quad p_z' = p_z$$

である。この時、 $E^2 - \mathbf{p}^2c^2$ を計算すると

$$E'^2 - \mathbf{p}'^2c^2 = E^2 - \mathbf{p}^2c^2$$

となり、一定値となる。この一定値は何であらうか？これは系の変換によらない量であり、質点を考える場合、その質量しかあり得ない事がわかる。従って、これは

$$E'^2 - \mathbf{p}'^2c^2 = E^2 - \mathbf{p}^2c^2 = (mc^2)^2$$

と書く事ができるのである。ここで、運動量 $\mathbf{p}$ がその質量と比べて十分小さい場合、

$$E = \sqrt{(mc^2)^2 + \mathbf{p}^2c^2} = mc^2 + \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + \dots$$

となり、確かに非相対論の「分散関係式」が得られている事がわかる。ここでコメントであるが質点のエネルギーがその運動量とどのような関係式で表されているかを示す式が分散関係式と呼ばれるものである。これは物理では非常に重要な関係式となっている。

後で書くように、この時エネルギーと運動量を一緒に書いた4元運動量はかなり便利である。但し、この時、光速 c を $c = 1$ とした単位系を用いる。これは単に、簡単にする事以上の意味はない。しかし、とても便利であり、また間違いを避けるのにはベストである。以下でもしばしばこれを採用して行く事になる。必要に応じて戻して行けばよい。この時、4元運動量を $p^\mu = (E, \mathbf{p})$ と定義して、また4次元の内積を

$$p^\mu p_\mu = E^2 - \mathbf{p}^2$$

と定義すると、結局

$$p^\mu p_\mu = E^2 - \mathbf{p}^2 = m^2$$

となり、相対論での分散関係式が簡単な形で覚える事が出来るのである。

2.4 相対性理論の具体例

どのような場合に、アインシュタインの相対性理論、すなわちローレンツ変換の式が必要になってくるのであろうか？一般に運動方程式を考えた時、ローレンツ変換に対して方程式の「形」が不変である事が最も重要である。ここでは、もっと具体的な問題としてローレンツ変換が必要になるいくつかの場合を以下に議論しよう。

2.4.1 大気圏で生成された μ -粒子測定

恐らく、最も良い例は、大気圏に突入した高エネルギー陽子が空気と衝突して、結果的に μ -粒子（ミュオン）を生成した場合であろう。このミュオンは100万分の2秒程度の寿命を持つ不安定な素粒子である。この素粒子は電氣的な相互作用しかしないので、大気と衝突しないで地上で観測される可能性がある。この時、このミュオンが光速で走っていたとしても、計算してみれば明らかなようにミュオンが走る距離は $\ell \simeq c \times 2.2 \times 10^{-6} \text{ s}$ であるから、最大でおよそ700mしか飛べないのである。しかしながら、実際は地上で観測される事があるのである。これは何故であらうか？理由は簡単である。ミュオンは地上の観測者に対して等速直線運動をしている。このミュオンの系を、勿論、慣性系とする事が出来る。そうすると、ミュオンの系での時間は地上の観測者の時間とは異なっている事になる。それはローレンツ変換の式が告げている。我々が慣れているのはガリレイ変換であり、時間が遅れるという事はかなり考え難いのであるが、これはしかしながら、「光速がどの系でも一定である」と言う事が普段の常識と合わない事に関係している。前述したように、Maxwell 方程式が理論の中心である限り、アインシュタインの相対性理論は正しい理論である。実際、ミュオンの系では時間が γ 倍だけ遅れている事がわかり、ミュオンが光速に近いと確かにかなり時間が遅れ、その分ミュオンの寿命がのびており、従ってミュオンが走る距離もその分だけ伸びてしまい、地上で観測されることが可能となるのである。具体例として、形成されたミュオンのエネルギーが $E = 1 \text{ GeV}$ であったとしよう。この程度のエネルギーのミュオンが上空で作られる事は、ひどく稀な現象とは言えない程、高エネルギー陽子が宇宙から地球の大気圏に飛んできている。いずれにせよこの時のローレンツ変換の式における γ はミュオンの運動量が $p = \sqrt{E^2 - m_\mu^2 c^2}/c \simeq 0.994 \text{ GeV}/c$ (但し、 m_μ はミュオンの質量で

$m_\mu = 0.1056 \text{ GeV}/c^2$) となる事から

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - (p/E)^2}} \simeq \frac{1}{\sqrt{1 - 0.994^2}} \simeq 9.5$$

となり、従ってミューオンの系では時間が9.5倍だけ遅れることがわかる。この事から、地球上の系ではミューオンが走る距離が9.5倍伸びる事になり、地上でミューオンが観測される事が可能になっているのである。ちなみに、この現象は高エネルギー加速器実験では日常的にわかっているし、また利用されている事でもある。

2.4.2 光のドップラー効果

相対性理論の場合、もう一つの慣性系が光の速度に近いもので近づいたり遠ざかったりする場合、日常我々が持っている常識と矛盾するので、驚く場合が出てくる。例えば、その慣性系から光を放つとその光の速度はやはり光速 c である。ただし、そのエネルギーが変わるため、近づいてくる慣性系から放たれた光はその波長が小さくなり、逆の場合は大きくなるのである。それは、光のドップラー効果としてよく知られている事であるし、また観測もされている。基本的には、音のドップラー効果と同じであるが、音の場合よりもよりシンプルであり、わかりやすいものである。その理由は簡単で、音の場合は地球上にある空気という系がすでに指定されているため、音源と音の受け側以外に、もう一つ地上という系があり、これが音のドップラー効果を複雑にしている。それに対して、光の場合は光が粒子として伝播して来るために、常に光源と光の受け側の2つしか系が存在していないので、単純にローレンツ変換式でドップラー効果が理解できるのである。宇宙物理で良くお目にかかる式なので、ここに書いておこう。ローレンツ変換の式は粒子の持つエネルギー E と運動量 p に対しても成り立つものである。すなわち

$$p_x' = \gamma \left(p_x - \frac{vE}{c^2} \right), \quad E' = \gamma (E - vp_x), \quad p_y' = p_y, \quad p_z' = p_z$$

となっている。但し、ここでは星が地球から遠ざかって行き、その星から発せられた光の波長が変化する事を示して行こう。星が波長 λ の光を発するとその運動量は $p = \frac{\hbar c}{\lambda}$ となる。従って、星が速度 v で遠ざかっているとすれば、

地球上で観測する光の運動量は

$$p' = \gamma \left(p - \frac{vE}{c^2} \right) = \gamma \left(p - \frac{vp}{c} \right) = \frac{p \left(1 - \frac{v}{c} \right)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = p \sqrt{\frac{1 - \frac{v}{c}}{1 + \frac{v}{c}}}$$

となり、光の運動量は減少して見えるのである。これを波長で表せば

$$\lambda' = \lambda \sqrt{\frac{1 + \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c}}}$$

となるので、光の波長は大きくなり、これを赤方遷移という。波長が大きくなる事を「Red Shift」というのは、ただ単に可視光においての光の性質から来ている。可視光では、その範囲の波長帯において赤っぽいのは波長が長く、青っぽいのが波長が短いからである。ついでにコメントしておく、場の理論で赤外発散、紫外発散という言葉が良く出てくるが、これは発散は運動量の積分から来っていて、運動量がゼロのところで何かの積分が無限大になる時、これを赤外発散と呼んでいる。一方、運動量が無限大になる所で何かの積分が無限大になる時、紫外発散と呼んでいる。これは単なるネーミングであり、物理的な意味は全く無い。

2.5 相対性理論の適用範囲

ある理論や理論の模型を作った時に大切な事は、その理論の適用範囲を常にしっかり理解して抑えて置く事である。これはどんな場合でも重要であり、特に相対性理論においてはその適用範囲を吟味しておく必要がある。前述したように、不安定粒子が光速に近い速度で走っている場合はその粒子の持っている時間がゆっくり進む事からその寿命が延びるために、地球上で観測にかかる物理量を見る事が出来る。しかしながら、双子のパラドックスのような物理的な観測量が不明瞭な場合は、物理学の議論の対象にはなり得なく、意味が無い設問である。

相対性理論は「キネマティクス（運動学）」であるため、物理の「ダイナミクス（動力学）」を理解する事とは直接の関係はない。しかし、理論の模型を作ってそれを自然の記述に応用しようとする時、キネマティクスは必ずしっかり満たしている必要があり、満たさなければ模型の意味はない。例えば、ある自然現象を記述するための理論模型を作った時に、その模型の運動方程式は当然ローレンツ変換に対して不変である必要がある。これが破られていると、系を決めて計算を実行した時、その系毎に異なった結果が出てしまうのであり、物理的に意味はない事が明らかである。しかしながら、ローレンツ変換に対して不変である模型は、どの系で計算しても物理的な観測量は同じになる。従って、計算を実行する時はなるべく簡単になるような系を選ぶ事が大切である。

さらに、ある種の物理現象において、そのダイナミクスが時間発展に影響しない場合は、キネマティクスだけで全て解けてしまう事がよくある。この場合、逆に言えばキネマティクスはただ単に変換しただけだから、ここから新しい物理が発見される事はまずあり得ない。キネマティクスをいじって何か新しい事が出て来たとしたら、それは計算が間違っているか、または見方が新しくなってこれまでとは見かけ上異なるような結果が現れたものと解釈する事になるものと思われる。しかし、後者の場合、それが結構重要になる事もあるので、それはそれで注意する必要があると思う。

第3章 一般相対論とその問題点

この章では一般相対論をまず紹介し、その問題点について解説して行く。一般相対論の細かい数学的な詳しい解説はここでは省く事になる。専門書がいくらかでもでていたのでそちらを参考にさせていただきたい。ここで重要な事は、自然界を正しく記述出来る方程式は、その数学的構造がたとえ複雑でも、物理的には単純明快でなければならないし、実際、全て正しい理論の物理は単純で明解である。一般相対論の方程式の数学は微分幾何を駆使しているためかなり複雑であるが、その主張しようとしている物理は単純である。しかし、残念ながらアインシュタインは出発点として実験ではなくて「思考実験」を取り入れ原理としてしまったため、自然界を正しく記述する方程式になっていなかったのである。それどころか、そもそも一般相対論は記述しようとする対象（自然現象）が不明瞭であり、現実性が無い理論となっている。この章では、一般相対論における概念的な困難についてしっかり見て行きたい。なお、一般相対論が物理量として予言している水星の近日点移動の問題は次の章で解説して行こう。観測との比較でも一般相対論は全く間違った予言をしている事がはっきりと示されている。さらに決定的な現象として、うるう秒の問題がある。水星の近日点が移動するならば、当然地球もそれに応じた変化をするべきである。この当然の事が、現代技術の進歩、特に正確な時間測定の長足な進歩により、測定されてきた事は意味深いものがある。実際、地球の近日点移動と同じ現象がうるう秒として非常に正確に観測されていたのである。しかも、この地球の公転の進みは一般相対論の予言では全く合わないのに対して、ここで紹介している新しい重力理論は水星の近日点移動の観測値の再現とは比較にならないほどの高い精度で観測データと完全に一致しているのである。それは地球の公転が最も正確に観測されていると言う事を考えれば、理論との正確な一致は当然でもある。

3.1 一般相対論の方程式

アインシュタインが一般相対論の方程式を構築した際、その主要目的は電磁場と同じように重力場に対する方程式を導出したいと言う点にあったと考えられる。恐らくは、アインシュタインは重力場に対する Poisson 型方程式から出発したものと思われる。それは

$$\nabla^2 \phi_g = 4\pi G_0 \rho$$

と書かれる。ここで、 ϕ_g は重力場であり、 ρ は物質の密度である。この式自体は基本的には正しいと考えられる。それは勿論、実験的に重力場が $\phi_g = -\frac{MG_0}{r}$ と書かれているからであるが、ただし、これはあくまでも大雑把に正しいと言っているだけであり、この Poisson 型方程式を導出する Lagrangian 密度がわかっていたわけではない。

ここでは、アインシュタインによる一般相対論の方程式がどの様に導かれたのかを直感的に理解して行くための解説をして行きたい。一般相対論の方程式の物理を理解するためには、細かい数学は実は不要である。むしろ、いかなる物理現象を一般相対論の方程式により記述しようとしたのかをしっかり理解する事こそが最も重要であり、この事より物理をより深く理解するための一助になればよい。

3.1.1 一般相対論の直感的導出

一般相対論の方程式は

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R = 8\pi G_0 T^{\mu\nu}$$

と書かれている。ここで $g^{\mu\nu}$ は計量テンソルを表し、 $R^{\mu\nu}$ は Ricci テンソルとよばれる量で計量テンソル $g^{\mu\nu}$ で書かれている。また、 $T^{\mu\nu}$ は物質のエネルギー・運動量テンソルと呼ばれるものである。この式は、もともと重力場に対する Poisson 型方程式を一般化する事を目標にして、求められたものであらうと思われるが、彼が何故一般化を目指したかったのかの物理的な理由は不明である。恐らくは、Poisson 型方程式だけでは重力場に関して不十分であるとアインシュタインは考えて、結局は電磁場の方程式と同じような式にしたかったのであらうと思う。しかしながら、彼が実験事実からは出発しなかった事は別にして、理論的にさえも、その一般化の理由は良くわからない。ここで

$$g_{00} \simeq 1 + 2\phi_g$$

と

$$T_{00} \simeq \rho$$

である事を考慮すると、確かに直感的にはアインシュタインの一般相対論の方程式が導かれる事が納得できるものではある。

3.1.2 エネルギー・運動量テンソル $T^{\mu\nu}$

しかしながら、エネルギー・運動量テンソル $T^{\mu\nu}$ の物理的意味はあまり明確とはいえない。物質が作っている「物理量」であるが、物質による密度 ρ と言う物理量からテンソル量を作る物理的な理由はない。さらに、このエネルギー・運動量テンソル $T^{\mu\nu}$ は、フェルミオンの「場の理論」を知らない限り、本当の意味では定義するのが難しく、粒子描像でのエネルギー・運動量テンソルが物理的に明瞭に定義されているかどうかは、良くわからない。従って、フェルミオン場の言葉を使えば、 $T^{\mu\nu}$ を書くことは難しい事ではないのであるが、しかしその時には、フェルミオン場に対する方程式がないとこの「場自体」を決定するのが難しいものであり、従って、 $T^{\mu\nu}$ 自体の計算が出来なくなる。電磁場の方程式で言ったら、Maxwell 方程式の右辺にででくるカレント ρ と j は物質が作る電荷密度と電流密度であるが、これがどの様にして出来ているのかを求めようとするとは非常に難しく、現実問題においては、ほとんど不可能である。それは、フェルミオンの言葉で言えば多体問題になっているからである。 $T^{\mu\nu}$ は基本的にはカレント j^μ と同じであり、従ってそれを決めようとした時の難しさも同じである。

もう一つ、古典力学に対するコメントをしたい。古典力学で Hamiltonian が出て来るが、しかしこれはそれ自体が物理的な役割を持っているわけではない。Hamilton 方程式を求めて初めて物理的に意味がある Newton 方程式が得られるのである。Hamiltonian はエネルギーに対応しているが、古典力学におけるエネルギーは初期条件によって決定される単なる定数である。

3.1.3 一般相対論の数学は複雑、物理は単純

一般相対論の方程式は数学的には微分幾何を使ったりしてかなり複雑だが、物理的には単純である。物質があった時にどのような重力場ができるかと言うのが重力場に対する Poisson 型方程式であったのに対して、一般相対論の方程式は物質があった時に空間を測る計量テンソル $g^{\mu\nu}$ がどうなるかと言う事

を決める方程式になっている。重力場を求めるべき所なのに、何故、計量テンソル $g^{\mu\nu}$ を求める問題にすりかわってしまったのであろうか？理由は簡単で、それは等価原理を仮定したからである。しかし、アインシュタインは何故そのような事をしたかったのであろうか？この疑問に対しては、ここでは答えはない。恐らくは科学史的にはある程度答えられる事なのかもしれない。以下は、あくまで推量であるが、アインシュタインは多分、電磁場と似たような方程式を作りたかったのだと思われる。重力がスカラーであれば、Poisson 方程式のような式で十分であるはずである。しかし、重力がこのように単純なスカラーであろうとは、とても考えられなかったのであろう。その時代を考えれば、それはそれで納得できる気がする。

3.1.4 自然は複雑、数学は単純明解

ただ、ここで一つコメントしておく必要があると思われる。一般に、自然を理解しようとすると思像以上に複雑であり、余程しっかり考えないと理解できないものである。その点、数学はある意味で単純である。誰が計算しても正しくやれば同じ答えが出てくる。しかし、物理はその数学を自然界に応用しようとするのであるが、その時様々な条件が実際にはついている。すなわち、余程簡単化しない限り、その数学を正しく応用できないのである。数学が意味するところを押さえて、自然が持っている条件をしっかり考える事こそ、物理屋にとって最も重要な事であるが、しかし、これが実は極めて難しい事である。一般相対論は自然現象に合わせて作られていないので、数学は複雑、物理は単純という現実とは逆の事が起こっている。さらには、一般相対論の数学は煩雑ではあるが、しかし難しいものではなく、単にめんどろな計算を要求しているという事である。

3.1.5 計量テンソル $g^{\mu\nu}$ の問題点

たとえ一般相対論の方程式を認めたとしても、計量テンソル $g^{\mu\nu}$ を決定する事には物理上の問題がある。 $g^{\mu\nu}$ は勿論、座標に依存しているのであるが、この座標は何処から測られるのであろうか？これは、一般相対論の方程式を見れば明らかで、それは物質場の重心からである。そうでない限り、物質場が生み出す重力場が何の場か全くわからなくなってしまうのである。少なくとも、物理的には、物質全体が作る重力場を通して計量テンソルが決定されるものと

して理解する事が最もわかり易いし、それ以外ない。この事は、Maxwell 方程式を考えるとわかり易いものである。Maxwell 方程式においては、電荷密度と電流が存在した時、それに応じて電場 E と磁場 B が求められるのであるが、この時、電場と磁場の座標系は常に電荷密度と電流をあらわす座標系を起点として測られている。従って、電場と磁場は物質の重心を原点として測られているのであり、この事で物理的に問題になる事は勿論、あり得ないことである。

しかしながら、この時、それが計量テンソル $g^{\mu\nu}$ だとすると、話は混乱する。それは計量テンソル $g^{\mu\nu}$ が時空を測る物差しに対応していると考えているからである。物質が存在しているある時空がその計量を変えてしまったら、明らかにそれは最も重要である相対性原理と矛盾してしまう事になっている。これはまさに、等価原理が相対性原理と矛盾するという事と同じ意味合いになっているのである。この等価原理については、以下に詳しく議論して行くので、その内容をしっかり考えて理解して貰いたい。恐らくは、等価原理のような基本的でしかし実験とは直接関係のない問題は、それ程物理学にのめり込んではいない若手の物理屋や学部生・院生の方がきちんと理解できるのではないかと思っている。

3.1.6 物質に対する方程式の欠如

アインシュタインは重力場に対する Poisson 型方程式だけでは、何かが不十分であると思ったのであろう。前述したように、それは恐らくは、電磁場の方程式の事が頭にあったからだと考えられる。そのために、テンソル型の方程式に持って行きたかったのであろう。しかしながら、一般相対論の方程式だけでは、物理学としては不十分なのである。この一般相対論の枠組みでは、物質が高速で運動して相対論的になった時に、その物質が重力の影響をどの様に受けるかの方程式が欠如しているのである。そして、これこそが最も重要な問題である。すなわち、高速で運動する陽子が重力場の下でどの様に運動するのかと言う基本的な問題が設定されていない。具体的に言えば、重力ポテンシャルがあった時に、相対論的なフェルミオンが Dirac 方程式によりどの様に決定されるのかと言う基本的な問題が解かれていないのである。

しかしながら、ここでアインシュタインを弁護するわけではないが、この一般相対論が作られた当時は、フェルミオンに対する Dirac 方程式どころか、Schrödinger 方程式も知られていないのである。従って、物質に対しては Newton 方程式のみが基本方程式でありこれは場に対する方程式になっていないので、ある意味での困難さがでて来ているはずであった。一つには、Newton 方程式

では座標が質点をあらわしているが、これだとその質点を区別したい時にどうして良いかわからなくなるのである。さらには、計量テンソルにあらわれる座標はその空間の点を表しているのであろうが、その点が質点とどのような関係になるのかが不明になる。場の理論では、空間と時間は独立であり、それらが関係する事は無い。そして場によって粒子を表す時に、その場が空間と時間に依存しているのである。一方において、Newton 力学は粒子の座標が時間とともにどのように動くかを表しているのである。従って、空間座標と時間の区別の仕方が場の理論とは全く異なり、同じ理論体系の中に組み込む事は、基本的に不可能な問題である。

その意味では、時代背景から考えて、アインシュタインが一般相対論を考えて、このような場に対する基本方程式を作ろうとした事自体がもともと無理があったという事である。

3.2 等価原理

アインシュタインは一般相対性理論を構築する際、実験から出発しないで、等価原理という思考実験により考案した「原理」から出発してしまった。もし彼が Newton 方程式を相対性理論に合うように、高速粒子に対しても成立すべき方程式を作ろうとしたならば、それ程大きな間違いは犯さなかったと思う。物理学において、一般相対論を除く全ての理論は実験事実を記述する事を目的として方程式を作っている。Newton 方程式は質量 m の質点に力 $\mathbf{F}$ をかけるとその質点に対する方程式は $m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}$ あり、これが古典力学の物理現象をうまく記述してくれる事がわかっている。また、Maxwell 方程式は4つの微分方程式から成立しているが、それぞれの方程式は電磁気的な現象を記述する方程式を統合したものである。例えば、Gauss の法則は電場 $\mathbf{E}$ に対する方程式であり、電荷分布 $\rho(\mathbf{r})$ に対して $\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon_0}$ と書かれているが、これはクーロン力を良く記述しているし全ての実験と矛盾がない。さらに、水素原子における電子のエネルギースペクトルは Dirac 方程式によってほぼ完璧に再現されている。

それでは「等価原理とは何か」が問題となってくる。原理というからにはそれを証明する事は出来ない。さらには、この原理は何かの観測量として実験的にわかっている事ではない。何が等価であるのか？それは、「一様重力場での物理と等加速度運動をしている系での物理が同じである」と言うのが仮定である。これは非常に強い要請になっている。例えば、一様重力場での粒子の加速度は $\ddot{z} = -g$ であるから、確かに重力場における加速度と重力定数は同じになっている。しかし、これは Newton 方程式そのものであり、原理でもなんでもない事になり、ここからは新しい物理は出て来ない。ところが、アインシュタインは等加速度運動系という非現実的な系を仮定してしまったのである。実際、エレベーターの系を考えて、その系での物理を考えるとどうしても光が曲がるか空間が歪むかのどちらかの結果を考えざるを得なくなり、この原理に従ったら、当然重力場において空間が歪むという奇妙な仮定を置かざるを得なかったのである。これは、明白にアインシュタインが相対性原理をきちんとは理解していなかった事を示している。

物理学で最も大切な事は、常に実験から出発してその観測事実を如何に整合性を保った理論で理解できるかと言う事である。これに対して、一般相対論においてアインシュタインは「Gedanken Experiment (思考実験)」を基にした「原理」から出発してしまったのである。エレベーターの系を考えてそこで光が曲がったり空間が歪んだりしたらそれは仮定した「原理」が正しくな

い事を意味しているという事は、高校生がむしろ正確に理解できているのではないかと思われる。実際、エレベーターの系により解説している等価原理について、何人かの学部学生がどこかおかしいと感じていたという事を証言している。物理学者が一般相対論の用いる微分幾何に振り回されてしまい、結局、その物理の本質を見抜けなかったのは、あたかも「裸の王様」そのものの「物理版」を見ている気がしてならない。しかし、それ以上に「Gedanken Experiment」から理論を構築しようという姿勢は科学者として最も避けるべきものである事は言うを待たない。

3.3 重力ポテンシャルと Dirac 方程式

現在知られている力は4つである。電磁氣的な力、弱い相互作用、強い相互作用そして重力である。力の強さを示す結合定数という言葉でいうと、重力は最も弱い。実際、弱い相互作用と比べても重力は何桁も小さい。重力の次に弱いのが、弱い相互作用である。この力は、中性子が β 崩壊する時や π 中間子が崩壊してミューオンとニュートリノになって行く過程を記述する事ができるのである。これらの相互作用と比べると、電磁氣的な力はかなり強い相互作用であると言える。実際、我々の物質の世界は基本的には電磁氣的な力で支配されている。原子や分子が出来ているのも、全て電磁氣的な力である。最後に、最も強い力として強い相互作用があり、これは原子力エネルギーや太陽のエネルギー源になっている。星の内部で起こっている核融合はまさに強い相互作用による核子間の束縛エネルギーを解放する事により得られている。

重力の場合、何故、宇宙における星が出来ているように大きな影響を与えるのであろうか？重力は力の強さとしては、一番弱いのであるが、しかしながら2つの重要な性質のために、大きな影響を星の形成では発揮する事になるのである。その2つの性質とは、力の到達距離と常に引力であると言う事である。特に、重力は常にどんな場合でも引力であり、おまけにその力は遠距離まで及ぼすために、いずれは全ての核子は引き寄せられて、星を形成して行く事になるのである。

3.3.1 量子数と電荷

一方において、重力以外の力は基本的に電荷に対応する「量子数」が重要な役割をする。電子と陽子の間のクーロン力は引力である。これは、電子がマイナスの電荷という量子数を持っているのに対して陽子はプラスの電荷の量子数を持っている。この場合、クーロン力の形から引力である事がわかる。同じような考え方で、陽子と陽子、また電子と電子は斥力である事がわかるのである。ところが、重力の場合、常に引力である。今上で述べた量子数と言う意味では、粒子間の重力はその質量にしか依っていない。従ってその強さは別にして何時でも引力であり、おまけに長距離力であるために、結局、最後には重力が他のどの力よりも大きくなり勝ってしまうのである。

電子が他の粒子と相互作用する場合、電磁氣的にしても弱い相互作用にしてもその力の形は良くわかっている。ところが、相対論的な電子が重力場の中でどのような形で力を受けるのかと言う、極めて基本的な問題は、よくわかって

いない。それは重力ポテンシャルの場合、その力を Dirac 方程式のどの部分に入れたらいいのか決まっていないからである。この事は1970年の始め頃までは、深刻な問題として人々の興味を誘っていたが、その後パッタリと議論が絶えてしまった。その主な原因は、勿論、一般相対論への信奉がある。ところが、一般相対論は正常な場の理論であるとは言えなく、その方程式は計量テンソルに対するものになっている。従って、正常な場の理論の枠組みの中に重力を入れる事が、結局、現代物理の最も重要な課題である事は当然の事としてわかる事である。

3.3.2 物理学の方向性

ここで問題を整理してみると、どれが正しい方向か良くわかるのである。まず、Newton 力学でさえ、重力がある場合の方程式は良くわかっていて、実際 Kepler の法則にしても重力下での Newton 方程式を解けば、全く問題なく理解される事なのである。そしてその Newton 方程式はどのように導かれるのかという事を考える必要がある。これは実はよく知られている事だが、Schrödinger 方程式からしっかり導かれるものである。Schrödinger 方程式は場に対する方程式であるから、Newton 方程式を導くには何らかの近似をする必要がある。一番簡単で直感的にわかりやすいのは、演算子の期待値を取る事であり、この手法により割合簡単に、Schrödinger 方程式から Newton 方程式が導かれるのである。そして Schrödinger 方程式は非相対論の近似をすれば Dirac 方程式から求められる事が良く知られている事から、結局、Dirac 方程式から、Newton 方程式が導かれる事を意味している。という事は、Dirac 方程式の中に重力を入れられないとしたら、それは最もよく知られている重力ポテンシャルの場合の Newton 方程式が求められない事を意味しているのである。この事より、Dirac 方程式の中に重力ポテンシャルを入れた方程式を考えるのは、本当は一番最初にされるべき最も重要な事であったわけであり、これをしないで重力を考える事自体が、間違った方向に言っているといわざるを得ないのである。恐らく、1960年代のまともな物理屋はこの問題をかなり深刻に考えていたと思う。

ここでもう少し数学を使ってこの問題を見てゆこう。質量 m の質点が重力ポテンシャル中を運動する場合の Dirac 方程式はどう書けるのか？電磁場におけるクーロンポテンシャルだと

$$\left(-i\nabla \cdot \boldsymbol{\alpha} + m\beta - \frac{Ze^2}{r}\right)\Psi = E\Psi$$

と書けている。 $V(r) = -\frac{G_0 m M}{r}$ の重力ポテンシャルの場合、もしクーロンと同じだとすると

$$\left(-i\nabla \cdot \boldsymbol{\alpha} + m\beta - \frac{G_0 m M}{r}\right) \Psi = E\Psi$$

となる。しかし、これで良いという保障は全くない。実際、

$$\left[-i\nabla \cdot \boldsymbol{\alpha} + \left(m - \frac{G_0 m M}{r}\right) \beta\right] \Psi = E\Psi$$

であるかも知れないのである。いずれにしても、どちらなのかわからないと言う事をこれまでそのままにしていた事自体、正常ではない。さらに、この事をまじめに考えなかったと言う事も不思議な事ではある。後で議論するように、新しい重力理論によれば、後者の Dirac 方程式が正しい事がわかるのである。すなわち、電磁場の場合とは異なっていたのである。この事は後で議論する水星の近日点移動の問題を取り扱う時に、重大な効果を引き起こす事になる。それは、電場におけるクーロンポテンシャルの場合、非相対論の極限をとっても全く影響する事はなかったのであるが、スカラーポテンシャルとして入ってくると、非相対論の極限において、新しい付加ポテンシャルを生み出すのであり、これが水星の近日点移動の問題を見事に解決する事になっている事がわかるのである。

これらの事はもう少し詳しくは、第4章と付録Eの「場の理論」のところで取り扱っている。詳細はかなり面倒であり、実は繰り込み理論の修正と関係している。繰り込み理論については大変面白い理論模型であり、これも、後で付録Eで解説して行きたい。何故、繰り込み理論が重要であるかという事は単純であり、現在までのところ摂動論のみが、量子場の理論では取り扱い可能であると言う事と密接に関係している。この場合、場の量子化を実行すると必然的に Log の無限大が現れてしまい、この無限大の処理の処方箋こそが繰り込み理論なのである。その意味では、量子重力の理論と繰り込み理論は密接な関係があり、従ってこの量子重力をしっかりと理解するためには繰り込み理論の理解がどうしても必要になるのである。

第4章 新しい重力理論と宇宙論

この章では新しい量子重力の理論を紹介し、またそれに基づいた宇宙論を解説して行きたい。従って、この章は少し難しくなっているかも知れない。とはいっても、この解説は到底厳密とはいえないレベルなので、もっとしっかりした物理の内容は参考文献を読んで理解してもらう事としよう。

4.1 新しい量子重力の理論

重力の量子論を作るという事は何を物理的には意味しているのかをまず考える必要がある。最も基本的な意味は明らかである。それは、まずは、重力ポテンシャルがある時の Dirac 方程式をどのように書けるかという事である。これがすべての出発点になる。逆に言えば、これさえも出来なかったら、それ以上の重力理論を考える物理的な意味は無いのである。

しかしながら、現在良く使われている量子重力は重力場の量子化という意味を含み、そちらの方がより本質的であると考えている物理屋が多いように見受けられる。しかしこの辺の所は、どうしても混乱せざるを得ないのである。それは、一般相対論が重力の理論であるとアインシュタインも思い込んでいた訳であるから、この一般相対論の量子化が重要であると考えている物理屋も同じく沢山いるのである。ところが、一般相対論は重力場に対する方程式ではなく、計量テンソルに対する方程式であり、そもそもその物理的な意味が不明である。その物理的に不明瞭な場の量を量子化するといっても、なんの事かわからないのは当然である。場の量子化に関しては、付録 E で議論する事にして、まずは量子重力に関してその物理を明確にして行きたい。そしてそのためには、粒子間の重力ポテンシャルを与える Lagrangian 密度を求めてこの Lagrangian 密度からの Lagrange 方程式から重力ポテンシャル中での粒子の運動を記述する Dirac 方程式を求めるという事が、最も重要な課題となっているのである。

さらには、重力ポテンシャル中での新しい Dirac 方程式が求められた事に対して、その非相対論的な極限の方程式を求め、それを古典力学の方程式に持っ

て行く作業を実行する必要がある。実際、このようにして Newton 方程式を求めたところ、新しい重力として付加ポテンシャルを含めた重力ポテンシャルは

$$V(r) = -\frac{GmM}{r} + \frac{1}{2mc^2} \left(\frac{GmM}{r} \right)^2$$

と求められるのである。この第2項である付加ポテンシャルが水星の近日点移動、GPS 衛星の進み、そして地球の公転によるうるう秒の是正の問題をすべて解決している。また、この付加ポテンシャルは長い間、Newton 方程式のなかで議論されてきた重力ポテンシャルを修正した新しいポテンシャルとなり、これは19世紀半ば以来の変更と言えるものと考えられる。

ここで注意しておきたい事が一つある。歴史的に言って、相対論的效果を最初に具体的に検証したのは、Michelson-Morley の実験である。この場合、地球上で観測できる最も速いものは、地球の公転速度であり、Michelson-Morley はこれを利用して光の速度が地球の公転速度の影響をどのように受けるかを検証したわけである。結果は良く知られているように、光速は地球の公転速度の影響を受けていなく、光速不変の法則へと発展して行くのである。この時の相対論的效果は

$$\left(\frac{v}{c} \right)^2 \sim 1.0 \times 10^{-8}$$

である事が光速 c と地球の公転速度 v を入れれば求められる。一方、水星の近日点移動 ($\Delta T/T \sim 5 \times 10^{-8}$) も地球の公転によるうるう秒の効果 ($\Delta T/T \sim 2 \times 10^{-8}$) も、ともに丁度、相対論的效果の大きさそのものである。従って、直感的に言ってもこれらの効果が相対論的な付加ポテンシャルによって再現される事は、至極当然の事である事が納得できるものと思われる。

4.1.1 古典場と量子場

場の理論を考える時、その場が普通の関数 (c -数) である場合を古典場という。例えば、Schrödinger 方程式を考える時、状態 $\psi(t, \mathbf{r})$ を波動関数と呼んだり状態関数と呼んだりする。この $\psi(t, \mathbf{r})$ は座標 $(t, \mathbf{r})$ によっている事からわかるように「場」そのものである。しかし、この $\psi(t, \mathbf{r})$ は関数ではあるが、オペレータではない。このように場が c -数の関数である時、古典場であるという。これは勿論、量子場を考えているから、あえて古典場という言葉を使っている。

それではどのような時に量子場を考える必要があるだろうか？これは電磁場で考えるとわかり易い。すべては実験から出発する事は明らかである。Maxwell

方程式に出てくる電場と磁場は古典場である。あの式の中では、場を量子化する必要がない。しかしながら、水素原子において、電子が $2p_{\frac{1}{2}}$ の状態から $1s_{\frac{1}{2}}$ へ遷移する時、光が放出される現象が知られている。これは、電磁場の理論の立場からすると光が全く存在しない状態から、突然光が生まれてくる事に対応している。これは、光が真空から作られるという事を理論の中に組み入れる必要がある事を示しているものであり、これは場がオペレータになる事を意味している。この様に、場が出来たり消えたりする状態を生成・消滅演算子により記述する事を「場の量子化」と言う。現在までのところ、実験を記述するために場を量子化したという事以上には、理論的にわかっているとは言えないのであるが、同時にこの手法により現象を記述した場合、それと矛盾する実験はまだ見つかっていなく、理論的な整合性は十分であると考えて良い。

4.1.2 重力を含む Lagrangian 密度

電子と電磁場の相互作用を記述する Lagrangian 密度は、現代物理学の最も大きな成功を収めた理論である。場の量子化まで考慮した量子電磁力学は、現在までの全ての実験と矛盾する事はなく、極めて信頼性の高い理論体系となっている。

重力を入れた理論を考える時、当然の事として、最も信頼されている量子電磁力学の理論体系に何とかこの重力の相互作用を組み入れる事が自然な事であると考えられる。この場合、出発点として重要な事は、重力場を考える場合、これはゲージ理論では不可能であるという事である。その理由は簡単で、ゲージ理論だとその理論が持っている特性として、粒子間の相互作用は必ず斥力と引力の両方が現れてしまい、引力だけが必要な重力理論には適当ではないのである。

それでは重力場はどんな場であつたら、常に引力を与えるのであろうか？この答えは、ほとんどの大学院生がわかる程度に簡単である。すなわち、重力の場が「スカラー場」であれば、その場を媒介とした相互作用は常に引力になっている。ここで、具体的な Lagrangian 密度を書いておこう。質量 m を持つ質点 ψ が電磁場 A_μ と重力場 $\mathcal{G}$ と相互作用する場合の Lagrangian 密度は

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - e\bar{\psi}\gamma^\mu A_\mu\psi - m(1 + g\mathcal{G})\bar{\psi}\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}\partial_\mu\mathcal{G}\partial^\mu\mathcal{G}$$

と与えられている。ここで $\mathcal{G}$ は質量のないスカラー場となっている。この Lagrangian 密度をしっかりと理解する事はそれ程やさしいとは言えないが、し

かし専門的に研究して計算をする事以外は、読み飛ばしても全く問題ないものである。

それでは人々は何故このスカラー場による重力を考えなかったのだろうか？その答えは、恐らくは、スカラー場だと、繰り込みが出来ないと思い込んでいた事が主因であろうと思われる。さらには、繰り込みと関係しているわけだが、この数十年人々は基本的な相互作用の形はゲージ理論であるべきであるというあまり根拠のない「信奉」に振り回されていた気がする。量子電磁力学による繰り込み理論があまりにも大きな成功を収めたため、量子電磁力学の基礎であるゲージ原理が本質的であると思い込んだ節がある。ゲージ原理自体は単に数学的なものであり、確かに物理にそれを応用して、特に量子電磁力学では予想以上に上手く行った事は事実である。しかしだからといって、ゲージ原理が何処でも一般的に通用するかどうかは、全く別次元の問題であり、それはそれこそ実験によって決定されるべき物である。

4.1.3 重力場の方程式

上記の Lagrangian 密度が決められると、重力場に対する方程式は Lagrange 方程式から求められる。この方程式は時間によっている方程式になっているが、外場である物質場が時間によらない場合は、一般に静的近似をする事が出来る。この場合、重力場 $\mathcal{G}_0$ に対する方程式は

$$\nabla^2 \mathcal{G}_0 = mg\rho_g$$

と求められる。この時、 $m\rho_g$ は物質の密度に対応する。結合定数 g は重力定数と $G = \frac{g^2}{4\pi}$ により結びついている。これは、基本的には重力場に対する Poisson 型方程式になっていて、確かに観測されている重力場を再現できている。

4.1.4 重力場中の Dirac 方程式

上記の Lagrangian 密度から質量 m の質点に対して、重力場とクーロン力がある時の Dirac 方程式は

$$\left[-i\nabla \cdot \boldsymbol{\alpha} + m\beta(1 + g\mathcal{G}) - \frac{Ze^2}{r} \right] \Psi = E\Psi$$

と求められる。ここで重力場が質量 M の原子核によって作られるとするならば

$$\left[-i\nabla \cdot \boldsymbol{\alpha} + \left(m - \frac{GmM}{r} \right) \beta - \frac{Ze^2}{r} \right] \Psi = E\Psi$$

となり、前章で議論した重力場中の Dirac 方程式が得られた事になっている。これは非常に重要な方程式になっている。基本的な Lagrangian 密度から質点に対する重力場下での Dirac 方程式が初めてしっかりと求められたことになる。電子や陽子などの素粒子に対してこの重力場中の Dirac 方程式が重要になるような現象はそれ程無いかも知れない。可能性としては中性子星の表面での粒子の運動が相対論的になればあるいは必要になるかも知れない。しかし、後で見るように、この式を非相対論に直し、それを古典論に持って行くとこの時初めて重力場中の Newton 方程式が Dirac 方程式から矛盾無く求められた事になっているのである。

4.2 光と重力場の相互作用

上記の Lagrangian 密度は光と重力が相互作用する可能性を示している。実際、光とフェルミオンの真空偏極を考慮し、この真空偏極しているフェルミオンが重力と相互作用する Feynman グラフの4次の項を考えると、確かに光が重力と相互作用する事が証明出来るものである。ここで重要な点は、重力とフェルミオンの相互作用が重力と反フェルミオンの相互作用と同じ符号になるという事である。通常の QED を考えた時は、光により真空偏極したフェルミオンと反フェルミオンはゲージ粒子と相互作用すると符号が反対になり、お互いに打ち消し合い結果的にゼロになってしまうのである。この点が重力との本質的な相違であり、従って重力と光が相互作用するのである。

この4次の Feynman グラフの計算で驚く事は、見かけ上このグラフは Log 発散する様に見えるのであるが、実際には有限で値が求まるのである。Log 発散に対応する項は、劇的にそしてキネマティカルに打ち消し合い有限項のみが残るのである。この辺の事情は $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$ の Feynman グラフの計算をした事がある人は直ちに理解できる事であると思う。ちなみに、この $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$ の Feynman グラフの計算法は西島和彦の教科書「Fields and Particles」に大変丁寧に書いてあるので、一読してみると面白いものである。

4.2.1 光と重力場の相互作用の検証

この光と重力場の相互作用による物理的な効果はどの様に検証できるのだろうか？光と重力の相互作用による散乱断面積は

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha_g^2}{16k^4 \sin^4 \frac{\theta}{2}}$$

と書かれている。ここで、 k と M は光子の運動量と重力中心の質量を表している。また、 α_g は

$$\alpha_g = \frac{G\alpha m_t^2 M}{2\pi}$$

と定義されている。光と重力場の相互作用を検証するために一番良いと思われることは2つの衛星間にレーザーを飛ばして、その光が地球重力により散乱される時の散乱断面積を測定する事であると思われる。これは、不可能な実験ではないと考えられるが、より良い実験に関しては今後の課題である。

4.3 重力場中の Dirac 方程式の非相対論極限

重力場中の粒子に対する Dirac 方程式が

$$\left[-i\nabla \cdot \boldsymbol{\alpha} + \left(m - \frac{GmM}{r} \right) \beta \right] \Psi = E\Psi$$

と求められた事より、その非相対論極限の方程式を求めて、それから新しい Newton 方程式を求める必要がある。この事により、重力ポテンシャルも変更を受ける事になる。そして新しく求められた重力ポテンシャルが水星の近日点移動と GPS 衛星の軌道の時間の進みが見事に説明される事がわかるのである。さらには、地球の公転における進み具合も付加ポテンシャルは 0.62 秒/年と予言するのであるが、これははうろう秒として観測されてきた観測値 0.63 秒/年 とぴったり合うのである。

4.3.1 Foldy-Wouthuysen 変換

重力場中の Dirac 方程式の Hamiltonian は

$$H = -i\nabla \cdot \boldsymbol{\alpha} + \left(m - \frac{GmM}{r} \right) \beta$$

で与えられる。この Hamiltonian を Foldy-Wouthuysen 変換して、非相対論的な Hamiltonian を求める事は難しい事ではない。この Foldy-Wouthuysen 変換はユニタリー変換なので、常に信頼できるものである。その結果だけ書くと、

$$H = m + \frac{\mathbf{p}^2}{2m} - \frac{GmM}{r} + \frac{1}{2m^2} \frac{GmM}{r} \mathbf{p}^2 - \frac{1}{2m^2} \frac{GMm}{r^3} (\mathbf{s} \cdot \mathbf{L})$$

となる。興味があるのは、古典近似をした後のポテンシャルなので、因数分解仮説

$$\left\langle \frac{1}{2m^2} \frac{GmM}{r} \mathbf{p}^2 \right\rangle = \left\langle \frac{1}{2m^2} \frac{GmM}{r} \right\rangle \langle \mathbf{p}^2 \rangle$$

は、良い近似である。さらに、Virial 定理

$$\left\langle \frac{\mathbf{p}^2}{m} \right\rangle = -\langle V \rangle$$

を用いると最終的な重力ポテンシャルは

$$V(r) = -\frac{GmM}{r} + \frac{1}{2mc^2} \left(\frac{GmM}{r} \right)^2$$

となる。第2項が新しい重力の補正項である。電磁場の場合、クーロン力ではこのような非相対論の極限で新しい項は出てこないのであるが、重力はスカラーで入っているので、このような新しい項が現れたのである。電磁場の場合、ベクトルポテンシャルの部分は非相対論の極限をとると新しい項が現れてくる事は良く知られているが、重力の補正項もこれと似ていて、新しい項が現れてくるのである。

4.3.2 水星の近日点移動

水星の近日点移動の問題はアインシュタインがその解決を一般相対論により試みた事でもよく知られている。実際には一般相対論だと観測と逆の予想しか出来ないのであるが、少なくとも水星の近日点移動の観測値がよく知られた重力より他に何かあるという事を示唆していた事は間違いない。ここで新しい重力項が

$$V(r) = -\frac{GmM}{r} + \frac{1}{2mc^2} \left(\frac{GmM}{r} \right)^2$$

と表せられたことは重要な意味を持っている。Newton 方程式は

$$m\ddot{r} = -\frac{GmM}{r^2} + \frac{\ell^2}{mr^3} + \frac{G^2M^2m}{c^2r^3}$$

となっている。この式を解く事は簡単であるが、その前にいくつか物理量を定義しておく。まず、新しく角運動量 L を

$$L^2 \equiv \ell^2 + \frac{G^2M^2m^2}{c^2}$$

と定義し、さらに角速度 ω と R を

$$\omega \equiv \frac{\ell}{mR^2}, \quad R \equiv \sqrt{ab} = \frac{\ell^2}{GMm^2(1-\varepsilon^2)^{\frac{3}{4}}}$$

と定義する。ここで a, b および ε は長軸半径、短軸半径そして離心率を表す。また、 ω と関係して

$$\Omega^2 \equiv \omega^2 + \frac{G^2M^2}{c^2R^4} = \omega^2 \left(1 + \frac{G^2M^2}{c^2R^4\omega^2} \right) \equiv \omega^2(1+\eta)$$

と定義する。ここで η は

$$\eta = \frac{G^2M^2}{c^2R^4\omega^2}$$

である。この時、軌道を与える式は直ちに解けて

$$r = \frac{A}{1 + \varepsilon \cos\left(\frac{L}{\ell}\varphi\right)}$$

となる。ここで A と ε は

$$A = \frac{L^2}{GMm^2}, \quad \varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2L^2 E}{m(GmM)^2}}$$

で与えられる。物理的な観測量は $\dot{\varphi} = \frac{\ell}{mr^2}$ を周期 T に渡って積分する事により得られる。

$$\frac{\ell}{m} \int_0^T dt = \int_0^{2\pi} r^2 d\varphi = A^2 \int_0^{2\pi} \frac{1}{\left(1 + \varepsilon \cos\left(\frac{L}{\ell}\varphi\right)\right)^2} d\varphi$$

これは直ちに計算されて

$$\omega T = 2\pi(1 + 2\eta)(1 - \varepsilon\eta) \simeq 2\pi\{1 + (2 - \varepsilon)\eta\}$$

となる。ここで ε は十分小さいと仮定している。この事より、新しい重力項により引き起こされる効果は

$$\left(\frac{\Delta\omega}{\omega}\right)_{th} \simeq (2 - \varepsilon)\eta$$

または

$$\left(\frac{\Delta T}{T}\right)_{th} \simeq (2 - \varepsilon)\eta$$

となり、確かに角速度または時間の進みを与えている。

4.3.3 水星の近日点移動の観測値

水星の近日点移動の観測値は

$$\Delta\theta \simeq 42'' \text{ per } 100 \text{ year}$$

と知られている。水星の周期は 0.24 年である事から、一周回る毎での近日点移動比 $\delta\theta$ は

$$\delta\theta \simeq \frac{42}{3600} \times \frac{1}{360} \times \frac{0.24}{100} \simeq 7.8 \times 10^{-8}$$

となる。一方、

$$\eta = \frac{G^2 M^2}{c^2 R^4 \omega^2} \simeq 2.65 \times 10^{-8}$$

となる。ここで、水星の軌道半径と太陽質量は

$$R = 5.73 \times 10^{10} \text{ m}, \quad M = 1.989 \times 10^{30} \text{ kg}$$

である事を用いている。これより理論の近日点移動比 $\delta\theta_{th}$ は

$$\delta\theta_{th} \equiv \left(\frac{\Delta T}{T} \right)_{th} \simeq 4.8 \times 10^{-8}$$

となり、観測値と良く一致することがわかる。水星の近日点移動の観測値が100年間における移動の観測値である事を考えれば、この理論と実験の一致は非常に良いと言っても過言ではない。

4.3.4 GPS 衛星の進み

計算してみて驚く事は、GPS 衛星に対する新しい重力ポテンシャル項の影響がかなり大きいのである。従って、これは必ずGPS 衛星により明確に検証できるはずであると言う確信が持てる。GPS 衛星は地球の周りを一日に2回周回している様に軌道が設定されている。従ってその周期は半日である。このGPS 衛星の場合

$$\eta = \frac{G^2 M^2}{c^2 R^4 \omega^2} \simeq 1.69 \times 10^{-10}$$

である。ここで

$$R = 2.6561 \times 10^7 \text{ m}, \quad M = 5.974 \times 10^{24} \text{ kg}, \quad \omega = 1.4544 \times 10^{-4}$$

を用いている。従って、進みは

$$\left(\frac{\Delta\omega}{\omega} \right)_{th} \simeq 3.4 \times 10^{-10}$$

で与えられる。この時、観測値は

$$\left(\frac{\Delta\omega}{\omega} \right)_{exp} \simeq 4.5 \times 10^{-10}$$

となっており、予言値はこの値と大変良く一致している。この一致の仕方は驚きのレベルを超えている。この計算においては自由に動かせるパラメータは全

く無い。その事は、角速度の進み具合の式を見れば明らかである。それにもかかわらず、実験をこのように再現できるとは、これまで様々な理論模型の計算をしてきた経験者としては本当に驚きであった。理論が実験データをうまく再現するという事は、自由に動かせるパラメータがない時は現実問題としては常に非常に難しいものである。

これは、明白に新しい重力理論が正しい事を示している。一般相対論の問題点を厳しい調子で議論し批判してきたが、それ程までに言う必要が無いほどに明白な理論計算の結果と GPS 衛星の観測量である。GPS 衛星がデータを出したのが 10 数年前だとすると、新しい重力理論が数年前に作られた事は、ある意味でタイムリーでもあったと思われる。水星の近日点移動の観測値と理論との一致だけでも、物理学上は十分であるが、しかし一般相対論の信奉者が現代これ程多い状態を考えれば、新しいデータにより、一般相対論を否定して、さらに新しい重力理論をサポートする事は重要であると思われる。

4.3.5 地球の公転の進み — うるう秒

水星の近日点のズレばかりにこれまでの物理的な興味がもたれてきたが、水星が Newton 方程式の予言よりも少し速く回転するならば、当然、地球も同様に公転が少し早くなっているはずである。実は地球の公転のズレもそれ程水星と比べて小さいわけではない。実際、

$$\eta = \frac{G^2 M^2}{c^2 R^4 \omega^2} \simeq 0.992 \times 10^{-8}$$

である。ここで

$$R = 1.496 \times 10^{11} \text{ m}, \quad M = 1.989 \times 10^{30} \text{ kg}, \quad \omega = 1.991 \times 10^{-7}$$

を用いている。従って、時間の進みは

$$\left(\frac{\Delta T}{T} \right)_{th} \simeq 1.98 \times 10^{-8}$$

となる。これは、1 年間の時間のシフトとしてみると

$$\Delta T \simeq 0.621 \text{ s/year}$$

となる。すなわち、1 年間に 0.62 秒程進むのである。これは水星の近日点移動の観測値を認める限り、必ず起こっている現象であり、物理的には当然の結果である。

実は、この事はすでに十分に精度で観測されていた事であった。それはうるう秒の補正である。1972年の6月に最初の補正をして以降は、1972年の12月から2008年の12月まで23回実行している。従って、1972年の6月からスタートしたとして、23回のうるう秒補正をした事になっている。これは36.5年間の間にうるう秒として23秒補正している事に対応している。よって、1年間の地球の公転の進みは

$$(\Delta T)_{exp} \simeq 0.63 \pm 0.03 \text{ s/year}$$

に対応していて、この値は理論値と完全に一致しているのである。すなわち、地球の公転時間の進みの観測量は、しっかりと補正されていた事なのである。これまでは、この現象が理解できなかったのが、地球の自転のせいにしていたのであるが、勿論、自転がそのように大きく変わることは物理では理解できる事ではない。理論と実験の一致は完璧であるが、これはしかし、ある意味で当然であった。それはやはり地球の公転が一番精度良く測られているという事であったのである。

4.3.6 うるう秒年代測定

地球の公転がこれまで考えてきたよりも1年間で0.62秒早く太陽の周りを回っていると言う事は当然古い建築物の年代測定に応用する事が出来る。ピラミッドとか石造の古い建物はしばしばその建物のある場所が特別に作られている。例えば、春分の日には太陽がある場所に来るように作られている場合がある。その場合、現在の春分の日における太陽の場所と比較すれば、その建築物が建造された年代がかなり正確にわかる事になる。1000年間で10.3分程度遅れているはずだから、割合簡単に年代測定が可能であると考えられる。これまで、木の場合、放射性炭素 (^{14}C) による年代測定が行われてきたが、今度の場合は、石造建築に対しての方がより威力を発揮するものと考えられる。地震などによる地殻変動が起こっていない限りかなり正確であると考えられるものである。

ここで一つコメントをしておこう。地球上の1点で観測した場合、公転の進みは地球の自転を考えて補正する必要がある。絵を描いてみれば明らかであるが、地球の公転が進むと言う事は自転で言ったら遅れる事に対応している。

4.4 一般相対論の予言

ここで、数値的にも一般相対論は実験と矛盾する事を示しておこう。その場合、実はブラックホールの予言の問題と密接に関係しているので、この辺も含めて解説して行きたい。

4.4.1 重力崩壊

一般相対論の効果を近似的に付加ポテンシャルで表すことが出来ており、基本的な一般相対論の物理はこれである程度議論される事がわかっている。この場合、付加ポテンシャルを加えた重力ポテンシャルは

$$V(r) = -\frac{GMm}{r} - \frac{3}{mc^2} \left(\frac{GmM}{r} \right)^2$$

となる。この時、Newton 方程式は

$$m\ddot{r} = -\frac{GmM}{r^2} + \frac{L_g^2}{mr^3}$$

となっている。ここで、 L_g^2 は

$$L_g^2 \equiv \ell^2 - \frac{6G^2 M^2 m^2}{c^2}$$

と定義されている。さらに新しく角速度 Ω_g を

$$\Omega_g^2 \equiv \omega^2 - \frac{6G^2 M^2}{c^2 R^4} \equiv \omega^2 (1 - \gamma)$$

で定義しておく。ただし、 γ は

$$\gamma = \frac{6G^2 M^2}{c^2 R^4 \omega^2}$$

である。ここで重要な事は、もし L_g^2 の式で右辺の第2項が第1項よりも大きくなるとこれは重力的に不安定となる。 r が小さい所では必ず引力が勝ってしまい、角運動量でこれまで崩壊を止めていたのに、もはや止める項がなくなり重力崩壊してしまうのである。これがブラックホールであり、その条件は

$$R \leq \frac{\sqrt{6}GM}{c^2}$$

と表されている。

4.4.2 水星軌道の遅れ

それでは、この一般相対論による付加ポテンシャルはどのような水星の近日点移動を予言するのであろうか？Newton 方程式に対する軌道の解は

$$r = \frac{A_g}{1 + \varepsilon \cos\left(\frac{L_g}{\ell} \varphi\right)}$$

と書けており、ここで A_g は

$$A_g = \frac{L_g^2}{GMm^2}$$

で与えられている。物理的な観測量は前述したように積分量であり、今の場合の Newton 方程式で保存量である角運動量から $\ell = mr^2\dot{\varphi}$ より、

$$\frac{\ell}{m} \int_0^T dt = \int_0^{2\pi} r^2 d\varphi = A^2 \int_0^{2\pi} \frac{1}{\{1 + \varepsilon \cos(\varphi(1 - \gamma))\}^2} d\varphi$$

と積分すれば良く

$$\omega T \simeq 2\pi\{1 - (2 - \varepsilon)\gamma\}$$

が直ちに求められる。しかし一般相対論による付加ポテンシャルで引き起こされる効果は

$$\left(\frac{\Delta\omega}{\omega}\right)_{th} \simeq -(2 - \varepsilon)\gamma$$

となり、これは角速度または時間の遅れを与えている。これは、一般相対論の予言値が観測値と矛盾している事を明確に示している。この事より、一般相対論は概念的な困難だけでなく、観測量との比較からも、正しい理論ではない事が示されたのである。

4.4.3 これまでの理論計算の予言

それでは、これまでの人達は何故一般相対論の予言値が水星の近日点移動の観測事実を再現できると思ったのであろうか？その答えは簡単である。これまでの理論計算においては、角度のズレだけで観測量と結びつけられると思い込んだ事によっている。水星の軌道を与える式は

$$r = \frac{A_g}{1 + \varepsilon \cos\left(\varphi\left(1 - \frac{1}{2}\gamma\right)\right)}$$

と表された。ここで角度の式には L_g^2 の具体的な式を入れてある。この時、水星の近日点は軌道の式から

$$\varphi \left(1 - \frac{1}{2}\gamma \right) = 0$$

で与えられるのであるが、この場合明らかに $\varphi = 0$ となってしまう。そこで人々は

$$\varphi \left(1 - \frac{1}{2}\gamma \right) = 2\pi$$

が近日点を与えるからと言ってこの式から角度のズレを求めたのである。この場合、確かに

$$\varphi \simeq 2\pi + \pi\gamma$$

が求められて、これで水星の近日点移動がわかり、これにより説明されたと考えられてきた。しかし、この式には明らかにおかしい点が2つある。その一つはこれはひどく基本的な事ではあるが、 φ は常に $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ で定義されている。 φ が 2π を超える事はない事であり、定義されていない。もう一つとして、軌道を与える式は時間には依ってなく、従って $\varphi = 0$ も $\varphi = 2\pi$ も共に同じ近日点に対応するべきであった。これはどういう事であろうか？実は、軌道の式を見れば明らかなようにこの軌道はすでに閉じた軌道になっていないのである。角度 φ の変化と共に軌道全体が回転したような状態になっている。これでは角度だけで近日点移動を議論出来ない事は明らかであった。それではどうしたら良いのであろうかと言う疑問に対しての答えが前述したような軌道全体の積分量を求めることであったわけである。実際、今の場合の積分量は

$$\omega T \simeq 2\pi (1 + \varepsilon\gamma)$$

となる。従って、この効果は

$$\left(\frac{\Delta T}{T} \right)_{th} \simeq \varepsilon\gamma$$

となり、確かに時間の進みを与えてはいる。しかしながら、この場合の時間の進みは離心率 ε に比例しており、水星の近日点も $\varepsilon = 0.2$ であるため、理論値は観測値よりはるかに小さくなる。さらに、GPS衛星や地球の公転の場合、離心率 ε がほとんどゼロであるため、これだけを取ったとしても、一般相対論はGPS衛星と地球の観測値を再現できていない事が良くわかるものである。実際には、引力があると周期は公転による軌道面積に比例するため一般相対論の予言値は前述したように、時間の遅れになっているのである。

この事は物理において何かの模型による理論計算をした時に、その現象において何が物理的な観測量であるかをしっかり考える必要があると言う事を示している。この点に関してもアインシュタインは現象を理解する事に急ぎすぎ、理論が予言した時の観測量が何であることをきちんと考える事を怠っていたのである。

その意味において一般相対論は2重の間違いを犯してしまった事になっている。一つはその出発点である等価原理を実験からではなくて、思考実験から持ってきて理論模型を作った事であった。そしてもう一つは、その理論模型が予言する物理量を計算する時に何が観測量であるかの考察が間違っていたと言う事であった。これらの事は現代の我々物理屋に取っても十分注意しなければいけない大変重要な事である。物理の計算において、何が物理量であるかと言う問題は、じっくり考えても考えすぎる事はないほど難しい事なのである。

これまで見てきて明らかになった様に、一般相対論はその理論の出発点から間違っており、さらにその理論模型の予言値は観測値と矛盾していた。その意味でアインシュタインは間違った理論体系を構築してしまったのであるが、かといってアインシュタインを責める事は出来ない。その段階においてベストな理論模型を作ろうとしていた事は明らかである。むしろ問題なのは、その後における我々自身である。理論模型の検証をしっかり行う事を怠っていたわけであり、特に、水星の近日点移動の問題はNewton方程式をしっかり解くかどうかというレベルの検証であり、この程度の検証さえも自分の手で行った研究者が少なかった事こそが問題であり、簡単な検証を必ず自分の手を動かして行うと言う事を徹底する事が今後の重要課題でもある。

4.5 新しい宇宙論

一般相対論がなくなり、通常の場合の理論で重力がしっかり理解できるようになったという事は、即、宇宙論に大きな影響をもたらす事は明らかである。この場合、ビッグバンではなくて、全くそれとは異なる宇宙論を考えて行く必要がある。それともう一つ重要な要素がある。それは、光が重力と相互作用するのである。この相互作用は光が真空偏極してその時のフェルミオンが重力と相互作用する Feynman グラフの 4 次の項としてでてくるものである。従って、強い重力源のところでは、光は散乱してある程度は曲げられる事になると考えられる。これらの情報をもとにして、新しい宇宙像を考えて行きたい。

4.5.1 コスミックファイアボール

現在、多くの銀河は全体として膨張している事がわかっているが、しかしいづれは必ず重力による引力により引き合い融合する事になる。それが大雑把に何時であるかは、ある程度は計算出来ると思うが、それ程興味のある物理学上の対象にはならないし、あまり興味が湧く事でもない。しかしながら、膨張が止まった段階で、沢山の銀河は少しずつ融合しながら、より大きな銀河団を作って行く事であろう。そしてそれを繰り返す事により、最終的には、2 個か 3 個の大銀河団になって行き、それらが最後の衝突を起こす事になるであろう。その最終的な衝突で作られた物を「コスミックファイアボール」と呼ぶ事にした。このコスミックファイアボールの状態は非常に熱いものになっている事と考えられ、それは恐らくはこれまで考えられて来たビッグバンの状態の中でバリオンと電子の世界になった状態に似ているものと考えている。従って、この場合は最初にヘリウムまでは作られるであろうが、その後はやはり急速に冷えて行き、重い原子核の生成はこのコスミックファイアボールの段階では、作り難いものであると考えても矛盾は無いものと思われる。

4.5.2 前宇宙の残骸

この新しい宇宙論によると、銀河と宇宙の形成は繰り返す事になる。この宇宙の形成は約 150 億年程の昔に大方作られたものと考えられているが、それではその前の宇宙はどうであったのであろうか？恐らくは、今の宇宙の様に沢山の銀河が融合してコスミックファイアボールになったと考えられるのであるが、何か、その爆発の「残骸」に対応するものがあれば、よりわかり易いと思

われるものである。その残骸に対応するものとして考えられるものは、やはり銀河の大構造であろう。この銀河の大構造に関する詳しい内容は、宇宙物理学の専門書を参照していただく事にしたいが、銀河団の空間的分布がある所でかなり偏っているという事である。それはまるで壁を作っている様に並んで見える場合が観測されているのである。これは、最終段階の銀河団の衝突の仕方と密接に関係している物と思われるものである。

それ以外の前宇宙の残骸としてフォトン・バリオン比があるだろう。この事は、第1章でも議論しているが、この宇宙はフォトンの数がバリオン数より大幅に多いのであるが、この理由は物理学では現在までのところ、解明されていない。この宇宙のバリオン数に関しては、恐らくこれは物理の対象にはならないと思っている。つまり、このバリオン数を持つ宇宙が無限に遠い過去からずっとあったと考えるしか他に仕様がなない。しかし、フォトンは何時でも作られるので、増える事は確実である。しかしどの様に増え、そしてどの程度がこの宇宙の外に逃げて行くのかは、まだ良くわからない。いずれは、ある程度の計算は出来るかも知れない。

4.5.3 無限の過去・未来と無限の空間

この新しい宇宙論の描像によれば、無限に遠い過去から無限に遠い未来まで同じ事（銀河と宇宙の生成）を繰り返してきたし、また将来も繰り返す事になる。それでは、無限の過去・未来とは一体何なのであろうか？これこそは、確かに永遠の課題であろう。しかし、はっきりしている事は、人間は有限量しか理解出来ないのである。無限と言葉で言っても、実際は何もわかっている訳ではない。数学者に言わせれば、人間は所詮数える事しか出来ないものであるという事になる。そして、脳科学者に言わせれば、人間の脳はせいぜい1兆個の脳細胞により思考しているから、無限の過去・未来を理解する事は不可能であるという事になる。

さらに言えば、空間的にも宇宙は無限であるとしても、なんら矛盾が無い。これまでは、宇宙が無限であるとしたら Olbers のパラドックにより、星の光を全て足すと必ず無限大の光になってしまうから、宇宙が無限では困るという事が考えられてきた。この事も人々がビッグバン宇宙論を支持する一つの根拠でもあった。しかしながら、Olbers のパラドックには基本的な仮定として、星が常に一様に分布しているという事がある。この新しい宇宙論の場合、明らかに一つの宇宙がほとんど閉じた形で成立しており、一様性の仮定が成り立っていない。さらに、光が重力と散乱する事より、必ずしも全ての光が遠方まで

届くわけではない。従って、この我々の宇宙と同じ様なレベルの大宇宙が他に無限個あったとしても、別に驚く事ではない。ただ、残念ながら我々にはそれ以上理解できないし、また他の大宇宙との相互作用もほとんどゼロに近いであろうから、物理学の対象にはならない事も確かである。それ以上に、人間には無限の空間と言う事を理解する事が出来ない。どんなに想像したとしても、それは所詮有限の空間なのである。

ある意味で、ビッグバン宇宙論はこの宇宙を有限の空間に閉じ込めたいと言う一種の人間の願望があったように思われる。もう少し強く言えば、人間がわからない事はないと言う一つの驕りがあったように思われてならない。確かに、数学的な「無限」は理解し、それをある程度コントロールする事は可能であるかも知れない。例えば、場の理論模型において、熱力学極限の問題で箱の大きさ L を無限大にする事により物理的な観測量と結びつける事が出来るのであるが、この時 L を無限大にするという意味は、その模型にあらわれるあらゆる長さスケールと比べて L が十分大きいと言っている事なのである。しかしながら、自然界での「無限」はどの様に人間が考えてもそれを理解する事は全く不可能な事である。それは、宇宙では比較すべき長さスケール自体が存在しなく、言い換えればその長さスケール自体が無限であったら、もはや理解不能であるという事は誰でもわかる事である。さらに言えば、これは科学の本質と関係しているのである。科学は観測した事実を理解する事がすべてであり、観測出来ない事を理解しようとする事、あるいは理解したいと思う事は、科学ではないのである。

4.5.4 新しい宇宙像

これまで見てきたように新しい宇宙像とは、沢山の銀河が形成され全体が膨張し続けて行き、その膨張エネルギーを使い果たしたある段階から今度は収縮に転じて行き、いずれはまたコスミックファイアボールになり、爆発して膨張するという現象を繰り返して行くのであらうという物である。この場合、この宇宙に中心はあるのであらうかと言う疑問を持つのは至極当然である。惑星系も銀河系も全てその中心に重い星が存在しているからである。しかしながら、銀河全体を見るに及び、これはむしろ原子核の多体系に近いのであらうと想像できる。原子核の場合、それは陽子と中性子によって作られている。ところがこの物体には中心となるものが存在していないのである。それぞれの核子が平等の役割を果たして、原子系のように、その中心に原子核があるという系ではないのである。今の場合、一つの核子からすると、その原子核の中心が

何処であるかという設問に対しては、どのようにしても答える事は出来ないのである。但し、その原子核全体を見渡す事が出来れば、その中心が大雑把には何処にあるかが、平均値としてわかる事にはなっている。但し、それぞれの核子が動いている限り、実際問題としてその中心を示す事は原理的に出来ない事である。この宇宙全体の中心の問題もこれに極めて近いものであると考えられる。平均したら、この宇宙の中心がどのあたりにあるのかはもし宇宙全体を見渡す事が出来たら、大雑把には議論出来る可能性はある。しかし、宇宙の一部に存在する観測者からこの宇宙の中心を探る事は原理的に不可能である。尤も、それ以上に、この設問がどの程度物理的に意味があるのかはまだ自分には良くわからない。

4.5.5 宇宙の無限性と背景輻射

この我々の宇宙には 2.7 K の背景輻射が存在している。宇宙にこの低エネルギーのフォトンが一様に分布し存在しているとするとこれはかなりのエネルギーになっている。大雑把に言って、すべての物質が持っている宇宙の重力ポテンシャルエネルギーの数%は存在しているものと思われる。この事自体は別に問題ないのであるが、問題はフォトンが我々の宇宙からその外へエネルギーを持ち去っているという事実である。これがたとえ重力ポテンシャルの数%でも、いつかはすべての重力ポテンシャルエネルギーを持ち去ってしまう事は明らかである。

この現象を解釈する模型として大雑把に言って2つ考えられると思う。1つ目の模型として、我々の大宇宙は爆発と収縮を繰り返し、その度にこの 2.7 K の背景輻射をこの宇宙外に放射して行くというものである。この事により徐々に重力のポテンシャルエネルギーを失って行き、いずれ全く冷えた状態になって行くというものである。この場合は、背景輻射の放出がどこから出ているのかを説明する必要がある。黒体輻射によると考える場合、本当にそれが可能であると言う事を示す必要があり、現在までのところ、まだ正確な模型計算はなされてはいないのが現状である。

もう一つの模型として、我々の大宇宙と同様な宇宙が無限にあると言うものである。この場合、どの宇宙も爆発と収縮を繰り返し、その度にこの 2.7 K の背景輻射を放出すると言う事は同じである。しかしこの場合、2.7 K の背景輻射は宇宙全体に存在するべきものであり、その温度の多少のずれはあるにせよ、基本的には、この電磁波の海の上に我々の宇宙が存在していると言う事になる。この模型の場合、2.7 K の背景輻射を理解する事はそれ程難しくはな

なるが、しかし、わからない問題を無限空間に押しやったと言われても仕方がない模型である。

これら以外にも、様々な模型がこれから提唱されてゆく事になると考えられる。これは面白い問題ではあるが、同時にどこまで科学になれるかが、模型の焦点になる事であろう。

第5章 物理学の展望

物理学はいくつかの基本法則をもとにして自然現象を理解しようとする学問である。そこで最も重要な役割を果たしているのは、相対性原理である。相対性原理とは、どの慣性系でも、基本法則は同様に成り立ち、いかなる観測量も同じであるというものである。我々の持っている4つの基本方程式は全てこの相対性原理を満たしている。この我々が持っている方程式は「場の方程式」である。ただ、Newton 方程式は質点の座標に対する方程式であるが、しかしこれも Schrödinger 方程式から場の期待値を取る事により Newton 方程式が導かれる事から、全ては場の理論が基本であると考えて良い。その場合、結局 Maxwell 方程式が全ての出発点であり、ある意味ではこれを原理と考えても良いと思われる。

この章は少し数学を使った解説が多くなっており、物理の専門家以外にはあるいは難しすぎると感じるかも知れない。今後の物理の方向を考え、それをより具体的に解説する事が重要であると考えたために、これから物理を学ぼうとしている若手を念頭において解説している。

5.1 量子化

長い間、古典力学が物理学の基本であると人々は思っていたし、それはそれで道理に適っているとも言える。実際、科学の歴史からすれば、これは当然の事である。Newton 力学が出発点であり、量子力学もその古典力学から求められたものである。しかしながら、科学史は別にして、現代の我々が考える物理は歴史にとらわれる必要はない。すなわち、古典力学から出発する必要は無いのである。実際、Maxwell 方程式を見てみると、これはすでに場の理論である事は誰でも知っているし、逆に言えば電場や磁場から「場」という概念が生まれたわけである。この場合、非常に重要な事が Maxwell 方程式から伺う事が出来る。それは Maxwell 方程式は「量子化を知っている」という事である。Maxwell 方程式には逆に言えば古典力学に対応する方程式が存在していない。

これは最初から量子化された方程式なのである。この事は昔からわかっていた事であり、新しい事でも何でも無い。しかしながら、この事実がはっきりと認識されたのは、ごく最近の事であると言って良い。

Maxwell 方程式が基本方程式であるとする、古典力学のハミルトニアンを量子化して Schrödinger 方程式を求める際に使っている式 $\mathbf{p} = -i\hbar\nabla$, $E = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}$ はその根拠を失う事になる。結果的には、古典力学のハミルトニアンから上式の量子化の手法により Schrödinger 方程式が求められるが、しかしだからといって量子化の過程が基本的であるという事にはならない。これまで、運動量とエネルギーを微分演算子で置き換える手法を「量子化の原理」と考えてきたが、明らかにこれは原理ではなくて、結果である事が Maxwell 方程式から良くわかるのである。さらには、Schrödinger 方程式を導出する際に、この置き換えの手法だと状態 ψ が何故あらわれるのかと言う質問に答えられていない。量子力学の講義で学生に教えるのは、運動量とエネルギーを微分演算子で置き換える限り、その微分がなされる状態を用意する必要があり、これが ψ である、という言い訳をして説明するのであるが、しかし、これが取ってつけた様な言い訳であると言う事は、誰でも感じる事である。しかしながら Schrödinger 方程式が実験を良く再現している限り、物理的にはそれ程深刻な問題ではない事も確かである。

5.2 Dirac 方程式の導出

量子力学の基本方程式である Schrödinger 方程式が Dirac 方程式を非相対論の近似をする事により求められる事は良く知られている。従って、Maxwell 方程式を出発点 (原理) にして、Dirac 方程式が導けられたらこれは最も合理的なものとなる。そして、実際この事が可能なのである。但し、もう一つ条件をおく必要があり、それがゲージ不変性である。Maxwell 方程式がゲージ不変になっているので、電磁場がフェルミオンと相互作用する時、全 Lagrangian 密度がゲージ不変である事を要求すると、確かに Dirac の Lagrangian 密度が決定される事がわかっているのである。

もう少し詳しく説明して行こう。これまでわかっている事は、Maxwell 方程式自体は実験から決められた方程式であり、何か他のより基本的な原理などから導かれるわけではない。Weinberg – Salem の理論は電磁気的な力と弱い相互作用を統一した理論と考えられてきているが、この理論は対称性の破れの現象を基本的な原理としている。しかしながら、Weinberg – Salem はこの自発的対称性の破れの物理を正しく理解してはいなく、その基礎的な理論自体は今後大幅な修正が要求される事が明らかになっている。それにもかかわらず、Weinberg – Salem が求めた最終的なハミルトニアンは恐らく正しいものと思われるが、それは実験と直接結びつける作業が実行されているからである。しかしながら、電磁場と弱い相互作用が統一されたわけではなく、結局今後、自発的対称性の破れ自体をきちんと理解してから、新しい理論を作っていく必要があるのが現状である。

話を戻すと、Maxwell 方程式は今後理論を考える時の一つの原理として見て行くべきである。従って、Maxwell 方程式を出す事が出来る Lagrangian が出発点として考えて良いと言う事を意味している。従って、Maxwell 方程式を原理にして、Dirac 方程式を導く事がどの様にしたら可能であるかを以下に議論して行こう。しかし、その前に、Dirac がその方程式を導いた直感的な方法について解説しよう。

5.2.1 Dirac による Dirac 方程式導出

Dirac 方程式は相対論的なフェルミオンを記述する理論であり、現在までのところ、最も信頼できる理論体系の一つである。結局、相対性理論 (ローレンツ変換) と矛盾しない理論が正しいものである限り、基本的な方程式は相対論的な方程式であるべきである。

Dirac はまずエネルギーと質量に関するアインシュタインの関係式 (分散関係式) から出発した。 $E^2 = m^2 c^4 + \mathbf{p}^2 c^2$ である。ここで、今考えているのは、質量 m を持ち、その運動量が $\mathbf{p}$ である質点であり、相互作用は仮定されていない。この時、Dirac はこの分散関係式を因数分解する事にした。それはエネルギーの 1 次式を得たかったからである。Dirac の因数分解は次のようになされた。

$$E^2 - \mathbf{p}^2 c^2 - m^2 c^4 = (E - c\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\alpha} - mc^2 \beta)(E + c\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\alpha} + mc^2 \beta) = 0$$

ここで、 $\boldsymbol{\alpha}$ と β は 4 行 4 列の行列であり、具体的には

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ \boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

と書かれていて、ここで $\boldsymbol{\sigma}$ は Pauli 行列と呼ばれている 2 行 2 列のエルミート行列であり、次のように書かれている。

$$\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z), \quad \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

従って、Dirac 方程式は因数分解されたうちの一つを取れば十分なので、

$$(-i\hbar c \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\alpha} + mc^2 \beta) \Psi(t, \mathbf{r}) = i\hbar \frac{\partial \Psi(t, \mathbf{r})}{\partial t}$$

となり、これがフェルミオンを記述する Dirac 方程式である。この時、運動量とエネルギーを微分演算子にする通常の手法を採用している。なお、電子がクーロンポテンシャル中を運動する場合、すなわち水素原子の場合は Dirac 方程式が

$$\left(-i\hbar c \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\alpha} + mc^2 \beta - \frac{e^2}{r}\right) \Psi(t, \mathbf{r}) = i\hbar \frac{\partial \Psi(t, \mathbf{r})}{\partial t}$$

と書かれている。この場合のエネルギー固有値は実験を見事に再現している。

5.3 Dirac 方程式の新しい導出法

量子化として知られてきた式

$$\mathbf{p} = -i\hbar\nabla, \quad E = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}$$

がその根拠をなくした場合は、Dirac が導出した手法は使えなくなる。科学史的には勿論問題ないが、しかし他のもう少ししっかりした導出法を考える必要がどうしてもでてくるものである。以下に解説する手法は、Maxwell 方程式を指導原理として、さらにはそこで見つかったゲージ不変性を原理として利用して行くものである。基本的には、電磁場と Dirac 場が相互作用している Lagrangian 密度をゲージ不変である事を要求する事によって求めて行くと言うものである。以下においては、再び $\hbar = 1$, $c = 1$ の表示に戻る事にしよう。

5.3.1 電磁場の Lagrangian 密度

出発点は Maxwell 方程式である。これを基本原理とする。この Lagrangian 密度を書くと

$$\mathcal{L} = -gj_\mu A^\mu - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$$

ここで A^μ はゲージ場であり、 $F^{\mu\nu}$ は場の強さと呼ばれるもので

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$$

と書かれている。この $F^{\mu\nu}$ は計算してみれば直ちにわかる事だが、実は電場と磁場そのものである。例えば、 F^{01} は

$$F^{01} = \partial^0 A^1 - \partial^1 A^0 = -\frac{\partial A^1}{\partial t} - \frac{\partial A^0}{\partial x} = E_x$$

であるから、電場をあらわしている。また、 F^{12} は

$$F^{12} = \partial^1 A^2 - \partial^2 A^1 = -\frac{\partial A^2}{\partial x} + \frac{\partial A^1}{\partial y} = -B_z$$

であるから、磁場をあらわしている。また、Lagrange 方程式から

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = gj^\nu$$

が求まり、これはベクトルポテンシャル A_0 , $\mathbf{A}$ で書いた Maxwell 方程式そのものである。

5.3.2 ゲージ不変性

上記で求めた Lagrangian 密度の第2項 $-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ は次のゲージ変換に対して不変である。

$$A'_0 = A_0 - \frac{\partial\chi(t, \mathbf{r})}{\partial t}, \quad \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\chi(t, \mathbf{r})$$

ここで $\chi(t, \mathbf{r})$ は任意の関数であり、確かに $-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ は、ゲージ変換してもその後 $\chi(t, \mathbf{r})$ には依っていない。ところが、Lagrangian 密度の第1項 $gj^\mu A_\mu$ はゲージによってしまう。これは明らかで、ゲージ変換に対して

$$gj^\mu A'_\mu = gj^\mu A_\mu + gj^\mu \partial_\mu \chi(t, \mathbf{r})$$

となり、ゲージ変換の後の Lagrangian 密度は $\chi(t, \mathbf{r})$ という非物理量に依ってしまい、ゲージ不変ではない事がわかるのである。

5.3.3 ゲージ不変な Lagrangian 密度

それではゲージ不変な Lagrangian 密度は作ることが出来るのであろうか？それは可能であり、以下に解説して行こう。まずは物質による電流密度 j_μ であるが、 $\psi^\dagger$ と ψ で4元ベクトルを作ろうとすると、数学的にこれはどうしても ψ が4個の成分を持っていることが必要条件である事がわかっている。この場合、

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix}$$

$$\psi^\dagger = (\psi_1^\dagger \quad \psi_2^\dagger \quad \psi_3^\dagger \quad \psi_4^\dagger)$$

として、これから $\psi_i^\dagger \psi_j$ を作ると16個あるわけだが、これらは、 $\bar{\psi} \equiv \psi^\dagger \gamma_0$ と定義した表現を使うとローレンツ変換に対する性質から

$\bar{\psi}\psi$ (scalar), $\bar{\psi}\gamma_\mu\psi$ (vector), $\bar{\psi}\gamma_5\psi$ (pseudo-scalar), $\bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_5\psi$ (axial-vector)

それにテンソル $\frac{i}{2}\bar{\psi}\sigma_{\mu\nu}\psi$ に分類される。但し、 γ_μ はガンマ行列である。Dirac 表示という割合良く使うガンマ行列の表現を具体的に書くと、

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\gamma} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \boldsymbol{\sigma} \\ -\boldsymbol{\sigma} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

と書ける。この事より、フェルミオンの4元ベクトルは確かに作られ、

$$j_\mu = \bar{\psi}\gamma_\mu\psi$$

と書けるのである。

それでは、ゲージ変換をした時にゲージ不変を破る項をフェルミオンに対応する Lagrangian 密度を入れる事により消去する事が出来るであろうか？答えは簡単で次のような項 $\bar{\psi}\partial_\mu\gamma^\mu\psi$ を付け加えれば良い

$$\mathcal{L} = C_1\bar{\psi}\partial_\mu\gamma^\mu\psi - g\bar{\psi}\gamma_\mu\psi A^\mu - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$$

ここで C_1 は定数であり、また j_μ は $j_\mu = \bar{\psi}\gamma_\mu\psi$ と置き換えてある。この時、ゲージ変換はフェルミオンの部分の位相も変換させる事にして

$$A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu\chi, \quad \psi' = e^{-ig\chi}\psi$$

と変換すると

$$\mathcal{L}' = i\bar{\psi}'\partial_\mu\gamma^\mu\psi' - g\bar{\psi}'\gamma_\mu\psi' A'^\mu - \frac{1}{4}F'_{\mu\nu}F'^{\mu\nu}$$

となり、 χ にはよらない Lagrangian 密度が得られている。但し、 χ による項を打ち消す合うために $C_1 = i$ と取っている。この Lagrangian 密度に質量項を足す事はゲージ不変性を壊す事にならないので、最終的な Lagrangian 密度は

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}\partial_\mu\gamma^\mu\psi - m\bar{\psi}\psi - g\bar{\psi}\gamma_\mu\psi A^\mu - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$$

となり、質量 m のフェルミオンがゲージ場と相互作用する Lagrangian 密度が求められた事になる。ここで、質量 m と結合定数 g は実験から決定されるべきものである事は言うまでも無い。

5.4 基本は場の理論

Dirac 方程式が場の方程式として基本原理から導かれた事は、非常に重要である。これは第一量子化と言われて来た式

$$\mathbf{p} = -i\hbar\nabla, \quad E = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}$$

が原理ではないと言う事を意味している。この事は実は色々なところで考え直しを要求してくるのである。特に、これまで Klein-Gordon 方程式と呼ばれている

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 + m^2\right)\psi = 0$$

はスカラー場に対する方程式である。この方程式は

$$\begin{aligned} E^2 - \mathbf{p}^2 + m^2 &= (-\hbar^2) \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 + m^2\right) = 0 \\ \Rightarrow \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 + m^2\right)\psi &= 0 \end{aligned}$$

という第一量子化による置き換えにより得られたものであるが、この式がもはやその根拠を失う事になっている。すなわち、Klein-Gordon 方程式は基本方程式ではあり得ないのである。この事は、結局基本原理としては常に場の理論から出発するべきであると言う事を意味しているのである。

5.4.1 実スカラー場

実スカラー場に対する Klein-Gordon 方程式は

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 + m^2\right)\psi = 0$$

であるが、これは不思議な方程式である。Schrödinger 方程式の場合、波動関数 ψ は常に複素数である。これは Schrödinger 方程式

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} = H\psi$$

を見れば明らかで、 ψ^* に対する方程式は

$$-i\frac{\partial\psi^*}{\partial t} = H\psi^*$$

となって、異なる方程式になっている。この事は、確かに ψ と ψ^* が独立である事を示している。

非相対論の極限

ところが、Klein-Gordon 方程式における ψ は実スカラーで良いことが方程式から明らかである。しかし、この場合本当に実スカラーで良いのであろうか？ここで、数学と物理学の違いが顕著に現れてくると思われる。数学的には勿論実スカラーで良い事は、誰でもチェックできる事である。しかしながら、それではこの粒子の運動がゆっくりである時、非相対論の極限である Schrödinger 方程式の解と一致しなくて良いのであろうか？良く知られているように、Schrödinger 方程式の解は常に複素数である。それは、解が常に

$$\psi(t, \mathbf{r}) = e^{-iEt} \phi(\mathbf{r})$$

と書く事ができ、これは実数になる事はあり得ないからである。従って、単純に Klein-Gordon 方程式の解 ψ を実スカラーと取ってしまうと非相対論の極限が存在しない相対論の方程式と言う事になってしまい、理論的な整合性がない事になる。もし、それでも良いと言うならば、その理由を明記する必要があるのだが、これまでその理由を議論した場の理論の教科書はない。この事は、実スカラー場の物理をしっかりと考えてない証拠でもある。

自由粒子の解

それでは実スカラー場に対する Klein-Gordon 方程式は自由粒子の解を持っているのであろうか？時間によらない方程式をみると

$$(-\nabla^2 + m^2) \phi(\mathbf{r}) = E^2 \phi(\mathbf{r})$$

となっている。これは、 E^2 に対する固有値方程式となっている。従って、この場合、基本的には Schrödinger 方程式の場合と全く同じである。さらには、この方程式は運動量演算子と可換であるため、固有値問題としては、運動量の固有関数にもなっているべきである。すなわち、

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{V\omega}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$$

を方程式の物理的な解として採用すべきである。ここで、 $\omega = \sqrt{m^2 + \mathbf{k}^2}$ であり、また ϕ の次元を考えて $\sqrt{\omega}$ を分母に入れてある。従って、 $\psi(t, \mathbf{r})$ は

$$\psi(t, \mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{V\omega}} e^{-i(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r})}$$

となっている。この $\psi(t, \mathbf{r})$ はローレンツ変換に対しても正しく振る舞い、また非相対論の極限も持っているので古典的な波動関数としては、確かにこれならば、受け入れられるものと思われる。

5.4.2 複合粒子に対する Klein-Gordon 方程式

π 中間子はクォークと反クォークからできている複合粒子である。この π 中間子のスピンはゼロであり、ボソンに対応している。この場合、この π 中間子の運動を記述する方程式は何であろうか？結果的には、これはほとんど Klein-Gordon 方程式と同じ方程式により記述されるものと考えられる。理由は簡単で、クォークと反クォークから作られているので、これはクォークと反クォークの波動関数をそれぞれ掛けたもの (直積) になっている。その重心運動を Dirac の波動関数で書き表したら、恐らくは Klein-Gordon 方程式と同じ形の方程式によって記述されるものと考えられるのである。そして、重心運動の解は

$$\psi(t, \mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{V\omega}} e^{-i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}$$

という形で書かれるものと思われる。ただし、これは証明されているわけではない。

5.4.3 電磁場とスカラー場の相互作用

基本粒子としてのスカラー場が存在していたとしたら、この粒子は電磁場とどのような相互作用をするのであろうか？Maxwell 方程式から出発して、ゲージ場 A_μ と結合出来るためには、どうしても4成分のスピンノルである必要があった。従って、そのままでは、スカラー場が電磁場と相互作用する形を作る事は出来ないのである。当然の事であるが、スカラー場は他のスカラー場として、結合できない事は明らかである。

5.4.4 ゲージ場とスカラー場の相互作用

Maxwell 方程式から離れて、方程式のゲージ不変性だけを原理にすれば、スカラー場とゲージ場の相互作用を表す Lagrangian 密度を作る事は出来る。自

由なスカラー場の Lagrangian 密度を

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi^\dagger \partial^\mu \phi$$

とした時、この上式にミニマル変換をすれば

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} [(\partial_\mu - igA_\mu)\phi^\dagger] [(\partial^\mu + igA^\mu)\phi]$$

となり、ゲージ不変な Lagrangian 密度が求められた事になっている。しかしながら、現在までの所このように電磁場と相互作用する基本粒子としてのボソンは実験的に見つかっていない。その意味では、我々がこれまで築き上げてきた場の理論の中に入れるべき必要が何処にも無く、従って考える必要も無いものと思われる。

5.4.5 Higgs 機構とその問題点

このスカラー場の問題は Higgs 機構と密接な関係がある。Higgs 機構とは、まず、複素スカラー場を用意して、その複素スカラー場間に対称性を自発的に破るために導入されたポテンシャルを同じように考える。次に、変数変換とある種の近似を実行して、ゲージ不変性を Lagrangian 密度の段階で破ってしまうのである。そうすると、ゲージ場が質量を獲得して、弱い相互作用の模型が上手く作れて実験と良く合う理論体系にする事が出来たというものである。この描像には大きく分けて3つの深刻な問題点がある。

(1) 実スカラー場の導入

最初に複素スカラー場を用意するのだが、対称性を破ると称して、この複素スカラー場を2つの実スカラー場に直してしまい、それぞれが自由度を持つという描像を提案するのである。しかし、これがおかしい事は上記の議論で明らかである。

(2) Higgs ポテンシャル

この Higgs 機構においては、自発的対称性の破れの問題と関係して Higgs ポテンシャル

$$U(\phi) = u_0 (\phi^\dagger \phi - \lambda^2)^2$$

という良くわからないポテンシャルを導入している。ここで、 u_0 と λ は任意の定数である。これはスカラー場間に働く相互作用なのだが、これがどこから来たのか全くわからない。このポテンシャルを良く見てみると結局これは自己相互作用である。自分自身で相互作用してポテンシャルを生み出しているという事は、一体物理的にどのような現象になっているのだろうか？これは、現代の場の理論では理解できる事ではない。

(3) ゲージ不変性の破れ

Higgs 機構における最も深刻な問題点が、このゲージ不変性を勝手に破ってしまった事である。これは結局、自発的対称性の破れの理解が不十分であった事と関係している。自発的対称性の破れとは、場の理論の真空の問題に関係しているのであるが、Higgs 機構ではただ単に変数変換をして、さらに近似をしただけであり、物理的な考察とは全く無関係にゲージ不変性を破るような定式化を行っている。ゲージ場が質量を獲得してしまったら、これはゲージ不変性を破ってしまい、理論的な困難は深刻なはずだったのに、何故か人々はこの理論を受け入れて現在に至っている。

将来の展望

何故、人々が弱い相互作用の模型を考えるに際して Higgs 機構を取り入れたのであろうか？これにはそれなりの理由がある。それは、まず弱い相互作用の理論として Fermi 理論が受け入れられていたが、これは結合定数の次元が質量の 2 乗分の 1 である 4 体相互作用の形をしていて、これだと 2 次の摂動論を行うと 2 次発散が出てきてしまい、これでは整合性が保たれない事になっている。一方、実験の方から弱い相互作用において力を媒介している重いボソンの存在が示唆されていた。このため、何らかの形でこの重いボソンを考慮した理論体系を考える必要に迫られていたのである。その際、単純に重いボソンを交換する相互作用を考えた場合、これはゲージ理論ではないので、繰り込みが不可能であると人々は思ったのである。そのため、最初はゲージ理論から出発して、どこかでそのゲージ粒子に質量を与える手法を考え、その質量を与える手法が Higgs 機構というものである。残念ながら前述したように、この質量を与える手法は単純な間違いである。しかしながら、今となっては、結合定数の次元が無次元であれば、繰り込みは十分可能であるので、Weinberg-Salem が求めた最終的な模型 Hamiltonian は実験を良く再現している事でもあり、Higgs

場などを除去すれば、恐らく正しい弱い相互作用の理論として受け入れても間違いないと思われる。但し、この問題は今後のしっかりした検討が必要であるとは思っている。

いずれにせよ、その当時は繰り込み理論に関して十分な理解が得られてはいなく、真空偏極の処理がゲージ理論のみ可能であると考えられていたので、これは仕方が無いものではあった。今となっては、ゲージ理論のみが繰り込み可能であるなどという事は全く意味の無いものであるが、しかし当時においてはやはり深刻であったと思われる。

5.4.6 Higgs 粒子の実験結果

ここで現在までの Higgs 粒子に関する実験結果をここに書いておこう。2011 年秋の弘前大学での物理学会で CERN の実験家により最新の実験報告がいくつかなされた。そしてそれらはすべて Higgs 粒子は存在しないと言うものであった。現在の所、95%の確実さでこの Higgs 粒子を発見する事は出来なかったというものである。実験の細かい事は分からないが、しかし、Higgs 粒子関係ではその相互作用の形がすべて決まっていて、崩壊パターンは分かっている。特に、この手の崩壊が禁止されているわけでもない。従って、これは数字以上に、Higgs 粒子の存在が否定された事に対応していると考えるのが妥当であろう。

5.5 量子色力学 (QCD) の問題点

強い相互作用を記述する理論は量子色力学 (QCD) である。これはクォークとグルオンの相互作用による $SU(3)$ カラーの非可換ゲージ理論である。6種類のクォークが存在し、それぞれが3つのカラー自由度を持っていて、8つのカラー自由度を持つグルオンにより、相互作用している系である。バリオンは3つのクォークから出来ていて、メソンはクォークと反クォークから出来ているという模型である。この模型は基本的には正しいと考えられる。ここでは、詳しい記述はしないが、その模型の持つ良い点と問題点を議論したいと思う。まずは Lagrangian 密度を書いて、その性質を簡単に見てゆこう。QCD の Lagrangian 密度は $SU(N_c)$ カラーの場合

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - g\gamma^\mu A_\mu - m_0)\psi - \frac{1}{2}\text{Tr}\{G_{\mu\nu}G^{\mu\nu}\}$$

と書ける。ここで $G_{\mu\nu}$ はグルオンの場の強さであり

$$G_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + ig[A_\mu, A_\nu]$$

で与えられ、グルオン場は

$$A_\mu = A_\mu^a T^a \equiv \sum_{a=1}^{N_c^2-1} A_\mu^a T^a$$

であり、この時 T^a は $SU(N_c)$ 群の演算子であり

$$[T^a, T^b] = iC^{abc}T^c$$

を満たす。また、 C^{abc} は群の構造定数と呼ばれている。この Lagrangian 密度は次のゲージ変換に対して不変である。

$$\psi' = (1 - ig\chi)\psi = (1 - igT^a\chi^a)\psi, \quad \text{with } \chi = T^a\chi^a$$

$$A'^a_\mu = A^a_\mu - gC^{abc}A^b_\mu\chi^c + \partial_\mu\chi^a$$

ただし、 χ は、 $\chi = \chi(t, \mathbf{r})$ の任意の関数であるが、無限小であるとする。

ここでは、この Lagrangian 密度の詳細を議論する必要はない。大切な事は、この Lagrangian 密度は確かにゲージ変換に対して不変であるが、しかし、クォークの状態 ψ とグルオンの状態 A_μ はゲージ不変ではなく、これらのカラー電荷を持った粒子の状態は運動学的に自由にはなれないのである。これは非常

に重大な事を物理的には意味している。すなわち、クォークとグルオンは観測量にはならないという事である。実際、クォークのカラー電流保存を調べるとわかる事だが、これは保存量にはなっていない。つまり、クォークのカラー電荷は時間によってしまい、物理的な観測量にはならない事を意味しているのである。そして、それこそがクォークとグルオンの閉じ込めの現象そのものであり、クォークは動力学的に閉じ込められているわけではなく、運動学的に閉じ込められているので、その閉じ込めは絶対的なものであると言える。

5.5.1 摂動論が定義できない！

クォークとグルオンが自由にならないという事は、ある意味で大変重大な事であり、理論的な模型計算に大きな影響を及ぼしてしまう事になる。結論を先に言うと、この模型は全 Hamiltonian を一気に対角化する事以外に、解く方法が存在しない事が証明されるのである。

QCD の摂動論

QED もそうであったように、量子場の理論での取り扱いは基本的には摂動論をベースにしている。それ以外解けない事が最も大きな理由である。この摂動論の場合、その基本戦略は全ての観測量を自由場の言葉で書きたいと言う事である。例えば、QED の場合は、自由電子の状態と自由フォトンの状態の言葉で全ての観測量を表現している。そして、この QED の場合は繰り込み理論を発展させる事により、大きな成功を収めたのである。ところが、QCD では基本となる自由クォークの状態が存在していないため、QCD における観測量は何かという事が問題になってくる。自由クォークの状態が存在しない限り、物理的に計算したい観測量が何かわからないという事である。これは摂動論が使えないため何を計算できるかわからないと言う事を意味しており、実情は想像以上に極めて深刻であり、全くのお手上げ状態になっている。実際、QCD における理論的な発展は、この 30 年間ほとんどないのである。

漸近的自由

この QCD において、これまで摂動論による計算が行われてきたが、実は QCD の場合、自由クォークは存在しないし、自由グルオンも存在しないのであり、これでは摂動論の計算は定義できなかったはずである。この自由クォー

クと自由グルオンが観測されていない事は実験事実ではあるが、実は理論的にもそれらが観測にはなっていない事は、良く知られている事実である。簡単にチェックできる事であるが、自由クォークと自由グルオンはカラー電荷を持っていてこれはゲージ不変な量ではないのである。すなわち、カラー電荷がゲージによっている事はQCDの場の理論では最も基本的な事柄であり、院生も必ず検証する事である。そして、ゲージによっている量が観測不可能である事も明らかであり、QCDでは、自由場が定義できなく、従って摂動論自身が定義できないという極めて不思議な模型なのである。しかしながら、自由クォークと自由グルオンが観測されていない事は理論と実験の整合性もしっかり合っていて、これは疑う余地もなくQCDが恐らくは正しい理論体系であるという事を示していると思われるのである。

従って、しっかり考えれば、QCDの摂動論計算は、およそ直感的に不可能な事である事ぐらいは誰でもわかる事である。しかし、現実には、QCDの摂動論の計算が行われて、「漸近的自由」と言う事を「発見」してノーベル賞を受賞した人達がいるほどである。この「漸近的自由」の場合は、2重に間違えている。一つはQCDの摂動論が定義できないのに、これを実行してしまった事。さらに、その計算の中でも、「one loop」の計算で繰り込みを正しく出来なかったために、繰り込み群方程式という仮想の方程式を発見しまった事、この二つのために仮想運動量の大きなクォークはほとんど自由であるというわけのわからない事を主張したのである。

5.5.2 QCDにおける観測量

それでは、何故QCDが正しい理論体系であると信じているのであろうか？これには、しっかりした理由がある。最も大きな理由は実験的なサポートである。これは一体どういう事であらうか？クォークが観測量では無いのに、どうしてクォークの事がわかるのであろうか？これは実は簡単で、クォークには電氣的な電荷があるからである。例えば、 u クォークはその電荷が $\frac{2}{3}e$ であるとして実験的に矛盾が無いのである。すなわち、クォークの電磁氣的なカレントは保存量となっており、従って電磁氣的なプローブで陽子を研究すれば、確かにクォークが反応して様々な物理的な観測量を出しているのである。

陽子・中性子の磁気能率

クォーク模型によるバリオンの電磁気的な模型計算はこれまで沢山実行されてきている。なかでも、核子の磁気能率は実験と理論が見事に合う例として、しばしば引用されてきている。そして、その物理的な根拠は十分しっかりしているのである。バリオンの構造が QCD の模型により全く解かれていないのに、どうして磁気能率だけは理論的に信頼できる計算ができてしまうのかという疑問に対して、答えは簡単である。例えば、陽子の磁気能率は大雑把に言って

$$\mu = \mu_0 \sum_{i=u,d} e_i \sigma_i = \mu_0 e \left(\frac{2}{3} \sigma_{u_1} + \frac{2}{3} \sigma_{u_2} - \frac{1}{3} \sigma_d \right)$$

と書く事が出来る。ここで、 $e_u = \frac{2}{3}e$ と $e_d = -\frac{1}{3}e$ は u クォークと d クォークの電荷を表している。 μ_0 は典型的なスケール量を表し、例えば非相対論ならば、クォークの質量を m として $\mu_0 = \frac{1}{2m}$ となっている。いずれにせよ、この模型で陽子と中性子の磁気能率を計算すると

$$\mu_p = \mu_0, \quad \mu_n = -\frac{2}{3}\mu_0$$

となり、この2つの比を取って実験と比較すると

$$\left(\frac{\mu_p}{\mu_n} \right)_{theory} = -1.5, \quad \left(\frac{\mu_p}{\mu_n} \right)_{exp} = -1.46$$

となり、恐ろしいほど良く一致している。この理由は明らかで、磁気能率が動径部分の波動関数に依っていない事が最も重要な事である。このため、クォークが陽子内部でどのような運動をしようが、基本的に言って、クォークのスピンに支配されているので、陽子と中性子の磁気能率の比は非常に上手く記述されてしまうことになっている。そして、この事はクォーク模型が正しいと考えて良い事を示している。

クォークのカラー数

クォークのカラー電荷が保存量ではない事から、QCD 相互作用の取り扱いの難しさについて述べたが、それではクォークのカラー数はどのようにして検証されたのであろうか？これは再び電磁気的な相互作用を用いている

$$R = \frac{\sigma(e^+e^- \rightarrow \text{all hadrons})}{\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)}$$

の実験値からクォークのカラー数が3である事がわかる。それは、この比にはクォークのカラーの自由度が現れるからである。従って、クォークの動力学を研究する事は、非常に難しいのであるが、クォークのある種の性質は電磁気的は方法で調べる事が出来る事を示している。

$e^+e^- \rightarrow \text{Jets}$ の現象

実験的に $e^+e^- \rightarrow \text{Jets}$ の現象が知られている。これはQCDでよく理解できるのであろうか？この現象を考えるにおいて、ハドロン内部において $e^+e^- \rightarrow q\bar{q}$ が起こっている事は確かである。この過程は電磁気的なものなので、正確にわかっている。ところが、その後どうなるのかと言う事が全くわからない。クォークがハドロンから外に出て自由になると言う事が物理的に記述できないからである。それは既に議論したようにクォークのカラー電荷がゲージによるため観測量でないと言う事と関係していて、自由クォークが存在していない事に依っている。

それではこの Jet の現象はどのように理解できるのであろうか？実験的にもクォークが大きな運動量を瞬間的に得た事は事実である。しかし、クォークは自由になれない。従って、ハドロンになって行くしか他に仕様がなないのである。生成されたハドロンは反応過程においてエネルギーと運動量の保存則だけは満たしている必要がある。よって、これは同じ方向に基本的にはハドロンが生成された現象、すなわち Jet の現象が観測されたのであると考えられる。実験的には2 Jet が主であるが、3 Jet や4 Jet も観測されている。ハドロン内部でクォーク同士がどのような相互作用をするのかの具体的な描像が作れていない現段階では、これ以上の物理的なコメントが出来ない。特に、摂動論が定義できていないからには、直感的な描像が作りきれないのである。

5.5.3 QCD 理論計算の展望

それでは、QCDの理論計算はどのようにしたら良いのであろうか？これは随分と考えて来たのであるが、現在までの所、信頼できる計算がどの程度可能であるかについては、あまり明白な事はわからない。一つははっきりしている事は、全 Hamiltonian はゲージ不変であるという事である。従って、例えば J/ψ のような重いクォークにより構成されている中間子の場合、この全 Hamiltonian を適当なベースを選んで対角化してしまえば良いと考えられる。しかし、クォークが観測量ではないのに、その質量が重いとか軽いと言う事が物理的に意味が

あるのかどうか良くわからない。しかし、質量はパラメータであるから、適当な値を考える事はそれなりに意味はあるとは考えられる。それで、とにかく全 Hamiltonian の対角化の計算がどの程度大変であるかは、まだ良くわからないが、少なくとも適当なゲージ固定をして、クォークのカラー電流が保存するように選び、そのゲージ固定の範囲で計算を実行すれば、概念的な困難は避けられる気がする。ただ、単純に計算してみても、Hamiltonian を対角化するために必要なベースは非常に大きな数になってしまい、例えば、 $10^8 \times 10^8$ の行列の対角化が可能になれば、ある程度信頼できる J/ψ の質量が計算できると考えられる。しかし、これらは全て今後の課題であり、計算機による数値計算を工夫する事が出来れば、それなりに意味があり、面白い結果が期待できる問題であると思う。

5.6 場の量子論 — 無限大との戦い

相対論的場の理論を考える時、場の量子化がどうしても必要になる。場の量子化とは何かという質問に対しては、場を演算子として扱う事であると答える事になる。また、場の量子化は何故必要なのかという疑問に対しては、それは実験からの要請であるという答え方が最もまともであろう。実際、前述したように水素原子において電子が $2p_{\frac{1}{2}}$ 状態から $1s_{\frac{1}{2}}$ 状態への遷移が起こった時に、光が放出されるのである。これは観測事実であり、この事は真空から光が作られている事を示している。通常の量子力学では、粒子の生成は出来ないのであるが、ここでは光の生成を考慮した理論を作らざるを得ないのであり、それが「場の量子化」である。この時、場自体がオペレータになる必要があり、 c -数関数ではなくなっている。このため、場の量子化という言い方をしているのである。従って、場の量子化は実験を再現するために導入された理論体系である事は間違いないものであり、実際、実験をよく再現している。

ところが、一度、場の量子化が行われると、様々な新しい現象が現れてしまう事がわかる。その内の一つが、自己エネルギーの発散である。場の量子化により、電磁場が生成されたり消滅されたりするわけだから、電子が自分自身で光子を放出して直ぐに吸収するという過程が計算上出てきてしまい、これを計算すると Log 発散になっている事がわかるのである。この Log 発散がでてきた時、人々はどうしたであろうか？無限大がでてきたから、理論にどこか欠陥があると考えたか、それともこの発散を何とか処理して、または利用して、物理的に意味のある理論体系にしたいと思ったか。実際には、朝永達が提唱した繰り込み理論が水素原子の $2s_{\frac{1}{2}}$ 状態における Lamb シフトの実験値を見事に再現する事が出来て、繰り込み理論の勝利となったと言う事が現代の繰り込み理論に対する基本的な評価である。

但し、後で議論するように、この Lamb シフトの問題はそう簡単ではない事が最近の研究でわかってきている。それは、この Lamb シフトの計算は Bethe による非相対論的な取り扱いで行われているのであるが、この計算には Log 発散があり、Bethe は適当にそのカットオフを電子の質量に取ったのである。そしてそれがまた実験と良くあってしまったのであるが、しかし、計算結果が Log 発散を持っている事はその取り扱いにどこか問題点がある事は明らかである。現在のところ、その発散の解決方法は分かっていなく、今後の研究を待つ事になっている。

5.6.1 ゲージ理論信仰の崩壊

現在までの所、繰り込み理論と決定的に矛盾する現象は現れてはいなく、その理論体系自体は正しいものであると考えられる。それ以上に、もし摂動論が正しく取り扱えないとしたら、場の理論では観測量を計算する手立てがない事になってしまうのである。しかしながら、最近になって、フォトンの真空偏極に関して重大な見過ごしがあった事がわかっている。このフォトンの真空偏極は元々2次発散があって、この項は手で捨てていたのである。その場合、捨てる条件として人々は「ゲージ条件」をつけたのであるが、これが繰り込み理論の理論体系をかなり不明瞭にしていた最も重要な原因であった。後で議論するように、この真空偏極テンサーに対する「ゲージ条件」は、実は数学的に成立していない事がわかったのである。この基本的な間違いは単純に数学的なものであり、積分において無限に発散する場合、変数変換を単純にするととんでもない間違いを犯してしまうという、極めて初歩的なミスであった。この「ゲージ条件」とは、真空偏極テンサー $\Pi^{\mu\nu}(k)$ に対して次の式

$$k_\mu \Pi^{\mu\nu}(k) = 0$$

が成り立つべきであるという要請である。これはもともとT行列にあらわれている偏極ベクトル ϵ^μ に対して $\epsilon^\mu \rightarrow \epsilon^\mu + ck^\mu$ という変換に対して不変であるべきであるという要請をおく事に対応している。何故、このような要請を置いたのかは今となっては不明である。このことに対応して、真空偏極テンサー $\Pi^{\mu\nu}(k)$ に対する式が得られているのである。ところがどのように計算しても、この式を満たす事は有り得ない事が、実際に $\Pi^{\mu\nu}(k)$ を積分により求めてみればすぐにわかる事である。どうしてこのような間違いが起こったのであろうか？これは将来、物理の七不思議のひとつとなる事とおもわれるが、多少の理由は考えられる。それは、無限大になる積分において不用意に変数変換を行うと全く間違った答えを得てしまうと言う事である。簡単な実例を挙げる前に、どうして上式が「証明」されたのかを示そう。まず、 $k_\mu \Pi^{\mu\nu}(k)$ を

$$k_\mu \Pi^{\mu\nu}(k) = ie^2 \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left[\left(\frac{1}{\not{p} - \not{k} - m + i\varepsilon} - \frac{1}{\not{p} - m + i\varepsilon} \right) \gamma^\nu \right]$$

と書き直す事が出来る。この時、第1項において $q = p - k$ の置き換えをする。この時、確かに

$$k_\mu \Pi^{\mu\nu}(k) = ie^2 \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left[\frac{1}{\not{q} - m + i\varepsilon} \gamma^\nu \right] - ie^2 \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left[\frac{1}{\not{p} - m + i\varepsilon} \gamma^\nu \right] = 0$$

が「証明」されたと言うものである。この証明を現代の物理屋も含めてずっと長い間人々は信じて来たのであるが、数学者はこれをみて吃驚して「物理屋はのん気で良いね」と感心していたものである。上式のどこが間違いなのか？以下に実例を示しながら解説しよう。まず、次の積分量

$$Q = \int_{-\infty}^{\infty} ((x-a)^2 - x^2) dx$$

を計算しよう。ここで $x' = x - a$ と置き換えると

$$Q = \int_{-\infty}^{\infty} (x'^2 dx' - x^2 dx) = 0$$

となり、積分値はゼロであるように見える。ところが、これをきちんと積分すると

$$Q = \int_{-\infty}^{\infty} ((x-a)^2 - x^2) dx = \int_{-\infty}^{\infty} (a^2 - 2ax) dx = a^2 \times \infty$$

となり、無限大である。どこで間違えたのかは、高校生がすばやくわかる問題であろう。正しく計算するには

$$Q = \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \int_{-\Lambda}^{\Lambda} ((x-a)^2 - x^2) dx = \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \left[\int_{-\Lambda-a}^{\Lambda-a} x'^2 dx' - \int_{-\Lambda}^{\Lambda} x^2 dx \right] = \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} 2a^2 \Lambda$$

とすべきであった。確かに、この積分は無限大であることは明らかである。この事は無限大になる積分で変数変換を不用意にはいけないという当然の事が原因であったのである。

さらに悪い事に、't Hooft 達はその論文で次元正則化という一種奇抜なアイデア (運動量空間での積分の次元を 4 から $4 - \epsilon$ にした、但し、 ϵ は無限小量) を提唱したのだが、これが数学の公式を間違えて使用した理論であるために、2 次発散が消えていたのである。手で消すよりも自然に消えた方がわかり易いという事で今や誰も彼もが次元正則化を使っている。しかし、実際には単に数学上の間違いだけであるので、本当はこの次元正則化は役には立たない事がわかっている。しかし、何故この様な事が起こってしまったのであろうか？すなわち、何故人々がこの次元正則化を信じて来たのであろうか？これにはそれなりの理由がある気がする。一つには、量子場の理論における「正則化」の難しさである。積分または和から来る無限大を有限化する手法には、それなりの物理的な理由をしっかりとつける必要がある。この事に対して、これまで物理屋は厳しさが多少欠けていたということが出来るであろう。ある手法による正則化により模型が決まり、それにより物理量を計算してそれが観測量と合えば、

それをその理論模型の「正則化」と考えれば良いという考え方がこれまで主流であった。この事を受けて次元正則化はそれにより観測量と矛盾しなければそれで良いと言う事であった。ところがよくその内容を見てみると重大な問題点が見える。それは、運動量積分 d^4p を d^Dp (但し、 $D = 4 - \epsilon$) とした時、積分した値が ϵ をゼロに持っていったら、元の積分の値に戻る事が当然の事として必要である。しかしながら、次元正則化では ϵ をゼロに持って行く極限を取っても元に戻ってくれないのである。すなわち、2次発散の項はどのようにしても回復できないような正則化になっているのである。このような事は数学で起こってはならない事ぐらいいは誰でも分かる事である。さらに、他の様々な正則化では、当然であるが、極限をとった時には元々あった発散は必ず存在しているのである。例えば、Pauli と Villars により提唱された正則化はこの2次発散を「ゲージ条件」を要求するという物理上の理由により消していたのである。

それでは、どうしたらいいのであろうか？結論は簡単である。フォトンの真空偏極は繰り込みに入れてはならないという事である。そもそも、繰り込みの発想は無限大がでてきた時に、それ自体は非物理的だから、その無限大を「波動関数の中に再定義して入れてしまえ」(繰り込む) というものである。そして新しく定義した波動関数を使うと、考えている次数でカウンター項が現れてきて、これが次からは、計算上出て来た発散項を打ち消してくれるのである。従って、自由フォック空間を取る限り、基本的には Log 発散の無限大は常にカウンター項により打ち消しあってくれるのである。ところが、フェルミオンの自己エネルギーの場合は別である。フェルミオンは、例えば水素原子に束縛されている電子を考えれば明らかのように、自由フォック空間だけではない空間が必要となる。この束縛された電子、例えば $2s_{\frac{1}{2}}$ 状態の電子は自由フォック空間にはないフェルミオンとなっている。この時、これまでは Log 発散の無限大が常に打ち消しあっていたのだが、今度は相手が束縛状態の電子であるために、打ち消し合いが完全には起こらなくて有限項が残ってしまう。そしてこれがまさに Lamb シフトのエネルギーに対応するのである。一方、フォトンの方は、常に自由フォック空間の中に存在している。それは、当然で、フォトンが自由粒子としか存在していなく、束縛状態はあり得ない事であるからである。

話を戻して、ゲージ理論のみが繰り込み可能であるという「信仰」はこのフォトンの真空偏極の難しさに起因している。2次発散を捨てる物理的な理由が見つからなかったために、どうしてもゲージ不変性に頼むしか他に方法が無かったのである。しかしながら、フォトンの真空偏極を無理やりに繰り込みに

入れてきたこれまでの手法だと、水素原子における磁氣的超微細構造定数に効いてくるのだが、実際の計算をして見ると、実はフォトンの真空偏極による有限項は実験と矛盾する事がわかったのである。すなわち、フォトンの真空偏極は繰り込みには入れてはいけない Feynman グラフに対応している事がわかって来たのである。これは非常に重要な意味を持っている。フォトンの真空偏極だけではなく、例えばスカラー場を考えた時も同じように、スカラー場の真空偏極の Feynman グラフは繰り込みに入れてはいけない事がわかったのである。そうであるとする、これまで繰り込み不可能であると考えてきた様々な理論模型をもう一度吟味し直す必要に迫られているという事である。その第一番目がスカラー場による重力理論である。後で、もう少ししっかりした数学を使った重力場の方程式を付録の「場の理論」のところで解説するが、繰り込みに関する問題点は重力場に関しても全て解決されている事が分かるのである。

後で詳しく議論するが、実はフォトンの真空偏極はそれに関連する物理的な観測量が全て有限となるため、その発散するフォトンの自己エネルギーは全く利用価値がなく、そのままにしておいて良いと言う事が分かってきている。フェルミオンの自己エネルギーもフォトンの自己エネルギーもそれ自体は物理的な観測量ではないので、発散しても別にどうと言う事はない。そして、フェルミオンの自己エネルギーはバーテックス補正に利用されたのに対してフォトンの自己エネルギーは何処にも利用される事はなく、従って、そのまま放置しておけばよいと言う事である。

5.6.2 朝永の推論

このフォトンの自己エネルギーを調べていたところ、最近になって実は朝永振一郎の著作集で彼は「フォトンの自己エネルギーはゼロである」という事を明解に主張している事がわかった。これには吃驚したものであるが、しかし彼はそれをきちんとした論文にはしていない。すなわち、学術的な意味において、強い主張をしてくれなかったのである。この事はいろいろな意味で本当に残念な事であった。彼がもう少ししっかり主張してくれていたならば、ゲージ理論信仰はこれ程までには続かなかっただろうし、もっと早い段階で疑問を持った物理屋が数多くでてきた事だろうと思われる。ゲージ理論のみが繰り込み可能でまともな理論であると言う、極めて馬鹿げた通説がこれまでの場の理論の発展を阻害してきた事がどう見ても否定できないのである。実際、例えば、重力理論をゲージ理論で構築しようとする、不可能であるため、人々は一般相対論を受け入れるようになってしまったのである。また、Weinberg-Salem

理論においては、最初にゲージ理論で出発したわけだから繰り込み可能であると信じて、途中でそのゲージ不変性を破っても、その論理的飛躍を疑う事は誰もしなくて、むしろ標準理論として受け入れてきたのである。半世紀前にゲージ理論信仰が崩壊していたら、場の理論の発展も全く違った形で実現されたであろう事は疑いなく、この事が残念で仕方がない。

しかしながら我々にとって、同じ事を考えていた物理屋がすでにいた事に対しては、確かに非常に嬉しいものである。さらに、朝永は Pauli-Villars の正則化についても言及していて、これは正しい手法ではない事を明確に論じている。我々は多少数学的に「朝永の推論」が正しい事を証明していたわけであるが、それにしても、半世紀も前にすでに QED の繰り込みにおける本質的な困難について非常に明確に理解していた物理屋が存在していた事は大きな驚きであり、またこれは物理自体が大変難しいと言う事を意味しているものである事は間違いない。しかし同時に、当時の物理屋がいかに物理をしっかり考えていたかが良くわかるものであり、現代の我々物理屋に対する一つの教訓を与えていると思われる。

この「朝永の推論」に関しては、Heisenberg が 1934 年に書いた真空偏極の論文を読む事により、朝永がどのようにして繰り込み理論を考えるに至ったかの道筋がある程度推測できるものである。Heisenberg は Dirac が空孔理論を発表した 1928 年からまだ数年しかたっていない段階で、すでに電磁場により負のエネルギー粒子が励起される過程を計算しているのである。この論文は大変面白い論文ではあるが、しかしこれは繰り込みと矛盾しており、さらに言えば実験との整合性がない理論となっている。それは基本的には「負の粒子を詰めた真空」に対する場の理論的な理解が当時は不十分であった事に関係している。すなわち、Heisenberg 達は場の理論の真空をあたかも誘電体のようなリアルな物質状態と考えていたのである。逆に言えばこれを出発点として、朝永はフォトンの自己エネルギーはゼロである事を正確に把握していたものと考えられるのである。Heisenberg 達の計算は具体的な式変形としては間違っているわけではないと言う事実から、それではフォトンが常にその質量がゼロである特別な粒子である事が記述できないという事を認識するに至ったものと考えて間違いはないと思われる。これらの事が正確にわかっていれば、確かに「朝永の推論」は自然な結論である事が良くわかるものである。

このように、量子電磁力学の繰り込み理論の体系が明確に理解できた現在において、その当時の論文を検証する限りにおいては、勿論私見としてだが、Feynman や Schwinger と比べてみても、朝永が物理を格段に深く理解していた事が伺えるものである。Feynman は発想が確かに豊かではあるがある種の

危うさが見受けられる場合があり、どこまで信頼して良いかわからなくなる点が全くないわけではない。Schwinger は膨大な計算を誰もかなわないレベルと速さで実行している事が伺えるが、しかし計算に振り回されていて、その物理の本質の議論が不十分な場合があるという印象を持たざるを得ない。その意味で朝永があゝの当時において、すでに量子電磁力学の本質をほとんど完璧なレベルで理解していたという事が奇跡的でさえある。そして自分は日本人として、この事を本当に誇りに思っているという事も確かな事である。

5.7 繰り込み理論とアノマリー

量子電磁力学 (QED) において興味ある物理的な過程を計算しようとするとしても摂動論を使わざるを得ない。場を量子化した後の物理系は無限自由度の多体系になっているのである。従って、QED においても、厳密解を求める事は最初からあきらめざるを得ない程、難しいし複雑である。

ここでは、摂動論の詳細について解説する事は出来ないし、また必要もないと思う。場の理論の摂動論は良く書かれた教科書がいくつか出版されているので、そちらを参考にして頂きたい。但し、ここで、場の理論の摂動論形式に関して一つ重要な事をコメントしておきたい。それは、この場合の非摂動 Hamiltonian に関するものである。場の理論での摂動論は常に、非摂動項として、自由粒子の Hamiltonian を取っている。この事は至極当然の事であるが、しかしながら、場の理論での摂動論の計算をしている時、ちょっと油断するとこの事を忘れると言うか、わからなくなってしまう事が良くあるものである。

5.7.1 フェルミオンの自己エネルギー

場を量子化して摂動論により計算をして行くわけであるが、ここで深刻な困難にぶつかってしまう。それは、フェルミオンとフォトンの自己エネルギーが無限大になってしまうのである。まずは、フェルミオンの自己エネルギーについて議論して行こう。2 次の摂動論の計算を行うと、どうしても発散する Feynman グラフが出てきてしまうのである。その過程とは、電子がフォトンを出してそのフォトンと同じ電子が吸収するという過程である。これは自然界では起こらない過程であるが、Feynman グラフを計算する限り自動的に出てきてしまうので、これを処理する事は理論計算の中では当然、必要になる。問題はこれをどのように処理するべきであるかという事である。ここで非常に重要な事は、この無限大が Log 発散の無限大であるという事である。Log 発散は数学的には無限大であるが、物理学では本当の無限大にはならない。例えば、物理学で最も大きな数字は恐らくは宇宙全体の質量を電子の質量で割った量であろうと思う。この数の Log は

$$\log \left(\frac{2 \times 10^{33} \times 6 \times 10^{23} \times 940 \times 10^6 \times 10^{23}}{0.5 \times 10^6} \right) \simeq 83 \quad (15.34)$$

で単なる数であり、無限大からは程遠いのである。しかし、それでもこの無限大がでて来たらそれを理論上きちんと処理する必要がある。その処理の仕方が繰

り込み理論であり、繰り込みとは、英語では Renormalization であり、波動関数を再規格化する事により無限大を処理しようとする事である。

5.7.2 バークス補正

フェルミオンの自己エネルギー自体は観測量ではないので、それ自体が発散していても別に物理的に困る事はおきてはいない。むしろ逆で、このフェルミオンの自己エネルギーを利用しようと言うのが繰り込み理論の本質である。それは電子に対するバークス補正を行うと、発散項が出てきてしまうのであるが、しかし、このバークス補正は物理的な観測量になっているので、発散は何とか処理する必要がある。そして、この発散項をフェルミオンの自己エネルギーの時に使った同じ波動関数により、繰り込んでしまおうと言う事である。

この事はむしろ式で見た方が簡単であろう。フェルミオンの自己エネルギー $\Sigma(p)$ は発散項だけ書くと

$$\Sigma(p) = -ie^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \gamma_\mu \frac{1}{\not{p} - \not{k} - m} \gamma^\mu \frac{1}{k^2} = \frac{e^2}{8\pi^2} \ln\left(\frac{\Lambda}{m}\right) (-\not{p} + 4m)$$

となる。ここで Λ はカットオフ運動量である。この無限大は波動関数を再定義する事により吸収することができる。Lagrangian で書くと

$$\mathcal{L}_F = \bar{\psi} \not{p} \psi - \left[\frac{e^2}{8\pi^2} \ln\left(\frac{\Lambda}{m}\right) \right] \bar{\psi} \not{p} \psi = \bar{\psi}_r \not{p} \psi_r$$

となり、新しい波動関数 ψ_r は

$$\psi_r = \sqrt{1 - \frac{e^2}{8\pi^2} \ln\left(\frac{\Lambda}{m}\right)} \psi$$

と定義されている。ここでは質量項に関しては省略してある。次にバークス補正 $\Lambda^\mu(p', p)$ を計算しよう。これは発散項のみ書くと

$$\Lambda^\mu(p', p) = -ie^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \gamma^\nu \frac{1}{\not{p}' - \not{k} - m} \gamma^\mu \frac{1}{\not{p} - \not{k} - m} \gamma_\nu \frac{1}{k^2} = \frac{e^2}{8\pi^2} \ln\left(\frac{\Lambda}{m}\right) \gamma^\mu$$

となる。この時、全相互作用 Lagrangian 密度は

$$\mathcal{L}'_I = -eA^\mu \bar{\psi} \gamma_\mu \psi + \frac{e^3}{8\pi^2} \ln\left(\frac{\Lambda}{m}\right) A^\mu \bar{\psi} \gamma_\mu \psi = -eA^\mu \bar{\psi}_r \gamma_\mu \psi_r$$

となり、発散項はフェルミオンの自己エネルギーの際に再定義した波動関数により完全に吸収されているのである。さらに、この手法により有限項を計算すると電子の異常磁気能率が計算でき、これは実験と大変よく合っているのである。

繰り込み理論のもう一つの応用として Lamb シフトの問題がある。これは電子は自由粒子だけではなく、束縛状態が存在しているのであり、この状態は自由 Fock 空間には属していないのである。一番簡単な束縛状態は水素原子である。この場合、水素原子に束縛されている電子の自己エネルギーを計算すると、これはカウンター項によって、完全には打ち消し合う事が出来ない事がすぐにわかるのである。実際、これが水素原子の $2s_{\frac{1}{2}}$ 状態に対して観測されている Lamb シフトのエネルギーであり、このエネルギーのズレの実験値は理論計算により大雑把に再現されている。そして、この事が QED における繰り込み理論の成功と考えられてきた事は間違いない事である。

5.7.3 Ward の恒等式

ここで一つコメントしておきたい。繰り込み理論における繰り込み可能性の議論のところで、Ward の恒等式と言う式が出て来てこれが重要な役割を果たしているとの教科書にも書いてある。ところが、この式をきちんと検証すると分かる事であるが、全く役に立たない方程式である。細かい事はここでは書かないが、基本的には、恒等式自体は数学だから正しいのであるが、それを物理に应用する時に間違えてしまうと言う事である。それは、Ward の恒等式を利用する際に、フェルミオンの自己エネルギーの計算で積分を実行した後、フェルミオンに対する分散関係式 $p^2 = m^2$ を使うのである。そのために、この式を p^μ で微分したものが、バーテックス補正における Log 発散と形が同じになるという主張が Ward の恒等式からの結論であるが、実はこれはフォトンの場合のバーテックス補正に対して偶然成り立っているのに過ぎないのである。当然の事であるが、フェルミオンの自己エネルギーの計算で $p^2 = m^2$ を使ったところからも p^μ で微分すると本当は寄与する事がわかり、Ward の恒等式自体は使い物にならないと言う事が簡単にチェックできるものである。しかし、これまで物理屋は、Ward の恒等式とか Goldstone の定理とかの数学上では明らかに成り立つ方程式に対して、その物理への応用を甘く考え過ぎていたという事であろう。

5.7.4 Lamb シフト計算の困難

最近になって分かってきたことではあるが、水素原子の $2s_{1/2}$ 状態における Lamb シフトエネルギーの理論計算は実は概念的な困難を含んでいる。非相対論の計算を実行すれば、概念的な困難はないのであるが、しかしこの場合どうしても理論計算は Log 発散してしまうのである。現在までの所、教科書に紹介されている Lamb シフトエネルギーの理論計算は、この非相対論によるものであり、基本的に Log 発散は適当なカットオフを選べば、実験値の大きさは予言できるというレベルのものである。これはこれで十分意味のある計算である事は事実であるが、しかしその計算の精度はせいぜい良くて 20% のレベルである。しかしながら、これを相対論的にきちんと実行すれば、原理的にはこの Log 発散は有限で求まるはずであるという事を人々は知っているのも、それ程深刻には心配していないのである。しかしながら、もう少し厳しくチェックするとわかるのであるが、相対論的な波動関数を使い、Lamb シフトエネルギーの理論計算を実行しようとする、実は 2 つの困難にぶつかるのである。一つは、水素原子は相対論的に扱おうとすると 1 体問題ではないという事である。すなわち、陽子の運動も当然考える必要が出て来てしまい、これを厳密に扱う事は現在の場の理論的枠組みの中では不可能な事である事がわかっているのである。非相対論では重心と相対運動が常に厳密に分離できたのであるが、相対論ではそれは簡単にはできなく、処方箋もないのである。もう一つの困難はもっと深刻である。相対論的に扱おうとするとどうしても負のエネルギー状態を考える必要がある。ところが、この負のエネルギー状態は束縛状態では理論的にきちんと定義する事ができないのである。場の理論で言えば、水素原子での電子の状態は陽子との相互作用を通して束縛されており、その全体の系の負のエネルギー状態を考えない限り正しい取り扱いになっていないのである。ところが、現実問題としては、この 2 体系の負のエネルギー状態などは、どう扱った方がいいのか明確ではないのである。従って負のエネルギー状態自体をきちんと取り扱う処方箋が無い限り、Lamb シフトのエネルギーをきちんと計算する事は当然不可能な事である。これらの事より、相対論的な Lamb シフトエネルギーの理論計算は予想ほど単純ではなく、希望的観測による推測の域をでていないのが現状である。

ほとんどの場の理論の教科書には Lamb シフトの計算が載っているが、これは全て Bethe による非相対論的な取り扱いを紹介したものである。ところが、そこでは水素原子の $2s_{1/2}$ 状態の Lamb シフトエネルギーが数桁の精度で計算されていると書かれているものがほとんどである。しかも、それを実験と比べ

ていて、良く合っていると解説されている。これは、勿論、物理的には全く根拠のないものである事は言うまでもない。Bethe 自身はこの取り扱いが不十分である事を良く知っていたのであるが、その原論文では相対論的な取り扱いの研究は進行中であるとしている。その後、実際に相対論的に取り扱った論文が出た事は勿論ないし、その他の誰も成し遂げてはいない。これがどれだけ難しいかは上述した通りである。しかし、発散が $\log$ の形である事から、大雑把な Lamb シフトエネルギーの大きさは信頼して良いとこれまでは考えてきたのであるが、 $\log$ 発散が相対論的に取り扱ったら本当になくなるのであろうかと言う事が今は分からなくなっている。現在のところ、あるいは、Lamb シフトの物理を考え直す必要があるのではないかと考え始めている。

5.7.5 フォトンの自己エネルギー

フォトンの自己エネルギーについては、朝永の推論のところで少し議論したのであるが、ここでもう少し詳しい議論をして行こう。

フォトンの自己エネルギーも同じように Feynman グラフを計算すると出てきてしまうのである。この場合、フォトンがフェルミオンと反フェルミオンを対生成してまたもとの同じフォトンに戻るという Feynman グラフである。これは真空偏極と呼ばれているものであり、物理的な過程にもあらわれる事がある。ところがこのフォトンの自己エネルギーの Feynman グラフは 2 次発散になっているのである。あるカットオフを考えて、その $\log$ は大した無限大ではないので、何とか処理できたのであるが、2 次発散はどの様に繰り込もうとしても不可能である。それでは、これまで人々はどうしていたのであろうか？ここで繰り込み理論で最もわかりにくい「仮定」が出てきてしまうのである。それは、「ゲージ条件」である。人々は何とかこの 2 次発散を捨てたいために、計算されたフォトンの自己エネルギーが波動関数に繰り込められる形、すなわちゲージ不変であるべきであるという要請をしたのである。この時最も重要な条件が「ゲージ条件」である。これは偏極テンサー $\Pi^{\mu\nu}$ が $k_\mu \Pi^{\mu\nu} = 0$ を満たしている事に対応している。ところが、この式はちょっとチェックすればすぐわかることだが、成立してしないのである。すなわち、どう計算をしてみても $k_\mu \Pi^{\mu\nu} \neq 0$ である。何故、人々がこの式を正しいと思いこんだのであろうか？唯一考えられる理由は無無限大になる積分において行った変数変換で正しい処理をしなかった事である。無限積分における変数変換においては、注意しないと無限大となるべき結果がゼロである事を「証明」してしまう事は良く知られている事であるが、このように、してはいけない所でそれを無視して変数変換

における無限積分を実行してしまった事が間違いの主たる原因であった。しかし、この様な単純なミスはどうして人々が受け入れてきたのか、今となっては理解できない事である。いずれにせよ、間違った条件を用いたために2次発散の項はゲージ条件により捨てる事が出来るというものであった。これはいかにも人工的であり無理があると直感的にはわかるものである。もともとゲージ不変性は元の Lagrangian 密度に対してすでに確認されているものであり、従ってゲージを固定して、電磁場を量子化して摂動論で計算した物理量は、ゲージ不変性を破っているわけではない。しかしこの2次発散が処理できない限り繰り込み理論の欠点であると人々は思い込んだ事であろうし、この事は理解できない事でもない。それと、2次発散を捨てる事によるフォトンの自己エネルギーの処理の仕方は、基本的にはそれ程直接的な影響を物理の観測量に与える事はなかったので、受け入れられてきたのあらうと考えられる。

5.7.6 三角形ダイアグラム

このフォトンの自己エネルギーと実は直接関係している現象が $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$ などを記述する 三角形ダイアグラムである。この場合、2個のフォトンが結合するところは勿論ベクタータイプ γ^μ 型である。もう一つの頂点 Γ として $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$ の場合は擬スカラー γ^5 型であり、 $Z^0 \rightarrow 2\gamma$ の場合は擬ベクトル $\gamma^\mu \gamma^5$ 型と言うように、その結合型によっていくつかの場合がある。そして、それぞれの頂点関数はそれぞれの物理的な散乱過程に対応している。

ところが、この三角形ダイアグラムの T 行列を計算するとわかる事であるが、どの三角形ダイアグラムの場合も発散は何処にもないのである。一見、見かけ上は線形発散に見えるのであるが、実際は線形発散も Log 発散もトレースの段階でゼロになるのである。これは大変重要な事を意味している。それは、これらの物理的な過程に発散がないと言う事は、フォトンの自己エネルギーは繰り込みに関係していないという当然の結果になったのである。後でもう少し詳しく議論するが、この三角形ダイアグラムから頂点 Γ を取り除いたダイアグラムがフォトンの自己エネルギーである事がポイントである。この結果、「朝永の推論」は方向としては正しいのだが、フォトンの自己エネルギーはゼロではなくて、やはり2次発散がある事は確かだが、繰り込みには無関係であったという事である。

5.7.7 アノマリー方程式の消滅

すべての三角形ダイアグラムの T 行列が有限で求まったと言う事は、即ち、アノマリー方程式は物理的に意味のない方程式であったと言う事である。このアノマリー方程式自体、あまり面白い方程式ではなかったのもともと解説はしてなかったのであるが、結局、物理とは無関係の方程式であったと言う事である。そもそも、物理的に言って、Noether の定理から導き出されたカイラル電荷の保存則が、ある種のファインマンダイアグラムを正則化する事によって壊れるなどと言う事は、物理的にあってはならない事である。それは正則化が単に数学の手法であり物理とは直接関係しないと言う事を考えれば、至極当然の事であったわけである。正則化に関しては、例えば Pauli-Villars の正則化があるが、これに対して、朝永さんのコメントが知られており、そのコメントとは「Pauli-Villars の正則化は間違いである」と言う事であった。このコメントに関しては、Pauli-Villars の正則化が間違いと言うよりも、「この正則化は無意味であり不要である」といった方がより正確であると思われる。

5.7.8 フォトンの自己エネルギーと繰り込み

フォトンの自己エネルギー自体は観測量ではないので、それが 2 次発散していても構わない事は前述した通りである。それではフェルミオンのバーテックス補正と同じように、フォトンの自己エネルギーも使い道があるのだろうか？これは繰り込み理論の最も重要で本質的な問題である。真空偏極が起こって、それに関連した物理的に観測可能な過程は何であろうか？この質問に対する答えは単純で、それは真空偏極が起こっている場合のフェルミオンか反フェルミオンのどちらかに何らかのバーテックスが付いた場合である。最もよく知られているのは、 $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$ の崩壊過程である。この場合、バーテックスは γ_5 である事はよく知られており、この三角形ダイアグラムを計算すると実験値と良く合っているのである。上述したように、三角形ダイアグラムはどのバーテックスでも発散がない事が証明されているのだが、このためアノマリーが物理的に無意味であった事は前述した通りである。しかし、この事は繰り込み形式に対しては非常に重要な意味を持っている。真空偏極にどのバーテックスが付いても発散が無いという事は、これらの過程では繰り込み不要であるという事を意味している。これはすなわち、フォトンの自己エネルギーはどの繰り込みにも使われる事が無く、従ってフォトンの自己エネルギー自体は物理的には意味がない事に対応しているのである。

5.8 弱い相互作用の繰り込み理論

Higgs 粒子が95%の確率で存在しないと言う事が実験的に分かり始めている現在、弱い相互作用の繰り込みの問題を検証する事は必須条件になっている。もともと、Weinberg-Salem 理論はゲージ理論信仰に支えられて作られたものである。しかし、このゲージ理論ならば繰り込み可能と言う主張が物理的には意味がなく、つぶれた事でもあり、その意味でも弱い相互作用の繰り込みの問題を考える事が避けられない問題である。

Weinberg-Salem 理論は $SU(2) \otimes U(1)$ の非可換ゲージ理論から出発して、対称性を破る事によりゲージボソンに質量を与えるという模型である。これは、物理的には対称性の破れの問題を誤解しており、技術的には局所ゲージ不変を勝手に破ってしまった手法が基本になっているため、およそ信頼できる模型とは言い難いものである。この事は教科書で詳しく解説しているので、ここでは省略する。しかしながら、Weinberg-Salem 模型の最終的な Hamiltonian は弱い相互作用の実験事実をよく再現するように作られている。その意味では、Higgs 粒子を除いたり、またいくつかの修正を加えれば、信頼できる模型になりうると考えられる。そうだとすると、有限質量のボソンにより媒介されている弱い相互作用の繰り込みの問題をきちんと理解する事は、非常に重要になる。

5.8.1 Lorentz 条件 ($k_\mu \epsilon^\mu = 0$) の導出

繰り込み形式を議論するためには有限質量を持つベクトル場 Z^μ の伝播関数を求める事が必要である。この場合、まずはベクトル場の偏極ベクトルに対する条件式をきちんと求めておく事が重要となる。ベクトル場 Z^μ に対する Lagrangian 密度は

$$\mathcal{L}_W = -\frac{1}{4}G_{\mu\nu}G^{\mu\nu} - \frac{1}{2}M^2 Z_\mu Z^\mu$$

で与えられる。ここで $G^{\mu\nu} = \partial^\mu Z^\nu - \partial^\nu Z^\mu$ である。この場合、運動方程式は

$$\partial_\mu(\partial^\mu Z^\nu - \partial^\nu Z^\mu) + M^2 Z^\nu = 0$$

となる。自由粒子の解は

$$Z^\mu(x) = \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\lambda=1}^3 \frac{1}{\sqrt{2V\omega_{\mathbf{k}}}} \epsilon^\mu(k, \lambda) \left[c_{\mathbf{k},\lambda} e^{-ikx} + c_{\mathbf{k},\lambda}^\dagger e^{ikx} \right]$$

の形である事が知られているので、この式を上式に代入して ϵ^μ に対する方程式を求めると

$$(k^2 - M^2)\epsilon^\mu - (k_\nu \epsilon^\nu)k^\mu = 0$$

となる。ここで ϵ^μ がゼロでない意味のある解が存在する条件は上の行列式がゼロ、すなわち

$$\det\{(k^2 - M^2)g^{\mu\nu} - k^\mu k^\nu\} = 0$$

となる。この式を解くと

$$k^2 - M^2 = 0$$

が唯一の解として求められる。よってこれを元の式に代入すると

$$k_\mu \epsilon^\mu = 0$$

が求められる。これは QED では Lorentz 条件として良く知られている式である。しかし、これがゲージ固定とは無関係に運動方程式から導かれたと言う事は QED にとっても大変なことである。それは Lorentz ゲージがゲージ固定としては意味をなさない事に対応している。

それ以上に、これまで何故この運動方程式を解くことがなされなかったのだろうか？自由粒子の Dirac 方程式の場合を見ると明らかであるが、この場合も同じように行列式がゼロ ($\det\{\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{k} + m\beta - E\} = 0$) という条件によりエネルギーの分散関係式 ($E = \pm\sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}$) が求まり、それをもとの Dirac 方程式に代入する事により Dirac の波動関数が決まるのである。

5.8.2 有限質量ベクトルボソンの伝播関数

次に、有限質量をもつボソン場の偏極ベクトルが決定された事も踏まえて、ボソン場の伝播関数を決定する事が大切になる。出発点となるのは S 行列の計算であり、この場合、複数個のボソン場の T-積が問題となる。ここで、2 個のボソン場の T-積は

$$\langle 0|T\{Z^\mu(x_1)Z^\nu(x_2)\}|0\rangle = i \sum_{\lambda=1}^3 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \epsilon^\mu(k, \lambda) \epsilon^\nu(k, \lambda) \frac{e^{ik(x_1-x_2)}}{k^2 - M^2 + i\epsilon}$$

と書かれるので $\sum_{\lambda=1}^3 \epsilon^\mu(k, \lambda) \epsilon^\nu(k, \lambda)$ の形は Lorentz 条件を考慮する事により

$$\sum_{\lambda=1}^3 \epsilon^\mu(k, \lambda) \epsilon^\nu(k, \lambda) = - \left(g^{\mu\nu} - \frac{k^\mu k^\nu}{k^2} \right)$$

と決定される事がわかる。従って、ボソンの伝播関数は

$$D^{\mu\nu}(k) = -\frac{g^{\mu\nu} - \frac{k^\mu k^\nu}{k^2}}{k^2 - M^2 + i\varepsilon}$$

と一義的に決定される事がわかる。この伝播関数は通常使われているものとはほんの少しだけ異なっている。実際、ほとんどの教科書で使われている伝播関数は、分子のところで k^2 の項が M^2 と置き換えられたものである。しかし、これだと、フェルミオンの自己エネルギーとバーテックス補正には2次発散が出てしまう事は良く知られている。このため、この形では繰り込み不可能であるとこれまで考えられてきたのである。

5.8.3 ベクトルボソンによるバーテックス補正

しかしながら、新しく求められた伝播関数でバーテックス補正を計算すると驚いた事に、Log 発散がすべて消えてしまい、有限で求められるのである。実際、電子の $g-2$ に対する Z ボソンの影響を計算したところ、非常に小さくて ($\delta g \sim 10^{-13}$)、この値は確かに実験と一致している事が分かったのである。

従って、弱い相互作用においては、繰り込みは一切不要である事が明確になった。この事より、フォトンの伝播関数がある意味で異常であり、この場合の取り扱いが最も難しいものである。恐らくは、この困難さは $k^2 = 0$ のところの発散、すなわち、赤外発散の異常から来ているものと考えられる。この点に関しては、現在もまだ良くわかっていない。しかし、この一点を除けば、繰り込みは非常に簡単な形で理解された事になったのである。

5.9 場の理論のまとめ

結局、真空中における全ての物理法則は基本的には量子電磁力学と量子色力学の体系に重力と弱い相互作用をうまく含み入れたラグランジアン密度により完全に記述されており、これら全ての相互作用を考慮した理論模型は概念的な困難がない量子場の理論として完成されたものと考えてよい。

これまで、素粒子および宇宙論においてはネーミングのみが先行してその物理は極めて不明確であった。例えば、ブラックホールというネーミングは確かに興味をそそるものであったが、しかし、その実体は専門家自身が全く理解していない状態で研究が推移してきたのである。人々は、ブラックホールとは一般相対論の方程式の特異点であるという説明をしてきたのであるが、それが物理的にどういう状態なのかと言う事に関しては、言葉でしか答えられなかったのである。勿論それは物理ではなく、単なる SF であった。

自発的対称性の破れと言う言葉も確かに良いネーミングであった。しかし、それを語っている人々はほとんどその物理がわかっていない状態であり、例えば自発的対称性の破れがあると Goldstone ボソンが現れると言う事を検証もしないで受け入れてきたのである。それで、「Goldstone ボソンは物理的にはどのような状態として記述できますか」と専門家に質問すると、「それは集団運動の状態だから簡単には記述できない」と人々は答えて来たのである。これは勿論、物理ではない。実際には、厳密解によれば Goldstone ボソンなど最初からあり得ないものだったのである。そして、そもそも自発的対称性の破れは、その場の理論模型における「真空」の性質のみが議論の対象となっているため、その現象がどのような形にせよ物理的な観測量に結びつく事はありません。

その他の楽しいネーミングとして、少し専門的なものではあるが「カイラルアノマリー」、「格子ゲージ」、「繰り込み群」、「漸近的自由」などが良く知られているが、それらはすべて物理的には無意味であり、いずれ消えて行くものである。

5.10 溶液の物理

これまでの物理学は基本的には真空中に存在している物質の振る舞いを研究する事が主力であった。量子場の理論は当然真空のみが興味の対象であったし、また固体物性も結晶が存在するところは基本的には真空、あったとしても空気中ということである。そして、その物理は、かなりの精度で現象を記述できている。

今後の方向として、自分がどうしても行いたい研究対象は、溶液中の物理である。生物を物理の言葉で理解しようとする、どうしても、溶液中における化学変化の問題にぶつかるのである。この場合、化学反応の現象論は良く理解されているのだが、その化学反応を電子の言葉で物理的に理解する仕事は、まだ、全くといって良いほどわかっていない。溶液だと何故、化学反応が起こり易くなってるのだろうか？溶液中では、例えば、水分子における電子は隣の水分子とどのような相互作用をしているのだろうか？

すべてはまだ、疑問だらけである。恐らくは、何か決定的に重要な事があり、それを物理の言葉で理解する事が、今後のこの分野の進展に大きな影響を与える事になると考えられる。これからしばらくは、何が決定的に重要な役割を果たしているのかを探す事であろう。