第５章　運動量の保存

運動量保存の法則が間違っているなどと言う人は、われわれの知る限りあまり聞いたことはない。しかし、この法則について何かおかしいと密かな疑いを持っている人は、物理学者の中にもたくさんいるに違いない。それは物理学者の書いた教科書からもわかる。彼らの論理はひどく混乱している。例外に漏れず、この法則も残念ながら間違っているのである。

まずは、何が間違っているのかという点を浮き彫りにするために、２つの球の衝突といった簡単と思われる問題に対する物理学者の解釈から話を始めることにしよう。

5.1　２つの球の弾性衝突の物理学者の解釈

ある力学の教科書には次のような例題が与えられている。このような例題に対する解釈が全物理学者の総意であるとは限らないが、教科書というものには物理学者の世界で承認されていないようなものは書かれていないことが普通である。この教科書に書かれていることは間違っているが、間違っているのは全ての力学の教科書に当てはまるから、この教科書だけを批判するつもりはない。あえて、この書名はふせることにしよう。この手の例題は極めて基本的なものであり、おそらく、この例題自体この教科書のオリジナルではないだろう。

また、ここで挙げる例題は、基本的であるが故、考える価値がある。考える価値のない例題というものは、物理学の演習書などにたくさん載っている$\sin, \cos$などを多用したほとんどなぞなぞの類のものである。物理学の演習書というものは、数学の演習ではないのであるから、物理現象の理解の助けになるものであることが望ましい。にも関わらず、なぞなぞばかり学生にやらせるから、学生は物理現象を理解することができず、物理現象から遊離したなぞなぞを

解くことが物理学であるといったような誤った認識を得るようになる。このような技能訓練を受けた人間が将来の物理学者になるのであるから、物理学者が物理現象を理解できないということは、何も不思議なことではない。

【例題１】一直線上を運動する２つの球A, Bがある。質量はそれぞれm, Mとする。はじめにBが静止していて、これにAが速度uで衝突するものとする。衝突が完全に弾性的であるとして、AからB に移るエネルギーを求めよ。

【解答】衝突後のAの速度をU、Bの速度をVとする。運動量保存の法則によって、

$$mU + MV = mu \tag{5.1}$$

　完全に弾性的ということは、運動エネルギーの損失がないということであるから、このときの条件は、

$$\frac{1}{2}mU^2 + \frac{1}{2}MV^2 = \frac{1}{2}mu^2 \tag{5.2}$$

すなわち、

$$mU^2 + MV^2 = mu^2$$

となる。式(5.1)とこの式を

$$m(u - U) = MV, m(u^2 - U^2) = MV^2$$

と変形し、割り算すると、

$$\frac{m(u-U)(u+U)}{m(u-U)} = \frac{MV^2}{MV}$$

$$V - U = u \qquad (5.3)$$

となる。式(5.1),式(5.3)から、U, Vを解けば

$$U = \frac{m-M}{m+M}u \qquad (5.4)$$

$$V = \frac{2m}{m+M}u \qquad (5.5)$$

したがって、AからBに移ったエネルギーは

$$\frac{1}{2}MV^2 = \frac{2Mm^2}{(m+M)^2}u^2 = 2M\frac{1}{(1+\frac{M}{m})^2}u^2$$

である。

5.2 2つの球の弾性衝突の物理学者の解釈の何が間違っているのか

5.1 で述べた解答は物理学とは現実世界から遊離したなぞなぞを解く学問であると考えれば正しいが、物理学とは現実世界を反映すべき科学であると考えると間違っている。われわれは、物理学とは現実世界を反映すべき科学であると考えているから、このような解答は間違っていると考えている。すなわち、このような解答は現実世界を反映しない。

いったいどこが間違っているのだろうか。

式(5.3)が意味することは、衝突前のAとBの相対速度は衝突後のAとBの相対速度に等しいということである。そして、その相対速度は、A, Bの質量の大きさには依存しない。もし、このようなことが現実ならば、これだけで立派な法則になる。

物理学者は変数とよばれるもの、この場合で言えば、A, Bの質量をmとかMといった文字で与えて計算することを好む。この方法は

確かにmやMの数値が様々に変化する場合の一般的な記述を与えるという点で都合がよい。しかし、このような結果を得たからといって満足してはいけない。実際の現象は具体的な数値をmやMに入れてみなければわからない。もし、変数に適当な数値を代入できるならば、実際に代入して計算してみることである。物理学者がこのようなことをしていれば、この例題のような誤りは容易に発見できたであろう。

そこで具体的な数値を入れて計算してみることにしよう。この例題の解答が間違っていることを示すには、具体的な反例を一つ示せば十分である。Bの質量MがAの質量mの２倍であるとすれば、$M=2m$である。このときの具体的な衝突後の速度であるUとVを求めてみよう。式(5.4),式(5.5)より、

$$U=\frac{m-2m}{m+2m}u=-\frac{1}{3}u$$
$$V=\frac{2m}{m+2m}u=\frac{2}{3}u$$

となる。これを式(5.1)に代入すれば、

$$-\frac{1}{3}mu+\frac{2}{3}\cdot 2mu=mu$$

となり、この恒等式は一見正しい。しかし、よく考えてみてほしい。衝突後の速度Uを代入して得られたAの運動量は$-\frac{1}{3}mu$となっているが、ここに現れた負号は最初にAからBへ向かう方向を正方向として、その方向が反対であることを述べているにすぎないもので、運動量というもの自体が負であるということではない。例えば、Aの運動方向の先に壁を設け、Aが弾性衝突してはね返ってくるならば、Aの運動量は方向が反対で量が同じということになる。すなわち、そのときのAの運動量は$\frac{1}{3}mu$である。この運動量とBの運動量との和が全体の衝突後の運動量であるから、その量は、

$\frac{1}{3}mu + \frac{4}{3}mu = \frac{5}{3}mu$

となる。この量は衝突前の運動量muより大きいことになり、衝突後の全体の運動量は衝突前の全体の運動量よりも増えることになる。もし、このようなことが本当なら、誰も石油など燃やして発電したりはしない。ただ、物体をぶつけていれば、エネルギーはどんどん増えていくことになるからである。

このようなことは勿論現実ではない。物理学者は自信満々に永久機関の製造は不可能であると主張するが、彼らの理論を用いれば、永久機関は製造できなければならないという結果が得られた。彼らは何を根拠に永久機関の製造は不可能と主張していたのだろうか。彼らの根拠が物理理論であるとするならば、彼らはむしろ永久機関は製造できると主張するべきであろう。

２つの球をぶつける実験で、この例題のような現象は再現されない。このことはまったく検証されていないに違いない。もし、検証されていたら、このような例題が存在するはずはない。

5.3 運動量保存の法則

(1) 運動量保存の法則のどこが間違っているのか

5.2 で述べたことにより、この例題の解答が間違っていることはわかったが、どうして間違えたのかの本質的な理由はまだわかっていない。この例題の解答で使用された法則と呼ばれているものは、

運動量保存の法則　$mU + MV = mu$

運動エネルギー保存の法則　$\frac{1}{2}mU^2 + \frac{1}{2}MV^2 = \frac{1}{2}mu^2$

の２つであった。算術的な計算は基本的に間違っていないから、間違っているとすれば、この２つの法則の両方か、どちらか一方であるということになる。

まず、運動量保存の法則から考えよう。物理学者はこの法則に関しても根本的に使い方を間違えているから、彼らの得ている結論を使うとまた間違えてしまうので、現象の考察という原点に戻って考えてみなければならない。そこで次のような例題を考えてみることにしよう。

【例題２】一直線上を運動する２つの球A, Bがあり、それぞれの質量をm, nmとする。はじめにBは静止しており、これにAがuの速度で衝突するとする。衝突は完全に弾性的であるとし、衝突後、Aは静止したものとすれば、Bの速度はどうなるか。

ただし、これらの速度は地球上に固定した慣性系とみなせる座標系に対する速度である。

この例題は一見すごく簡単なように見える。しかし、物理学者にはこの例題の正しい答えがわからないのである。まずは正しいと思われる方から述べ、物理学者たちの混乱した考え方はその後に述べることにしよう。

【解答、正】Bの衝突後の速度をVとすれば、運動量保存の法則より、

$$mu + nm0 = m0 + nmV$$

と書くことができるだろう。したがって、Vは

$$V = \frac{u}{n}$$

である。例えば、Bの質量がAの質量の３倍であれば、$n=3$ だから $V=\frac{1}{3}u$ となり、u の速度の$\frac{1}{3}$でBは動くことになる。

この考えはまったく正しいように思えるが、別の考え方を用いれば、また別の解答を得ることができる。物理学者たちの考え方は次のようなものである。困ったことにこのような混乱した考えが物理学者たちの主流なのである。

【解答、誤】Aは等速直線運動しているのであるから、A, Bの間ではガリレイ変換可能であり、地球に固定した座標系を使わなければならないということに意味はなく、Aに固定した座標系から測定しても結果は同じである。そこで、この座標系から測定することにしよう。

衝突する前は、Aからみれば、Bがuという相対速度でAに近づいてくることを観測する。また、衝突の前後を問わず、Aの速度は常にゼロである。これはAに固定した座標系から観測しているのであるから当然である。この座標系を用いた衝突後のBはこの座標から遠ざかっていくことになることを観測するであろうから、この速度を$-V$とすれば、運動量保存の法則により、

$$m0+nmu=m0-nmV$$

となる。したがって、

$$V=-u$$

である。Aから見れば、Bは衝突前の相対速度と同一の相対速度で遠ざかっていくように見える。そして、この速度は衝突する物体の質量に依存しない。また、例題の条件では、Aは地球に対して静止

していることになるから、Bは地球に対してuの速度で運動していることになる。

このような考え方の誤りは、例題１と似たようなものであり、すぐに誤りを指摘することができる。この解答の結論のように、衝突後にBがuの速度で地球に対して運動するとすれば、$n>1$のとき、運動量が初めより増加したことになってしまうからである。また、衝突という現象の考察は、本当は加速度運動を扱っていることになり、ガリレイ変換は適用できないだろう。

このような間違った結論が得られる理由というのは、速度という概念に対する認識が間違っているからである。例えば、一定の速度で走っている列車から見れば、駅（宇宙？）は反対方向に走っているように見える。だからといって、列車は駅の運動エネルギーを取り出す方法はないということであり、列車の運動エネルギーは駅の質量ではなく、列車自身の質量に依存しているということである。

相対速度という概念では、基本的に運動量や運動エネルギーという概念を取り扱うことはできない。速度という概念は物理学において最も基本となる概念の一つであるが、この概念の認識が間違っているため、物理学の知識というのはほとんど全般的に間違っているのである。運動量に関する概念で使われる速度というものは、慣性速度や慣性座標速度を使うべきであり、相対速度では間違った結果しか与えない。

(2) 運動量の方向についての認識

運動量というものは、質量×速度であるということになっている。速度というものには方向があり、この方向の取り方によって、運動量が負になったり正になったりするという問題がある。勿論、運動方向が東になったから、運動のエネルギーがプラスで、西になったらマイナスなんてことはありえない。しかし、運動量保存の法

則というものをそのまま使えばこのような結論が得られてしまう。運動量保存の法則は修正しなければならない。

　運動量保存の法則というものを物理学者は次のように書いている。

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 + ... + m_n v_n = m_1 v_1' + m_2 v_2' + ... + m_n v_n' \qquad (5.6)$$

もし、２つの同じ質量の物体が反対方向に運動しているとすれば、その全運動量Pは、

$$P = mv + m(-v) = 0$$

ということになり運動量はゼロであるということになってしまう。このようなことは勿論間違っており、修正しなければならない。一次元の運動であれば、

$$|m_1 v_1| + |m_2 v_2| + ... + |m_n v_n| = |m_1 v_1|' + |m_2 v_2|' + ... + |m_n v_n|' \qquad (5.7)$$

というように書けば、解決される。| |は絶対値ということである。三次元などの一般的な場合には、この絶対値記号をその大きさということに約束する。このことはベクトルの規約としてかなり一般的に使われている。すなわち、

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v} &= v_x \boldsymbol{i} + v_y \boldsymbol{j} + v_z \boldsymbol{k} \\ |\boldsymbol{v}| &= \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} \end{aligned} \qquad (5.8)$$

と書けばよい。

　勿論、運動量の差という概念もある。その場合例えば、

$$P = |m_1 v_1| - |m_2 v_2| \tag{5.9}$$

と書けばよい。従来の書き方をしている場合では、運動量の運動方向が反対であるということと運動量の差ということは区別できなかったが、この書き方であればこのような混乱を避けることができる。

5.4 運動エネルギー保存の法則

次は運動エネルギー保存の法則というものについて考える。この法則と呼ばれるものを誰が最初に言い出したか知らないが、物理学者の解釈によれば、運動エネルギー保存の法則というのは次のように表されるという。

$$\begin{aligned}&\tfrac{1}{2}m_1 v_1^2 + \tfrac{1}{2}m_2 v_2^2 + \ldots + \tfrac{1}{2}m_n v_n^2 \\ &= \tfrac{1}{2}m_1 (v_1')^2 + \tfrac{1}{2}m_2 (v_2')^2 + \ldots + \tfrac{1}{2}m_n (v_n')^2\end{aligned} \tag{5.10}$$

例えば、例題１の解答によれば、次の２つの方程式は両立するという。

運動量保存の法則	$mU + MV = mu$
運動エネルギー保存の法則	$\tfrac{1}{2}mU^2 + \tfrac{1}{2}MV^2 = \tfrac{1}{2}mu^2$

質量mとMが同じ質量である簡単な場合を考えて、この両式の速さの関係を図式的に書けば、図5.1のようになる。

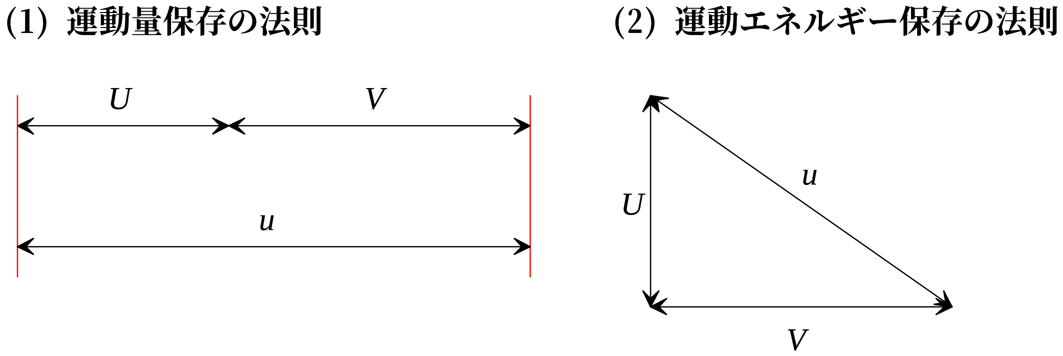

図5.1 運動量保存の法則と運動エネルギー保存の法則の関係

このとき、この両式が成立しうるU, Vの値の条件は、

- $U=0$
- $V=0$
- $U=0$かつ$V=0$

の３つだけであり、普通の条件（$U \neq 0$かつ$V \neq 0$）では両立しえない。この両式が一般に両立するとするならば、すべての条件において両立しなければならないが、A, Bの質量を同じとした簡単な条件においてさえ、両立することは極めてまれである。結論としてこの両式は両立しない。このことは具体的な数値を代入してみても明らかである。このような計算は小学生レベルの算数である。物理学者がこの両式が両立できると考えているということは、彼らが小学生レベル以下であることを示している。

この運動エネルギー保存の法則とよばれるものの成立根拠というものは何なのか。この奇妙なものについては第12章にて述べることにするが、ここでは、この法則とよばれる法則というものは法則ではない、と言っておく。

5.5 運動量保存の法則の正しい応用

5.3で、われわれは運動量保存の法則に対する正しい認識を得た。この考えをさらに発展させて最初の例題の正しい解答を述べることにしよう。その例題は、

【例題１】一直線上を運動する２つの球A, Bがある。質量はそれぞれm, Mである。はじめにBが静止していて、これにAが速度uで衝突するものとする。衝突が完全に弾性的であるとして、AからBに移るエネルギーを求めよ。

であった。問題がこのままであれば、正しい解答というのは次のようになる。

【解答】この例題で与えられている速度uは何を基準している速度か不明確であり、この速度をAとBの相対速度であると解釈するならば、相対速度を用いては衝突後のA, Bの運動量は特定できない。したがって、Bに移るエネルギーは特定できない。

ということになる。このような結論ではあまり意味がないので、例題を次のように書き換えることにしよう。また、Bの質量MはAの質量の何倍かという形式で表すことが可能であるのでnmということにし、エネルギーという表現は不適切であるので運動量という言葉を使うことにしよう。

【例題３】一直線上を運動する２つの球A, Bがある。質量はそれぞれm, nmである。はじめにBが静止していて、これにAが速度uで衝突するものとする。衝突が完全に弾性的であるとして、AからBに移る運動量を求めよ。

　ただし、これらの速度は地球上に固定した慣性系とみなせる座標系に対する速度である。

【解答】衝突前の運動量はA, Bそれぞれで、

衝突前　A；$|mu|$

　　　　B；$|nm0| = 0$

である。Aは$|mu|$の運動量でBに衝突するが、このときBに加えられる力は、$|mu|$に相当する運動量による力である。このとき、Bに伝えられる運動量は、$|mu|$であると考えられる。Aは逆に反作用の力によって、$|mu|$に相当する運動量による力と反対方向に力を受ける。Aの失う運動量は$|mu|$と考えられるから、Aに加えられる運動量は、$-|mu|$である。このような考察から衝突後の運動量はA, Bそれぞれで、

衝突後　A；$|mu| - |mu| = 0$

　　　　B；$|nm0| + |mu| = |mu|$

である。したがって、衝突後のBの運動量はmuである。

　この例題を少し複雑にした例題を次に考える。

【例題４】一直線上を運動する２つの球A, Bがある。質量はそれぞれm, nmである。はじめに、Aが速度uでBが速度$-ku$で運動しており、正面衝突するものとする。衝突が完全に弾性的であるとして、球A, Bの衝突後の運動量を求めよ。
　ただし、これらの速度は地球上に固定した慣性系とみなせる座標系に対する速度である。

【解答】衝突後のAの速度をU、Bの速度をVとする。Aは$|mu|$の運動量でBに衝突し、Bには$|mu|$の運動量が加えられる。Aは逆に反作用の力によって、$-|mu|$の運動量が加えられる。また、Bは$|nm(-ku)|$の運動量でAに衝突するから、Aに加えられる運動量は$|nm(-ku)|$である。Bは逆に反作用の力によって、$-|nm(-ku)|$の運動量が加えられる。この際には重ね合わせの原理が適用できると考えよう。運動量保存の法則は、

$$|mu| + |nm(-ku)| = |mU| + |nmV|$$

と書くことができる。この式の左辺は衝突前の運動量であり、右辺は衝突後の運動量を表す。
衝突前と衝突後の運動量を分けて書けば、A, Bそれぞれで、

衝突前　$A; |mu|$
$B; |nm(-ku)|$

衝突後　$A; |mU| = |mu| - |mu| + |nm(-ku)|$
$B; |nmV| = |nm(-ku)| - |nm(-ku)| + |mu|$

となる。これから、衝突後の運動量は、

$A; |mU| = |nm(-ku)|$
$B; |nmV| = |mu|$

であり、それぞれの衝突後の速度U, Vは、

$A; U = -nku$

$B; V = \frac{u}{n}$

となる。

結果として、A, B は相互の運動量を交換するだけである。運動量は明らかに衝突前と衝突後で同じであり、保存されていることがわかる。速度に関して、$u = 5$、$k = 4$、$n = 3$ と数値を設定し、衝突前と衝突後のA, B の速度を比較してみれば、

	Aの速度	Bの速度
衝突前	$u = 5$	$-ku = -20$
衝突後	$U = -nku = -60$	$V = \frac{u}{n} = \frac{5}{3}$

となる。

このような結果は、A, B の質量が同じ場合は実験的に確かめられているといっていいだろう。厳密な意味で弾性衝突というものは現実にはありえないが、近似的には確かめられているということである。同じ質量の球が一直線上を運動して正面衝突する場合、相互の運動量を交換するだけである。

質量が異なる場合にこの手の実験的検証がされていない、あるいは公知されていないのは、このようなことを認めると相対速度に対する既存の物理学の知識と、激しく矛盾するからであると想像される。A, B の質量が等しければ、衝突前のA とB の相対速度と衝突後の相対速度は等しいが、A, B の質量が異なれば、衝突前のA とB の相対速度と衝突後の相対速度は等しくなくなるのである。もし、このようなことを認めると、速度というものは相対的な概念であると主張することはできなくなる。こんなことはわれわれにとってはわかり切っていることであるが、物理学者にとってはわからないことなのである。わからないものには蓋をするのが彼らのやり方であるか

ら、物理学の教科書などにはこのようなことは載っていないのである。

次には、走行中の車に後ろから追突するといった問題を考えよう。

【例題５】一直線上を運動する２つの球A, Bがある。質量はそれぞれm, nmである。はじめに、Aが速度uでBが速度vで運動しており、$u > v$でAがBに追突するものとする。衝突が完全に弾性的であるとして、A, Bの衝突後の運動量を求めよ。

ただし、これらの速度は地球上に固定した慣性系とみなせる座標系に対する速度である。

【解答】衝突後のAの速度をU、Bの速度をVとする。$u \leq v$であれば、AはBに衝突しない。$u-v$が 小さくゼロに近ければ、Bに及ぼされる衝撃は小さく、$u-v$が大きければ、Bに及ぼされる衝撃は大きいだろう。このような経験的推測から、AがBに及ぼす力による運動量は、Aの慣性速度uとBの慣性速度vとの相対速度に比例すると考えることができるだろう。ここでいう相対速度は普通の相対速度ではなく、慣性速度間の相対速度である慣性相対速度である。運動量保存の法則は、

$$|mu| + |nmv| = |mU| + |nmV|$$

である。AがBに及ぼす力に相当する運動量は、仮定より、$|m(u-v)|$であり、この運動量がBに加えられ、Aはこの運動量を失う。したがって、衝突後のA, Bの運動量は、

$$A; |mU| = |mu| - |m(u-v)|$$
$$B; |nmV| = |nmv| + |m(u-v)|$$

となる。衝突前の運動量と衝突後の運動量は、

衝突前； $|mu|+|nmv|$

衝突後； $|mU|+|nmV|=|mu|-|m(u-v)|+|nmv|+|m(u-v)|$

$=|mu|+|nmv|$

となり、運動量が保存されていることがわかる。

ここで述べられた例題３～５の解答は、実験によって検証されているわけではないが、実験で検証することは容易であろう。このような実験は、あまり厳密なことを要求しなければ、簡単に行うことができる。

このような現象に関連した実験として既に実証されているものとして次のような例を挙げておく。２つの球A, Bがあり、BはAの２倍の重さがあるとする。天秤で測ると２つのAとBがつり合うことになる。平面上に静止しているA, Bに同じ大きさの撃力を加えると、AはBの２倍の速度で転がっていく。

この実験でA, Bに加えられた撃力の代わりに別の球Cを同じ速度でA, Bにぶつけても同じことであろう。このような実験は運動量保存の法則で述べることそのものである。

5.6 運動量と相対速度

元々、本章を書いた目的は、運動量保存という概念を使って、相対速度という概念の不備を具体的に示そうと思ったからであったが、運動量保存という法則自体が誤っていたために、この法則自体を修正するはめになってしまった。今までも運動量という概念は、相対速度では表現できないことを述べてきたが、運動量保存の法則という概念が整理されていなかったため、具体的に説明はしなかっ

た。ここでは、5.5 の例題４で得られた結論を元に具体的に説明することにしよう。

例題４で得られた結果によれば、正面衝突する２つの球は相互の運動量を交換するだけであった。例題４の場合のA, Bの球の衝突前と衝突後の速度の関係は、

衝突前の速度	A；u
	B；$-ku$
衝突後の速度	A；$U=-nku$
	B；$V=\frac{u}{n}$

であった。この関係を利用し、$n=3$と固定し、A, Bの衝突前の相対速度を同一として、$u, -ku$の速度を変化させた場合の具体的な例を比較しよう。

		Aの速度	Bの速度	A, Bの相対速度
(1)	衝突前	$u=5$	$-ku=-4$	9
	衝突後	$U=-12$	$V=\frac{5}{3}$	$13\frac{2}{3}$ [$=13+\frac{2}{3}$]
(2)	衝突前	$u=4$	$-ku=-5$	9
	衝突後	$U=-15$	$V=\frac{4}{3}$	$16\frac{1}{3}$ [$=16+\frac{1}{3}$]

(1)の場合AからBを見れば、Bは9の速度でAに近づいてくるように見え、Bから見れば Aが9の速度でBに近づいてくるように見える。

まったく同様に、(2)の場合AからBを見れば、Bは9の速度でAに近づいてくるように見え、Bから見ればAが9の速度でBに近づいてくるように見える。

(1)の場合と(2)の場合を相対速度で関係づけるとき、まったく同じであり、区別できない。速度というものは相対速度だけであると物理学者は考えているから、問題とできることもこの相対速度だけである。この場合、Aから見たBの速度ということとBから見たAの速度というものはまったく同じであるから、Aがどの程度の速度で動いているのかBがどの程度の速度で動いているのかといったことは区別できないし、その方法もありえないと物理学者たちは考える。だから、衝突後に起こることもこの相対速度でわからなければならないはずであると考える。すなわち、相対速度が同じ２つの物体が衝突するのであれば、衝突後に違いが生じるはずはないし、また、ありえないと結論する。

しかし、現実は、(1),(2)の場合とも衝突前の相対速度は同じ9であるが、衝突後の相対速度は異なっているのであり、相対速度では、運動量といったことを考えることはできないのである。

この際、用いられる速度は慣性速度でなければならない。物体が運動するということは相対的概念なのではなく、絶対的概念なのである。