「同次式を理解しよう」

こんにちは、河見賢司です。今日のテーマは同次式です。

同次式っていっても聞いたことのないという人もいると思います。同次式は大学受験には頻出と言うわけではありませんが、同次式を使わないと解けない問題もよく出題されます。同次式を知らないと、実際の大学受験で一問まるまる手をつけることさえできない、なんてことになりかねません。

今回のプリントを勉強してもらえば分かると思いますが、それほど難しい問題でないのでしっかりと同次式を理解しておいてください。

同次式を知らない人もいると思いますが、次の問題を解いてみてください。

問題１

$x > 0, y > 0$ のとき、$\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ の最大値を求めよ

【解説】

$\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ の最大値を求めよっていう問題だけどどうしようかな？と考えるよね。

今回の式は、変数が x と y の２つが含まれているので２変数関数です。**変数が多ければ多いほど考えにくいので２変数のときは、なんとか１変数にすることができないのかな？**と考えるのが鉄則です。

$x+y=1$ なんていう条件があれば $y=1-x$ として代入をしたら１変数になるんだけど、今回はそういった条件が与えられていないので、この方法は少し無理だよね。

「何とかして１変数にするんだよ」と言えば、本当に勘のいい人は気づくかもしれませんが、ほとんどの人は気付かないと思います。これは、分母分子を x^2 で割ったら１変数関数になってくれます。

どういうことかと言うと、実際に分母分子を x^2 で割ってみますね。

$$\frac{xy}{x^2+y^2}$$
$$=\frac{\frac{xy}{x^2}}{\frac{x^2+y^2}{x^2}}$$ ◀ 分母分子を x^2 で割った
$$=\frac{\frac{y}{x}}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}$$ ◀ $\frac{y}{x}$ のみの式になった

$\frac{y}{x}=t$ とする。

$$=\frac{t}{1+t^2}$$ ◀ t のみの式になった

もともとの式は $\frac{xy}{x^2+y^2}$ と 2 変数関数で考えにくかったけど、$\frac{t}{1+t^2}$ は、変数が t のみの 1 変数関数だから考えやすくなったよね。

「言われたら分かるけど、x^2 で分母分子を割るなんて思いつかないよ」と思った人も多いと思います。でも、これって同次式のことを知っていたらすぐに気づけるんです。

同次式とは、同次式という文字のごとく次数が同じ式のことをいいます。もっと詳しく言うと各項の次数が全て同じ式のことです。

今回の問題の $\frac{xy}{x^2+y^2}$ を見てほしいのですが、各項は分子の xy、分母の x^2 と y^2 これらの次数はすべて 2 次だよね。こういうふうに**各項の次数が全て同じ式のことを同次式と言います。**

そして同次式のときは、分母分子を割ったり、両辺を割ったりすることにより変数を $\frac{y}{x}$ のみにすることができます。

同次式の問題は、このことさえ覚えておけば解くことができます。同次式を見たら、割ることによって $\frac{y}{x}$ のみの式にするんだなとすぐに気づけるようにしておいてください。

今回は分数でしたが、同次式は分数の他に方程式や不等式の場合もあります。

$\frac{xy}{x^2+y^2}$ ◀ 各項全て 2 次

$x^3+y^3=xy^2+x^2y$ ◀ 各項全て 3 次

$x^2+y^2 \leqq x^2+3xy+y^2$ ◀ 各項全て２次

上記のように分数、方程式、不等式でも同次式となります。各項の次数が全て同じ時は、同次式なんだなと気づけるようにしておいてください。

それでは、先ほどの問題に戻りますけど $\dfrac{t}{1+t^2}$ $(t>0)$ における最大値の求め方は相加・相乗平均を使って求めていきます。相加・相乗平均は入試に本当に頻出です。あまり理解できていないという人はこちらにまとめてありますので、こちらのページを見てください。
相加相乗平均の使い方：http://www.hmg-gen.com/situmon/suugaku2B/2B-3.html

それでは、問題の解答に進みます。もう一度問題を載せておきますね。

問題１

$x>0,\ y>0$ のとき、$\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ の最大値を求めよ

【解答】

$$\frac{xy}{x^2+y^2}$$

$$=\frac{\frac{y}{x}}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}$$ ◀ 分母分子を $x^2 (\neq 0)$ で割った

ここで、$\dfrac{y}{x}=t$ とおく

$$=\frac{t}{1+t^2}$$

$\dfrac{y}{x}=t$ とおいたが、$x>0,\ y>0$ を考え $t>0$ となる。
⇑ 文字を置き換えたときは、必ず範囲に注意する！

$$\frac{t}{1+t^2}$$

$$=\frac{1}{\frac{1}{t}+t}$$ ◀ 分母分子を $t\,(\neq 0)$ で割った！

$$\leqq\frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{t}\cdot t}}$$ ◀ 相加相乗平均より

$$=\frac{1}{2}$$

以上より、$\dfrac{t}{1+t^2} \leqq \dfrac{1}{2}$

等号は $t = \dfrac{1}{t}$ つまり $t = 1$ のとき成立するので、最大値は $\dfrac{1}{2}$ となる。

⇑解答は上記のような感じで OK です。相加相乗平均について分からない人は、先ほどもいいましたが http://www.hmg-gen.com/situmon/suugaku2B/2B-3.html で勉強しておいてください。

問題 2

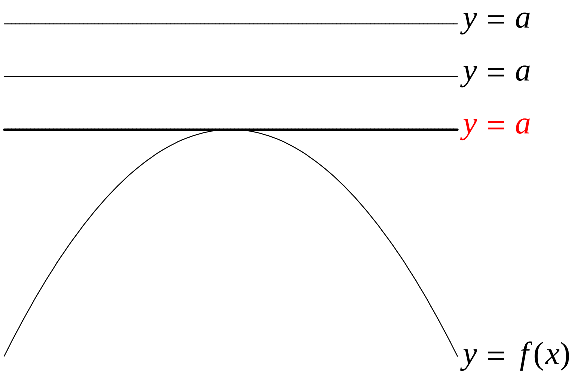
$(x+y)^3 \leqq a(x^3+y^3)$ が正の実数 x, y に対して常に成立するような a の最小値を求めよ。

次は、問題 1 より少し複雑な同次式の問題です (と言っても、やることは先ほどと同じです)。

問題に進む前に、分かりにくい日本語の意味を覚えておいてください（教科書ではあまり見かけませんが、大学受験には頻出です）。

$f(x) \leqq a$ が常に成立するような a の最小値は、$f(x)$ の最大値と一致するということは分かる？これが重要なところなんですが、しっかりと理解しておいてください。

$f(x) \leqq a$ が常に成立するとは $y = f(x)$ と $y = a$ この二つのグラフをかいたとき、$y = f(x)$ の方が $y = a$ というグラフよりも常に下側にあるっていうことじゃない？図示したら次のようになります。



x の値にかかわらず常に $f(x) \leqq a$ ということは上図のように $y = f(x)$ と $y = a$ のグラフをかくと常に $y = a$ のグラフの方が $y = f(x)$ の上側にあればよい。

その条件をみたすグラフの中で a が最小となるのは、上図の太線のグラフとなるときで $y=f(x)$ が最大となるところを $y=a$ が通るときだよね。

このことより、$f(x)\leqq a$ が常に成立するような a の最小値は、$f(x)$ の最大値と一致します。重要なのでしっかりと理解しておいてくださいね。それでは、問題に移ります。

【解答】

x, y は正なので $x+y>0$ より、$(x+y)^3\leqq a(x^3+y^3)$ の両辺を $x+y$ で割ると、$\dfrac{(x+y)^3}{x^3+y^3}\leqq a$ となる。

⇑ 不等式の両辺を変数で割るときは、その文字の正負を確認することを忘れない

ここで $f(x)=\dfrac{(x+y)^3}{x^3+y^3}$ とすると、a の最小値は $f(x)$ の最大値と一致するので、以下 $f(x)$ の最大値を求める。

$$\frac{(x+y)^3}{x^3+y^3}$$
$$=\frac{x^3+3x^2y+3xy^2+y^3}{x^3+y^3}$$
⇑ すべての項の次数が 3 次なので、同次式分母分子を x^3 で割ればよい

ここで、$x>0$ より $x^3\neq 0$ で分母分子を割ると

$$(\text{与式})=\frac{1+3\dfrac{y}{x}+3\left(\dfrac{y}{x}\right)^2+\left(\dfrac{y}{x}\right)^3}{1+\left(\dfrac{y}{x}\right)^3}$$

ここで $\dfrac{y}{x}=t$ とする。$x,y>0$ より $t>0$ ◀ 文字を置き換えた時は範囲に注意

$$=\frac{1+3t+3t^2+t^3}{1+t^3}$$
$$=\frac{(1+t^3)+3t(t+1)}{1+t^3}$$
◀ 分子と分母の次数が同じなので次数下げをする (注) を見よ
$$=1+\frac{3t(t+1)}{t^3+1}$$

(注) について――――――――――――――――――――――――――――――――――

まずは次のことを覚えておいてください。

分数関数の次数下げ

$\dfrac{g(x)}{f(x)}$ で、分子の次数と分母の次数が同じとき、または分子の次数の方が分母の次数よりも大きいときは、分母の次数が分子の次数よりも大きくなるため次数下げをする。

どういうふうに次数下げをするかと言うと分子を分母で割ります。たとえば、$\dfrac{x^2+3x+3}{x+1}$ でしたら

$$
\begin{array}{r|l}
 & x \quad +2 \\
\hline
x+1 & x^2 +3x +3 \\
 & x^2 \quad +x \\
\hline
 & \quad 2x +3 \\
 & \quad 2x +2 \\
\hline
 & \qquad\quad 1
\end{array}
$$

実際に割り算をすると上記のようになるので、$x^2+3x+3=(x+1)(x+2)+1$ というふうに表すことができます。

このことより、$\dfrac{x^2+3x+3}{x+1}=\dfrac{(x+1)(x+2)+1}{x+1}=x+2+\dfrac{1}{x+1}$ となります。こう式変形をすると分母の次数の方が分子の次数より大きくなるよね。この作業のことを次数下げといいます。

微分をするときなどごく一部で次数下げをして考えるよりそのまま作業をした方が楽な場合もあるけど、それ以外の問題では次数下げをできるときは、何よりもまず次数下げをしてから考えるようにしてください。

次数下げなんですけど、分子の方が次数が高いときは割ってもらったらいいのですが、分母と分子の次数が同じ時は割ってもらってもいいですが、無理やり分子に分母と同じかたいに式変形をして次数下げをした方がはやくできます。

例えば $\dfrac{x^2-x+1}{x^2+x+1}$ を次数下げするときは、

$$\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}$$

$$=\frac{x^2+x+1-2x}{x^2+x+1}$$ ◀ 強引に分子に分母を同じ形を作った！

$$=1-\frac{2x}{x^2+x+1}$$ ◀ 約分をして次数下げ終了！

今回の問題にもどります。$\dfrac{t^3+3t^3+3t+1}{1+t^3}$ は分母と分子がともに 3 次なので、分子に分母と同じ形を作らないといけません。

$\dfrac{t^3+3t^3+3t+1}{1+t^3}=\dfrac{(1+t^3)+3t(t+1)}{1+t^3}$ と分子を変形すると、分母と分子が同じ形になってくれて次数下げができる状態になるので、上記のように式変形をしました。

次数下げについては、よく出てくるのでしっかりと理解しておいてください。それでは、問題にもどります。

(注) の終了――――――――――――――――――――――――――――――――――

【解答の続き】

$$(\text{与式})=1+\frac{3t(t+1)}{t^3+1}$$

$$=1+\frac{3t\cancel{(t+1)}}{\cancel{(t+1)}(t^2-t+1)}$$

$$=1+\frac{3t}{t^2-t+1}$$

ここからは相加相乗平均を使って解いていくだけです

$$=1+\frac{3}{t-1+\frac{1}{t}}$$

ここで $t>0$ より、相加相乗平均を考え $t+\dfrac{1}{t}\geqq 2\sqrt{t\cdot\dfrac{1}{t}}=2$ が言える。等号が成立するのは $t=\dfrac{1}{t}$ つまり $t=1$ のとき

$t + \dfrac{1}{t} \geqq 2$

$t - 1 + \dfrac{1}{t} \geqq 1$ ◂ 両辺から 1 を引いた

$\dfrac{1}{t - 1 + \dfrac{1}{t}} \leqq 1$ ◂ 両辺逆数をした。両辺とも正なので、逆数をとると不等号の向きが逆になる

$\dfrac{3}{t - 1 + \dfrac{1}{t}} \leqq 3$ ◂ 両辺 3 倍した

$1 + \dfrac{3}{t - 1 + \dfrac{1}{t}} \leqq 4$ ◂ 両辺に 1 を加えた。これで (与式) の最小値が 4 と分かった

⇑ 相加相乗平均で求まった式 $t + \dfrac{1}{t} \geqq 2$ を少しずつ式変形をして、(与式) の形に変形した。こういう式変形はよくするので、覚えておいてください。

以上より、(与式) の最大値は 4 となるので、a の最小値は 4 となる。

これで、今回の同次式に関するプリントは終了です。同次式は重要なので、次回もう一問同次式に関する問題を解説したいと思います。

同次式は、学校で勉強をしていない人も多く知らない人も多いと思います。ですが、入試でたまに出題されますし、受験数学で同次式はある意味常識と言ってよいくらい有名な考えです。

これを機に同次式をしっかりと理解して下さい。

河見賢司

目指せ偏差値４５から５５！高校数学の勉強法
http://www.hmg-gen.com/

感想はこちらまでメールをください（何か言ってもらえると嬉しいです）
magdai@hmg-gen.com