

第 3 章

静止流体力学

第3章 静止流体力学

この章では流体が静止している場合について、流体の高さと圧力の関係、流体が壁面におよぼす力、流体の圧力が等しい等圧力面の考え方などを、力のつりあいを基本として総合的に学ぶ。

3.1 重力場で静止した流体の圧力

まず、流体の密度 ρ が一定である非圧縮性流体が静止している場合について、力のつりあいの考え方から、静止流体の基礎方程式を導いてみる。

3.1.1 静水圧基礎方程式の導出

流体は図 3.1 に示されるように重力場中で静止しており、その高さが地表面 z から dz 離れた微小液柱を考える。ここで、微小液柱の高さ方向の座標軸を z とし、重力は z 軸に対して（マイナス）方向に働くものとする。

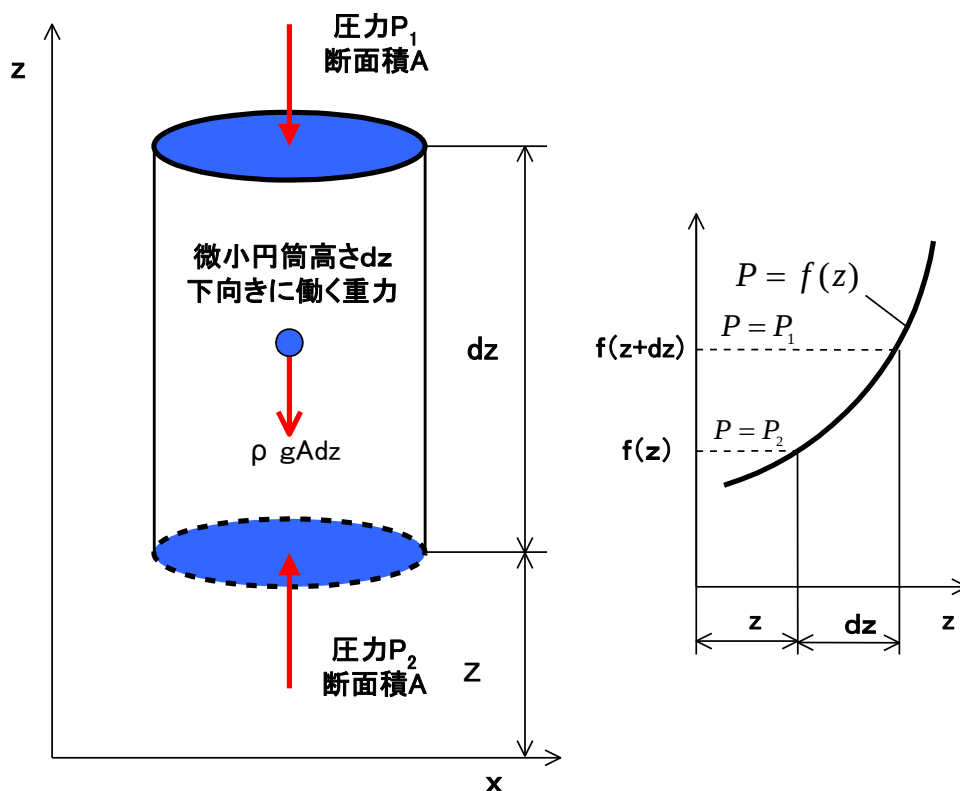


図 3.1 静止流体の圧力

図 3.1 に示した微小液柱の上面 ($z + dz$) および下面 (z) の圧力をそれぞれ P_1 、 P_2 とし、微小液柱断面積を A とすれば、力のつりあい式はつぎのようになる。

$$P_1 A + \rho g A dz = P_2 A \quad (3.1)$$

ここで、微小液柱上面の圧力 P_1 は Taylor の定理 $f(z+dz) = f(z) + f'(z)dz$ から

$$P_1 = P_2 + \frac{dP}{dz} dz \quad (3.2)$$

と表すことができる。したがって、上面 $(z+dz)$ の圧力 P_1 へ、この関係式 (3.2) を代入すれば

$$\left(P_2 + \frac{dP}{dz} dz \right) A + \rho g A dz = P_2 A \quad (3.3)$$

となる。これより、**静止流体の基礎方程式**はつぎのように表される。

$$\frac{dP}{dz} = -\rho g \quad (3.4)$$

さて、式 (3.4) を密度 $\rho = \text{一定}$ の条件で積分すると、圧力 P は次式となる。

$$P = -\rho g z + C$$

ここで、積分定数 C は、高さ $z=0$ で圧力 $P = P_0$ (大気圧) という境界条件から、

$C = P_0$ となる。したがって、一般化された z 方向 (地球でいえば地表面から上空側) の圧力 P は、つぎのようになる。

$$P = -\rho g z + P_0 \quad (N/m^2) \quad (3.5)$$

式(3.5)から流体の圧力は上部に向かって、直線的に減少していくことがわかる。

☆**圧力の別の表現** 密度 ρ のかわりに比重量を γ を用い、 $\rho g = \gamma$ であることを考慮すれば (この場合に使用する密度 ρ は工学単位であることに注意するよう) 工学単位系を用いた場合の圧力 P は

$$P = -\gamma z + P_0 \quad (kgf/m^2) \quad (3.6)$$

と別な表現で表される。

☆3.1.1 静水圧の基礎方程式の解説

1. 圧力は液柱の断面積の大きさに依存せず、高さ(深さ) z のみの関数である。このことを図 3.2 を参照して証明せよ。

証明：タンク底面の圧力 P は、

$$P = \frac{\text{大気圧による力} + \text{流体の自重による力}}{\text{タンクの断面積}}$$

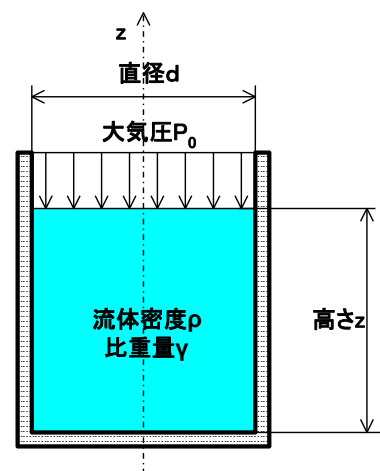


図 3.2 タンク底面の圧力

$$= \frac{\frac{\pi d^2}{4} P_0 + \frac{\pi d^2}{4} \rho g z}{\frac{\pi d^2}{4}} = P_0 + \rho g z \quad (\text{Pa})$$

このように、タンク底面の圧力はタンクの底面積には無関係であることが証明された。

3.1.2 静水圧基礎方程式の一般化

非圧縮性流体、すなわち流体の密度が一定の場合、圧力は断面積の大きさに依存せず、単に高さ(深さ)のみの関数であることを学んだ。そこで圧力と高さの関係について、重力以外の加速度が作用する問題へと拡張し、一般化を行う。

図 3.3 に示す直交座標系 (x, y, z) において、静止した微小な直方体の流体に作用する力のつりあいについて考えてみよう。この場合、微小直方体の体積は $dx dy dz$ であり、直方体には圧力の他に単位質量あたり、例えば重力加速度のような**体積力加速度(質量力)** (body force) が働く。そこで、以下、その (x, y, z) 方向体積力加速度の成分をそれぞれ (X, Y, Z) と表すことにする。なお、この体積力加速度(質量力)の単位はコメントで述べるように (m/s^2) である。さらに、圧力 P は一般に 3 次元的に変化すると考えられるので、 $P = f(x, y, z)$ とおく。

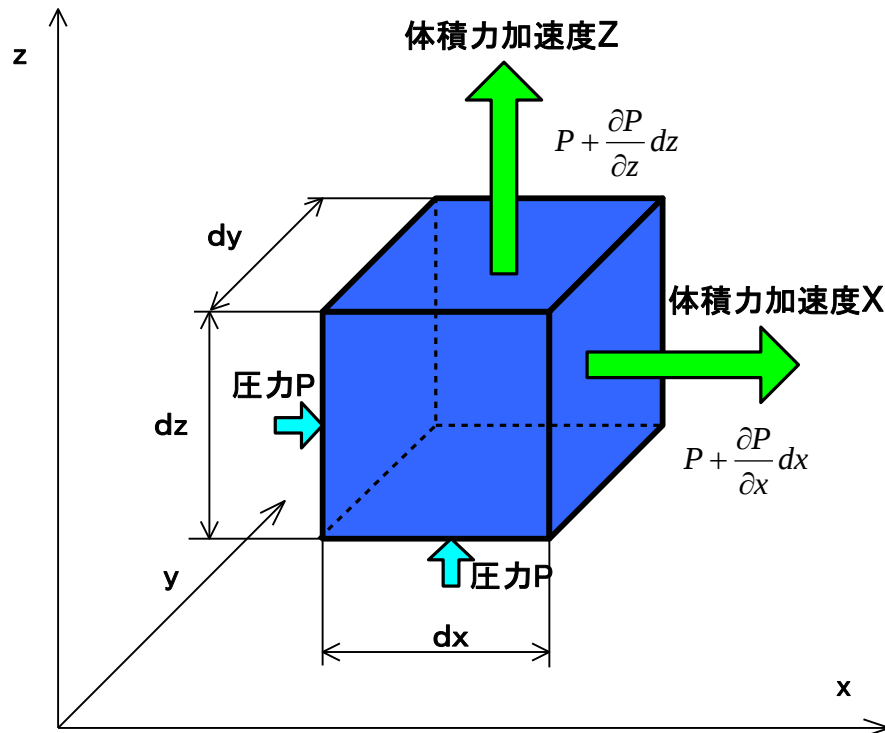


図 3.3 静止流体の基礎方程式のたて方

☆コーヒーブレイク：体積力加速度(質量力)とは？

体積力加速度(質量力)とは：重力、遠心力、コリオリ力など質量(体積)があるがゆえに流体に作用する加速度であり、その単位は(m/s^2)である。これではその物理的な意味が不明である。そこで、分母・分子に流体質量 1 kg をかけて、その意味を明らかにしましょう。

$$\text{体積力加速度の意味(単位)} = \frac{kg \times \frac{m}{s^2}}{kg} = \frac{N}{kg}$$

なるほど、体積力加速度とは、流体 1 kg に作用する力のことか。了解？

これで、体積力加速度の物理的な意味は理解できたかな。第 6 章においてこの体積力加速度については**質量力**として再度学ぶことにする。

では本題に戻しましょう。まず x 方向の力のつり合いを考える。微小な直方体の質量は $\rho dx dy dz$ であり、流体に作用する x 方向の力は(力=圧力×断面積)から求められ、ニュートンの運動の第 2 法則から、力=質量×加速度を考慮すると、次式が導かれる。

$$\left(P + \frac{\partial P}{\partial x} dx - P \right) dy dz = \rho X dx dy dz \quad (3.7)$$

ゆえに、 x 方向の静水圧基礎方程式は

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \rho X \quad (3.8)$$

同様に、 y 方向および z 方向について、静水圧の基礎方程式は、

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \rho Y ; \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \rho Z$$

となり、以上の結果をまとめると、**静水圧の基礎方程式**はつぎのように一般化される。

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \rho X ; \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \rho Y ; \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \rho Z \quad (N/m^3) \quad (3.9)$$

したがって、第 3.1 節で求めた静水圧の基礎方程式(3.4)の $\partial P / \partial z = -\rho g$ は、 x 、 y 方向の体積力加速度が $X = 0$ 、 $Y = 0$ で、 z 方向に重力加速度 g が働き、 $Z = -g$ の場合に相当することがわかる。

☆コーヒーブレイク：地球上空の空気の密度はどのように変化するのか

地球上空の空気密度は一定でない。**ラプラス** (Laplace) によって、つぎの実験式が提案されている。

$$\rho_h = \rho_0 e^{-\frac{Mg}{RT}h} \quad (3.10)$$

ここで、式(3.10)に使用されている記号は、 M ：分子量、 T ：温度、 h ：上空の高さ、 ρ_0 ：地表高さ0mにおける空気密度、 R ：ガス定数である。なお、参考として、空気の分子量、密度およびガス定数はそれぞれ $M = 28.96$; $\rho_0 = 1.293 \text{ kg/m}^3$; $R = 0.287 \text{ KJ/(kg} \cdot \text{K)}$ である。

3.2 圧力の表示

3.2.1 様々な圧力の表示方法

図 3.4 に示すように、水銀で満たされた容器に、細いガラス管を立て、その先端部を真空にして、標準大気圧をかけると水銀の柱は 760mm 上昇することが**トリチェリの実験**から明らかとなった。この実験から**圧力**は液柱の高さで測定でき、その後、圧力は圧力測定に使用する液体名や基準値のとり方などから様々な表現されるようになった。その例として、

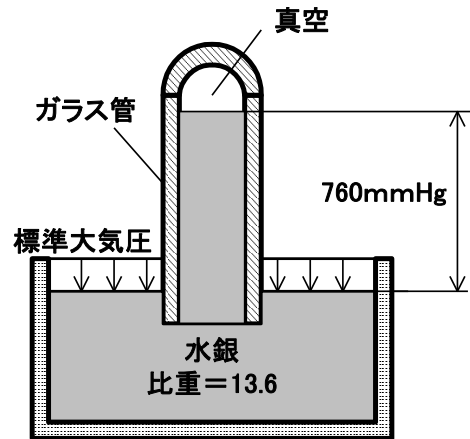


図 3.4 トリチェリの実験

- 1) Pa 、2) mmHg 、3) mmAq 、4) atm (標準大気圧)、5) at

などが圧力の表示に使用されている。そこで、これらの定義と相互の換算式を表 3.1 にまとめて示す。なお、表 3.1 を参照すれば、様々な圧力表示における相互の圧力の換算が可能である。

☆コーヒーブレイク：

1 mmAq とは？

1 mmAq とは図 3.5 に示すように底面積 1 m^2 に高さ 1 mm の水をためたとき、容器の底面に働く圧力をいう。水銀の比重はおおよそ 13.6 であるので水銀柱 1 mmHg の圧力は、1 mmAq の圧力の 13.6 倍となる。

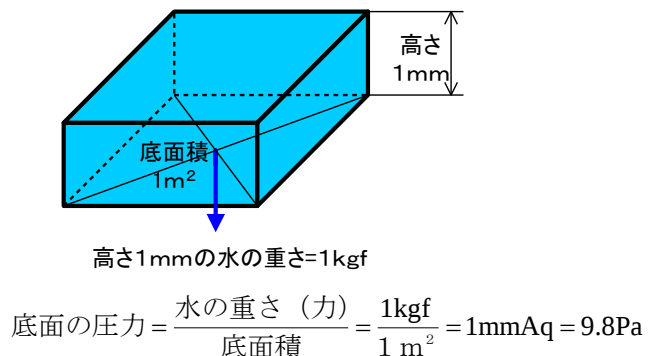


図 3.5 1 mmAq とは

☆圧力の重要な換算関係式

1 標準大気圧 = 1 atm = 760 mmHg = 10.33 mAq = 10332 kgf / m² = 101.324 kPa

1 工学気圧 = 1 at = 1 kgf / cm² = 735.5 mmHg = 10 mAq = 98.07 kPa

1 bar = 10⁶ dyne / cm² = 10⁵ Pa = 750 mmHg = 10.2 mAq

1 mmAq = 1 kgf / m² = 0.0735 mmHg = 9.807 Pa

1 mmHg = 13.6 mmAq = 133 Pa

ただし、水銀の比重を 13.6 (=13.5951) として圧力換算を行っている。

表 3.1 各種圧力の換算

圧力	mmHg	mmAq	bar	atm	at	kPa
mmHg	1.0	13.6	1.33×10^{-3}	1.316×10^{-3}	1.36×10^{-3}	0.1333
mmAq	0.0735	1.0	9.81×10^{-5}	9.679×10^{-5}	0.0001	9.81×10^{-3}
bar	750	10197	1.0	0.987	1.0197	100
atm	760.0	10332	1.013	1.0	103.32	101.324
at	735.5	10000	0.981	0.968	1.0	98.07
kPa	7.498	101.97	0.01	9.869×10^{-3}	0.0102	1.0

3.2.2 絶対圧力とゲージ圧力

圧力は流体の高さに依存して変化するから、圧力測定における基準位置をどこにとるかによって、任意点圧力の数値は異なったものとなる。地球上表面においてはどこでもおおむね標準大気圧が流体に作用するので、一般に地上表面

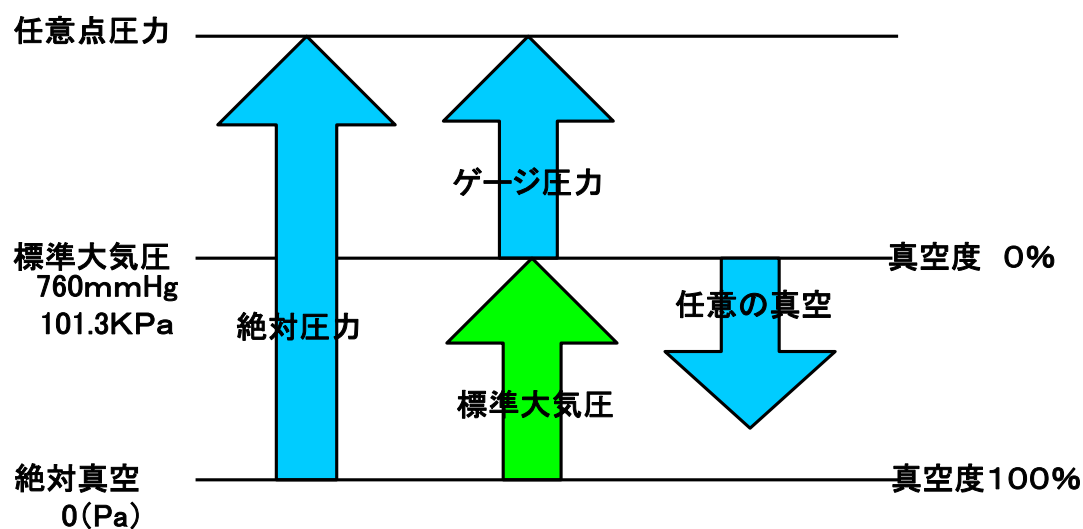


図 3.6 絶対圧力とゲージ圧力の関係

における圧力を基準としたゲージ圧力がとられることが多い。一方、気体の密度を求める場合など、気体は完全ガスの状態方程式(1.6)に支配されるから、絶対真空を基準とする絶対圧力を使用しなければいけない。これらをまとめると、圧力はつぎに示すように区別される。

絶対圧力 (absolute pressure) : 絶対真空を基準 ($0Pa$) とした圧力。

絶対圧力は常に正の値となる。

ゲージ圧力 (gauge pressure) : 標準大気圧を基準 ($0Pa$) とした圧力。

標準大気圧以下の圧力は負で表される。

図 3.6 には、絶対圧力とゲージ圧力の関係が示されており、図から

$$\text{ゲージ圧力} = \text{絶対圧力} - \text{標準大気圧} \quad (3.11)$$

であることが容易に理解できるはずである。

☆3.1 静水圧の基礎方程式の研究課題

1. 水深 $10000m$ の水圧はゲージ圧力でいくらか。また海水 $10000m$ の深海に

おける圧力はゲージ圧力でいくらか。ただし、水の密度は $\rho_{\text{水}} = 1000 \text{ kg/m}^3$

とし、海水の比重は 1.03 とせよ。

2. 地上 $10000m$ の空気の圧力を静水圧の基礎方程式から、絶対圧力で求めよ。

ただし、空気の密度は $\rho_{\text{空気}} = 1.293 \text{ kg/m}^3$ 一定と仮定せよ。さて、実測され

た上空 $10000m$ の圧力は標準大気圧を P_0 としたとき、 $\frac{P_{10000}}{P_0} = 0.261$ であ

る。理論計算結果と実際の差について考察せよ。

3. 直径 $1m$ の球体容器内部に、それぞれ水、水銀、空気を入れたとき、球の壁面に働く圧力分布を図示し、液体に比べて気体の圧力変化は十分小さく、場合によっては無視できることを学べ。

☆3.2 圧力の表示の研究課題

1. つぎの各種の圧力を括弧内に記した圧力の単位に換算せよ。ただし、水銀の比重は 13.6 とする。

1) 100 kPa (mmHg) 2) 10 mAq (kgf/m^2)

3) 960 mbar (kPa) 4) 2 atm (kPa)

5) 1.02 at (mmAq)

3.2.3 パスカルの原理

静止流体の圧力の性質として、つぎに述べるような1) 垂直性、2) 等方性などがある。

- 1) 垂直性：圧力は流体が接している壁や、液体内にあっては物体の表面に**垂直方向**に力をおよぼし、表面の接線方向には力をおよぼさない。
 - 2) 等方性：一点に集中する圧力は方向に無関係に一定である。
 - 3) 密閉容器内の液体に加えた圧力は全ての部分にそのままの強さで伝わる。
- このような1) から3) の性質をまとめて**パスカルの定理**という。

例題：油圧シリンダ

図 3.7 は大小 2 個のシリンダ中に液体として油を封入した油圧シリンダにピストンによって力を加えた例を示している。パスカルの定理から、断面積 A_1 のピストンに加えられた圧力 P は、断面積 A_2 のピストンに同じ大ききで伝えられるから、断面積 A_2 に発生する力 F_2 は、

$$F_2 = PA_2 = \frac{F_1}{A_1} A_2 = \frac{A_2}{A_1} F_1$$

であり、力 F_2 は、 A_2/A_1 倍増幅される。(大きい力を発生できる。てこの原理)

一方、力は増幅できるが、ピストンストローク(変位) L_2 は、流体が圧縮されない限り、つぎの連続の式が成り立つ必要があるため、

$$L_1 A_1 = L_2 A_2 \text{ ゆえに } L_2 = \frac{A_1}{A_2} L_1$$

であり、ストローク L_2 は A_1/A_2 倍減少することになる。(エネルギーの保存)

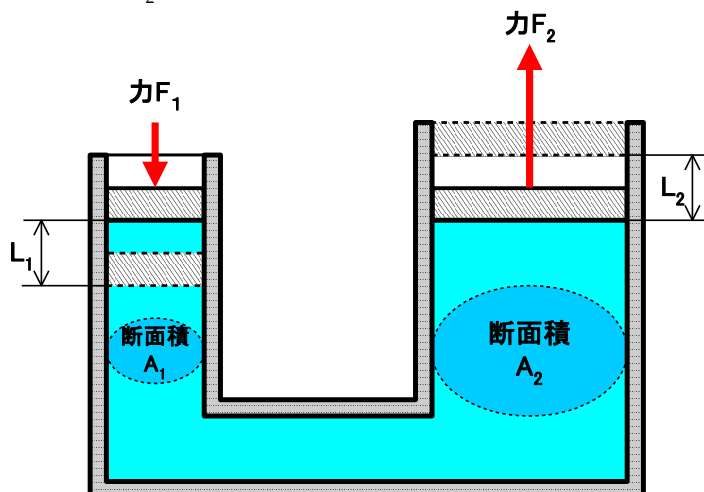


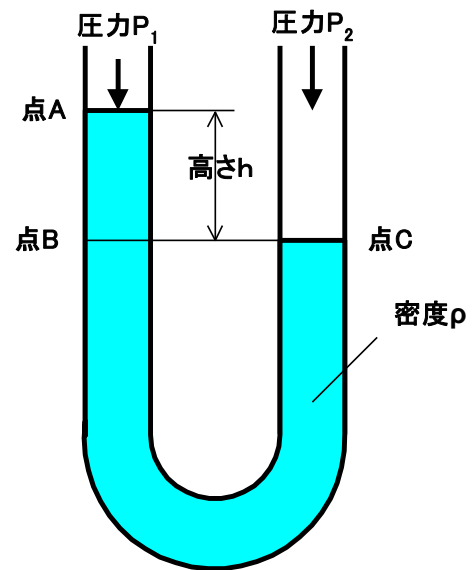
図 3.7 油圧シリンダ

☆3.2.3 パスカルの定理の研究課題

1. 図 3.7 の油圧シリンダにおいて、ピストン小の直径が 40 mm 、大の直径が 200 mm であるとき、
 - 1) ピストン大に $F_2 = 1000\text{ kgf}$ の力を発生させるために必要なピストン小を押す力 F_1 を求めよ。
 - 2) 上記の状態、ピストン大を 10 cm 上昇させるには、ピストン小を何 cm 降させればよいか。

3.2.4 U字管・マンノメータ

重力場における静止流体の圧力の性質を利用した器具として、**液柱圧力計**（マンノメータ）がある。**マンノメータ**とは図3.8に示すように、透明なU字型の管に液体を入れたものであり、これを**U字管マンノメータ**といい圧力測定に用いられる。ではU字マンノメータにおける圧力測定原理を学びましょう。



1) U字管マンノメータ (U-tube manometer)

図3.8において、点Bと点Cの高さが等しいから、パスカルの定理より次式が成り立つ。

$$P_c = P_B = P_2 ; P_A = P_1$$

U字管における液面の高さの差を h 、密度を ρ 、比重量を γ とすれば、静水圧の基礎方程式(3.4)の $dP/dz = -\rho g$ から、U字管における圧力差はつぎのようになる。

$$\begin{aligned} P_2 - P_1 &= \rho g h \quad (\text{Pa}) \text{または} \\ &= \gamma h \quad (\text{kgf/m}^2) \end{aligned}$$

図3.8 U字マンノメータ

☆3.2.4 U字管・マンノメータの研究課題

1. 図3.9の左側の圧力 P_a を絶対圧力およびゲージ圧力で求めよ。ただし、高さは $H=5\text{m}$ 、密度は

$\rho_a = 1000\text{kg/m}^3$ とする。

なお、標準大気圧は 101.3kPa とする。

2. 図3.9の右側の圧力

P_a を絶対圧力およびゲージ圧力で求めよ。

ただし、高さは

$H_1=5\text{m}$; $H_2=7\text{m}$ 、

密度は、 $\rho_a = 1000\text{kg/m}^3$ 、

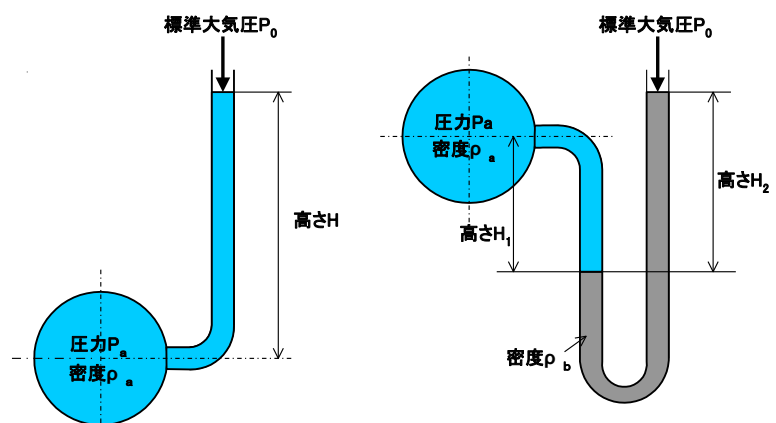


図3.9 マンノメータの研究課題

$\rho_b = 13600 \text{ kg/m}^3$ とし、標準大気圧は 101.3 kPa とする。

ヒント : $P_a + \rho_a g H_1 = P_0 + \rho_b g H_2$; $P_a = P_0 + \rho_b g H_2 - \rho_a g H_1$

3. 図 3.10 に示すように、AB 間に石油、BC 間に水、CD 間に水銀を入れたタンクがある。各点 A, B, C, D の圧力を、絶対圧力およびゲージ圧力で求めよ。ただし、石油の比重は 0.8、水の比重は 1.0、水銀の比重は 13.6、標準大気圧は 760 mmHg とせよ。

4. 図 3.11 に示すように、傾斜角度が θ であるマノメータを用いて、未知の測定対象流体の圧力 P を別の液体で計測したい。このとき、測定流体の圧力 P は、マノメータの傾斜角度 θ と、傾斜管の液中長さ L を用いてどのように表されるか。ただし、圧力測定用の流体密度は ρ とする。

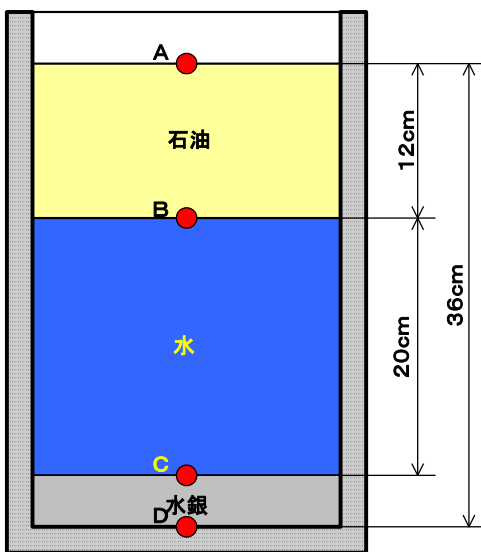


図 3.10 各種液体の圧力

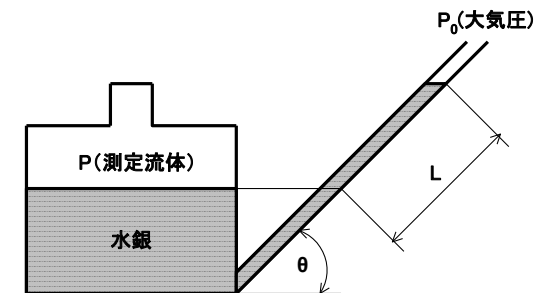


図 3.11 傾斜マノメータの圧力

3.3 壁面に働く流体力

図 3.12 に示されるように、任意物体が静止流体中に置かれたとき、物体壁面に働く力を全流体力という。この力の求め方を学ぼう。

この全流体力 F は、物体壁面に垂直な外向きの法線ベクトルを n とすれば微小面積 dA に働く流体力は $-PndA$ であるから、これを物体の表面について面積積分すればよい。したがって、

$$F = \int_A (-P)n dA \quad (3.12)$$

で与えられる。

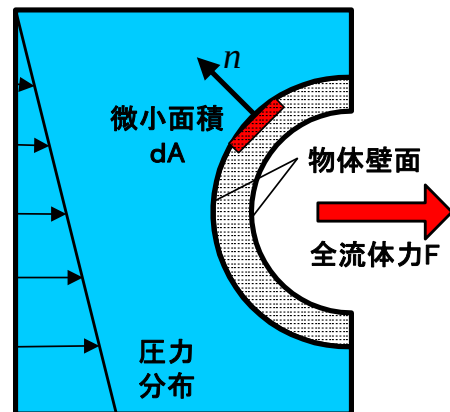


図 3.12 壁面に働く流体力

3.3.1 垂直壁面に働く流体力

流体力を求めるには、図 3.13 に示される微小面積 $dA = b(y)dy$ と、その位置に

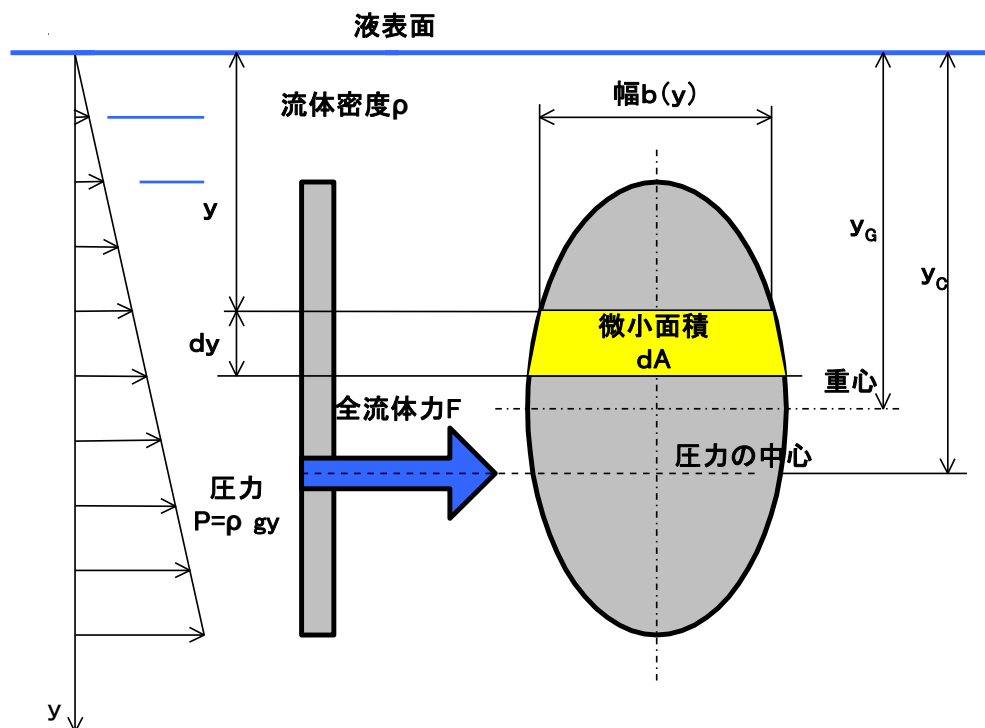


図 3.13 垂直平板に働く流体力と圧力の中心

おける圧力 $P = \rho gy$ に注目し、**全流体力 F** はつぎに示す積分で求められる。

$$F = \int_A P dA = \int_A \rho gy b(y) dy \quad (3.13)$$

さて、図 3.13 に示された液表面から**図心(重心)**までの高さを y_G とすれば、**断面 1 次モーメント(図心)**の定義から

$$\int_A y b(y) dy = \int_A y dA = y_G A \quad (A: \text{壁面の全面積}) \quad (3.14)$$

したがって、**全流体力**は式 (3.13) および (3.14) から

$$F = \rho gy_G A \quad (3.15)$$

となる。すなわち、**全流体力 = (物体図心位置の圧力) × (全壁面面積)**である。

つぎに、全流体力の作用点、つまり、**圧力の中心** (center of pressure) y_C は力のモーメントのつり合いから、

$$Fy_c = \int \rho g y^2 b(y) dy ; \rho g y_G A y_c = \int \rho g y^2 b(y) dy \quad (3.16)$$

$$y_c = \frac{1}{y_G A} \int b(y) y^2 dy = \frac{1}{y_G A} \int y^2 dA \quad (3.17)$$

さて、 $I = \int y^2 dA$ と定義される **断面 2 次モーメント** を使用すれば、圧力の中心位置 y_c は、つぎのように簡単に求められる。

$$y_c = \frac{1}{y_G A} I \quad (3.18)$$

なお、当然のことながら **圧力の中心位置** $y_c > \text{図心の位置 } y_G$ である。

3.3.2 傾斜壁面に働く流体力

ここでは、図 3.14 に示す傾斜壁面に働く流体力について考える。流体中に壁面が角度 θ 傾けて置かれた場合、液面に垂直方向を z 軸、壁面に平行な方向を y 軸とする。任意位置 $y = y$ における圧力 P 、**全流体力** F および **図心位置** Z_G はつぎのようになる。

$$\text{圧 力 : } P = \rho g z = \rho g y \sin \theta ; \quad \text{全流体力 : } F = \rho g \sin \theta \int y b(y) dy$$

$$\text{図心位置 : } Z_G = y_G \sin \theta$$

さらに、図心の定義 $\int y b(y) dy = y_G A$ (A : 壁面の全面積) を利用して、

$$F = \rho g \sin \theta \int y b(y) dy = \rho g \sin \theta y_G A = \rho g z_G A \quad (3.19)$$

ただし Z_G は **図心位置** を z 軸方向に測った距離である。

ここで、式(3.19)における $A \sin \theta$ は壁面の z 軸への投影面積であるから、**全流体力** F はつぎのように考えてもよいことになる。

$$F = \rho g y_G \times (\text{z軸への投影面積}) \quad (3.20)$$

つぎに、圧力の中心 y_c 、すなわち全流体力が 1 点に集中したと考え、その作用点を求める。力の面積モーメントのつりあいを考えると、次式が得られる。

$$F_{y_c} = \int P y dA = \int \rho g z y b(y) dy = \rho g \sin \theta \int b(y) y^2 dy$$

ここで全流体力 F は式(3.19)から

$$F = \rho g \sin \theta \int y b(y) dy = \rho g \sin \theta y_G A = \rho g z_G A$$

で求められるので、結局、**圧力の中心** y_c はつぎのようになる。

$$y_c = \frac{1}{y_G A} \int b(y) y^2 dy = \frac{1}{y_G A} \int y^2 dA \quad (3.21)$$

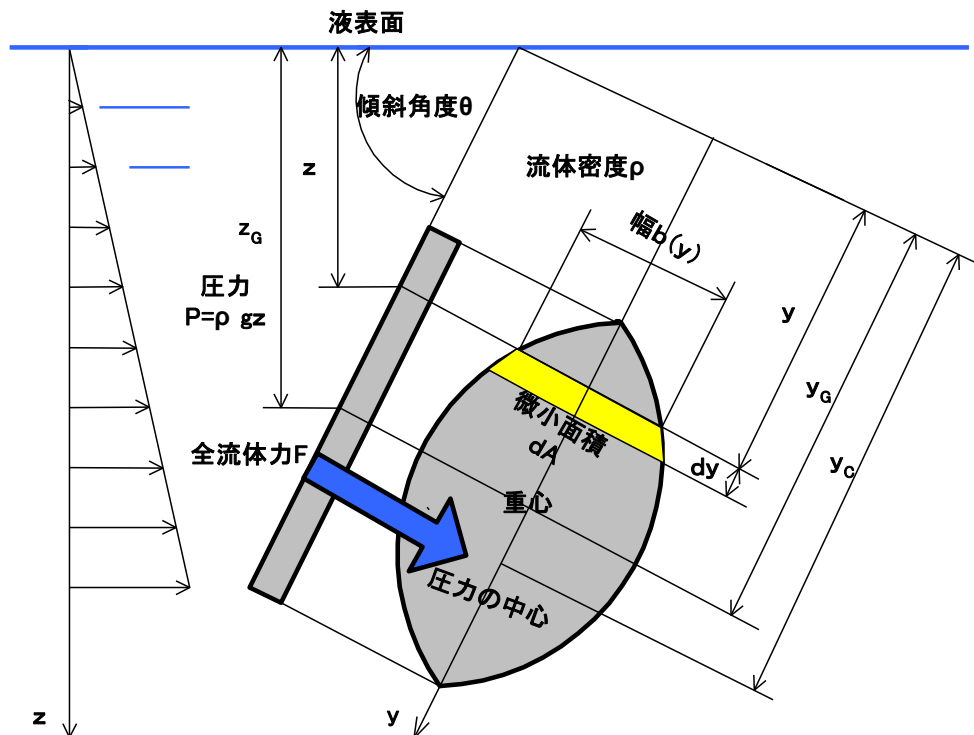


図 3.14 傾斜壁面に働く流体力と圧力の中心

ここで、以下に示す断面 2 次モーメント I の定義を利用すれば

$$I = \int y^2 dA \quad (\text{断面 2 次モーメントの定義})$$

圧力の中心 はすでに求められた式(3.18)と同様に、つぎのように簡略化される。

$$y_c = \frac{1}{y_G A} I \quad (3.18)$$

ゆえに、式 (3.18) から傾斜壁面の**圧力中心** y_c は、壁面が垂直な場合と同じ位置となることがわかる。

☆コーヒーブレイク：流体が壁面に与える力のパラドックス

つぎの図 3.15 における全流体力に関するパラドックスを考えてみよう。

- (1) 水位はすべての容器において同じ高さであり、かつ容器の底面積もすべて等しい。したがって容器の底の圧力はすべて同じである。
- (2) 容器の底面を押す力は、圧力×底面積で与えられる。したがってどの容器も同じ力で底面を押している。
- (3) それなのに、底面をおす力を実測すると、計量はかりの目盛りが違うのは、何故？

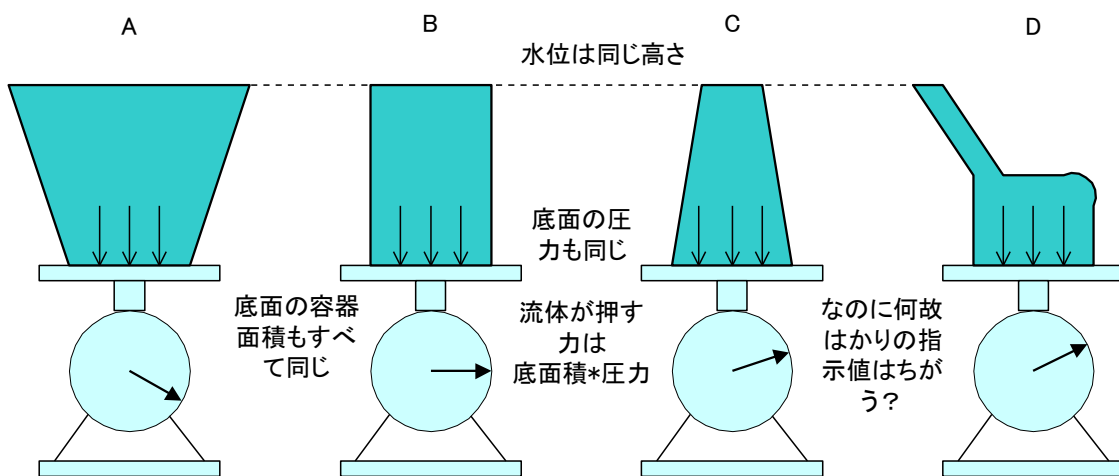


図 3.15 流体力のパラドックス

☆3.3 壁面に働く流体力の研究課題

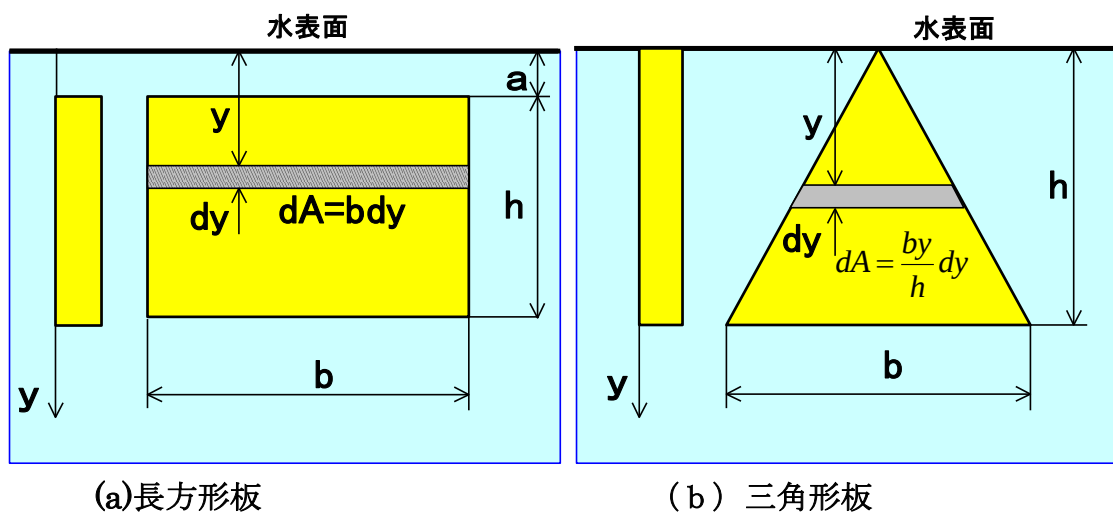


図 3.16 長方形平板および三角形平板に働く流体力

1. 図 3.16(a)、(b)の平板に働く全流体力および圧力の中心位置 y_c を求めよ。

ただし、流体の密度は $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$ とする。

2. 上辺が 100 m 、下辺が 50 m 、高さ 50 m の台形形状をしたコンクリート製ダムが満水時にかかる全流体力はいくらとなるか。またそのとき、圧力の中心は上辺から何 m 下になるか。ただし水の密度は 1000 kg/m^3 とせよ。

3.3.3 中空円筒および中空球に働く全流体力

- 1) 半割中空円筒に働く全流体力

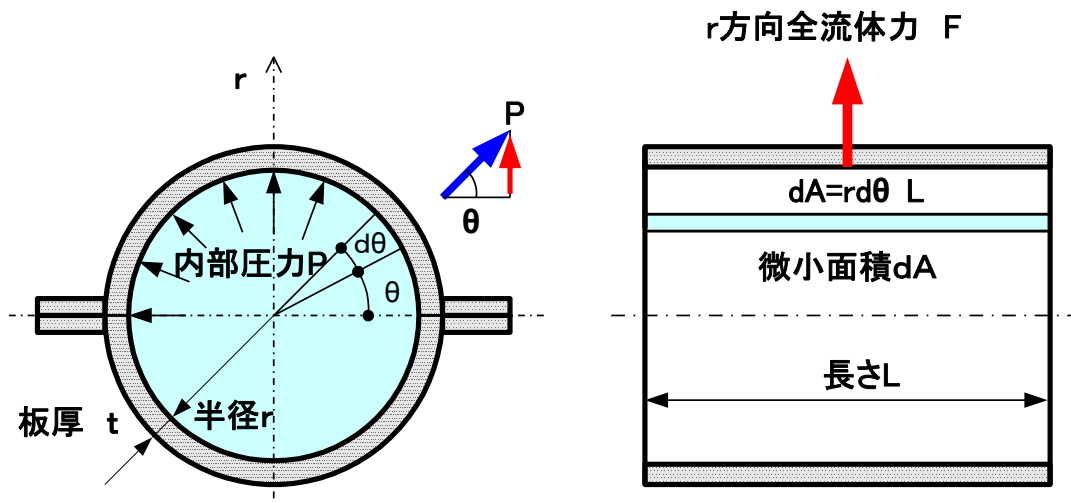


図 3.17 内圧を受ける中空円筒に働く流体力

図 3.17 に示すように半径 r 、長さ L の半割中空円筒の内部に静止した流体があり、その内部の流体圧力が P である場合の全流体力を考えてみよう。

図に示されるように、円周の微小角度を $d\theta$ とすれば、微小面積 dA は $dA = rLd\theta$ であり、この部分に働く紙面上方向の微小な力 dF は、

$$dF = P \sin \theta dA$$

となる。したがって、全流体力 F はつぎのようになる。

$$F = \int dF = \int_A P \sin \theta dA = \int_0^\pi P \sin \theta rL d\theta = PrL [-\cos \theta]_0^\pi = 2rLP = DLP \quad (3.22)$$

この式から、全流体力 F は、半割円筒の投影面積(直径 D 、長さ L) DL に圧力 P をかければよいことがわかる。

- 2) 中空半球 (マグデブルグの半球) に働く全流体力

つぎに、中空の球体に働く流体力について考える。球の内半径を r 、圧力は一とと考えて問題を解く。このとき、図 3.18 に示すように、微小な帯状の面積 dA

は、

$$dA = 2\pi r \sin \theta d\theta$$

であり、 r 方向に働く微小な力 dF は、 $dF = P \cos \theta dA$ である。したがって、中空の半割球に働く **全流体力** F は、

$$\begin{aligned} F &= \int dF = \int_A P \cos \theta dA = \int_0^{\pi/2} P \cos \theta 2\pi r \sin \theta d\theta = \pi r^2 P \int_0^{\pi/2} 2 \sin \theta \cos \theta d\theta \\ &= \pi r^2 P \int_0^{\pi/2} \sin(2\theta) d\theta = \pi r^2 P [-\cos(2\theta)]_0^{\pi/2} \frac{1}{2} = \pi r^2 P \end{aligned} \quad (3.23)$$

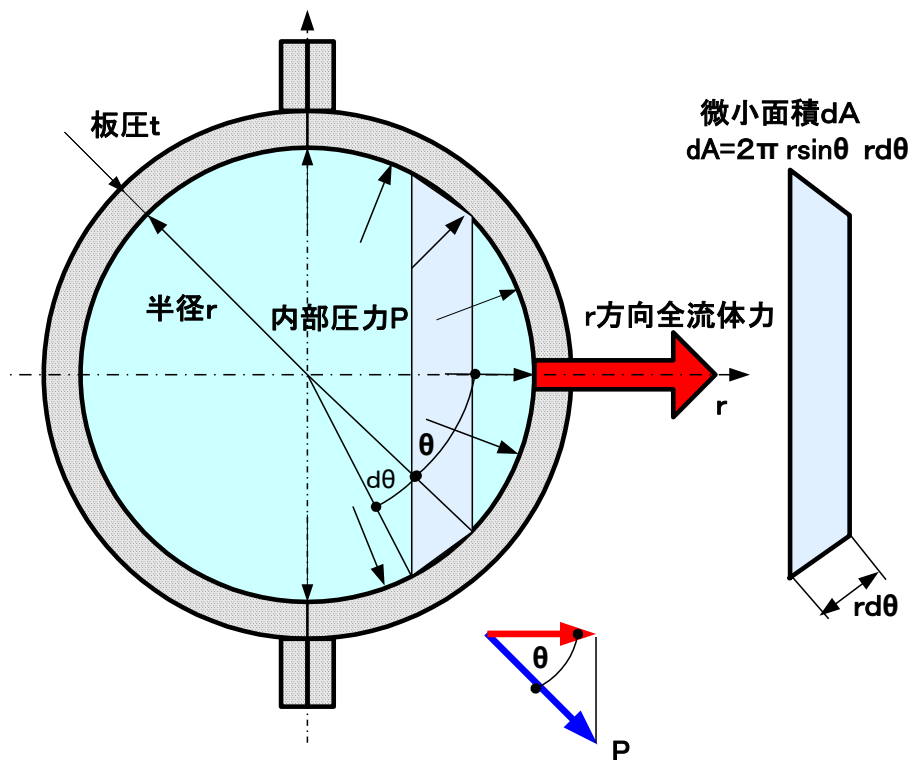


図 3.18 中空の球に働く流体力

この場合にも、**全流体力** F は中空半割球の投影面積(πr^2)に圧力 P をかければよいことが証明された。

3.4 浮力とアルキメデスの原理

浮力(buoyancy) F は**物体が排除した全体積** V に**比例**する。

川面に浮かぶ木の葉は去り行く秋の香りであり、夏の海水浴はひと時の憩いでもある。一方、あの鉄板で覆われた巨大なタンカーや軍艦は、ふと偉大なるが故の畏敬と尊敬の的でもある。そこでは、これから学ぶ浮力が働いているのだ。

では、浮力を説明しよう。図 3.19 において、深さ h_1 の点の圧力 P_1 は $\rho g h_1$ であり、深さ $(h_1 + h_2)$ の点の圧力 P_2 は $\rho g (h_1 + h_2)$ である。一方、微小液柱（断面積 dA ）に差し引き上向きに働く微小な力 dF （浮力）は、これまでの静止流体の圧力の考えをもとに、つぎのようになる。

$$dF = (\rho g (h_1 + h_2) - \rho g h_1) dA = \rho g h_2 dA$$

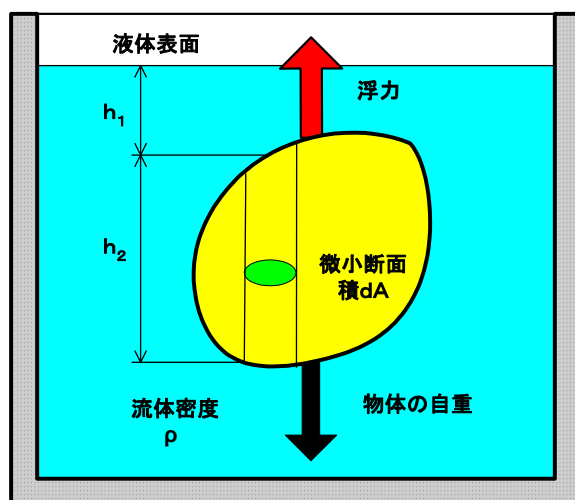


図 3.19 物体に働く浮力

ここで、 $h_2 dA$ は微小液柱の微小体積に相当するから dV とおくと、全体の浮力 F は、

$$F = \int dF = \int_A \rho g h_2 dA = \int_V \rho g dV = \rho g V \quad (N) \quad (3.24)$$

V : 物体が排除した全体積 (m^3)
となり、浮力 F は物体が排除した全体積 V に比例することが分かる。これを**アルキメデスの原理**という。

☆3.4 浮力の研究課題

1. 一辺が 10 cm 角の立方体形状をした木片を水に浮かべたところ、水表面から 2 cm 木片が浮かび上がって静止した。木片の密度はいくらであるか。
2. 密度 ρ の液体の中に密度 ρ_s の物体が浮いている。空気中に出ている物体の

体積が V_a であるとき、液中部分の体積 V_b を求めよ。

3. 自分が風呂に全身を没したとき、どの位の浮力を受けているか各自で推算せよ。

3.5 等圧力面

一般的に圧力 P は 3 次元位置座標 (x, y, z) の関数であり、この圧力 P が一定となる曲面または平面を**等圧力面**という。

3.5.1 等圧力面の基礎方程式の導出

圧力 P が $P = f(x, y, z)$ の関数であるとき、この全微分をとると、微小圧力 dP は

$$dP = \frac{\partial P}{\partial x} dx + \frac{\partial P}{\partial y} dy + \frac{\partial P}{\partial z} dz \quad (.3.25)$$

$$= \rho X dx + \rho Y dy + \rho Z dz \quad (3.26)$$

となる。ここで、 X, Y, Z はそれぞれ x, y, z 方向 **体積力加速度** (m/s^2) である。

静水圧の基礎
方程式を思い出
して下さい。

☆**復習**：静水圧の基礎方程式を思い出してみると、つぎのようであった。

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \rho X ; \frac{\partial P}{\partial y} = \rho Y ; \frac{\partial P}{\partial z} = \rho Z \quad (N/m^3) \quad (3.9)$$

たとえば、重力に逆向き方向に z 座標をとり、その重力加速度が g であれば、体積力加速度 Z は $Z = -g$ より、

$$\frac{\partial P}{\partial z} = -\rho g \quad (3.4)$$

で与えられた。

話の原点に戻る。いま、等圧 $dP = 0$ でかつ密度 $\rho = \text{一定}$ の場合を考えると、式 (3.26) の等圧面に関する基礎式は等圧条件である $dP = 0$ とおいて

$$\rho X dx + \rho Y dy + \rho Z dz = 0 \quad (3.27)$$

となる。この式を **等圧力面の基礎方程式** という。では、以下の応用例題で、等圧力面の基礎方程式を正確に理解しよう。

3.5.2 等圧力面の応用例題

その 1

☆**静止した容器内の流体の等圧面**

最初の例題として、図 3.20 に示すような容器に静止した流体がためられている場合を考える。この場合、**体積力加速度** $X = 0$ 、 $Y = 0$ 、 $Z = -g$ であるから、等圧力面基礎方程式はつぎのようになり

$$\rho(-g)dz = 0$$

$$\text{これを積分して、} z = \text{const} \quad (3.28)$$

が**等圧力面**となる。

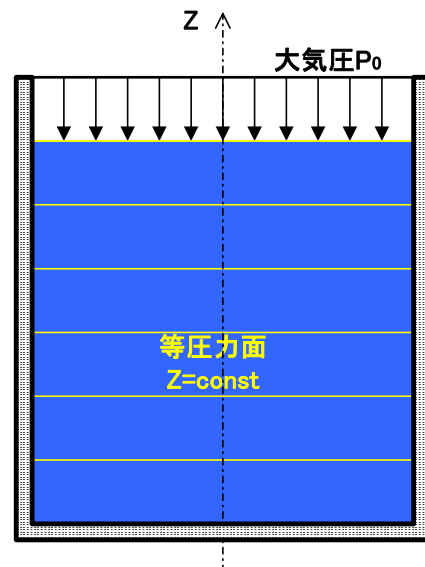


図 3.20 静止容器の等圧力面

その 2

☆**等加速度、直線運動する台車内流体の等圧力面**

つぎに図 3.21 に示すように一定な加速度 a で移動する台車内に流体が満たされた場合の等圧力面を考える。いま、流体内に質点 m を考えると、図から明らかなように質点 m にかかる合力 R は、

$$R = m\sqrt{a^2 + g^2} = mg\sqrt{1 + \left(\frac{a}{g}\right)^2} = mg\sqrt{1 + \tan^2 \theta}$$

となる。では、理論的に図 3.21 の場合における等圧力面の方程式を導いてみよう。すでに求めた、つぎの等圧力面方程式(3.27)において

$$\rho X dx + \rho Y dy + \rho Z dz = 0$$

図 3.21 のように座標系をきめると、この場合、体積力加速度は $X = -a$ 、 $Y = -g$ 、 $Z = 0$ だから、等圧面に関する上式は

$$-\rho a dx - \rho g dy = 0$$

となる。したがって、 y に関する微分方程式は、

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{a}{g} = -\tan \theta$$

となる。この方程式を解くと、

$$y = -\frac{a}{g}x + c = -x \tan \theta + C \quad (3.29)$$

となる。このことから、等圧力面は x 方向に右下がりの直線になり、 y 切片が積分定数 C となることが分かる。

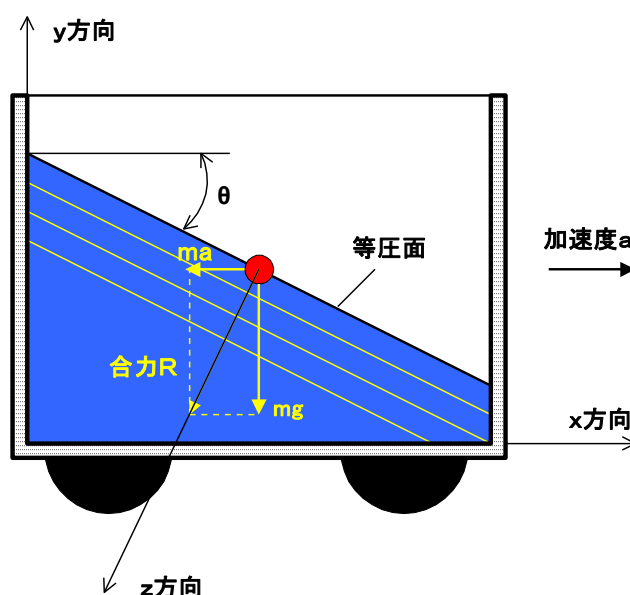


図 3.21 等加速度運動する台車

☆付録 1：この装置は、加速度計として利用できる。なぜか考察しなさい。

解答： $\tan \theta = \frac{ma}{mg} = \frac{a}{g}$

だから、等圧面の傾き角度 θ を計測すると、現在の加速度が、 $a = g \tan \theta$ として求められことになるから。

☆3.5.2 等圧力面の研究課題

1. 図 3.21 の等加速度台車において、合力 R 方向に z 座標をとるとき、圧力 P が $P = \rho g z / \cos \theta$ で表されることを証明せよ。そして、等加速度台車の z 方向圧力 p は静止した容器の圧力 $P = \rho g z$ よりも $1/\cos \theta$ 大きくなることを理解し

よう。ただし、境界条件は $z=0$ で、圧力 $P=0$ （ゲージ圧力）とする。

ヒント： $\frac{dP}{dz} = \rho\alpha = \rho\sqrt{g^2 + a^2}$ 。ここで a は z 方向の体積力加速度を表す。

その 3

★角速度 ω 一定で回転する容器の流体の等圧力面

図 3.22 に示すように、洗濯機など（回転コップ）内の流体の等圧力面を考えよう。直感的に我々は、このような強制渦における等圧力面が放物線になることを経験的に理解している。では、これを理論的に証明しよう。

等圧力面方程式を図に示した z 、 x 座標系に適用すると、体積力加速度は $X = x\omega^2$ ； $Z = -g$ ； $Y = 0$ であることから、

$$\rho X dx + \rho Y dy + \rho Z dz = x\omega^2 dx - g dz = 0$$

ゆえに、

$$\frac{dz}{dx} = \frac{x\omega^2}{g}$$

となる。この微分方程式を解くと

$$z = \frac{x^2\omega^2}{2g} + C \quad (3.30)$$

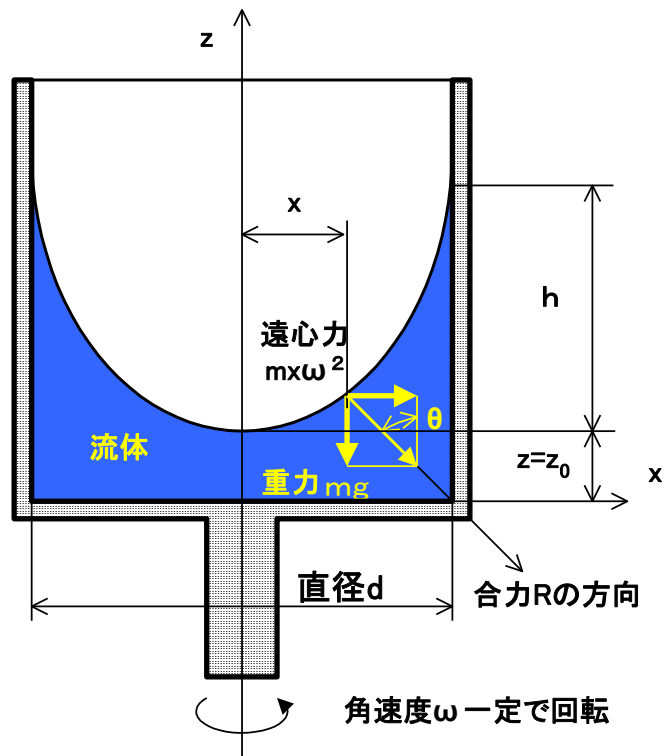
図 3.22 回転コップ内の流体の等圧面

となり、このように等圧力面が放物線となることが証明された。さて、境界条件、すなわち $x=0$ （中心）で、水面の高さ $z=z_0$ を代入して、積分定数は $C=z_0$ となる。したがって、等圧力面の方程式は式(3.30)に積分定数を代入して

$$z = \frac{x^2\omega^2}{2g} + z_0 \quad (3.31)$$

さらに、式を変形して、容器の内壁面 ($x=d/2$) における液面高さを h とすれば、

$$h = z - z_0 = \frac{(d/2)^2\omega^2}{2g} = \frac{d^2\omega^2}{8g}$$



となり、容器の現在における角速度 ω が

$$\omega = \frac{1}{d} \sqrt{8gh} \quad (3.32)$$

として求められる。したがって、 h を実測することによって、角速度計として利用できることがわかる。

☆その4：等圧力面の研究課題

1. 地球の自転に基づく海表面の等圧面方程式の導出ならびに赤道と北極または南極の極地との海表面の差の導出について

1) 図 3.23 に示した地球上の海表面の等圧面方程式が、

$$\left(1 - \frac{r\omega^2}{g}\right)x^2 + y^2 = \text{const} \quad (3.33)$$

という、楕円方程式で与えられることを証明せよ。ここで、 r ；地球の半径、 ω ；地球の自転角速度 (rad/s) を表す。

2) 地球の半径は $r = 6375 \text{ km}$ である。北極（南極）の極地の海表面が地球の半径 r と等しい見なしたとき、赤道と極地との海表面の高さの差を求めよ。

☆答えは、おおよそ 11 km だったと思う。

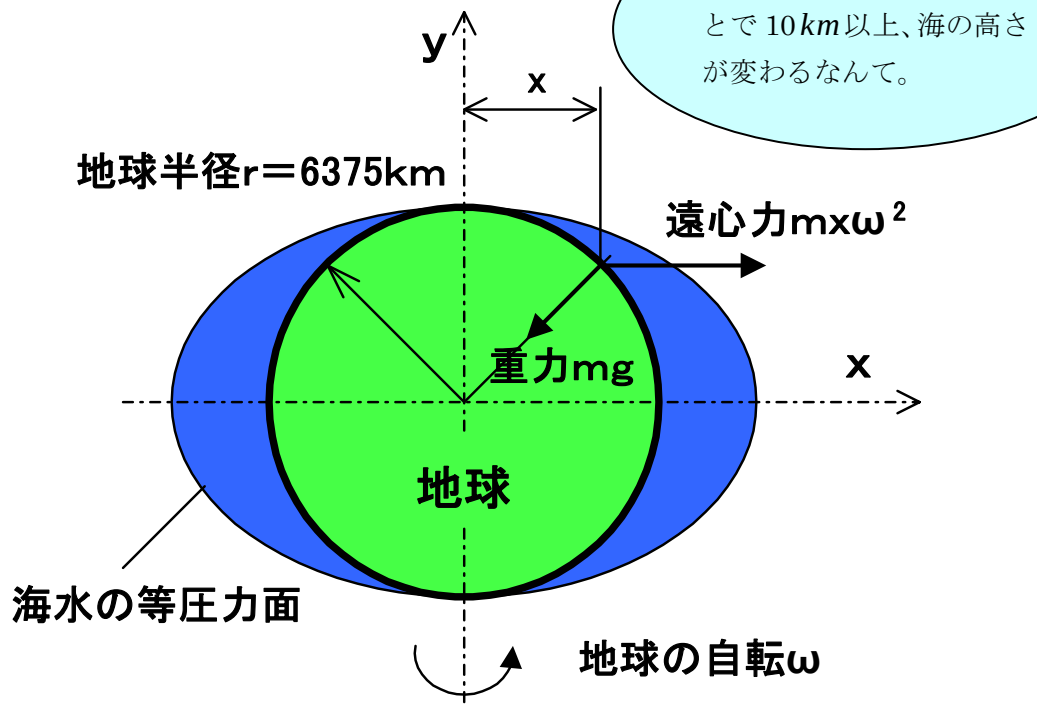


図 3.23 地球の海水の等圧力面

第3章 総合演習問題

1. 底辺が一边 a の正方形をした四角い水槽に、密度 ρ_1 と密度 ρ_2 の2種類の流体が混じりあわず、それぞれ深さ h で入っている。一つの側壁面に働く全流体力と圧力の中心位置を求めよ。ただし、密度は $\rho_1 < \rho_2$ とする。
 2. 直径 d の円盤が密度 ρ の液体中に鉛直に固定されている。円盤の中心が液面から深さ $z(z > d/2)$ のとき、圧力の中心 z_c を求めよ。
 3. 内径 500 mm 、深さ 1000 mm の円筒型水槽に、深さ 500 mm まで水が入っている。円筒内の水がこぼれないように円筒の中心軸まわりに回転させる時、最大回転数は何 rpm か。
-