# 第４回　論証力（２）　証明問題

４・１　$xy$ 平面において，$x$ 座標，$y$ 座標ともに整数であるような点を格子点と呼ぶ．格子点を頂点に持つ三角形 $ABC$ を考える．

（１）　辺 $AB, AC$ それぞれの上に両端を除いて奇数個の格子点があるとすると，辺 $BC$ 上にも両端を除いて奇数個の格子点があることを示せ.

（２）　辺 $AB, AC$ 上に両端を除いて丁度３点ずつ格子点が存在するとすると，三角形 $ABC$ の面積は８で割り切れる整数であることを示せ.

('92　東大・共通）

４・２　平面上に２つの円 $C, C'$ がある１次変換ｆは逆変換をもち，かつ $C$ を $C'$ にうつしている．

（１）　$\ell$ を $C$ 上の１点 $P$ における接線とする．このとき $\ell$ の $f$ による像 $\ell'$ は点 $f(P)$ における $C'$ の接線である．この理由を述べよ．

（２）　$A$ を $C$ の中心とすれば，$f(A)$ は $C'$ の中心となる．この理由を述べよ．

('90　京大・理）

４・３　$n$ 個の整数 $1, 3, 3^2, \cdots, 3^{n-1}$ から相異なる $k$ 個（$1 \leqq k \leqq n$）を取り出して加えた数をつくる．この方法で得られるすべての数の集合を $S_k$ とする．

（１）　$a_i, b_i$ $(i=0, 1, 2, \cdots, n-1)$ が０または１の整数で，

$$a_0+3a_1+\cdots+3^{n-1}a_{n-1}=b_0+3b_1+\cdots+3^{n-1}b_{n-1}$$

を満たすならば，$a_i=b_i$ $(i=0, 1, 2, \cdots, n-1)$ であることを証明せよ．

（２）　集合 $S_k$ の要素の個数は ${}_nC_k$ であることを示せ.

（３）　集合 $S_k$ に属している数の総和を求めよ．

('87　名古屋工大）

４・４　$n$ を３以上の自然数とする．このとき，以下の不等式を示せ．

（１）　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}<\frac{5}{3}-\frac{2}{2n+1}$

（２）（ⅰ）　$\displaystyle\frac{1}{k^4}<\frac{1}{(k-2)(k-1)k(k+1)}$

（ⅱ）　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^4}<\frac{161}{144}-\frac{1}{3(n-1)n(n+1)}$

４・５（１）　２乗して整数となる正の有理数は，正の整数に限ることを示せ.

（２）　$D(x)=\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$, $\overline{D}(x)=\sqrt{x+1}+\sqrt{x}$ とおく．$\overline{D}(x)$ を $D(x)$ を用いて表せ.

（３）　任意の正の整数 $x$ に対して，$D(x)$ は有理数でないことを示せ.

４・６　正整数 $n$ に対して，$a_n=\int_0^1 x^n e^x\,dx$ とおく．

（１）　$\lim_{n\to\infty} a_n=0$ を示せ．

（２）　$a_{n+1}$ と $a_n$ の関係式を求めよ．

（３）　$a_n+(-1)^n n!$ は $e$ の整数倍であることを示せ．

（４）　任意の整数 $C$ に対し，$0<A+Be<C$ となる整数 $A, B$ が存在することを示せ．

（'80　群馬大）

４・７　$I_n=\int_\pi^{n\pi}\frac{|\sin t|}{t}dt\ \ (n=2, 3, 4, \cdots)$ とおく．このとき，次の問いに答えよ．

（１）　不等式 $\frac{2}{(n+1)\pi}\leqq I_{n+1}-I_n\leqq\frac{2}{n\pi}$ を示せ．

（２）　不等式 $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\leqq 1+\log n\ \ (n=1, 2, \cdots)$ を示せ．

（３）　極限値 $\lim_{n\to\infty}\frac{I_n}{\log n}$ を求めよ．

（'85　千葉大）

４・８　$0<a<1, 0<c\leqq b$ とする．３次方程式 $x^3+ax^2+bx+c=0$ が３実根 $\alpha, \beta, \gamma$ をもつとき，$-1<\alpha<0, -1<\beta<0, -1<\gamma<0$ となることを示せ．

（'87　東工大）

４・９（１）　$g(x)$ を整式，$h(x)$ を２次式とし，$f(x)=g(h(x))$ とおく．このとき，関数 $y=f(x)$ のグラフは $y$ 軸または $y$ 軸に平行なある直線に関して対称であることを示せ．

（２）　$f(x)$ は整式で，関数 $y=f(x)$ のグラフは $y$ 軸または $y$ 軸に平行なある直線に関して対称であるとする．このとき，$f(x)$ はある整式 $g(x)$ とある２次式 $h(x)$ を用いて $f(x)=g(h(x))$ と書けることを示せ．

（'90　阪大・理）

４・10　直角三角形の３辺の長さがすべて整数のとき，面積は２の倍数であることを示せ．

（'90　一橋大）

４・11　平面 $\pi$ 上の正三角形 $ABC$ について以下の問いに答えよ．

（１）　$\pi$ 上の点 $P$ について，不等式 $PA+PB\geqq PC$ を示し，等号の成立条件を求めよ．

（２）　$\pi$ 上にない点 $P$ について，不等式 $PA+PB>PC$ を示せ．

４・12　$n$ を自然数とするとき，さいころを $2n$ 回投げて $n$ 回以上偶数の目が出る確率を $p_n$ とするとき，$p_n\geqq\frac{1}{2}+\frac{1}{4n}$ であることを示せ．

（'93　京大・共通）

４・13　$f(x)$ は $x$ の整式，$c$ は定数とする．等式 $\int_x^{x+1} f(t)\,dt = cf(x)$ がすべての $x$ で成り立つならば，$f(x)$ は定数であることを示せ．

（'93　京大・共通）

４・14　$n$ を自然数，$P(x)$ をｎ次の多項式とする．$P(0), P(1), \cdots, P(n)$ が整数ならば，すべての整数 $k$ に対し，$P(k)$ は整数であることを証明せよ．

（'93　東工大）

４・15　実数 $x$ に対し，$x$ を越えない最大の整数を $[x]$ で表す．

（１）　正の実数 $a$ と自然数 $m$ に対し，不等式 $\dfrac{[ma]}{a} \leqq m < \dfrac{[ma]+1}{a}$ を示せ．

（２）　正の実数 $a$ と $b$ が $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=1$ を満たし，さらにある自然数 $m$ と $n$ に対し $[ma]=[nb]$ が成り立つならば，$a$ と $b$ はともに有理数であることを証明せよ．

（'92　慶應大）

# 第５回　融合問題

５・１　$x$ の２次方程式 $x^2 - (4\sin\theta + 2\cos 2\theta)x + \left(3 - \dfrac{2}{\sqrt{3}}\sin 2\theta\right) = 0$ の２つの解がともに正整数のとき，θ とその２つの解を求めよ．

（'84　東京女大・数理）

５・２（１）　$x = \sin\theta$ とするとき，$\sin 5\theta$ を $x$ の整式で表せ．
（２）　$\cos 666°$ の値を求めよ．

（横浜国大）

５・３　$xy$ 平面上の，原点 $O$ とは異なる２点 $A(a_1, a_2)$, $B(b_1, b_2)$ に対し，

$$OA = a, OB = b, \quad AOB = \theta$$

とおく．
２点 $A, B$ の座標 $a_1, a_2, b_1, b_2$ が有理数であるとき，次の３条件は互いに同値であることを証明せよ．
（１）　$ab$ は有理数である．
（２）　$\cos\theta$ は有理数である．
（３）　$\sin\theta$ は有理数である．

（'77　東大・理）

５・４　$a, b, c, d$ は正整数で，$O(0, 0)$, $A(a, b)$, $B(c, d)$, $\vec{OC} = \vec{OA} + \vec{OB}$ とし，平行四辺形 $OACB$ の内部（周を除く）とする．
（１）　$ad - bc = 1$ のとき，$S$ の内部に格子点（$x, y$ 座標がともに整数である点）がないことを示せ．
（２）　$ad - bc = 2$ のとき，$S$ に格子点があれば，それは平行四辺形の中心（２つの対角線の交点）であることを示せ．

（新潟大）

５・５　正の整数 $n$ に対して，正の整数 $a_n, b_n$ を，

$$(2 + \sqrt{3})^n = a_n + b_n\sqrt{3}$$

で定める．このとき，以下の各問いに答えよ．
（１）　$(2 - \sqrt{3})^n$ を $a_n, b_n$ を用いて表せ．
（２）　${a_n}^2 - 3{b_n}^2 = 1$ を示せ．
（３）　$(2 + \sqrt{3})^n$ を小数展開したときの整数部分は奇数であることを示せ．
（４）　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \sqrt{3}$ であることを示せ．

５・６　$ap + br = 1, cq + ds = 1, aq + bs = 0, cp + dr = 0$ のとき，

$$ap + cq = 1, br + ds = 1, bp + dq = 0, ar + cs = 0$$

が成り立つことを証明せよ．