

理系入試実戦演習「QUEST」テスト

第4回 論証力(2) 証明問題

(試験時間 120 分)

数理科学研究会
野口 修編

4・1 次の各問いに答えよ。

(1) a, b を自然数とすると、集合 I を次で定める。

$$I = \{ax + by \mid x, y \text{ は整数}\}$$

このとき、 I について以下の問いに答えよ。

() I はある自然数 d の倍数全体に一致することを証明せよ。

() () における d は a, b の最大公約数であることを証明せよ。

(2) n を正の整数とする。

(i) n^2 と $2n+1$ は互いに素であることを示せ。

(ii) n^2+2 が $2n+1$ の倍数になる n を求めよ。

('92 一橋大)

4・2 各項が正の2つの数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ は

$$a_1 = b_1 = 1$$

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{a_n}, b_{n+1} - b_n = \frac{1}{b_{n+1}} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

を満たす。次の問いに答えよ。

(1) $a_n \sim n$ を示せ。

(2) $a_n \sim 1 + \log n$ を示せ。ただし、対数は自然対数とする。

(3) $b_{n+1} - a_{n+1} - b_n + 1$ を示し、 $\lim_n \frac{b_n}{a_n}$ を求めよ。

('93 横浜国大・工・前期)

4・3 実数 p, q に対し $x^3 - px + q = 0$ の解がすべて実数なら(すなわち虚数解をもたないなら)、 $x^3 - 2px^2 + p^2x - q^2 = 0$ の解もすべて実数であることを示せ。

('91 京大・文)

4・4 整数を係数とする3次の多項式 $f(x)$ が次の条件(*)を満たしている.

(*) 任意の自然数 n に対し $f(n)$ は $n(n+1)(n+2)$ で割り切れる.

このとき, ある整数 a があって, $f(x) = ax(x+1)(x+2)$ となることを示せ.

('91 京大・理)

4・5 整数全体の集合を \mathbf{Z} とおき, 平面ベクトルのある集合 G を

$$G = \left\{ (x, y) \mid x \in \mathbf{Z}, y \in \mathbf{Z}, \frac{4x-3y}{5} \in \mathbf{Z}, \frac{3x+4y}{5} \in \mathbf{Z} \right\}$$

と定める. また, 2つのベクトル $a = (2, 1), b = (-1, k)$ をとる.

(1) $b \in G$ となるのは k がどんな値のときか.

(2) 以下, k の値を, (1) で定めた値のうち, 最小の正の数とする.

実数 r, s について, $ra + sb \in G$ となるためには, $r \in \mathbf{Z}, s \in \mathbf{Z}$ が必要十分であることを示せ.

4・6 $f(x) = \pi x^2 \sin \pi x^2$ とする. $y = f(x)$ のグラフの $0 \leq x \leq 1$ の部分と x 軸とで囲まれた図形を y 軸のまわりに回転させてできる立体の体積 V は

$$V = 2\pi \int_0^1 x f(x) dx$$

で与えられることを示し, この値を求めよ.

('89 東大・理)