第1講 整数問題の考え方

練習問題1

【出典】

基礎知識を確認するための問題

【考え方】

整数解を求める方程式を「不定方程式」といい、不定方程式の中で最も簡単なものが

$$Ax + By = C$$

の形の1次方程式である。この形の方程式は何も考えずにと解けるようにしておく必要がある。

【解答例】

まず、1つ解を見つける。与えられた方程式を変形すると

$$\begin{aligned} 157x - 68y &= 3 & 21x - 68y' &= 3 & (y' &= -2x + y) \\ 21x' - 5y' &= 3 & (x' &= x - 3y') \\ x' - 5y'' &= 3 & (y'' &= -4x' + y') \end{aligned}$$

が成り立つ。ここで、

$$x' = 3, y'' = 0, y' = 12, x = 39, y = 90$$

のとき成り立つから、 $(x, y) = (39, 90)$ が1つの解となることがわかる。

それではすべての解を求めよう。 $157 \cdot 39 - 68 \cdot 90 = 3$ を与えられた方程式から辺々引くと

$$157x - 68y = 3 \quad 157(x - 39) = 68(y - 90)$$

となる。最後の式の両辺は $157 \cdot 68n$ ($n \in \mathbf{Z}$) なる整数より、与えられた方程式の解は

$$(x, y) = (68n + 39, 157n + 90) \quad (n \in \mathbf{Z})$$

となる。

練習問題2

【出典】

基礎知識を確認するための問題

【考え方】

2つの未知数のある整数係数2次方程式

$$Ax^2 + 2Hxy + By^2 + Cx + Dy + E = 0$$

の整数解を求める問題である。この形の方程式の解法のうち基本的なものは

(1) $(Px + Qy + R)(Sx + Ty + U) = V$ の形に変形する

(2) x または y の大きさを評価する

があるが、これらの手法は与えられた方程式が xy 平面において表す図形が双曲線や楕円になることを基礎としている。(しかも、(1)の場合は整数係数の範囲で上の形に表せることを用いている。)

この他に「ペル方程式」という重要な対象があるが、それは別のところで扱うことにする。

【解答例】

次数に注意して与えられた方程式を変形すると

$$2x^2 - 3xy - 2y^2 + 3x - y - 5 = 0$$

$$(2x + y + 1)(x - 2y + 1) = 6$$

$$(x, y) = (2, 1), (1, 0), (1, -2), (-2, 1) \leftarrow (*)$$

となる。

【注意】

(*) の部分は次のように表にして考えるとよい。

$2x+y+1$	6	3	2	1	-1	-2	-3	-6
$x-2y+1$	1	2	3	6	-6	-3	-2	-1
$2x-4y+2$	2	4	6	12	-12	-6	-4	-2
$5y-1$	4	-1	-4	-11	11	4	1	-4
y	1	0	$\times$	-2	$\times$	1	$\times$	$\times$
x	2	1	$\times$	1	$\times$	-2	$\times$	$\times$

練習問題3

【出典】

基礎知識を確認するための問題

【考え方】

練習問題2と同じ形だが、方程式が xy 平面において図形が練習問題2の双曲線とは違い楕円となるためも全く異なるものとなる。本来は「大きさの評価」ので扱うべき問題であるが、練習問題2とくらべてほしここで扱うことにした。実数条件を使って x (また y) の大きさを評価するとよい。

【解答例】

与えられた方程式

$$2x^2 + 2xy + 5y^2 + 2x + 4y - 4 = 0 \quad \dots$$

を x に関する方程式とみなすと

$$2x^2 + 2(y+1)x + 5y^2 + 4y - 4 = 0$$

となる。 x は実数であることと、 $y \in \mathbf{Z}$ より

$$(y+1)^2 - 2(5y^2 + 4y - 4) \geq 0$$

$$3y^2 + 2y - 3 \leq 0$$

$$y = 0, -1$$

が成り立つことが必要である。これらを x に代入して

$$(x, y) = (1, 0), (-2, 0)$$

をえる。

練習問題 4

【出典】

基礎知識を確認するための問題

【考え方】

使える条件は「与えられた方程式が有理数解 α をもつ」という条件だけなので、 α を $\frac{q}{p}$ ($p \in \mathbf{N}, q \in \mathbf{Z}, (p, q) = 1$) とおいて代入して、 p, q に関する条件を考えるとよい。あとは p, q が整数という条件を使うために分母をはらって整数問題に帰着する。

【解答例】

$\alpha = \frac{q}{p}$ ($p \in \mathbf{N}, q \in \mathbf{Z}, (p, q) = 1$) を与えられた方程式の解だとすると

$$a_0 \frac{q^n}{p^n} + a_1 \frac{q^{n-1}}{p^{n-1}} + \cdots + a_n = 0$$

$$a_0 q^n + a_1 p q^{n-1} + \cdots + a_n p^n = 0$$

が成り立つ。ここで、両辺を p で割った余り、 q で割った余りを考えると

$$p \mid a_0 q^n \text{ かつ } q \mid a_n p^n$$

が成り立つ。ここで、 $(p, q) = 1$ より、 p, q をそれぞれ素因数分解したときに同じ素因子はないことに注意すると

$$p \mid a_0 \text{ かつ } q \mid a_n$$

が成り立つ。これがまさに証明すべきことに他ならない。

練習問題 5

【出典】

オリジナル

【考え方】

n を文字だとも考えても整数係数の範囲で

$$n^4 + 4 = (n^2 + 2)^2 - (2n)^2 = (n^2 + 2n + 2)(n^2 - 2n + 2)$$

と因数分解できる。これに気づけば一本道。

【解答例】

$n^4 + 4 = (n^2 + 2)^2 - (2n)^2 = (n^2 + 2n + 2)(n^2 - 2n + 2)$ が成り立つ。さらに、

$$n^2 + 2n + 2 > n^2 - 2n + 2 \geq 1$$

に注意すると、 $n^4 + 4$ が素数になるためには

$$n^2 - 2n + 2 = 1 \quad n = 1$$

が必要となることがわかるが、このとき、 $n^4 + 4 = 5$ は素数になるので、求める n の値は 1 となる。

練習問題 6

【出典】

京都大・文系・後期

【考え方】

(1) は「奇数」をどう表せば良いかという問題。のときに「文字式の利用法」を学習したはず。

(2) は数学でよく使う存在証明の一方法の確認。素朴な存在証明は実際に「構成する」こと。

【解答例】

(1) $x = 2m - 1, y = 2n - 1$ ($m, n \in \mathbf{Z}$) とかける。

このとき、

$$x^2 - y^2 = (2m - 1)^2 - (2n - 1)^2$$

$$= 4(m^2 - m - (n^2 - n))$$

$$= 4m(m - 1) - 4n(n - 1)$$

が成り立つが、 $m(m - 1), n(n - 1)$ は連続 2 整数であり 2 で割り切れるから、 $x^2 - y^2$ はつねに割り切れる。よって、方程式 $x^2 - y^2 = k$ が奇数 k をもてば、 k は 8 の倍数であることが示された。

(2) (1) より、 k は 8 の倍数であることが示されるが、逆に、 $k = 8k'$ ($k' \in \mathbf{Z}$) に対して

$$(2k' + 1)^2 - (2k' - 1)^2 = 8k'$$

が成り立つので、求め必要十分条件は「 k が 8 の倍数であること」となる。

練習問題 7

【出典】

基礎知識を確認する問題

【考え方】

「 $f(0), f(1), f(2)$ が 3 で割り切れない」という条件は一般的な条件である。この条件をみたす a, b, c はいくらでもあり考えられる。そのような無限個の a, b, c, d と任意の整数 x に対して、

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

が決して 0 にならないことを示せというのが本問のである。あとはすべての整数値 x を $f(x)$ に代入してみればよい。そうすると、 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ どころか 3 にも 6 にも 9 にもならないことが合同式によってただちにわかる。

【解答例】

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ に対して、整数 x が $x \equiv 0 \pmod{3}$ をみたすならば、

$$\begin{aligned} f(x) &= ax^3 + bx^2 + cx + d \\ &\equiv a \cdot 0^3 + b \cdot 0^2 + c \cdot 0 + d \pmod{3} \\ &= f(0) \end{aligned}$$

が成り立つ。 $x \equiv 1 \pmod{3}$, $x \equiv 2 \pmod{3}$ の場合も、同様に、3 を法として $f(1), f(2)$ にそれぞれ合同となることを考えると、任意の整数 x に対して、整数 $f(x)$ は 3 を法として $f(0), f(1), f(2)$ のいずれかと合同である。しかし、これらはすべて 3 の倍数ではないので、

$$\begin{aligned} x \in \mathbf{Z} &\quad f(x) \not\equiv 0 \pmod{3} \\ x \in \mathbf{Z} &\quad f(x) \equiv 0 \end{aligned}$$

が成り立つ。

練習問題 8

【出典】

基礎知識を確認する問題

【考え方】

「合同式を知っていますか？」という問題。

【解答例】

7 を法として考えると

$$\begin{aligned} 3 \cdot 2^{n-1} + 4^{2n-1} &= 3 \cdot 2^{n-1} + 4 \cdot 4^{2(n-1)} \\ &= 3 \cdot 2^{n-1} + 4 \cdot 16^{n-1} \\ &\equiv 3 \cdot 2^{n-1} + 4 \cdot 2^{n-1} \pmod{7} \\ &\equiv 7 \cdot 2^{n-1} \pmod{7} \\ &\equiv 0 \pmod{7} \end{aligned}$$

となるから、求める余りは 0 である。

練習問題 9

【出典】

基礎知識を確認する問題

【考え方】

1 変数の多項式に対しても合同式は同様に利用することができる。(整数の場合と同様に定義すれば、合同式の基本性質をみたすので。) 本問の場合、わざわざ余りの定義に戻って計算する必要はない。

【解答例】

$$\begin{aligned} x^4 &\equiv 1 \pmod{x^4 - 1} \text{ より} \\ x^{4n+1} &= x^4 \cdot x^4 \cdots x^4 \cdot x = x \pmod{x^4 - 1} \end{aligned}$$

が成り立つ。よって、求める余りは x となる。

練習問題11

【出典】

一橋大

【考え方】

n^3 を3で割った時の余りは n を3で割った時の余りで決まるので(1)は容易であろう。やや複雑にはなるが、(2)もこの方法で解こうとすればよい。

【解答例】

(1) 一般に

$$x \equiv 0 \pmod{3} \quad x^3 \equiv 0 \pmod{3}$$

$$x \equiv 1 \pmod{3} \quad x^3 \equiv 1 \pmod{3}$$

$$x \equiv 2 \pmod{3} \quad x^3 \equiv 2 \pmod{3}$$

が成り立つので、 $n^3 + 1$ が3で割り切れるのは、整数 n を3で割ったときの余りが2のときである。

(2) n が3の倍数のときは明らかに成り立たない。

3で割ったときの余りが1の整数同士の積は

$$(3k+1)(3l+1) = 3(3kl+k+l)+1$$

より、3で割ったときの余りが1となるから、 n を3で割ったときの余りが1のときも成り立たない。

n を3で割ったときの余りが2とすると、同様に考えて、

n^2 を3で割ったときの余りは1

$n^3 = n \cdot n^2$ を3で割ったときの余りは2

$n^4 = n \cdot n^3$ を3で割ったときの余りは1

$n^5 = n \cdot n^4$ を3で割ったときの余りは2

.....
.....

となるから、求める条件は

「 n を3で割ったときの余りが2

かつ n は奇数」

となる。 $n = 3k+2$ ($k \in \mathbb{Z}$) とかくと、 k は奇数となるから、 $k = 2m-1$ とかくことにより、

$$n = 6m-1 \quad (m \in \mathbb{Z})$$

となる。すなわち、求める n は6で割って5余る整数である。

練習問題12

【出典】

東京工業大

【考え方】

(2)では「自然数 n が大きくなると $\frac{1}{n}$ は小さく」というあたりまえのことを使って解いていきます。小さい方の a から順番に求めていけば自然に解けてます。

【解答例】

(1) 与式を変形すると

$$(ab-1)(bc-1)(ca-1)$$

$$= abc(abc-a-b-c) + bc+ca+ab-1$$

となるが、

$$abc \mid abc(abc-a-b-c)$$

より、

$$abc \mid bc+ca+ab-1$$

が成り立つことが必要。

(2) (1)より

$$\frac{bc+ca+ab-1}{abc} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} - \frac{1}{abc}$$

が自然数になることが必要であるが、

$a \geq 2, b \geq 3, c \geq 4$ より

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} - \frac{1}{abc} < \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$$

$$= \frac{13}{12}$$

となるから、最左辺の値は1となる。特に、 c とすると、

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} - \frac{1}{abc} < \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1$$

より、 $a=2$ が必要。このとき、 b, c のみたす条件は

$$\frac{1}{b} + \frac{1}{c} - \frac{1}{2bc} = \frac{1}{2}$$

となり、 $b \geq 4$ とすると

$$\frac{1}{b} + \frac{1}{c} - \frac{1}{2bc} < \frac{1}{4} + \frac{1}{5} < \frac{1}{2}$$

より、 $b=3$ が必要。逆にこのとき、 $c=5$ とすれば、 $(a, b, c) = (2, 3, 5)$ となる。

練習問題13

【出典】

早稲田大・理工

【考え方】

(1) は y, z の大きさを評価して解くこともできるし、素因数分解の一意性を用いても解くことができる。(2) は x が存在するためには y, z の存在が足かせになっていることを使えばよい。

【解答例】

(1) $x=1$ のとき、

$$\frac{1}{2y} + \frac{1}{3z} = \frac{1}{3}$$

$$2yz - 2y - 3z = 0$$

$$yz - y - \frac{3}{2}z = 0$$

$$y - \frac{3}{2}(z-1) = \frac{3}{2}$$

$$(2y-3)(z-1) = 3$$

$$(y, z) = (2, 4), (3, 2)$$

となる。

(2) $\frac{1}{2y} - \frac{1}{2}, \frac{1}{3z} - \frac{1}{3}$ より

$$\frac{4}{3} - \frac{1}{x} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{x} \quad x=1, 2$$

が必要。

(3) $x=2$ のとき

$$\frac{1}{2y} + \frac{1}{3z} = \frac{5}{6} \quad \left. \vphantom{\frac{1}{2y} + \frac{1}{3z} = \frac{5}{6}} \right] (*)$$

$$(y, z) = (1, 1)$$

となる。以上から、求める解は

$$(x, y, z) = (1, 2, 4), (1, 3, 2), (2, 1, 1)$$

となる。

【注意】

(1) の方程式

$$\frac{1}{2y} + \frac{1}{3z} = \frac{1}{3} \quad (y, z \in \mathbf{N})$$

の解法は、「 $\frac{1}{2y}, \frac{1}{3z}$ のどちらかは $(\frac{1}{3})$ の半分である)

$\frac{1}{6}$ 以上でないといけない」ことから、 $y=1, 2, 3; z=1, 2$ をそれぞれ代入して解くこともできる。

また、(3) の(*)の部分の変形は左辺の y, z の両方に1を代入すれば成り立ち、 y, z の少なくとも一方でも大きくなれば左辺が小さくなることから明らかである。