第１講　整数問題の考え方

１．整数問題に対する基本的手法

整数（有理整数）$\mathbf{Z}$ には

（１）　±，×ができる

（２）　整除（余りを出すわり算）ができる

（３）　数直線上離散的に分布している

の３つの代表的性質があります.

「整数問題」の解法では，整数のもつこれら３つの性質に対応して

（１）　素因数分解の利用（可能性および一意性）

（２）　合同式の利用

（３）　大きさの評価の利用

の３つが基本的な手法となります.

今回はこれらの手法を使って解く典型的な問題を扱っていくことにしましょう.
（これらが融合された問題については「数学実戦講義Ⅲ」で学びます.）

２．素因数分解の利用

整数問題を解くのに最も強力な手法が「素因数分解」の利用です.「合同式」を使うのは大ざっぱにみるときで，「素因数分解」を使えば細かく調べることができます.

【例題１　素因数分解の利用】

２次方程式 $x^2+mx-6=0$ の２解がともに有理数となるような自然数 m の値を求めよ.

（東海大）

【考え方】

解の公式を使っても解けなくはないが，１つの解が有理数であれば「解と係数の関係」よりもう１つの解も有理数なので，有理数解をもつ条件を考えればよい.
あとは有理数 $\frac{q}{p}(p \quad N, q \quad Z, (p, q)=1)$ が与えられた方程式の解となるための条件を考えれば，上記方程式の有理数解の候補が $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$ となることは基礎知識といってよいであろう.（以下の定理およびその証明を参考にせよ.）

例題１で用いた事実は今後よく使うことになるので定理の形でまとめておこう.

【定理】

整数係数の n 次方程式

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n = 0$$

が有理数解 α をもつとき

$$\alpha = \pm\frac{(a_n\ \textbf{の約数})}{(a_0\ \textbf{の約数})}$$

の形にかける.

【証明】

練習問題４の解答を参照せよ.

【系】

整数係数の n 次方程式

$$x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n = 0$$

が有理数解をもてばそれは整数である.

【証明】

上記定理より明らか.

【練習問題１】

方程式 $157x-68y=3$ の整数解をすべて求めよ.

【練習問題２】

方程式 $2x^2-3xy-2y^2+3x-y-5=0$ の整数解をすべて求めよ.

【練習問題３】
方程式 $2x^2+2xy+5y^2+2x+4y-4=0$ **の整数解をすべて求めよ.**

【練習問題４】
整数係数の n **次方程式**

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n=0$$

が有理数解 α **をもつとき**

$$\alpha=\pm\frac{(a_n\ \text{の約数})}{(a_0\ \text{の約数})}$$

の形にかけることを証明せよ.

【練習問題５】

n^4+4 **が素数になる自然数** n **をすべて求めよ.**

【練習問題６】
k を 0 または正の整数とする．方程式 $x^2-y^2=k$ の解 (a,b) で，a,b がともに奇数であるものを奇数解とよぶ.
（１）　方程式 $x^2-y^2=k$ が奇数解をもてば，k は 8 の倍数であることを示せ.
（２）　方程式 $x^2-y^2=k$ が奇数解をもつための必要十分条件を求めよ.

【発展問題１】

（１）　p を素数とするとき，$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{p}$ は整数とはならないことを証明せよ.
（２）　n を自然数とするとき，$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$ は整数とはならないことを証明せよ.

３．合同式の利用

整数問題において，大ざっぱにみて解く手法の代表が「合同式」です．まずは合同式の定義と基本性質を復習しておきます．ここでは，整数の合同式について扱いますが，同様の定義および性質が１変数多項式についても成り立ちます．

【合同式の定義】

a, b を整数とするとき

a と b は n を法として合同である

とは，$a-b$ が n の倍数であることと定義する．このとき

$$a \equiv b \pmod{n}$$

とかく．

【合同式の基本性質】

a, b, c を整数とし，n を 0 でない整数とするとき，次の各式が成り立つ．

（１）　$a \equiv a \pmod{n}$　（反射律）
（２）　$a \equiv b \quad b \equiv a \pmod{n}$　（対称律）
（３）　$a \equiv b,\ b \equiv c \quad a \equiv c \pmod{n}$　（推移律）

【例題２　合同式の利用】

係数 a, b, c がすべて奇数であるとき，２次方程式

$$ax^2+bx+c=0$$

は有理数解をもたないことを証明せよ．

【考え方】

「有理数解をもたない」ことを示す最も素朴な方法は「あらゆる有理数」を与えられた方程式に代入してみることです．その式が成り立たないということが，「係数 a, b, c がすべて奇数」という一見かなり一般的な仮定だけから導かれるわけですから，かなり大ざっぱな議論で証明が終わることが予想されます．

【練習問題７】

$a\,,b\,,c\,,d$ を整数とする．整式

$$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$$

において，$f(0),\ f(1),\ f(2)$ がいずれも３で割り切れないならば，方程式 $f(x)=0$ は整数の解をもたないことを証明せよ．

【練習問題８】

n を自然数とするとき，$3\ 2^{n-1}+4^{2n-1}$ を７で割ったときの余りを求めよ．

【練習問題９】

n を自然数とするとき，整式 x^{4n+1} を x^4-1 で割ったときの余りを求めよ．

【練習問題10】

正の整数 $a\,,b\,,c$ が

$$a^2+b^2=c^2$$

をみたすとき，次の (1),(2),(3) を証明せよ．

（１）　$a\,,b$ のいずれかは 3 の倍数である．

（２）　$a\,,b$ のいずれかは 4 の倍数である．

（３）　$a\,,b\,,c$ のいずれかは 5 の倍数である．

【練習問題11】

（１）　正の整数 n で n^3+1 が 3 で割り切れるものをすべて求めよ．

（２）　正の整数 n で n^n+1 が 3 で割り切れるものをすべて求めよ．

４．大きさの評価の利用

整数は数直線上で離散的にぽつっぽつっと分布しています．そのため「2 より大きく 4 より小さい整数」というだけで 3 だとわかります．また，x,y,z がすべて大きな自然数なら方程式

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1$$

をみたさないこともただちにわかります．（これがこの方程式を解くときの鍵となっているわけです！）　整数の問題において整除に関する問題では「素因数分解」や「合同式」が有効ですが，整序に関係のない問題では「大きさの評価」を利用するのが定石です．

【例題３　大きさの評価の利用】

方程式

$$x^2+2y^2+2z^2-2xy-2xz+2yz-5=0$$

をみたす正の整数の組 (x,y,z) をすべて求めよ．

（京都大・理系・後期）

【考え方】

未知数が３つもある方程式を解く問題です．因数分解型にもっていくのも難しそうですが，一文字 x について整理して，x を１か所にまとめてみると案外簡単に解けてしまいます．

【練習問題12】

a, b, c は $1<a<b<c$ をみたす整数とし，$(ab-1)(bc-1)(ca-1)$ は abc で割り切れるとする．このとき，

（１）　$ab+bc+ca-1$ は abc で割り切れることを示せ．

（２）　a, b, c の組をすべて求めよ．

【練習問題13】

方程式 $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{2y}+\dfrac{1}{3z}=\dfrac{4}{3}$　…①をみたす正の整数の組 (x, y, z) について考える．

（１）　$x=1$ のとき，正の整数 y, z の組をすべて求めよ．

（２）　x のとり得る値の範囲を求めよ．

（３）　方程式①を解け．

【発展問題２】

（１）　n, k を 2 以上の整数とするとき，$1+\dfrac{1}{2^k}+\dfrac{1}{3^k}+\cdots+\dfrac{1}{n^k}$ は整数とはならないことを証明せよ．

（２）　$1+\dfrac{1}{1!}+\dfrac{1}{2!}+\cdots+\dfrac{1}{n!}+\cdots$ は無理数であることを証明せよ．