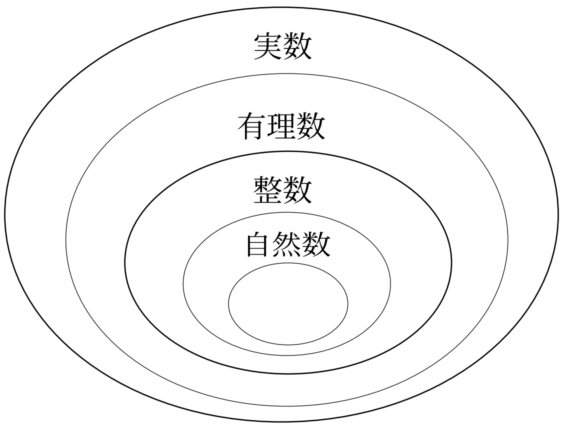
# 第６講　数の理論

＜数の理論のまとめ＞

## 1．数の拡張

数の集合は
自然数→整数→有理数→実数→複素数
と拡張されている．




（注１）　数の拡張は次のように行われている．

自然数　・・・　＋，×について閉じている
整数　・・・　±，×について閉じている
有理数　・・・　±，×，÷について閉じている
実数　・・・　±，×，÷について閉じている
極限演算について閉じている
複素数　・・・　±，×，÷について閉じている
極限演算について閉じている
代数的に閉じている

（注２）　実数であって有理数でない数を無理数，複素数であって，実数でない数を無理数という．

（注３）　「数」と「量」とを混同しないこと．複素数は「量」ではないが，四則計算のできる「数」である．

## ２．　整数問題の考え方

整数問題は整数の特殊性を使って解く．整数の特殊性としては次の３つが代表的である．

１）　素因数分解の可能性・一意性
２）　合同式の利用
３）　大きさの評価

（注１）　１），２）は整数の四則計算における特殊性であり，３）は大きさに関する特殊性である．

（注２）　素因数分解というのは，積を基本として整数をつくるときに整数が何を基本としてできているかを考えるものである．

## ３．整数の合同式

【整数の合同の定義】

２つの整数 $a, b$ が整数 $n$ を法として合同であるとは，

$$n \mid (a-b)$$

と定義する．このことを $a \equiv b \pmod{n}$ と書く．

【整数の合同式の性質】

整数 $a, b, c, d, n$ が

$$a \equiv b \pmod{n},\ c \equiv d \pmod{n}$$

をみたすとき，次が成り立つ．

１）　$a+c \equiv b+d \pmod{n}$
２）　$a-c \equiv b-d \pmod{n}$
３）　$a\ c \equiv b\ d \pmod{n}$

（注１）　整数の合同とは，$n$ で割った余りで整数を分類した概念である．

（注２）　上の３つの公式は，互いに区別のつかないもの同士を計算しても区別がつかないことを主張するものである．

## ４．　有理数と無理数

有理数とは，$\dfrac{q}{p}$（$p \quad \mathbf{N}, q \quad \mathbf{Z}$）の形にかける数のことである．

無理数は「有理数でない実数」と定義されるので，「ある数が無理数であることを示せ．」という問題では，有理数でないことを示す，すなわち，「ある数が有理数だと仮定して矛盾を導く（背理法）」わけである．

## ５．　平方根とルート記号の違い

数 $A$ に対して，

$A$ の平方根　・・・　２乗して $A$ になる数

$\sqrt{A}$　・・・　２乗して $A$ になる０以上の数

を表す．

（注）　複素数の場合，０以上というのは意味がないので，$\sqrt{i}$ という記号には意味がないが，$\pm\sqrt{i}$ という記号には意味がある．

## ６．　１の虚立方根

３乗して１になる虚数を「１の虚立方根」という．「１の虚立方根」は２つあるが，そのうちのどちらか一方を $\omega$（オメガ）で表す．

【１の虚立方根 $\omega$ の性質】

１）　$\omega^3 = 1$

２）　$\omega^2 + \omega + 1 = 0$

３）　$\omega$ 以外の虚立方根は $\overline{\omega} = \omega^2$ である．

## ７．　実数係数代数方程式の複素数解

＜定理＞

実数係数の代数方程式

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots a_n = 0 \quad (a_i \quad \mathbf{R}, a_0 \neq 0)$$

が複素数解 $x = \alpha$ をもてば，$x = \overline{\alpha}$ も解となる．

（注１）　共役複素数の性質を用いれば簡単に証明できる．

（注２）　虚数単位 $i$ は「２乗して $-1$ になる数の１つ」として定義するので，本来，実数しか知らない人からみれば，$i$ と $-i$ は区別のつかないものである．したがって，上の定理は当然成り立つべき定理といえる．

## ８．　代数的数・代数的整数について

整数係数の代数方程式

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots a_n = 0 \quad (a_i \quad \mathbf{Z}, a_0 \neq 0)$$

の複素数解を代数的数，また，整数係数の代数方程式

$$x^n + a_1x^{n-1} + \cdots a_n = 0 \quad (a_i \quad \mathbf{Z}, a_0 \neq 0)$$

の複素数解を代数的整数という．

＜定理＞

代数的整数であり，有理数であれば整数である．

（注１）　実は，数百年前から代数学者の間では「整数」といえば「代数的整数」のことと拡大解釈するのが普通である．したがって，「$\sqrt{2}$ は整数」ということになる．

ただし，$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ は（代数的）整数ではない．

（注２）　上の定理は，これまでわれわれが「整数」と考えていたものは，「有理数の中における整数」であることを主張するものである．この意味で，これまでの整数を「有理整数」ということが多い．

（例題１　不定方程式の解法　素因数分解・評価）

（１）　次の各方程式の整数解を求めよ．

（ｉ）　$3x+7y=1$

（ii）　$22x+17y=1$

（２）　次の各方程式の整数解を求めよ．

（ｉ）　$xy-2x+3y-7=0$

（ii）　$2xy-4x+y-8=0$

（３）　方程式

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1$$

をみたす自然数の組をすべて求めよ．

（例題２　合同式）

（１）　任意の整数 $n$ に対して，$n^5-n$ は 10 で割り切れることを示せ．

（２）　$x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$ を整数とするとき，
$$|x_1-x_2|+|x_2-x_3|+\cdots+|x_{n-1}-x_n|+|x_n-x_1|$$
は偶数となることを証明せよ．

（３）　$a, b, c, d$ を整数とする．整式
$$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$$
において，$f(-1), f(0), f(1)$ がいずれも３で割り切れないならば，方程式 $f(x)=0$ は整数の解を持たないことを証明せよ．

（例題３　根号に関する問題・有理数と無理数・代数的整数）

（１）　$\sqrt{x}=a+\dfrac{1}{a}$ $(a>0)$ のとき，$x-2+\sqrt{x^2-4x}$ を $a$ の式で表せ.

（２）　$\sqrt{7+4\sqrt{3}}$ の小数部分を $a$ とするとき，$a^2$ の値を求めよ.

（３）　次の各数は有理数か無理数か判定せよ.

（**i**）　$\sqrt[3]{5}$　　（**ii**）　$\sqrt{6}$

（**iii**）　$\sqrt{2}+\sqrt{3}$　　（**iv**）　$\log_2 3$

（４）　整数を係数とする $n$ 次の整式

$$f(x)=x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n\ \ (n\geqq 1)$$

について，有理数 $\alpha$ が方程式 $f(x)=0$ の解ならば $\alpha$ は整数であることを証明せよ.

（例題４　複素数に関する問題　実数係数代数方程式・１の虚立方根）

（１）　複素数 $1+i$ が４次方程式

$$x^4-2x^3+2x^2+ax+b=0$$

の解となるように，実数 $a,b$ を定めよ．

（２）　$\omega$ を１の実数でない立方根の１つとするとき、以下の問いに答えよ。

（ｉ）　$\omega^2+\omega+1$ の値を求めよ．

（ii）　$n$ を自然数とするとき，$\omega^n+\dfrac{1}{\omega^n}$ の値を求めよ．