第４講　積分法の応用（４）積分法の関数空間への応用

＜積分法の関数空間への応用のまとめ＞

１．内積の一般化

　空間ベクトルにおける内積の定義は図形的に行うのが一般的であるが，内積の本質を抽出して一般的に定義するとと次のようになる．

【定義（「内積の一般的定義」））】

　実数体 **R** 上のベクトル空間 V における内積とは，関数 $f : V \times V \to \mathbf{R}$ であって次の４つの条件をみたすものとして定義する．ただし，$f(\vec{a}, \vec{b}) = \vec{a} \quad \vec{b}$ とかくことにする．

（１）　$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \quad V \quad (\vec{a}+\vec{b}) \quad \vec{c} = \vec{a} \quad \vec{c} + \vec{b} \quad \vec{c}$

（２）　$\vec{a}, \vec{b} \quad V \quad k \quad \mathbf{R} \quad (k\vec{a}) \quad \vec{b} = k\,\vec{a} \quad \vec{b}$

（３）　$\vec{a}, \vec{b} \quad V \quad \vec{a} \quad \vec{b} = \vec{b} \quad \vec{a}$

（４）　$\vec{a} \quad V \quad \vec{a} \quad \vec{a} \geqq 0$　かつ　「$\vec{a} \quad \vec{a} = 0 \qquad \vec{a} = \vec{0}$」

（注）　上の（１）から（４）までの条件を「内積の公理」とよぶ．

２．　関数の内積とコーシー・シュワルツの不等式の積分型

　２つの関数に対して，さまざまな内積を考えることができるが，通常，閉区間 $[a, b]$ $(a < b)$ で定義される連続関数 f, g に対して，それらの内積を

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx$$

で定義し，標準内積とよぶ．

　このとき，空間ベクトルの場合と同様に，関数空間に対してもコーシー・シュワルツの不等式の積分型

$$\int_a^b \{f(x)\}^2\,dx \int_a^b \{g(x)\}^2\,dx \geqq \left\{\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right\}^2$$

が成り立つ．

3．　関数の直交

２つの関数 f, g の標準内積の値が 0 となるとき
それらの関数は互いに「直交する」という.

4．　ルジャンドル多項式の定義

多項式

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n\,n!}\,\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n \quad (n=0,1,2,\cdots)$$

を n 次のルジャンドル多項式と定義する.

5．　ルジャンドル多項式の性質

ルジャンドル多項式は次の各性質をみたす.

（１）　$$\int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)\,dx=\begin{cases} 0 & (m\neq n) \\ \dfrac{2}{2n+1} & (m=n)\end{cases}$$

（２）　$n-1$ 次以下の任意の多項式 $Q(x)$ について

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)\,Q(x)\,dx=0$$

が成り立つ.
逆に，$n-1$ 次以下の任意の多項式 $Q(x)$ に対して

$$\int_{-1}^{1} P(x)\,Q(x)\,dx=0$$

を満たす n 次式 $P(x)$ は $P_n(x)$ の定数倍しかない.

（注）　ルジャンドル多項式の集合 $\{P_0(x), P_1(x), P_2(x), \cdots\}$ は１変数多項式環 $\mathbf{R}[x]$ の正規直交基底を与えている.

６．　フーリエ級数の定義

周期 2π の実数値周期関数 $f(x)$ が積分可能なとき，

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx \quad (n = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx \quad (n = 1,\ 2,\ \cdots)$$

を関数 $f(x)$ のフーリエ係数といい，さらに，関数項級数

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

を $f(x)$ のフーリエ級数とよび，

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

などとかく．

７．　フーリエ級数の意味

関数系

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}},\ \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}},\ \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}},\ \frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}},\ \frac{\sin 2x}{\sqrt{\pi}},\ \cdots,\ \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}},\ \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}} \right\}$$

は直交しているのみではなく，それぞれ長さ１の関数であると考えることができる．このような観点からすると，フーリエ級数とは，関数の正規直交規定に関する直交展開であると考えることができる．

３次元空間においてピタゴラスの定理が成り立つように，無限次元でもピタゴラスの定理の拡張であるパーセバルの等式

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \{f(x)^2\}\,dx = \frac{{a_0}^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} ({a_n}^2 + {b_n}^2)$$

が成り立つことが知られている．

（例題１　コーシー・シュワルツの不等式（積分型））

連続関数 $f(x), g(x)$ に対して不等式

$$\int_a^b \{f(x)\}^2\,dx \int_a^b \{g(x)\}^2\,dx \geqq \left\{\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right\}^2$$

が成り立つことを証明せよ．ただし，a, b は $a<b$ なる定数とする．

（例題２　コーシー・シュワルツの不等式（積分型））

　不等式を証明せよ.

$$\int_0^1 \sqrt{1+x^4}\,dx \leqq \frac{\sqrt{30}}{5}$$

を証明せよ.

（例題３　ルジャンドル多項式と最小２乗近似）

（１）　任意の実数 p, q に対して，等式

$$\int_{-1}^{1}\left(x^2+ax+b\right)\left(px+q\right)dx=0$$

が成り立つような実定数 a, b を求めよ.

（２）　定積分 $\int_{-1}^{1}\left(x^2-(ax+b)\right)^2 dx$ の値を最小にする実定数 a, b の値を求めよ.

（例題４　フーリエ級数入門）

（１）　自然数 m, n に対して，次の各定積分を計算せよ．

（ｉ）　$\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx \, dx$

（ii）　$\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos nx \, dx$

（iii）　$\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx \, dx$

（２）　任意の x に対して，等式

$$a\cos x + b\cos 2x + c\cos 3x + d\sin x + e\sin 2x = 0$$

が成り立つとする．このとき，定数 a, b, c, d, e にはどのような関係があるか．

（例題５　フーリエ級数入門）

n 個の実数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ に対して

$$I = \int_{-\pi}^{\pi} \{x - (a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + \cdots + a_n \sin nx)\}^2 \, dx$$

とおく．I を最小にするような a_k $(k = 1, 2, \cdots, n)$ の値を求めよ．

（例題６　超関数入門）

$n=1, 2, 3, \cdots$ に対して，

$$\delta_n(t)=\begin{cases} n-n^2|t| & \left(|t| \leqq \dfrac{1}{n}\right) \\ 0 & \left(|t| > \dfrac{1}{n}\right) \end{cases}$$

とする．

$$f_n(x)=\int_{-1}^{1} \delta_n(t)\sin(x-t)\,dt$$

とおくとき，以下の各問いに答えよ．ただし，$|x|<1$ とする．

（１）　$f_n(x)$ を求めよ．

（２）　$\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ を求めよ．