

第4講 外積の定義と計算

Point 1 外積の定義と計算規則

1. ベクトルの外積

2つの空間ベクトル $\vec{a}, \vec{b}$ に対して, $\vec{a}, \vec{b}$ の外積 $\vec{a} \times \vec{b}$ を次のように定義する.

- 1) $\vec{a}, \vec{b}$ が1次従属のときは $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$
- 2) $\vec{a}, \vec{b}$ が1次独立のときは $\vec{a} \times \vec{b}$ を次のように定める.
 - () $\vec{a} \times \vec{b}$ は $\vec{a}, \vec{b}$ 両方に垂直な方向.
 - () $\vec{a}$ を $\vec{b}$ に 180° 以下の角度で回転して重ね合わせるとき, 右ネジの進む向き.
 - () $\vec{a} \times \vec{b}$ の大きさは $\vec{a}, \vec{b}$ の張る平行四辺形の面積

(注1) $\vec{a}, \vec{b}$ が平行四辺形を張らないときは $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$ となる.

(注2) 一般に, $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$ である.

(注3) 外積は「右手系」の座標系においてのみ定義することとする.

2. 外積の計算規則

- (1) $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$
- (2) $(k\vec{a}) \times \vec{b} = k(\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{a} \times (k\vec{b})$
- (3) $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}, (\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$

(例題 1 外積の定義と計算規則)

(1) 外積の定義にもとづいて $\begin{matrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_0 \\ \hat{A}_1 & \hat{A}_1 \\ \hat{e}_0 & \hat{e}_0 \end{matrix} \times \begin{matrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_0 \\ \hat{A}_1 & \hat{A}_1 \\ \hat{e}_0 & \hat{e}_0 \end{matrix}$ を計算せよ.

(2) 座標空間における異なる 3 点 O, A, B に対して,
 $\begin{matrix} \vec{OA} & \vec{OB} \\ \vec{OA} & \vec{OB} \end{matrix} = 0$
 が成り立つとき 3 点 O, A, B はどのような位置関係にあるか.

(2) 次の各外積の計算規則が成り立つことを確認せよ.

(オ) $\begin{matrix} \vec{a} & \vec{b} \\ \vec{a} & \vec{b} \end{matrix} = - \begin{matrix} \vec{b} & \vec{a} \\ \vec{b} & \vec{a} \end{matrix}$

() $\begin{matrix} \vec{a} & \vec{b} \\ \vec{a} & \vec{b} \end{matrix} = k \begin{matrix} \vec{a} & \vec{b} \\ \vec{a} & \vec{b} \end{matrix} = \begin{matrix} \vec{a} & \vec{b} \\ \vec{a} & \vec{b} \end{matrix} \begin{matrix} \vec{a} & \vec{b} \\ \vec{a} & \vec{b} \end{matrix}$

() $\begin{matrix} \vec{a} & \vec{b} & \vec{c} \\ \vec{a} & \vec{b} & \vec{c} \end{matrix} = \begin{matrix} \vec{a} & \vec{b} & \vec{c} \\ \vec{a} & \vec{b} & \vec{c} \end{matrix} + \begin{matrix} \vec{a} & \vec{b} & \vec{c} \\ \vec{a} & \vec{b} & \vec{c} \end{matrix}, (\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$

Point 2 外積の成分表示

1. 外積の成分表示

$$\begin{pmatrix} \hat{a}_1 \\ \hat{a}_2 \\ \hat{a}_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \hat{b}_1 \\ \hat{b}_2 \\ \hat{b}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{a}_2 \hat{b}_3 - \hat{a}_3 \hat{b}_2 \\ \hat{a}_3 \hat{b}_1 - \hat{a}_1 \hat{b}_3 \\ \hat{a}_1 \hat{b}_2 - \hat{a}_2 \hat{b}_1 \end{pmatrix}$$

2. 外積の成分表示の証明

外積の計算規則を利用して計算すればよい.

【証明】

$$\begin{pmatrix} \hat{a}_1 \\ \hat{a}_2 \\ \hat{a}_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \hat{b}_1 \\ \hat{b}_2 \\ \hat{b}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{a}_1 \\ \hat{a}_2 \\ \hat{a}_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \hat{b}_1 \\ \hat{b}_2 \\ \hat{b}_3 \end{pmatrix} \quad \text{とおく. 外積の定義より}$$

$$\begin{pmatrix} \hat{a}_1 \\ \hat{a}_2 \\ \hat{a}_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \hat{b}_1 \\ \hat{b}_2 \\ \hat{b}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{a}_1 \\ \hat{a}_2 \\ \hat{a}_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \hat{b}_1 \\ \hat{b}_2 \\ \hat{b}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{a}_1 \\ \hat{a}_2 \\ \hat{a}_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \hat{b}_1 \\ \hat{b}_2 \\ \hat{b}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{a}_1 \\ \hat{a}_2 \\ \hat{a}_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \hat{b}_1 \\ \hat{b}_2 \\ \hat{b}_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \hat{a}_1 \\ \hat{a}_2 \\ \hat{a}_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \hat{b}_1 \\ \hat{b}_2 \\ \hat{b}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{a}_1 \\ \hat{a}_2 \\ \hat{a}_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \hat{b}_1 \\ \hat{b}_2 \\ \hat{b}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{a}_1 \\ \hat{a}_2 \\ \hat{a}_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \hat{b}_1 \\ \hat{b}_2 \\ \hat{b}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{a}_1 \\ \hat{a}_2 \\ \hat{a}_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \hat{b}_1 \\ \hat{b}_2 \\ \hat{b}_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \hat{a}_1 \\ \hat{a}_2 \\ \hat{a}_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \hat{b}_1 \\ \hat{b}_2 \\ \hat{b}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{a}_1 \\ \hat{a}_2 \\ \hat{a}_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \hat{b}_1 \\ \hat{b}_2 \\ \hat{b}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{a}_1 \\ \hat{a}_2 \\ \hat{a}_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \hat{b}_1 \\ \hat{b}_2 \\ \hat{b}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{a}_1 \\ \hat{a}_2 \\ \hat{a}_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \hat{b}_1 \\ \hat{b}_2 \\ \hat{b}_3 \end{pmatrix}$$

が成り立つことに注意すると

$$\begin{pmatrix} \hat{a}_1 \\ \hat{a}_2 \\ \hat{a}_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \hat{b}_1 \\ \hat{b}_2 \\ \hat{b}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{a}_1 \\ \hat{a}_2 \\ \hat{a}_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \hat{b}_1 \\ \hat{b}_2 \\ \hat{b}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{a}_1 \\ \hat{a}_2 \\ \hat{a}_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \hat{b}_1 \\ \hat{b}_2 \\ \hat{b}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{a}_1 \\ \hat{a}_2 \\ \hat{a}_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \hat{b}_1 \\ \hat{b}_2 \\ \hat{b}_3 \end{pmatrix}$$

$$= a_1 b_1 \hat{e}_x \times \hat{e}_x + a_1 b_2 \hat{e}_x \times \hat{e}_y + \cdots + a_3 b_3 \hat{e}_z \times \hat{e}_z$$

$$= (a_2 b_3 - a_3 b_2) \hat{e}_x + (a_3 b_1 - a_1 b_3) \hat{e}_y + (a_1 b_2 - a_2 b_1) \hat{e}_z$$

$$\begin{pmatrix} \hat{a}_2 b_3 - a_3 b_2 \\ \hat{a}_3 b_1 - a_1 b_3 \\ \hat{a}_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

となる.

(例題2 外積の成分表示)

次の各計算をせよ.

(1)
$$\begin{pmatrix} \hat{e}_6 \\ \hat{a}_9 \\ \hat{a}_0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \hat{e}_4 \\ \hat{a}_6 \\ \hat{a}_0 \end{pmatrix}$$

(2)
$$\begin{pmatrix} \hat{e}_{123} \\ \hat{a}_{124} \\ \hat{e}_{125} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \hat{e}_{22} \\ \hat{a}_{123} \\ \hat{e}_{24} \end{pmatrix}$$

(3)
$$\begin{pmatrix} \hat{e}_1 \\ \hat{a}_2 \\ \hat{a}_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \hat{e}_4 \\ \hat{a}_5 \\ \hat{a}_6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \hat{e}_7 \\ \hat{a}_8 \\ \hat{a}_9 \end{pmatrix}$$

(4)
$$\begin{pmatrix} \hat{e}_1 \\ \hat{a}_2 \\ \hat{a}_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \hat{e}_4 \\ \hat{a}_5 \\ \hat{a}_6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \hat{e}_7 \\ \hat{a}_8 \\ \hat{a}_9 \end{pmatrix}$$

(例題3 外積の成分表示)

(1) 2つのベクトル $a = \begin{pmatrix} \hat{a}_1 \\ \hat{a}_2 \\ \hat{a}_3 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} \hat{b}_1 \\ \hat{b}_2 \\ \hat{b}_3 \end{pmatrix}$ の両方に垂直な単位ベクトルを外積を利用して求めてみよ.

(2) 3点 $A(2, 1, 3), B(1, 1, -1), C(2, -1, 1)$ を頂点とする三角形の面積を外積を利用して求めてみよ.

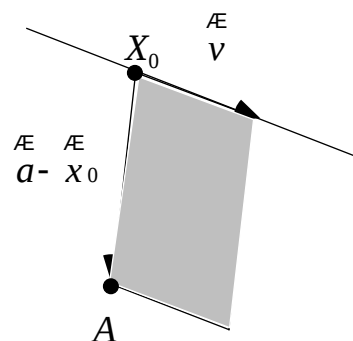
Point 3 外積の応用

1. 点と直線の距離

位置ベクトル $\vec{x}_0$ の点 X_0 を通る
 方向ベクトル $\vec{v}$ ($\neq 0$) である直線
 と位置ベクトル $\vec{a}$ の点 A の距離
 h は

$$h = \frac{|\vec{a} - \vec{x}_0 \wedge \vec{v}|}{|\vec{v}|}$$

で与えられる.



2. ねじれの位置にある 2 直線の共通垂線の長さ

座標空間において, ねじれの位置にある 2 直線

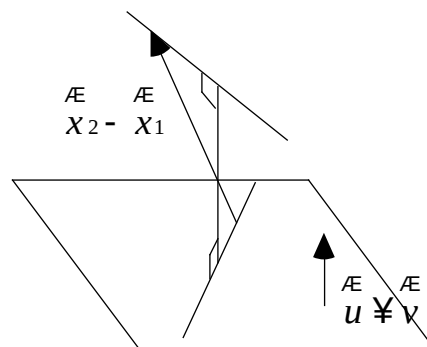
$$l: \vec{x} = \vec{x}_1 + s\vec{u} \quad (s \in \mathbb{R})$$

$$m: \vec{x} = \vec{x}_2 + t\vec{v} \quad (t \in \mathbb{R})$$

の距離 h は

$$h = \frac{|(\vec{x}_1 - \vec{x}_2) \wedge (\vec{u} \wedge \vec{v})|}{|\vec{u} \wedge \vec{v}|}$$

で与えられる.



(注) 証明は, 1つの直線を含みもう1つの直線に平行な平面を考え, その平面の法線ベクトル $\vec{u} \wedge \vec{v}$ 方向にベクトル $\vec{x}_2 - \vec{x}_1$ を正射影すると考えればよい.

(例題4 外積の応用 「座標空間における点と直線の距離」)

座標空間において, 定点 $A(1, 2, 3)$ を通り方向ベクトル $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ の直線 ℓ と点 $B(1, 1, 1)$ の距離 d を求めよ.

(例題 5 外積の応用 「ねじれ 2 直線の共通垂線の長さ」)

座標空間に点 $A(1, 2, -1)$ を通り方向ベクトル $\begin{matrix} \hat{e}_1 \\ \hat{A}_3 \\ \hat{A}_4 \\ \hat{e}_1 \end{matrix}$ の直線 ℓ

と点 $B(-1, 3, 0)$ を通り方向ベクトル $\begin{matrix} \hat{e}_2 \\ \hat{A}_1 \\ \hat{A}_1 \\ \hat{e}_1 \end{matrix}$ である直線 m がある .

このとき , 2 直線 ℓ, m の共通垂線の長さ d を求めよ .

(例題6 外積の応用 「スカラー3重積と平行6面体の体積」)

(1) 平行六面体上の同一平面上にない3辺を OA, OB, OC とするとき, この平行六面体の体積は

$$V = |(\overset{\wedge}{OA} \overset{\wedge}{OB}) \overset{\wedge}{OC}|$$

で与えられることを示せ.

(2) 4点

$$A(-1, -1, -1), B(0, 1, 0), C(1, -2, 0), D(-2, 0, 1)$$

を頂点とする四面体の体積 V を求めよ.

(注) $(\hat{a} \hat{b}) \hat{c}$ の形の式を「スカラー3重積」という.

第5講 ベクトルの図形への応用(2)

Point 1 内積・外積の図形への応用(1)

1. ベクトルの内積・外積

ベクトルの基本機能は加法(「つなぐこと」)とスカラー倍(「のばすこと」)であった。しかし、平面ベクトルや空間ベクトルを使う場合は、長さや角度などが重要になることも多く、そのような場合には内積や外積が有効なことが多い。

一般に、ベクトルに関する問題の解き方として

長さや角度に関係がない問題	分点の公式
長さや角度に関係がある問題	内積・外積

と考えるとよい。

(注) 大学以後の線形代数学の教科書は上の2つに分けてかかれている。本来、ベクトルの本質である1次結合を基本にしている問題と、本質でない長さや角度を同じように扱うのは、ベクトルの理論を無視した議論なのである。

2. 垂直条件

ゼロベクトルでないベクトル $\overset{AE}{a}, \overset{AE}{b}$ に対して、
 $\overset{AE}{a}, \overset{AE}{b}$ が直交 $\overset{AE}{a} \diamond \overset{AE}{b} = 0$
 が成り立つ。