

第4講 因数定理と剰余定理

Point 因数定理と剰余定理 (1)

1 . 剰余定理と因数定理

多項式の割り算を実際に行うのは面倒であるが，
「1次式で割る場合の余りの計算」については次のような
定理が成り立つ．

【剰余定理】

多項式 $f(x)$ を1次式 $x - \alpha$ で割った余りは $f(\alpha)$ と
なる．

【因数定理】

多項式 $f(x)$ が1次式 $x - \alpha$ で割り切れるための条件
は $f(\alpha) = 0$ である．

(例1) 多項式 $x^3 + x^2 + 2x + 3$ を1次式 $x - 1$ で割った
ときの余りは7となる．また，1次式 $2x - 2$ で
割ったときの余りも7となる．

(例2) 因数定理より，多項式 $x^3 - x^2 + 3x - 10$ は1次式
 $x - 2$ で割り切れる．

2 . 因数定理の効用

因数定理とは

多項式の簡単な1次因数 (= 1次式の約数) を発見
するための定理
である．

多項式のわり算は面倒であるので，多項式 $f(x)$ を実際
に $x - \alpha$ で割り切れるかどうかを組立乗法で割って調べる
のは大変であるが， $f(\alpha)$ の計算は比較的簡単であるという
のがこの定理の存在意義である．

(例題 1 因数定理・剰余定理の準備)

多項式 $f(x) = x^3 + 2x^2 - 4x + 5$ に対して，次の各値または式を求めよ．

- (1) $f(1)$
- (2) $f(-2)$
- (3) $f(a^2)$
- (4) $f(x-1)$

(例題2 因数定理・剰余定理)

- (1) 因数定理・剰余定理とはどのような定理か．また，因数定理・剰余定理にはどのような有効性があるのか．
- (2) 因数定理・剰余定理を証明せよ．

(例題 3 因数定理・剰余定理の練習)

- (1) 多項式 $f(x) = x^4 + x^3 + x^2 + 1$ を $g(x) = x - 1$ で割ったときの余りを求めよ .
- (2) 多項式 $f(x) = x^4 + x^3 + x^2 + 1$ を $g(x) = 3x - 6$ で割ったときの余りを求めよ .
- (3) 多項式 $f(x) = x^4 + x^3 + x^2 + 1$ を $g(x) = 2x + 1$ で割ったときの余りを求めよ .
- (4) 多項式 $f(x) = 36x^4 + ax^3 + 18x + 27$ が $g(x) = 2x + 3$ で割り切れるように定数 a の値を定めよ .

(例題4 因数定理・剰余定理の練習)

多項式 $f(x) = x^{10}$ を次の各2次式で割ったときの余りを求めよ.

(1) $x^2 - 3x + 2$

(2) $x^2 + x + 1$

(3) $(x - 2)^2$

(例題5 因数定理・剰余定理の練習)

- (1) 多項式 $f(x)$ を $x - 2$ で割ったときの余りは 23, $x + 1$ で割ったときの余りは -10 になる. このとき, $f(x)$ を $(x - 2)(x + 1)$ で割ったときの余りを求めよ.
- (2) 多項式 $f(x)$ を $x^2 - 4x + 3$ で割ったときの余りは $3x$, $x^2 - 3x + 2$ で割ったときの余りは 3 になるという. このとき, $f(x)$ を $x^2 - 5x + 6$ で割ったときの余りを求めよ.

(例題6 因数定理・剰余定理の練習)

- (1) 多項式 $f(x)$ を $x+1$ で割ったときの余りは 10 , $x^2 - x + 1$ で割ったときの余りは $-3x + 1$ になるという .
このとき , $f(x)$ を $x^3 + 1$ で割ったときの余りを求めよ .
- (2) $x^2 + 1$ で割ると $3x + 2$ 余り , $x^2 + x + 1$ で割ると $2x + 3$ 余るような x の多項式 $f(x)$ のうち , 次数が最小のものを求めよ .