# 代数学の基本定理の周辺

１９８９．１０．２９．

ｂｙ　Ａｍｕ

Ｔｈ．（ Gauss ）

複素数を係数とするｎ次方程式

$$z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n = 0$$

は複素解を必ずもつ。

もう少し気取った言い方をすると，

Ｔｈ．'　複素数体Ｃは代数的閉体である。

この定理が"代数学の基本定理"と言われているものである。ここでは，この定理を眺めながら，数学のお話をしてみたいと思う。まず，簡単な historical sketch から始めよう。この定理を発見したのは，上にも書いたとおり，数学史上最大の数学者という評判のＣ．Ｆ．Ｇａｕｓｓ である。そして，彼の学位論文（1799.7.16 ）で証明された定理が上の定理である。証明されてしまえば大した定理ではないが（この定理が要らないと言っているわけではない！），それまでに， d'Alembert ，Lagrange ，Euler という重鎮がことごとく証明に失敗しているということから考えると，やはり Ｇａｕｓｓ はすごいのだろう（数学では一般に，"破られた論文の数で業績の価値が決まる。"という原理が成り立つと言われている。ただし，５，６年前のビーベルバッハ予想の解決はこの限りではないとも言われている。"例外のない定理はつまらない"とは１世紀前の代数幾何のイタリア学派の言である。）　ちなみに筆者自身は，彼の数論における業績から，やはりＧａｕｓｓは偉いと思う。

## §．1　微積分による証明

話を代数学の基本定理にもどそう。Ｇａｕｓｓはこの定理に本質的に異なる証明を少なくとも４つ与えている。第１・第４証明は平面$R^2$の位相的考察が本質的で，第２証明は終結式を用いた代数的証明，第３証明は積分による解析的証明である。ここでは，記念すべき第１証明を現代的にアレンジして紹介しよう：

$$f(z)=z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_{n-1}z+a_n$$

において，

$$z=x+iy=r(\cos\theta+i\sin\theta)\quad(x,\ y\in R,\ r\geqq 0)$$

とおき，

$$u(x,\ y)=\mathrm{Re}(f(z)),\ v(x,\ y)=\mathrm{Im}(f(z))$$

（Ｒｅ，Ｉｍ　は　複素数の real part, imaginary part を表す。）

とする。

証明したいことは　$u(x,\ y)=v(x,\ y)=0$　となる点$(x_0,\ y_0)$の存在である。そこで　Ｇａｕｓｓ　は$x$，$y$の多項式で表された曲線

$$u(x,\ y)=0\quad,\quad v(x,\ y)=0$$

の概形を考える。これらの曲線が交点をもてば定理の証明が終るわけである。

ところがこれはそれぞれの曲線を極座標表示すると，de Moivre の定理から，

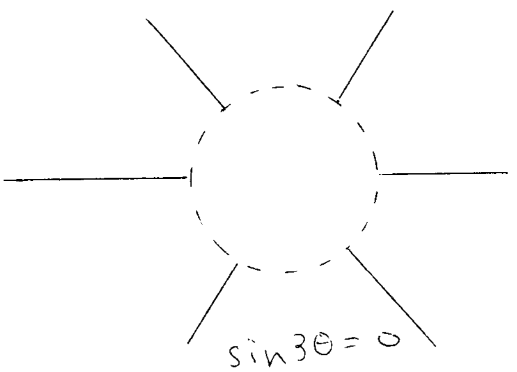
$$u(x,\ y)=r^n\cos n\theta+a_1r^{n-1}\cos(n-1)\theta+\cdots$$

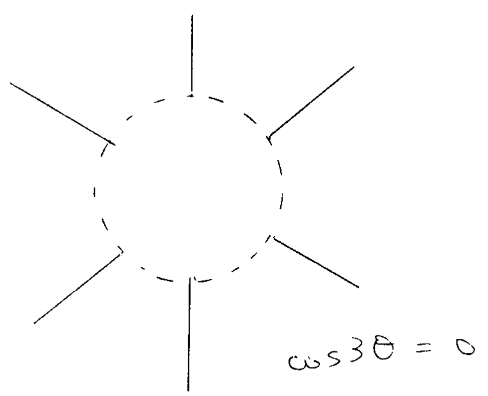
$$v(x,\ y)=r^n\sin n\theta+a_1r^{n-1}\sin(n-1)\theta+\cdots$$

となることから$r$が十分大きければ，

$u(x,\ y)=0$　という曲線は　$\cos n\theta$という直線に十分近い

$v(x,\ y)=0$　という曲線は　$\sin n\theta$という直線に十分近い




したがって，２曲線　　$u(x,\ y)=0$，$v(x,\ y)=0$　は交わるというわけである。

□

以上が　Ｇａｕｓｓの第１証明であるが，「厳密さに欠けて気持が悪い。」というのが実感だと思う。だいたい昔の論文はみんな気持が悪い。Ｒｉｅｍａｎｎの教授就任演説の有名な論文を読んだときもとても気持が悪かった。昔の論文で気持が良かったのはエルランゲン・プログラムとＥ．Ｇａｌｏｉｓの方程式論ぐらいのものだ。だから，昔の論文を読むときは，気持悪さは仕方ないと思ってある程度我慢して，「気持悪さを抜け切った爽快感がある。」と思うくらいおおらかに読まなければならない。と思う。

けれども，気持悪いものは気持が悪いので，微積分や線形代数の教科書によくあるCauchyの証明を，今度は，筆者流にアレンジして書いておこう：

いま，１次以上の多項式$f(z)$に対して，複素変数の実数値関数$|f(z)|$を考えると，これは連続であって，

$$|f(z)| \to \infty \qquad (|z| \to \infty)$$

したがって，$|f(z)|$の最小値を与える$z$の値　$\alpha \in C$　が存在する。(1)

ところで多項式の計算から，

$f(\beta) \neq 0$　となる任意の$\beta$に対して　$|f(x)| < |f(\beta)|$　となる$x$が存在する(2)

ことがわかり，したがって，　$f(\alpha) = 0$　□

何とも気持ちの良い証明ではないか。要約すると，

"関数$|f(z)|$の最小値は存在し，０に他ならない"

となって，ものすごく明快だ。ただ，数学の訓練を受けていない人（大学１年の前期程度）には下線部がわからないかもしれない。そういう人のために一応解説しておこう：

（１）$|f(z)| \to \infty \quad (|z| \to \infty)$ より，

$$\exists r > 0 \quad |z| > r \Rightarrow |f(z)| > |f(0)|$$

よって，$|f(z)|$の最小値が存在するとすれば，$z$が

$$A = \{z \in C \mid |z| \leqq r\}$$

を動くときを考えれば十分であり，Ａが compact　で，$|f(z)|$が連続なことから，$|f(z)|$は$\alpha \in A$で最小値をもつ。

(2) $f(\beta)\neq 0$とする。このとき，

$$f(z)=f(\beta)+B(z-\beta)^{k}+(z-\beta)^{k+1}g(z) \qquad (k\geqq 1)$$

と変形できる。$\omega$を$-f(\beta)/B$ のk乗根の1つとし，$\lambda>0$とすると，

$$\begin{aligned}|f(\beta+\lambda\omega)| &= |f(\beta)+B\lambda^{k}\omega^{k} \\ &\qquad +\lambda^{k+1}\omega^{k+1}g(\beta+\lambda\omega)| \\ &= |f(\beta)-\lambda^{k}f(\beta) \\ &\qquad +\lambda^{k+1}\omega^{k+1}g(\beta+\lambda\omega)| \\ &\leqq |f(\beta)||1-\lambda^{k}| \\ &\qquad +\lambda^{k+1}|\omega^{k+1}g(\beta+\lambda\omega)|\end{aligned}$$

より，$\lambda>0$を十分小さくすると，第2項はいくらでも小さくなり，第1項は$|f(\beta)|$より小。$\lambda$の次数を考慮すると，右辺を$|f(\beta)|$より小さくできて$f(\beta)$の最小性に反する。したがって，　$f(\beta)=0$。

(注) (2)は「技巧的すぎる。」と思うかもしれないが，多項式の local behaviourは最低次の項に支配される（ここでの”支配”というのは technical term ではありません。）という事実は明らかだから，上の変形は全く単純なものであることに注意しておく。

## §．２　複素解析的証明

これまで，主に複素数体ＣをＲ$^2$と考えて，その上で微積分をしてきたが，やはりＣはＣとして考えてみよう。以下，関数論的（＝複素解析的）な証明をいくつか紹介しよう：

（解析的証明１）

Liouville の定理を使って証明する：

Ｔｈ．（Liouville ）

全平面で有界な正則関数は定数関数である。

この定理を使うと，

$f(z)$ が０になることがないとすると，$1/f(z)$ は全平面で正則である。

$|z| \to \infty$ のとき $|f(z)| \to \infty$ より $f(z)$ は有界。

したがってLiouville の定理より，$f(z)$ は定数。これは矛盾。 □

となって簡単に証明できる。次は”平均値の性質”を使った証明を述べよう：

（解析的証明２）

Ｐｒｏｐ．（平均値の性質）

正則関数に対して，

$$f(c) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(c + re^{is})\,ds$$

が成り立つ。

この定理を使うと，

f（z）が0になることがないとすると，1／f（z）は全平面で正則である。

平均値の性質から，

$$\frac{1}{f(0)} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1}{f(re^{is})}\,ds \qquad (3)$$

ここで，$r\to\infty$ とすると，

$$0 < |1/f(0)| \leqq (3)\text{の右辺} \to 0$$

となって矛盾する。

（注）じつは，この証明法は実数を使ってやったGaussの第3証明を複素解析的に書き直したものである。また，平均値の性質から直ちに得られる”最大値の原理”

Prop.（最大値の原理）

f（z）が定数である場合をのぞけば，zの関数｜f（z）｜は

D（=domain=connected open）において最大値を持たない。

により，Cauchy の証明の後半は，｜1／f（z）｜に最大値の原理を適用することで，煩雑な計算は不要になる。

（解析的証明3）

今度は Rouché の定理を使った証明法を紹介しよう。

Th.（Rouché）

Dは有界領域で，Dの境界は有限個の正則 Jordan 閉曲線からなるとする。

f（z），g（z）は$\overline{D}$で正則とし，$\partial D$上で，$|f(z)| > |g(z)|$

とすると，f（z）とf（z）+g（z）はD内に零点を同じ個数だけ持つ。

ただし，k位の零点はkコと数える。

この定理を使うと，代数学の基本定理は自明である。実際，

$D=\{z\in C \mid |z|<R\}$，$f(z)=z^n$，$g(z)=a_1z^{n-1}+\cdots+a_n$

に対して，$R>0$ を十分大きくとることにより，定理の条件をすべてみたすようにできることから，定理はただちに得られる。

（注）実は上の Rouché の定理は，平面上の閉曲線の位数（＝回転数）の定理に書き換えられる。つまり，関数論的な定理ではなく純粋に位相的な定理だと考えることが可能である。

ここまで，複素解析を使った証明法を紹介してきた。もうすこしカッコつけて言うと，complex analytic な カテゴリーで議論してきたわけだ。こうすると，証明が著しく簡易化された。これは理由のないことではない。すなわち，Cのもっている様々な性質（体としての性質，位相空間としての性質，微分多様体としての性質，ｅｔｃ）のうちの最も強力なもの（＝複素多様体としての性質）をことごとく使ってきたからだ。そこで，次の節ではこの立場をより強調して，”究極”ともいえる complex analytic manifold の構造を表に出した証明法を紹介しよう。

## §．3　複素解析幾何的証明

これまで議論してきたことを1次元複素多様体（＝リーマン面）論の立場でまとめ，代数学の基本定理を多様体論的に理解しておこう：

（注）以下，" リーマン面" と言えば connected とする。ただし，compactness は仮定しない。

**Th．1**（正則写像の局所的性質）

X，Yをリーマン面，$f:X\to Y$を非定値正則写像，$b=f(a)$ とするとき，ある自然数kとX，Y上のチャート$\phi:U\to V$，$\psi:U'\to V'$が存在して次をみたす：

1）$\phi(a)=0\ (a\in U)$，$\psi(b)=0\ (b\in U')$

2）$f(U)\subseteq U'$

3）写像$F=\psi\circ f\circ\phi^{-1}:V\to V'$ は

$$F(z)=z^k\quad(\forall z\in V)$$

で与えられる。

（注）代数学の基本定理を証明する際には，この定理は，

" 正則写像は local には，グルグル回しである。"

と読めば，それだけで十分である。

このことについては，次の節で再びふれることにする。

**Cor．1**

X，Yをリーマン面，$f:X\to Y$を非定値正則写像 とすると，fは開写像である。

**Cor．2**

X，Yをリーマン面，$f:X\to Y$を正則写像かつ単射 とすると，

fはXから$f(X)$の上への双正則写像である。

Ｃｏｒ．３（最大値の原理）

Ｘをリーマン面，$f : X \to C$ を非定値正則関数　とすると，

$|f|$ の最大値は存在しない。

Ｔｈ．２

Ｘ，Ｙをリーマン面，Ｘはコンパクト，$f : X \to Y$ を非定値正則写像　とするとき，

Ｙはコンパクト　かつ　ｆは全射である。

Ｃｏｒ．４

コンパクト・リーマン面上の正則関数は定数値関数である。

Ｃｏｒ．５

リーマン球面 $P^1$ 上の有理型関数は有理関数である。

Ｔｈ．３（ Liouville　の定理）

有界な正則関数　$f : C \to C$　は定数値関数である。

（Ｐｆ）

“リーマンの除去可能特異点定理”から，ｆは $f : P^1 \to C$ に複素解析的に延長される。したがって，主張は上の系４より明白。

Ｔｈ．４（代数学の基本定理）

$$f(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n = 0 \quad (n \geqq 1,\ a_i \in C)$$

とおくとき，

$$\exists a \in C \quad f(a) = 0$$

（Ｐｆ）

正則関数　$f : C \to C$　は正則写像として，$f : P^1 \to P^1$ $(f(\infty) = \infty)$ と延長できる。したがって，ｆは全射であり，とくに，$0 \in f(C)$。

何もかもがうまくいきすぎている理論展開ではないか。 analytic manifold　のカテゴリーでは，代数学の基本定理は　もはや morphism （構造型射）の一性質にすぎないのだ。

## §．4　ふたたび幾何学的証明

前節の定理１の結果を参考に，§１のコーシーの証明の後半を書きかえてみよう。すなわち，次の命題を topological　に証明しようというわけである：

**Ｐｒｏｐ．**

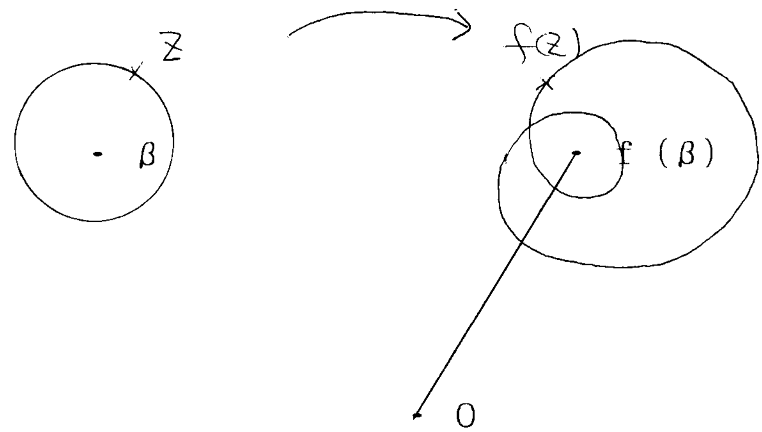
１次以上の多項式ｆ（ｚ）に対して，

$f(\beta) \neq 0$　となる任意の$\beta$に対して　$|f(x)| < |f(\beta)|$

となるｘが存在する。

（Ｐｆ）

写像　$f : C \to C$　（$z \to f(z)$）を考える。図のように，




点$\beta$のまわりの半径ｒの円上をｚが動くとき，ｆ（ｚ）がどんな図形をえがくかを，ｒが十分小さいときに考えてみる：

$z = \beta + \omega$　として点$\beta$のまわりでｆ（ｚ）をテーラー展開すると，

$$f(z) = f(\beta) + f'(\beta)\,\omega + \cdots + f^{(n)}(\beta)\,\omega^n / n!$$

ここで，$f'(\beta)$，$f^{(2)}(\beta)$，・・，$f^{(n)}(\beta)$　には０でないものがあるから，そのなかの最初のものを$f^{(k)}(\beta)$とおくと，

$$f(z) = f(\beta) + f^{(k)}(\beta)\,\omega^k / k! + (\omega\text{の高次の項})$$

ｒが十分小さければ，ｆ（ｚ）は

$$g(z) = f(\beta) + f^{(k)}(\beta)\,\omega^k / k!$$

とほぼ同じであり，ｚが$\beta$のまわりを１回転するとき，ｆ（ｚ）はｆ（$\beta$）のまわりをｋ回まわることになる。このとき，ｆ（ｚ）は点０と点ｆ（$\beta$）を結ぶ線分とどこかで交わる。したがって，ｆ（$\beta$）より絶対値の小さいｆ（ｚ）がある。　□

この証明の気持は良くわかる。でも下線部のところがガウスの第１証明同様，やっぱり「気持悪い」ものになっている。前節の定理１はここの部分をキッチリやっている。この当たりが現代数学的手法の強みだろう。けれども，複素解析的なカテゴリーで議論しているので，上の証明の気持が直接には伝わってこない。そこで，この証明の気持をそのまま現代数学にする方法を紹介しよう。要は”何回転するか”を数学的に正確に，しかも割と簡単に計算できるように定義することである。　「そんなのは”コーシーの積分公式”を使って winding number を調べればエエやないか。」と言う声が聞こえてきそうだが，ここでの解答にはなっていない。そこで登場するのが，”写像度”の概念である：

Ｄｅｆ．

球面$S^n$の$n$次ホモロジー群は加法群$Z$と同形である。したがって，

連続写像　$f : S^n \to S^n$　の定める準同形　$f_* : H_n(S^n) \to H_n(S^n)$

を考えると，

$$\exists m \in N \quad f_*(a) = ma$$

このmを　$\deg f$　と表し，ｆの写像度とよぶ。

（注）簡単なことだが，上の定義が well-difined であることに注意しておく。

ちょっと難かしくなってきたが我慢してほしい。そもそも幾何学的な概念をキチッと定義すること自体が難かしいのである。筆者は，数理的現象を記述しようとするとき，どこかで代数的な（あるいは組み合わせ論的な）カテゴリーにもってこなければならないのではないかと思っているのだが，上の代数的位相幾何学による写像度定義では，はじめから Abel 群のカテゴリーにもっていってしまっているので，幾何学的イメージがつかみにくいのであろう，しかし，その分だけしっかりした議論ができるということでもある。

上の定義の意味は，次の２定理によってだいたい理解できるだろう：

Ｔｈ．

連続写像　$h_k : S^1 \to S^1$　$(h_k(\theta) = \cos k\theta + i \sin k\theta)$ に対して，

$$\deg h_k = k$$

が成り立つ。

Th. ( Hopf )

$f, g : S^n \to S^n$ を連続写像とするとき，

$f$と$g$がホモトープ $\Leftrightarrow$ $\deg f = \deg g$

最初の定理は，写像度の定義の動機からいっても実にこうあるべきという当り前の主張である。２個めの定理により，写像度を計算すればその写像がどの写像とホモトープかがわかるわけである。それでは，代数的位相幾何学を使った最もポピュラーな代数学の基本定理の証明法を紹介しよう：

まず，

$$f(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n$$

は複素平面Cから複素平面Cへの連続写像を定義するが，これを$R^2$から$R^2$への連続写像とみなす。このとき，

$$f_t(z) = z^n + (1-t)(a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n)$$

とおくと，これは，$f_0 = f$ から $f_1(z) = z^n$への ホモトピー である。ここで，$|z| \to \infty$ のとき $|f_t(z)| \to \infty$ より，$S^2 = R^2 \cup \{\infty\}$ と考えて，ホモトピー $\tilde{f}_t : S^2 \to S^2$ $(0 \leqq t \leqq 1)$ を，

$$\tilde{f}_t | R^2 = f_t, \quad \tilde{f}_t(\infty) = \infty$$

によって定義することができる。よって，

$$\deg \tilde{f}_0 = \deg \tilde{f}_1 = n^{(*)}$$

ところが，$f(z) = 0$が解を持たないとすると，$\tilde{f}_0$は全射ではなく，したがって定値写像にホモトープとなり，

$$\deg \tilde{f}_0 = 0$$

これは $n \geqq 1$ に矛盾する。よって，$f(z) = 0$は解をもつ。 □

（注）（＊）の部分の計算は大切な部分ではあるが，ややめんどうであるので省略する。とにかく証明の感じだけでもつかんで欲しい。

上では$S^2$から$S^2$への連続写像に対する写像度を使ったが，コーシーの証明法により近い，$S^1$から$S^1$への連続写像に対する写像度を使った証明法を示そう：

まず，

$$f(z)=z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_{n-1}z+a_n \quad (n\geqq 1)$$

に対して，$f(z)\neq 0 \quad (\text{for} \quad \forall z\in C)$ と仮定すると，

$$f_t(z)=\begin{cases} \dfrac{f(tz/(1-t))}{|f(tz/(1-t))|}\cdot\dfrac{|f(t/(1-t))|}{f(t/(1-t))} & (0\leqq t<1) \\ z^n & (t=1) \end{cases}$$

と定義したとき，これはtに関して連続であるから，

$$f_0(z)=1:S^1\to S^1 \quad , \quad f_1(z)=z^n:S^1\to S^1$$

のあいだのホモトピーになる。ところが，

$$\deg f_0=0 \neq n=\mathrm{def}\, f_1$$

となって矛盾。 □

次に，" 写像度" と関係の深い" 一致点定理" を使った証明方法をあげる：

Th. ( Brower )

$f:D^2\to D^2$ を $f(S^1)\subseteq S^1$，$\deg(f|S^1)\neq 0$ をみたす連続写像とするとき，fと任意の連続写像 $g:D^2\to D^2$ は一致点をもつ。

(注) $g=id$ とすれば " Browerの不動点定理" が得られる。

この定理を使えば，代数学の基本定理を次のように示すことができる：

まず，

$$f(z)=z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_{n-1}z+a_n \quad (n\geqq 1)$$

に対して，

$$r=\max\{1,\ |a_1|+\cdots+|a_n|\}$$

とおくと，$|z|\leqq r$　なる$z$に対して，

$$|a_1 z^{n-1}+\cdots+a_n|\leqq|a_1||z|^{n-1}+\cdots+|a_n|$$
$$\leqq|a_1|r^{n-1}+\cdots+|a_n|$$
$$=r^{n-1}(|a_1|+\cdots+|a_n|)$$
$$\leqq r^n$$

であるから，

$$D^2=\{z\in C\mid |z|\leqq 1\}$$

とみて，連続写像　$g:D^2\to D^2$　を，

$$g(z)=-(a_1(rz)^{n-1}+\cdots+a_n)/r^n$$

により定義する。連続写像　$f:D^2\to D^2$　を　$f(z)=z^n$　で定義すれば，

$$f(S^1)\subseteq S^1,\ \deg(f|S^1)=n\neq 0$$

であるから，上記定理により，$f$と$g$は一致点をもつ。これを$z_0$とおくと，

$$(rz_0)^n=-a_1(rz_0)^{n-1}-\cdots-a_n$$

すなわち，$rz_0$は方程式$f(z)=0$の解である。

以上が，ホモロジーにより定義した写像度を利用した証明法の紹介であったが，ここでの証明の本質が，”写像度”よりもむしろホモトピー類$[S^n,S^n]$にあることは明白である。そしてここのところこそ，古典的な証明の「気持悪い」部分であった。そういえば，コーシーの積分定理の証明においてもこの辺の議論は「気持悪い」部分である。そこで，基本群（＝1次元ホモトピー群）の立場からこれまでの議論をきちんと formalize してまとめておこう：

まず　$S^1$　が　$C^*=C-\{0\}$の変位レトラクトであることに注意して，
$[X,C^*]$を$[X,S^1]$と identify できる。特に，

$$[S^1,C^*]=[S^1,S^1]$$

と考える。ところが，$\pi_1[S^1,1]\cong Z$　と identify できるから，以下，この対応により

$$[S^1,C^*]=Z$$

と identify する。

次に　$S_r=\{z\in C \mid |z|=r\}$ $(r>0)$　に対して，$[S_r, C^*]$ を，次の対応により，やはり，

$$[S_r, C^*]=Z$$

と identify する。すなわち，homeo

$$h_r : S^1\to S_r \ (z\mapsto rz)$$

によって，

$$[S_r, C^*]\to[S^1, C^*]=Z \ ([g]\mapsto[g\circ h_r])$$

が全単射になるから，これによって identify するわけである。

以上の準備の下に代数学の基本定理を証明する。

$$f(z)=z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_{n-1}z+a_n \quad (n\geqq 1)$$

を　連続写像　$f: C\to C$　と考える。

$f(z)=0$が解をもたないと仮定する。このとき　$f|S_r : S_r\to C^*$　の

ホモトピー類 $[f|S_r]\in[S_r, C^*]=Z$を考えることができる。このとき，$f$は

$C^*$において定値写像とホモトープだから，

$$\forall r>0 \quad [f|S_r]=0$$

一方，十分大きい$r$に対しては，

$$f|S_r\simeq\tilde{f}|S_r \quad (\text{ただし，}\tilde{f}\ \text{は}\ \tilde{f}(z)=z^n\text{で与えられる。})$$

が成り立つ。したがって，

$$[f|S_r]=[\tilde{f}|S_r]$$

ところが，

$$[\tilde{f}|S_r]=n^{(*)}\neq 0$$

より矛盾。 □

(注)（＊）の部分の計算は容易である。また，$f|S_r$のホモトピーの構成はこれまでの議論と同様におこなえばよい。

幾何学的証明の最後は，いかにも幾何学らしく，微分位相幾何学的方法で代数学の基本定理を証明しよう：

<u>Def.</u>

$f : M \to N$ を同じ次元の可微分多様体間の $C^\infty$ 写像，Mをコンパクト，$y \in N$ を regular value とするとき，$\# f^{-1}(y)$ を $f^{-1}(y)$ の点の個数と定義する。

（注）Mのコンパクト性から，$f^{-1}(y)$ は有限個の点からなり，上の定義は意味を持つことに注意する。

このとき，簡単な考察により，

$\# f^{-1}(y)$ はyの関数として locally constant

（ただし，yは regular value のみをとるとする。）

になる。

それでは代数学の基本定理の証明にはいる：

単位球面 $S^2 \subseteq R^3$ と $(0, 0, 1)$ からの立体射影

$$h_+ : S^2 - \{(0, 0, 1)\} \to R^2 \times 0 \subseteq R^3$$

を考える。ここで，$R^2 \times 0$ を複素平面Cと identify する。この同一視により，$R^2 \times 0$ から $R^2 \times 0$ への多項式写像

$$f(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n$$

は，$S^2$ から $S^2$ への写像

$$g(x) = \begin{cases} h_+^{-1} \circ f \circ h_+(x) & (x \neq (0, 0, 1)) \\ (0, 0, 1) & (x = (0, 0, 1)) \end{cases}$$

を定義する。このときgが可微分多様体 $S^2$ 上で $C^\infty$ になることは容易にわかる。

一方，

$$f'(z) = nz^{n-1} + a_1(n-1)z^{n-2} + \cdots + a_{n-1} \quad {}^{(*)}$$

は高々有限個の零点しかもたないので，$g$は有限個の critical points しか持たない。したがって$g$の regular values の集合は，$S^2 - \{$有限個の点$\}$となり，connected になる。したがって，locally constant function $\# g^{-1}(y)$はこの集合の上で定数でなければならず，それが0になるはずはない。critical values の集合は常に image になっていることに注意すると，$g$は全射でなければならない。 □

（注）（＊）の部分は $|f'(z)|^2 = \partial(u, v)/\partial(x, y)$ に注意してヤコビアンを計算している。

## §．5　代数学を使ったカッコイイ証明

なぜこの方法が”カッコイイ”かというと，代数を使っているからだ。単なる筆者の好みの問題である。それでも，「私はこの証明の方法が何となく好きだ。」ということを言わずにはいられない。約1年程前，東大の加藤先生が，京大の数理研でのシンポジウムで講演したときに，「類体論を信じるものは救われる。」と強調しておられたが，筆者はさらに一般に，「代数学を信じるものは救われる。」という気がする。とにかく本論に入ろう。きっとみんなにも代数学のヨサがわかってもらえると思う：

Ｔｈ．　C　は代数的閉体である。

（Ｐｆ）

代数以外で使うのは次の２つである：

（１）２次方程式　$x^2+ax+b=0$　($a,\ b\in C$) はC内に根をもつ。

（２）Ｒ上の奇数次の多項式は，Ｒ内に零点をもつ。（中間値の定理）

それでは証明を始める：

$\alpha\in\overline{C}$　とする。$[C:R]=2$ より

$\alpha$ はＲ上 algebraic

Ｋを$\overline{C}$におけるＲ（$\alpha$）のＲ上の Galois Closure，$G=\mathrm{Gal}(K/R)$ とすると，

（２）より，

$|G|=2^r$　(*)

ところが，p群は solvable より

$\exists G=G_0\supseteq G_1\supseteq\cdots\supseteq G_r=\{e\}$　s.t.　$[G_i:G_{i+1}]=2$

したがって，Ｇａｌｏｉｓの基本定理から，

$\exists R=K_0\subseteq K_1\subseteq\cdots\subseteq K_r=\overline{C}$　s.t.　$[K_{i+1}:K_i]=2$

（１）より　$r=1$　すなわち

$C=\overline{C}$　□

（注）（＊）の部分の証明：

Sを Gの2-Sylow subgroup とし，$[G:S]=[K^s:R]$ とする。このとき

$K^s/R$ は奇数次の分離拡大　　$\therefore \exists \xi \in K^s \quad K^s=R(\xi)$

ここで，$\xi$ の R上の最小多項式を $f(X)$ とすると，

$\deg f(X)=$ 奇数　　$\therefore \deg f(X)=1$

よって，

$K^s=R$　　　　　　$\therefore G=S$　　　　　　□

## §．６　あとがき

そもそも，筆者が”代数学の基本定理”に興味を持ったのは，”代数学の〜”とあるのに，その証明が algebraic　でない点であったと記憶している。（随分昔のことなので定かではないが，・・・）　図書館にある本なんかをちょっと調べても，「代数学の基本定理は topological　な定理である。」と書いてあったりする。実際，Ｇａｕｓｓの第１証明の本質的部分はそこにあった。（そこのところが「気持悪い」部分でもあったし，ホモトピーにより正当化されるべきところでもあった。）
そこで筆者が最初に考えたのは，図書館の本はああ言っているが，本当に，

Ｃ　が　algebraically closed　であることを純代数的に証明できないのか？

ということであった。でもこれは当り前のことであった。というのは，Ｃの構造を問題にしている以上，Ｃの定義に戻って考える必要がある。通常は，ＣはＲの拡大体として定義する。これは純粋に algebraic　に可能だ。（Ｃの topology に関しては無理だが，・・・）それではＲはどうか？通常Ｒはどのように定義するだろうか？微積分の教科書を見るまでもなく，完備順序体として定義する。このように，Ｒの定義が純代数的でない以上，どうも上の定理を純代数的に証明するのは無理のようだというわけである。

N.Bourbaki　の立場では，「Ｒの定義が純代数的でない」ということはより鮮明に表われている。Éléments（”数学原論”）では実数の定義が　Ｔｏｐ．Ｃｈ．４　にあることはよく知られている。けれども面白いことに，N.Bourbaki　は上の定理の証明を最も純代数っぽくやっている。実際，Ｒが極大順序体（極大順序体は奇数次方程式が解をもつことで特徴づけられる）であることを　Ｔｏｐ．Ｃｈ．８　で示してからあとは，純粋に代数的である。（”極大順序体の non-trivial　な代数拡大は$\sqrt{-1}$を添加した２次拡大しかない。”　Ａｌｇ．Ｃｈ．６　参照）
それでは，N.Bourbaki　の立場を一歩すすめて，

ＲやＣの topology を代数的に考えることはできないのだろうか？

整数論で，アデール環を考えるときなども，ＲやＣの topology は infinite place として他の代数的に位相を定める finite place とは区別する。代数幾何でも global field の位相は代数的に扱いやすい（c.f. Artin-Rees の補題 etc.）ideal-adic なものを導入したりはしない。佐藤幹夫先生などは，「ＲやＣの位相も$Z_p$，$Q_p$などのように代数的に定めるべきだ。」とよく言っておられるが，本当にできるのだろうか？筆者にはまだわからない問題である。

(参考文献)


| | | | |
|---|---|---|---|
| [１] | 秋月・鈴木 | 『代数Ｉ』 | (岩波全書) |
| [２] | 永田 | 『可換体論』 | (裳華房) |
| [３] | A.Weil | "Basic Number Theory" | (Springer) |
| [４] | ﾌｧﾝﾃﾞﾙ･ｳﾞｪﾙﾃﾞﾝ | 『現代代数学２』 | (東京図書) |
| [５] | N.Bourbaki | "Algèbre Ch.6" | (Hermann ) |
| [６] | N.Bourbaki | "Topologie Générale Ch.4" | (Hermann ) |
| [７] | N.Bourbaki | "Topologie Générale Ch.8" | (Hermann ) |
| [８] | 小平 | 『複素解析Ｉ』 | (岩波講座基礎数学) |
| [９] | 笠原 | 『複素解析　１変数解析関数』 | (実教) |
| [１０] | L.V.Ahlfors | "Complex Analysis" | (McGRAW-HILL ) |
| [１１] | O.Forster | "Lectures on Riemann Surfaces" | (Springer) |
| [１２] | 河田 | 『位相数学　II』 | (共立基礎数学講座) |
| [１３] | 田村 | 『トポロジー』 | (岩波全書) |
| [１４] | 服部 | 『位相幾何学Ｉ』 | (岩波講座基礎数学) |
| [１５] | 中岡 | 『不動点定理とその周辺』 | (岩波) |
| [１６] | J.Vick | "Homology Theory" | (Academic Press) |
| [１７] | J.W.Milnor | "Topology from the differential viewpoint" | (The University Press of Virginia Charlottesville) |
| [１８] | 弥永・佐々木 | 『現代数学対話』 | (朝倉書店) |
| [１９] | 山下 | 『ガロアへのレクイエム』 | (現代数学社) |
| [２０] | 山田 | 『代数曲線のはなし』 | (日本評論社) |
| [２１] | 砂川 | 『なんてったってモーツアルト』 | (東京書籍) |