# はしがき

本書は，初めて統計学を体系的に学ぼうとする文科系の大学生や，統計学の自習を目指す一般社会人を対象に，平易でコンパクトに書かれた入門的教科書である。

執筆者たちの長年にわたる文科系学生を対象にした統計学の教育経験から感じることは，多くの学生諸君が統計学を数学の一分野としか考えておらず,「数学が嫌いだから統計学も嫌いだ」と決めつけていることである。しかし，統計学と数学とはほんらい別物であるということに気づくと，ほとんどの学生が統計学に関心を示すようになる。ほんらいの統計学は，経済や政治などの社会現象のマクロ的な情報をできるだけ客観的に把握するために生まれた学問である。統計学的な考え方を理解するためには，高度な数学の予備知識は不要である。本書は，統計学的な考え方が身につくように，統計数理の展開よりも，考え方や意味づけの叙述に力点をおいて書かれている。数学を気にせずに，安心して本書で統計学を学習してほしい。

世は情報化社会といわれ，あらゆる分野における数量的データをはじめとする情報があふれている。ますますこの傾向は強まるばかりであり，私たちはこの情報の中に埋没するのではなく，それを有効に分析・処理して，有益な行動指針を見出さなければならない。統計学は，まさにそのための枠組みと手続きを提供する学問なのである。電子計算機の発達によって数量的データの処理能力は格段に進んできたが，計算機に使われるのではなく，計算機を有効に使いきるためには，数量的データを有効に処理するための統計学の考え方や手続きを理解することは不可欠であろう。

今日では，統計学は経済学や経営学をはじめ，政治学，社会学，心理学，教育学などほとんどあらゆる学問分野において重要な分析道具となっており，これなしには専門的な学習や研究はできないといってもよい。特に，経済学や経営学においては，貨幣という価値単位があるためもあり，多くの数量的データを利用することができる。このことを配慮して書かれた本書の最大の特徴は，経

済や経営を中心とするわれわれの身近にある具体的な現象を題材にして，統計学のエッセンスを解説していることである。各章末に掲げられてた練習問題も，ほとんどすべて経済や経営の具体的な事例に基づくものばかりである。このようにして，統計学を身近な学問として親しんでもらいたいというのが執筆者たちの念願である。

本書の執筆にさいしては，まず，序説，1，8 章を豊田が，7，9，10 章を大谷が，2，6，11 章を小川が，3，4，5 章を長谷川が担当し，原稿を相互に回覧し，最終的な取りまとめを豊田と大谷が行った。

本書に残されているであろう誤りや説明の不備な点は，読者や，本書を教科書として採用してくださる先生方からご指摘頂き，改善を他日に期したいと思う。

本書の出版に当たっては，東洋経済新報社の須永政男氏の終始熱心なご支援と，草稿に対して寄せられた細部にわたるコメントに多くを負っている。心から感謝の気持ちを表したい。

1991 年 3 月

執筆者を代表して
豊田　利久

# 第２版へのはしがき

本書（初版）の出版以来 10 年が経過したので，全面的に改訂することにした。社会科学・文科系の学生や社会人が本格的に統計学を学ぶために必要なミニマムは何かを再考した。その結果，回帰分析の内容を充実させて 2 章にわたって記述した。また，時系列分析の最近の展開を少し取り入れた。さらに，各章の練習問題を大幅に増やして，テキストとして使用される便宜を向上させた。その他の章も必要な限り改訂をした。ただし，初版に含めていた決定理論の章は削除した。

これらの改訂をするに当たっては，谷﨑久志氏に著者に加わってもらい，主として谷﨑氏と大谷一博氏が中心になって作業が行われた。

過去 10 年の間，本書を使用され，コメントを下さった多くの方々に感謝したい。すべてのお名前を挙げることはできないが，特に神戸大学の羽森茂之，福重元嗣，難波明生の各氏からは多くのコメントを頂いた。

今回の改訂に際しては，日本語版 LaTeX2e（pLaTeX2e）を用いて組版した。井本伸君（神戸大学経済学研究科博士後期課程）が多くの章のタイプをして下さったことに感謝したい。

最後に，しかし大きな貢献者として，今回の改訂版を読みやすくされた立役者は東洋経済新報社の佐藤敬氏の優れた編集技能であることを指摘したい。

2001 年 12 月

執筆者を代表して
豊田　利久

# 目次

# 序説

統計と統計学は，英語ではともに Statistics，ドイツ語では Statistik と呼ばれ，言葉の上の区別はないけれども，同じものではない。統計といえば，日本の人口は約 1 億 2000 万人であるとか，国内総生産が約 500 兆円であるというような数量的データを連想するであろう。しかし，統計学はこれらのデータそのものについてのみを学ぶ学問ではない。確かに，こうしたデータを作り，それを記述するということは統計学の出発点であったし，現在でも重要であることに変わりはなく，そのような分野は**統計的記述**（statistical description）と呼ばれている。本書の第 1 章と第 2 章は，この分野をやさしく解説したものである。

現代の統計学の大きな目的は，いろいろなデータを分析し，対象としている問題について一般的な規則性を見出し，場合によっては，とるべき行動を定めようとすることである。このような目的のためには，特定の時点や特定の対象について調べられたデータの特徴をつかむだけでは不十分である。一部分についていえることがどこまで全体について一般化できるかが問題となる。その際，われわれの手元にあるデータを**標本**（sample）と考え，標本を含む全体，すなわち**母集団**（population）の特徴を標本に基づいてつかむことが重要であり，その内容は**統計的推測**（statistical inference）と呼ばれている。

標本によって母集団の特徴をつかむ方法には 2 つある。1 つは，母集団の特性を示すパラメータ（parameter，母数ともいう）を考え，標本からその値やそれが含まれる区間を推測することであり，これは第 7 章で扱われる。もう 1 つは，母集団の特性を示すパラメータに関する仮説を立て，標本を用いてそれを検定することであり，これは第 8 章で扱われる。このような推定と仮説検定が統計的推測の主な内容である。

統計学でデータを分析するときには，集団的規則性を見出すことに重点が置かれる。それによってはじめて，問題が一般的に解釈され，望ましい判断や決定がなされる。ところで，集団を対象とする分野は，数学の集合論もそうであ

るように，何も統計学だけとは限らないであろう。しかし，統計学は固有の方法で**集団現象**を取り扱う。すなわち，集団の個々の要素については全く規則性がないように見えても，集団全体として見れば規則性や法則性をもつようになることが知られており，統計学はこの特性を通じて集団現象を取り扱う。そのロジックのやさしい解説が段階を踏んでなされているのが，第 3 章から第 6 章までの主な内容である。

さらに，統計学の基本的な考え方を用いて具体的なデータの分析をするための応用分野として，第 9，10 章で回帰分析，第 11 章では時系列分析の基礎を学ぶ。

現代社会においては，データとしての情報量は累積的に増え，また，パーソナル・コンピュータの発達によって情報を処理する能力も格段の向上をしている。しかし，単に多量の情報を処理するだけでは，あまり意味がない。この多量の情報の中から，社会現象を説明する規則性や法則性を見出し，それらを知ることによって政策を立案したり，意思決定に役立てることができれば，情報処理の有用性は増すであろう。また，情報処理のためのソフトウェアもどんどん利用可能となりつつあるが，それらを真に使いこなすためにも，統計学の基礎知識は不可欠である。情報化社会といわれる現代においては，本書程度の統計学の知識は万人に要求されているといっても過言ではないであろう。

# 第 1 章
# 度数分布

## 1.1　変数

序説で述べたように，統計的推測の目的は，抽出された標本をもとにして母集団に関する知識を得ることである。例えば，ある大学の学生の身長の分布の状態を知りたいときに，100 人の学生を選び，100 個の身長の測定値を得たとしよう。身長の測定値は，選ばれた学生ごとに変動するので，これは変数と考えられる。

身長の測定値は，少なくとも理論的には，ある区間内の任意の実数値をとりうる。例えば，ある学生の $mm$（ミリ・メートル）まで正確に測れる身長計による測定値が 173.2 $cm$ であったとしよう。このとき，この学生の真の身長は 173.15 $cm$ と 173.25 $cm$ の間の区間内にある何らかの実数である。もし任意の精度まで正確に測れる身長計があるとすれば，小数点以下何桁でも必要なだけの有効単位をもつ測定値を得ることが可能である。仮に，この学生の真の身長が $\sqrt{3}\ m$ であったならば，その測定値は限りなく $\sqrt{3}\ m\ (= 173.205\cdots\ cm)$ に近づいていくであろう。このように，少なくとも理論的には，ある区間内の任意の実数値をとりうると考えられる変数を**連続型変数**（continuous variable）という。重さや温度などの測定値も，連続型変数の例である。

身長の測定値はある区間内の任意の実数値をとりうるが，各世帯の家族の数やある地域での 1 年当りの隕石の落下数などは整数値しかとらない。このように不連続な値しかとらない変数を**離散型変数**（discrete variable）という。

## 1.2　度数分布

表 1.1 は，1992 年 10 月から 2001 年 3 月までの東京外国為替相場（円／ドル）の対前期（月）比変化率を示したものである。外国為替相場（円相場）の対前期比変化率は次のようにして計算される。すなわち，第 $t$ 期の円相場を $e_t$ とし，$t-1$ 期のそれを $e_{t-1}$ とすると，**変化率** $r_t$ は

$$r_t = \frac{e_t - e_{t-1}}{e_{t-1}}$$

として計算される。例えば，1992 年 9 月の円相場は 122.72 円，10 月のそれは 121.04 円であるので，10 月の円相場の対前期比変化率は

$$r_t = \frac{121.04 - 122.72}{122.72} = -0.0136\cdots$$

となる。パーセント表示にするため，これを 100 倍して小数第 2 位を四捨五入したものが表 1.1 に示された 1992 年 10 月の変化率 $-1.4$ である。$r_t$ は比率であるので，その値は無限小数になりうる。このことから $r_t$ を連続型変数と見なすことにする。

これらの測定値（データ）をただ漠然と眺めているだけでは，データの分布の状態およびデータのもつ特性などに関する情報を得ることは難しい。しかし，次に述べる度数分布表を作成すれば，データの分布の状態および特性などのデータに含まれる重要な情報を得る手助けとなる。表 1.1 のデータは個数が多いので，このデータを使って手作業で度数分布表を作成するのは大変である。したがって，ここでは，表 1.2 の簡単なデータを使って度数分布表の作成について説明する。このデータを使って度数分布表を作成するには，まずこれらのデータをいくつかの**階級**（クラス，class）に分類して，その分布の状態を調べる。階級に分類するために，まずデータの最大値と最小値を見つけ，この差を考慮しつつ階級の数と幅を適当に選ぶ。統計学ではこの差のことを**範囲**（range）という。このデータでは，最大値が 7.4，最小値が 3.5 なので，範囲は $7.4 - 3.5 = 3.9$ である。階級の数はデータの数に応じて，7〜20 個くらいにするのが良いといわれている。階級の数をいくつにするのかに関しては，理論的な選択方法はない。

**表** 1.1　1992 **年** 10 **月から** 2001 **年** 3 **月までの外国為替相場**
**（インターバンク相場，東京市場，中心値月中平均・円／ドル）の変化率**

(%)

| 年 | 1 月 | 2 月 | 3 月 | 4 月 | 5 月 | 6 月 | 7 月 | 8 月 | 9 月 | 10 月 | 11 月 | 12 月 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1992 | | | | | | | | | | −1.4 | 2.3 | 0.1 |
| 1993 | 0.8 | −3.2 | −3.2 | −3.9 | −2.0 | −2.6 | 0.4 | −3.7 | 1.5 | 1.6 | 0.8 | 1.8 |
| 1994 | 1.6 | −4.8 | −1.0 | −1.5 | 0.4 | −1.2 | −4.1 | 1.4 | −1.0 | −0.4 | −0.5 | 2.2 |
| 1995 | −0.4 | −1.5 | −7.6 | −7.8 | 1.7 | −0.7 | 3.2 | 8.4 | 6.3 | 0.2 | 1.3 | −0.1 |
| 1996 | 3.9 | −0.1 | 0.1 | 1.5 | −0.9 | 2.2 | 0.4 | −1.4 | 1.9 | 2.4 | −0.1 | 1.4 |
| 1997 | 3.7 | 4.2 | −0.3 | 2.3 | −5.2 | −4.0 | 0.8 | 2.4 | 2.4 | 0.3 | 3.5 | 3.4 |
| 1998 | 0.0 | −2.7 | 2.1 | 2.3 | 2.5 | 4.1 | 0.1 | 2.8 | −7.0 | −9.9 | −0.6 | −2.5 |
| 1999 | −3.7 | 3.1 | 2.7 | 0.0 | 1.9 | −1.0 | −0.9 | −5.4 | −5.1 | −1.5 | −1.0 | −2.2 |
| 2000 | 2.4 | 4.0 | −2.4 | −1.2 | 2.5 | −1.7 | 1.6 | 0.2 | −1.2 | 1.5 | 0.5 | 3.0 |
| 2001 | 4.4 | −0.9 | 4.4 | | | | | | | | | |

（出所）　日本銀行ホームページ（http://www.boj.or.jp）。

**表** 1.2　20 **個の物体の重さのデータ**

(単位：$g$)

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 4.3 | 5.2 | 7.2 | 6.4 | 3.5 | 5.6 | 6.7 | 6.1 | 4.1 | 6.8 |
| 5.0 | 5.6 | 3.8 | 4.6 | 5.8 | 5.1 | 6.2 | 5.3 | 7.4 | 5.9 |

階級の数が多すぎる場合には，各階級に属するデータの数が少なくなり，データの分布の状態に関する情報はほとんど得られない。逆に，少なすぎる場合には，あまりにも大ざっぱな情報しか得られない。上で述べた，階級の数を 7〜20 個くらいにするというのは，一種の経験則であり，場合によっては，これ以外の階級の数が使われても構わない。事実，ここで使われる物体の重さのデータは，全部で 20 個しかないので，階級の数を 7 個としても，1 つの階級に入るデータの平均は $20/7 = 2.857$ となり 3 個よりも少なくなる。これでは，階級 1 つ当りのデータの個数があまりにも少ないので，ここではあえて階級の個数を 5 とする。

範囲を階級の数で割った値は $3.9/5 = 0.78$ となるので，階級の幅を 0.78 に近い整数値にとり，1.0 とする。階級の幅に関しては，あまり中途半端な数値よりも（例えば，0.78 とか 1.45），ある程度整った数値（例えば，1.0 とか 1.5）を使うことが多い。実際には，階級の数と幅を同時に考慮して，適当に階級の数と幅を決めることが多い。なお，階級の間隔は必ずしも等しくする必要はなく，場合によってはある階級の幅を広くしたり狭くしたりすることもある。

次に，各データがどの階級に属するのかを調べて，データの分類を行う。各データがどの階級に属するのかを調べるには，それぞれの階級に対応する境界値を定めなければならない。階級の境界を定める値を**階級境界値**といい，階級境界値の中点を**階級値**（class mark）という。20 個の物体の重さのデータでは最小値が 3.5 なので，最初の階級境界値を 2.95 と 3.95 とする。このとき，最初の階級は 2.95〜3.95 と表され，階級値は $(2.95+3.95)/2=3.45$ となる。なお，階級境界値を 3.0 と 4.0 とせずに，2.95 と 3.95 にする理由については，後で説明する。最大値が 7.4 であるので，最後の階級は 6.95〜7.95 となる。1 つのデータの値が，ある階級の境界値の間に入るとき，そのデータはその階級に属するものとして分類される。ある階級に属するデータの数をその階級の**度数**（frequency）という。例えば，2.95 と 3.95 の間には，3.5 と 3.8 の 2 つのデータがあるので，階級 2.95〜3.95 の度数は 2 である。各階級の度数を求めて，各階級とその度数を表にしたものを**度数分布表**という。

以上で，度数分布表は作成されたが，さらに**相対度数**，**累積度数**および**累積相対度数**を計算しよう。相対度数とは，各階級の度数をデータの総数で割ったものである。すなわち，相対度数は各階級に属するデータの割合を表している。累積度数とは，ある階級以下の度数を合計したものであり，累積相対度数とは，ある階級以下の相対度数を合計したものである。累積相対度数は，ある階級以下に属するデータの割合を表している。したがって，最後の階級の累積度数はデータの総数となり，その累積相対度数は 1.0 となる。

以上の手順をまとめると，次のとおりである。

**(1)** データの最大値と最小値を見つけて範囲を計算する。
**(2)** 範囲の値とデータの個数から判断して，階級の数と幅を決め，階級境界値と階級値を決める。
**(3)** 各階級の度数（各階級に属するデータの数）を数える。
**(4)** 各階級の相対度数，累積度数，累積相対度数等を求める。

表 1.3 は，20 個の物体の重さのデータの度数分布表である。現実のデータでは，相対度数を計算するときの丸めの誤差（四捨五入によって生じる誤差）のため，相対度数の総和がキチッと 1 にならないこともある。

**表** 1.3　20 **個の物体の重さのデータの度数分布表**

| 階級値 | 階級境界値 | 度数 | 相対度数 | 累積度数 | 累積相対度数 |
|---|---|---|---|---|---|
| 3.45 | 2.95〜3.95 | 2 | 0.10 | 2 | 0.10 |
| 4.45 | 3.95〜4.95 | 3 | 0.15 | 5 | 0.25 |
| 5.45 | 4.95〜5.95 | 8 | 0.40 | 13 | 0.65 |
| 6.45 | 5.95〜6.95 | 5 | 0.25 | 18 | 0.90 |
| 7.45 | 6.95〜7.95 | 2 | 0.10 | 20 | 1.00 |
| | 合　計 | 20 | 1.00 | | |

この 20 個の物体の重さの各データは，小数点以下 1 桁で表されている。最小値が 3.5 であるので，階級の幅を 1.0 とすれば，最初の階級を，例えば 3.0〜4.0 とし，以下同じようにして最後の階級を 7.0〜8.0 とする方が自然なように思われるかもしれない。しかし，このように階級境界値を定めると，データがちょうど 5.0 となった場合には，4.0〜5.0 の階級に分類するのか，あるいは 5.0〜6.0 の階級に分類するのかが不明確である。そこで，連続型のデータを扱う場合には，データの測定単位を 1/2 だけずらして階級境界値を定めるのが普通である（データが離散型のときには，データの測定単位を 1/2 だけずらす必要はない)。

それでは，4.0〜5.0 の階級の境界の定義を $4.0 \leqq x < 5.0$，5.0〜6.0 の階級の境界の定義を $5.0 \leqq x < 6.0$ とすると，$x = 5.0$ のときには $5.0 \leqq x < 6.0$ の階級に分類されるので問題は解消するように見える。しかし，データの単位が小数点以下 1 桁ということは，測定器の精度が小数点以下 1 桁までであることを意味し，小数点 2 桁目が四捨五入されて測定されていると考えられる。ある物体の真の重さが，4.98 $g$ のとき，この物体は 5.0 $g$ として測定されるので，上の分類では 5.0〜6.0 の階級に属することになる。ところが，この物体の真の重さは 5.0 $g$ よりも軽いので，本来属すべき階級は 4.0〜5.0 であり，誤分類となってしまう。もし，測定されたデータの最小単位を 1/2 だけずらして階級境界値を定めると，四捨五入が考慮されているので，誤分類はなくなるのである。

円相場の変化率は，時間とともに変動するデータの例である。このように，時間に依存するデータを**時系列データ**（time series data）という。表 1.4 は，表 1.1 で示された円相場の変化率の度数分布表である。読者は，上で示された度数分布表の作成法を念頭に置きながら，パソコン上で動く統計ソフトを使い，同

**表 1.4　円相場の変化率の度数分布表**

| 階級値 | 階級境界値 | 度数 | 相対度数 | 累積度数 | 累積相対度数 |
|---|---|---|---|---|---|
| −9.05 | −10.05 ～ −8.05 | 1 | 0.0098 | 1 | 0.0098 |
| −7.05 | −8.05 ～ −6.05 | 3 | 0.0294 | 4 | 0.0392 |
| −5.05 | −6.05 ～ −4.05 | 5 | 0.0490 | 9 | 0.0882 |
| −3.05 | −4.05 ～ −2.05 | 11 | 0.1078 | 20 | 0.1961 |
| −1.05 | −2.05 ～ −0.05 | 26 | 0.2549 | 46 | 0.4510 |
| 0.95 | −0.05 ～ 1.95 | 28 | 0.2745 | 74 | 0.7255 |
| 2.95 | 1.95 ～ 3.95 | 21 | 0.2059 | 95 | 0.9314 |
| 4.95 | 3.95 ～ 5.95 | 5 | 0.0490 | 100 | 0.9804 |
| 6.95 | 5.95 ～ 7.95 | 1 | 0.0098 | 101 | 0.9902 |
| 8.95 | 7.95 ～ 9.95 | 1 | 0.0098 | 102 | 1.0000 |
| | 合　計 | 102 | 0.9999 | | |

（注）　丸めの誤差のため相対度数の合計が 1 と異なっている。

**表 1.5　勤労者世帯の年間収入（1988 年）の度数分布表**

| 階級境界値（万円） | 度数（世帯数） | 相対度数 | 累積度数 | 累積相対度数 |
|---|---|---|---|---|
| ～ 100 | 2 | 0.0004 | 2 | 0.0004 |
| 100 ～ 200 | 73 | 0.0143 | 75 | 0.0147 |
| 200 ～ 300 | 391 | 0.0767 | 466 | 0.0914 |
| 300 ～ 400 | 771 | 0.1513 | 1237 | 0.2427 |
| 400 ～ 500 | 890 | 0.1746 | 2127 | 0.4173 |
| 500 ～ 600 | 823 | 0.1615 | 2950 | 0.5788 |
| 600 ～ 700 | 663 | 0.1301 | 3613 | 0.7088 |
| 700 ～ 800 | 461 | 0.0904 | 4074 | 0.7993 |
| 800 ～ 900 | 345 | 0.0677 | 4419 | 0.8670 |
| 900 ～ 1000 | 232 | 0.0455 | 4651 | 0.9125 |
| 1000 ～ | 446 | 0.0875 | 5097 | 1.0000 |
| 合　計 | 5097 | 1.0000 | | |

（出所）　総務庁統計局『家計調査年報』（昭和 63 年版）。

じ表が得られることを確認されたい。

時系列データに対して，一時点でのデータの系列を**クロスセクション・データ**（cross section data）または**横断面データ**という。表 1.5 は，1988 年の 5097 勤労者世帯の年間収入の度数分布表である。この年間収入のデータは，特定の時点（1988 年）のデータであるので，クロスセクション・データの例である。表 1.5 で，例えば 2 番目の階級の境界値が 100～200（万円）となっているが，これは 100 万円**以上** 200 万円**未満**の意味である。収入に関しては，0.5 円とい

**表** 1.6　**勤労者世帯の年間収入（2000 年）の度数分布表**

| 階級境界値（万円） | 度数（世帯数） | 相対度数 | 累積度数 | 累積相対度数 |
|---|---|---|---|---|
| ～ 200 | 62 | 0.0133 | 62 | 0.0133 |
| 200 ～ 300 | 171 | 0.0368 | 233 | 0.0501 |
| 300 ～ 400 | 389 | 0.0836 | 622 | 0.1337 |
| 400 ～ 500 | 557 | 0.1198 | 1179 | 0.2535 |
| 500 ～ 600 | 633 | 0.1361 | 1812 | 0.3896 |
| 600 ～ 700 | 576 | 0.1238 | 2388 | 0.5134 |
| 700 ～ 800 | 539 | 0.1159 | 2927 | 0.6293 |
| 800 ～ 900 | 458 | 0.0985 | 3385 | 0.7278 |
| 900 ～ 1000 | 338 | 0.0727 | 3723 | 0.8005 |
| 1000 ～ 1250 | 523 | 0.1124 | 4246 | 0.9129 |
| 1250 ～ 1500 | 234 | 0.0503 | 4480 | 0.9632 |
| 1500 ～ | 171 | 0.0368 | 4651 | 1.0000 |
| 合　計 | 4651 | 1.0000 | | |

（出所）　総務省統計局ホームページ（http://www.stat.go.jp）。

うのは存在しないので，表 1.5 では階級境界値の 1/2 補正を行う必要はない。また，最後の階級（1000～ ）は，年間収入が 1000 万円以上の世帯数を表しているので，この階級だけ階級幅が異なっている。また，表 1.6 は 2000 年の勤労者世帯の年間収入の度数分布表である。表 1.5 と表 1.6 を比べると，12 年の間に所得は全体的に高くなっていることが分かる。

## 1.3　度数分布のグラフ

度数分布表から，データの分布の状態に関する情報を得ることができるが，それをグラフで表すと，データの分布の状態が一層分かりやすい。図 1.1 は表 1.3 をグラフで表したものであり，図 1.2 は表 1.4 をグラフで表したものである。また，図 1.3 と図 1.4 は，それぞれ，表 1.5 と表 1.6 をグラフで表したものである（図 1.3 では，年間収入が 1000 万円以上の階級の階級幅はきわめて広いため，この階級を描いていない。また，図 1.4 では，年間収入が 200 万円以下と 1000 万円以上の階級の階級幅は他の階級の幅と異なるため，これらの階級を描いていない）。このように度数分布をグラフ表示したものを**ヒストグラム**（histogram）あるいは**柱状図**と呼ぶ。ヒストグラムは，横軸に階級分けされる

**図** 1.1　20 **個の物体の重さのグラフ**

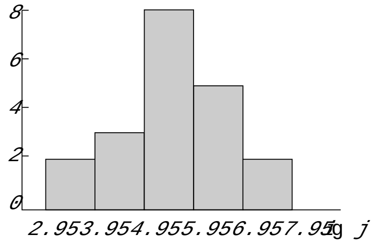



**図** 1.2　**円相場の変化率の度数分布のグラフ**

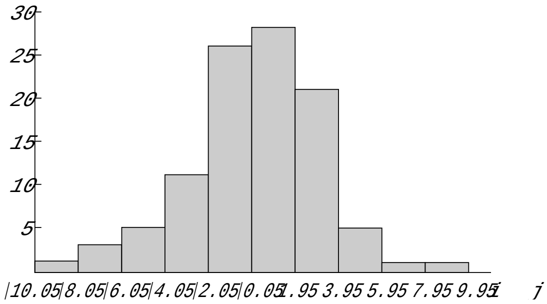
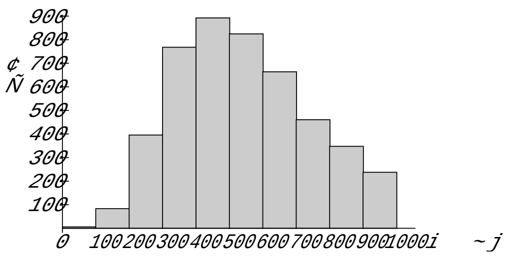



**図** 1.3　**年間収入（**1988 **年）の度数分布のグラフ**




データの値をとり，縦軸には各階級に対応する度数をとる。

図 1.3 と図 1.4 を比べると，1988 年から 2000 年の 12 年間で年間収入は高くなっており，年間収入の分布は 2000 年の方がかなりなだらかになっていることが分かる。1988 年では，度数の一番多い 400〜500 万円の階級の度数と 900〜1000 万円の階級の度数の差はかなりあるが，2000 年では，度数の一番多い

**図** 1.4　**年間収入（**2000 **年）の度数分布のグラフ**

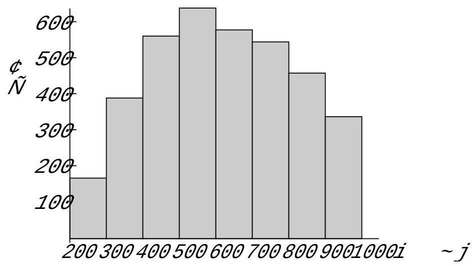
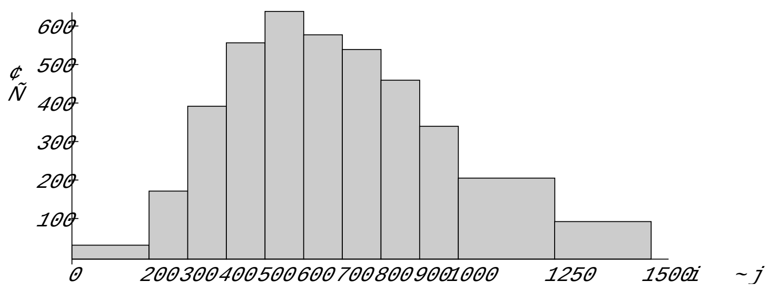



**図** 1.5　**階級幅が等しくないときの年間収入（**2000 **年）の度数分布のグラフ**




500〜600 万円の階級の度数と 900〜1000 万円の階級の度数の差はかなり小さくなっている。このように，ヒストグラムで比較を行えば，データの分布の状態は，度数分布表での比較よりも分かりやすくなる。

ヒストグラムでは，通常は各階級の階級幅は等しくとられる。しかし，表 1.6 で示された年間収入の 0〜200 万円の階級と 1000 万円以上の階級のように，階級幅に違いがある場合もある。年間収入は，総務省によって度数分布表の形でしか発表されていないので，自分で階級幅を調節することはできない。この階級幅が違っている場合でもヒストグラムを描くことは可能である。図 1.5 は，表 1.6 の年間収入が 1500 万円以下のすべての階級を含めたヒストグラムである。図 1.5 から，年間収入は 400 万円 から 900 万円の間にかなり集中しているが，右裾の方が相対的にその広がりは長い。このように，右裾が相対的に長い広がりをもっているとき，度数分布は**右に歪んでいる**という（直観的には左に歪んでいるように見えるが，このように定義する）。逆に，左裾が相対的に長

く広がっているとき，**左に歪んでいる**という。図 1.2 から，円相場の変化率はやや左に歪んでいるように思われる。

## 練習問題

**1.1**　次のデータは 20 個の物体の重さの測定値である（単位はグラム）。

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 47 | 61 | 77 | 74 | 60 | 43 | 63 | 50 | 82 | 62 |
| 67 | 58 | 55 | 86 | 66 | 54 | 52 | 69 | 66 | 78 |

(1) 階級境界値を 39.5 ∼ 49.5, 49.5 ∼ 59.5, $\cdots$, 79.5 ∼ 89.5 として度数分布表を作れ。また，相対度数，累積度数および累積相対度数も計算せよ。

(2) この度数分布のグラフを描け。

**1.2**　次のデータは，1983 年第 2 四半期から 1990 年第 1 四半期までの東証一部平均株価指数の変化率を示したものである（東洋経済新報社『経済統計年鑑』1990 年版，東証平均株価指数から作成）。

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 6.77 | 6.32 | 3.08 | 12.87 | 5.10 | −2.84 |
| 7.91 | 10.76 | 3.64 | 3.21 | 0.12 | 6.44 |
| 17.29 | 14.81 | 0.12 | 19.13 | 21.37 | −2.82 |
| −7.75 | 3.84 | 10.06 | −0.33 | 2.24 | 10.27 |
| 1.86 | 4.33 | 6.03 | −5.00 | | |

(1) 階級境界値を $-8.005 \sim -4.005$, $-4.005 \sim -0.005$, $\cdots$, $19.995 \sim 23.995$ として度数分布表を作れ。また，相対度数，累積度数および累積相対度数も計算せよ。

(2) この度数分布のグラフを描け。

**1.3**　次のデータは，問 1.2 と同じデータを時期をずらして，1990 年第 2 四半期から 2001 年第 2 四半期までの東証一部平均株価指数の変化率を示したものである（東洋経済新報社『経済統計年鑑』2001 年版，東証平均株価指数から作成）。

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $-11.88$ | $-10.56$ | $-15.22$ | $5.91$ | $5.32$ | $-8.44$ |
| $0.28$ | $-12.86$ | $-15.08$ | $-3.51$ | $1.66$ | $1.01$ |
| $21.79$ | $3.30$ | $-6.82$ | $2.59$ | $4.29$ | $-0.88$ |
| $-5.26$ | $-9.25$ | $-8.95$ | $7.66$ | $7.03$ | $7.94$ |
| $5.90$ | $-4.78$ | $-2.96$ | $-11.16$ | $6.20$ | $0.51$ |
| $-14.39$ | $-0.99$ | $-3.16$ | $-2.86$ | $-7.93$ | $4.38$ |
| $19.20$ | $9.87$ | $7.53$ | $5.52$ | $-4.14$ | $-6.07$ |
| $-7.90$ | $-9.33$ | $5.12$ | | | |

**(1)**　階級境界値を $-16.005 \sim -12.005, -12.005 \sim -8.005, \cdots, 19.995 \sim 23.995$ として度数分布表を作れ。また，相対度数，累積度数および累積相対度数も計算せよ。

**(2)**　この度数分布のグラフを描け。さらに，問 1.2 で作成した度数分布表と比較せよ。

**1.4**　下の度数分布表は，表 1.5 に示されている 1988 年の勤労者世代の年間収入の度数分布表の階級幅を狭くしたものである。ただし，年間 1000 万円以上の階級は省いてある（データの出所は表 1.5 と同じ）。

| 年間収入 | 世帯数 | 年間収入 | 世帯数 |
|---|---|---|---|
| ～ 100 | 2 | 500 ～ 550 | 444 |
| 100 ～ 150 | 19 | 550 ～ 600 | 379 |
| 150 ～ 200 | 54 | 600 ～ 650 | 357 |
| 200 ～ 250 | 158 | 650 ～ 700 | 306 |
| 250 ～ 300 | 233 | 700 ～ 750 | 244 |
| 300 ～ 350 | 345 | 750 ～ 800 | 217 |
| 350 ～ 400 | 426 | 800 ～ 900 | 345 |
| 400 ～ 450 | 445 | 900 ～ 1000 | 232 |
| 450 ～ 500 | 445 | | |
| | | 合　計 | 4651 |

**(1)**　この度数分布表から，相対度数，累積度数および累積相対度数を求めよ。

**(2)**　この度数分布のグラフを描き，図 1.3 と比較してみよ。ただし，$\sim 100$, $800 \sim 900$ および $900 \sim 1000$ の階級は他の階級の 2 倍の幅をもっているので，これらの階級に対するヒストグラムの幅は 2 倍にし，高さは半分にせよ。

**1.5**　以下の表は，1988 年の勤労者世帯の年間収入の度数分布表である。ただし，年間収入が 1000 万円以上の階級は省いてある（データの出所は表 1.5 と同じ）。表中の **(1)**～**(22)** に当てはまる数値を求めよ。

| 階級値 | 階級境界値（年間収入） | 度数（世帯数） | 相対度数 | 累積度数 | 累積相対度数 |
|---|---|---|---|---|---|
| **(1)** | ～ 200 | 75 | **(6)** | **(11)** | **(16)** |
| **(2)** | 200～ 400 | 1162 | **(7)** | **(12)** | **(17)** |
| **(3)** | 400～ 600 | 1713 | **(8)** | **(13)** | **(18)** |
| **(4)** | 600～ 800 | 1124 | **(9)** | **(14)** | **(19)** |
| **(5)** | 800～1000 | 577 | **(10)** | **(15)** | **(20)** |
| | 合　計 | **(21)** | **(22)** | | |

**1.6**　次の 20 個のデータがある。

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | $-15$ | 3 | 6 | $-1$ | $-2$ | 5 | 8 | 13 | $-19$ |
| 1 | $-5$ | $-7$ | 18 | 10 | 14 | $-3$ | 10 | 4 | $-9$ |

**(1)**　最初の階級の階級境界値の下限を $-20.5$，階級幅を 8，階級の数を 5 として度数分布表を作れ。

**(2)**　この度数分布表のヒストグラムを描け。

第 2 章

# 代表値

前章では，統計データを整理し母集団に関する情報を取り出しやすい形でまとめる方法の 1 つとして度数分布の説明がなされた。度数分布はそこに含まれるデータの分布状態を視覚的に把握するには便利である。しかし，視覚的な印象はともすれば主観的になりがちであり，分布状態を客観的に集約する指標が必要になってくる。

分布状態を集約する指標は 2 つに大別される。1 つは，分布の中心の位置を表すものであり，もう 1 つは分布の散らばり具合を描写するものである。次節ではまず，分布の中心の位置である平均値について説明を行い，2.2 節から 2.5 節までは分布の散らばり具合を示すさまざまな尺度について説明を加える。

## 2.1　いろいろな平均値

母集団から取り出された $n$ 個の統計データが $x_1, x_2, \cdots, x_n$ によって表されているとしよう。このとき**算術平均値**（arithmetic mean）は，

$$\overline{x} = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \tag{2.1}$$

によって与えられる。第 1 章の表 1.2 に示される 20 個のある物体の重さのデータについて算術平均値を計算すると

$$\overline{x} = \frac{1}{20}(4.3 + 5.2 + \cdots + 5.9) = 5.53$$

となる。

もし取り出された統計データが表 2.1 に示されるような度数分布に整理されている場合には，次のようにして平均値を計算することができる。

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} f_i m_i, \qquad f_1 + f_2 + \cdots + f_k = n \tag{2.2}$$

**表** 2.1　**統計データの度数分布表**

| 階級値 | 階級境界値 | 度数 |
|---|---|---|
| $m_1$ | $a_0 \sim a_1$ | $f_1$ |
| $m_2$ | $a_1 \sim a_2$ | $f_2$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ |
| $m_k$ | $a_{k-1} \sim a_k$ | $f_k$ |
| 度数合計 | | $n$ |

ただし，

$$m_1 = \frac{a_0 + a_1}{2},\ m_2 = \frac{a_1 + a_2}{2},\ \cdots,$$
$$m_k = \frac{a_{k-1} + a_k}{2}$$

とする。

各階級の階級値にその度数を掛けてその総和を求め，度数の合計で割れば平均値が求められる。これは階級値を度数でウエイトづけして平均したものと考えられるから**加重平均値**といわれる。

第 1 章の表 1.3 の度数分布表に基づいてある物体の重さの平均（加重平均）を求めてみると，

$$\overline{x} = \frac{1}{20}(2 \times 3.45 + 3 \times 4.45 + 8 \times 5.45 + 5 \times 6.45 + 2 \times 7.45) = 5.55$$

となる。

経済のデータには国内総生産や物価のように**対前期比**（対前年比，対前月比等）に関心が集まるものが多い。このような変化の比率を平均する場合には，**幾何平均**（geometric mean）という概念が用いられる。 統計データが $x_1, x_2, \cdots, x_n$ によって表されているときの幾何平均 $(g_x)$ は一般に

$$g_x = \sqrt[n]{x_1 \times x_2 \times \cdots \times x_n} \tag{2.3}$$

で与えられる。$n$ 個のデータを掛け合わせて，その $n$ 乗根をとったものが幾何平均である。1986 年から 1989 年までの消費者物価の値が $y_1$，$y_2$，$y_3$，$y_4$ で与えられているとしよう。1986 年から 87 年，1987 年から 88 年，1988 年から 89 年にかけての対前年度比をそれぞれ $x_1$，$x_2$，$x_3$ とすると

$$x_i = \frac{y_{i+1}}{y_i}, \qquad i = 1,\ 2,\ 3 \tag{2.4}$$

となる。3 年間の対前年度比の幾何平均は (2.3) から

$$g_x = \sqrt[3]{x_1 \times x_2 \times x_3} \tag{2.5}$$

で求められる。

(2.5) は，(2.4) を用いると

$$g_x = \sqrt[3]{\frac{y_2}{y_1} \times \frac{y_3}{y_2} \times \frac{y_4}{y_3}} = \sqrt[3]{\frac{y_4}{y_1}} \tag{2.6}$$

となり，$y_4$ について解くと

$$y_4 = y_1 \times g_x^3 \tag{2.7}$$

となる。この式は，毎年平均して $g_x$ 倍だけ物価が上昇すれば，1986 年に $y_1$ であった物価水準が 3 年後には $y_4$ となることを意味している。また $g_x$ から 1 を引いた値は，平均上昇率と考えることができる。

なお，幾何平均 $g_x$ と算術平均 $\overline{x}$ の間には $g_x \leqq \overline{x}$ が成り立つことが知られている。総合消費者物価指数の 1986 年，87 年，88 年，89 年の値はそれぞれ，100.6, 100.7，101.4，103.7 であるから $x_1 = 1.0010$，$x_2 = 1.0070$，$x_3 = 1.0227$ となり，この期間の対前年比の幾何平均は 1.0102 と求められる。この期間の対前年比の算術平均は 1.0102 であり，両者の間にはほとんど差がないことが分かる。

## 2.2　範囲と四分位範囲

統計データの分布の散らばり具合を示す最も簡単な指標は第 1 章で定義された**範囲**といわれる概念である。範囲は得られた統計データの最大値から最小値を引いたものであり，データがどのくらいの幅の区間にわたって分布しているかを示す尺度である。しかし，範囲には次のような欠点がある。第 1 に，大部分のデータがある狭い区間に集まっていても 1 つの極端な値によって範囲は大きく変化するという点である。第 2 に，範囲はデータのサイズ（個数）が大きくなればなるほど大きくなる傾向があり，サイズが異なるデータの散らばり具合を比較するには適さないことになる。

範囲のもつこの難点を克服した指標が**四分位範囲**（interquartile range）といわれるものである。四分位範囲を定義する前にまず**四分位点**（quartile）という概念を説明しよう。データをその値の大きさの順に並べかえ，データを 4 等分することを考えよう。例えばデータが 100 個あれば 25 個ずつの 4 組に分か

れる。もっとも値の小さなデータの集合と次に値の小さなデータの集合を分割するような観察値を第 1 四分位点という。同様に 2 番目に値の小さなデータの集合と 3 番目に値の小さなデータの集合を分割する観察値を第 2 四分位点という。この点はデータを大きさの順に並べたときにちょうど真ん中にくる観察値であることから**中央値**，あるいは**メディアン**（median）とも呼ばれている。具体的にいえば，データの個数を $n$ とすると，$n$ が奇数のときは小さいほうから数えて $(n+1)/2$ 番目の値が中央値になり，$n$ が偶数のとき場合には $n/2$ 番目と $(n/2)+1$ 番目の値の算術平均をもって中央値とする。中央値は，分布の中心の位置を表す指標であるが，中心の位置を示す別の尺度として**最頻値**，あるいは**モード**（mode）という指標がある。これは母集団から取り出された 1 組のデータの集合の中で，最も頻度の高い観察値である。年間収入の度数分布のグラフである図 1.3（10 ページ）の例でいえば，400 ～ 500 万円がモードを含む階級で 450 万円がモードに当たり，図 1.4，1.5 では 550 万円がモードになる。なお，モードが 1 つのグラフを単峰なグラフといい，2 つあるときを双峰という。双峰の場合には異質なデータが混在している場合があるので注意を要する。

話を分布の散らばり具合の尺度に戻そう。最も値の大きなデータの集合と 2 番目に値の大きなデータの集合（これは 3 番目に値の小さなデータの集合）の分割点である観察値を第 3 四分位点という。

四分位範囲とは第 3 四分位点から第 1 四分位点を引いた値である。四分位範囲は値の最も小さな部分と最も大きな部分を排除して，中央値のまわりに分布する 50% のデータについての範囲を求めているので，極端なデータの値に左右されることはない。またデータのサイズが大きくなっても，それによって四分位範囲が大きく影響を受けることもない。

## 2.3　標準偏差と分散

分布の散らばり具合を表す指標としてよく用いられるものとして**標準偏差**（standard deviation）と**分散**（variance）がある。その基本的な考え方は，それぞれの観察値が平均からどれくらい離れて分布しているか，その「距離」を

測り，尺度にしたものである。

いま，統計データが $x_1, x_2, \cdots, x_n$ によって表されているとしよう。分散とは，それぞれの観察値と算術平均の差の 2 乗を求め，その平均をとったものである。分散を $s^2$ で表すと，

$$s^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 \tag{2.8}$$

で求められる。あるいは，

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 \tag{2.9}$$

で計算されることも多い。(2.8) と (2.9) の差異は，それぞれの観察値の算術平均の差の 2 乗の平均を求める際に，標本数（データの個数）で割るか，それから 1 を引いたもので割るかという点である。標本数が大きい場合には，両者に基づいて計算された標本分散の間に大きな差は生じない。しかし，(2.9) から求められる標本分散は，母集団の分散を推定する際に，それを偏りなく推定できるという利点をもっている（「偏り」の意味については 7.2 節参照）。この章では，以下 (2.8) の定義に基づいて議論を進めていくが，第 6 章以降，(2.9) で求められる標本分散は，重要な役割を果たすことを念頭においてほしい。

分散は，観察値から平均を差し引き，2 乗してその平均を求めているので，その単位はもとのデータの 2 乗になっている。例えば，もとの単位が $cm$ 単位であれば分散は $cm^2$ 単位となる。分散をもとの観察値と同じ単位に直すためにその正の平方根をとったものが**標準偏差** $(s)$ といわれる尺度である。

分散は (2.8) から求められるが，さらに計算を簡略化することができる。(2.8) を展開し整理すると次式が得られる。

$$s^2 = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2 - 2\overline{x}\sum_{i=1}^{n}x_i + n\overline{x}^2\right) \tag{2.10}$$

$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$ を利用すると，(2.10) はさらに次のように書ける。

$$s^2 = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2 - n\overline{x}^2\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2 - \overline{x}^2 \tag{2.11}$$

(2.11) によれば，分散は観察値の 2 乗和を求め，その値を標本の大きさで割ったものから，平均の 2 乗を引くことによって求められる。第 1 章の表 1.2 に示されたある物体の重さのデータから分散を求めると

$$s^2 = \frac{1}{20}(4.3^2 + 5.2^2 + \cdots + 5.9^2) - 5.53^2 = 1.1591$$

となる。また，標準偏差は分散の正の平方根をとり，1.0766 と求められる。

統計データが表 2.1 のように度数分布の形で与えられているときには，分散は次のように計算される。

$$s^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} f_i(m_i - \overline{x})^2 \tag{2.12}$$

ここで，$\overline{x}$ は度数分布表から計算される平均である。各階級値と平均の差の 2 乗をその階級の度数によってウエイトづけしたものの平均が分散となる。(2.12) により与えられる分散は，さらに次式により簡便的に計算できる。

$$s^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} f_i m_i^2 - \overline{x}^2 \tag{2.13}$$

第 1 章の表 1.3 の統計データに基づいて分散を計算すると

$$\begin{aligned} s^2 =& \frac{1}{20}(2 \times 3.45^2 + 3 \times 4.45^2 + 8 \times 5.45^2 + 5 \times 6.45^2 + 2 \times 7.45^2) \\ & -5.55^2 = 1.19 \end{aligned}$$

また標準偏差は $\sqrt{1.19} = 1.0909$ となる。

## 2.4　標準化変量

A 市の 1989 年の年間勤労者所得を調査したところ，平均は 300 万円，標準偏差は 50 万円であった。1990 年の調査によれば平均は 400 万円，標準偏差は 80 万円であった。B 氏はこの市の住民であり，89 年の所得は 440 万円，90 年の所得は 560 万円であった。B 氏は，89 年から 90 年にかけて A 市の中でより高い所得階層へ移行したといえるだろうか。平均所得からの差によって測れば，89 年には 140 万円 $(= 440 - 300)$ であったものが，90 年には 160 万円 $(= 560 - 400)$ になっており一見より裕福になったように見える。しかし，89 年から 90 年にかけて分布の標準偏差も拡大していることに注意しなければならない。

この点を考慮した比較をするためには，両年の観察値を，共通の平均 0，標準偏差 1 をもつ変数に変換すればよい。統計データが $x_1, x_2, \cdots, x_n$ によって表されており，その平均が $\overline{x}$，標準偏差が $s$ で計算されているとしよう。新たな変数 $z_i$ を定義する。

$$z_i = \frac{x_i - \overline{x}}{s} \tag{2.14}$$

このとき $z_i$ の平均は 0，標準偏差は 1 になることが分かる（証明については問 2.3 参照）。このように変換された変数を**標準化変量**という。

上記の例でも B 氏の 1989 年と 1990 年の所得を比較するためには，生の所得の値を標準化してやればよいことになる。89 年の標準化した値は $(440-300)/50 = 2.8$ となり，90 年の標準化した値は $(560-400)/80 = 2$ となる。したがって，89 年のほうが平均 0 から離れていることになり，B 氏の 90 年における A 市の中での相対的な所得地位は低下したことになる。

## 2.5　変動係数

2 つの統計データの組があり，その分布の散らばり具合を比較することを考えてみよう。比較の尺度としてすぐに思いつくのは標準偏差である。というのは標準偏差はもとのデータと同じ単位で測られているからである。しかし，データの値が大きくなるとそれにつれて標準偏差も大きくなる傾向があり，同じ分析対象の分布を異なった時点で比較するような場合には注意を要する。その点を克服するには，標準偏差を平均で割った値を計算し，それに基づいて比較を行えばよい。標準偏差を平均値で割った値は，**変動係数**（coefficient of variation）と呼ばれている。標準偏差，平均ともに同じ単位で測られているから，変動係数は無名数（単位のない数）となる。変動係数は統計データの組が，一方では円，他方ではドルのように異なる単位で測られているときにも，分布の散らばり具合を比較することができるという長所をもっている。

## 2.6　相関係数

いままでの議論では，統計データが取り出されたときに，そのデータは母集団の 1 つの属性の値を記録したものと考えられてきた。そしてそのデータの分布状況を集約する指標について考察が加えられてきた。具体的には，それらは分布の中心の位置の指標であり，分布の散らばり具合の指標であった。

しかし，母集団を構成する主体からデータを取り出す場合には，その主体について複数の情報が得られる場合が多い。例えば，100 人の家計が取り出された場合には，それぞれの家計について所得や消費といった複数の属性に関する値が得られる。このような場合には，所得や消費といった複数の変数間の関係を表す尺度が必要になる。この尺度の代表的な指標が，**共分散**（covariance）であり，**相関係数**（correlation coefficient）である。

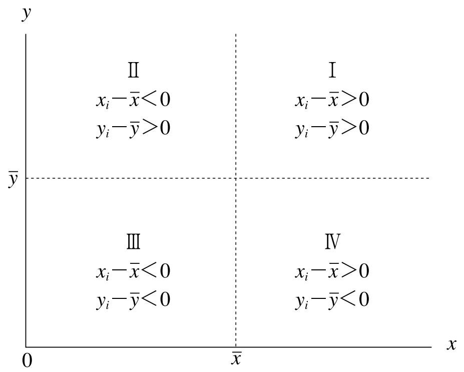
さて，母集団から取り出された統計データが 2 つの属性に関する値を記録しているとしよう。統計データの個数は $n$ 組であり，それぞれの属性を変数 $x$ と変数 $y$ によって表すと，統計データは 2 変数データの組 $(x_1, y_1)$, $(x_2, y_2)$, $(x_3, y_3)$, $\cdots$, $(x_n, y_n)$ によって与えられている。2 つの変数間の共分散 $(s_{xy})$ は，

$$s_{xy} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y}) = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - n\overline{x}\,\overline{y}\right) \tag{2.15}$$

で定義される。$\overline{x}$，$\overline{y}$ はそれぞれの変数の算術平均値である。共分散が $x$ 変数と $y$ 変数の関係をどのように表現しているかを理解するためには，まず $n$ 組のデータを図示してみる必要がある。図 2.1 には横軸に $x$ 変数の値，縦軸に $y$ 変数の値がとられている。$n$ 組のデータは図 2.1 において座標平面上の点として記される。このようにして各点をプロットしたものを**散布図**（scatter diagram）という。

図 2.1 には $y = \overline{y}$ の線と，$x = \overline{x}$ の線も描かれている。そしてこの 2 組の線によって平面は 4 つの象限に分かれる。データのある組が第 I 象限にあるとしよう。この点について $(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})$ を計算すれば正の値になる。第 III 象限にある点についても同様に $(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})$ の値は正である。これに対して

**図** 2.1　**散布図と共分散**




第 II，IV 象限にある点については $(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})$ の値は負になる。共分散は各点について $(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})$ の値を計算し，その平均を計算したものである。したがって，点が第 I，III 象限に集中して散らばっていれば共分散は正の値をとるだろうし，第 II，IV 象限に集中して散らばっていれば負の値をとるだろう。前者の場合には $x$ 変数と $y$ 変数の間には**正の相関**があり，後者の場合には**負の相関**があるという。2 変数の相関の度合いは散布図から見てとれるし，共分散を計算して，その符号を見ればある程度分かる。

しかし，その相関の強弱を表すことができる尺度があれば便利である。それが相関係数という指標である。共分散の単位は，$x$ 変数の単位と $y$ 変数の単位が掛け合わさったものである。これを $x$ 変数の標準偏差 $(s_x)$ と $y$ 変数の標準偏差 $(s_y)$ で割れば，その単位は無名数となる。これが，相関係数 $(r)$ といわれるものである。式で表すと，

$$r = \frac{s_{xy}}{s_x s_y} \tag{2.16}$$

となる。相関係数についての重要な性質として，その値が $-1$ と $1$ の間であることが示される。また，$x$ 変数と $y$ 変数の間に次のような直線的な関係が成立しているとしよう。

$$y_i = a + bx_i, \qquad i = 1, 2, \cdots, n \tag{2.17}$$

(2.17) を (2.16) に代入して計算すると，$b > 0$ の場合には相関係数は 1，$b < 0$

の場合には相関係数は $-1$ となることが分かる。このことは，相関係数の値が 1 に近ければ近いほど $x$, $y$ 変数間の関係は正の傾きをもった直線的関係に近く，したがって，強い正の相関があるといえる。逆に，$-1$ に近ければ近いほど $x$, $y$ 変数の関係は負の傾きをもった直線的関係に近く，強い負の相関が観察される。相関係数がゼロの場合には両者は無相関であるという。

なお，相関係数は，2 つの変数 $x$ と $y$ の直線的関係の強弱を表す指標であり，$x$, $y$ 変数間に直線以外の関係（例えば円の関係）があっても，その値がゼロに近くなることがある，ということに注意してほしい。すなわち，相関係数は，直線関係以外の関係の強さを表す尺度ではない，ということである。

## 練習問題

**2.1**　E 市，F 市からそれぞれ 10 世帯の勤労家計が選ばれ，年間所得が調査された。

E 市の年間所得は

180，190，200，250，320，350，400，410，450，510

F 市の年間所得は

420，480，530，580，600，680，700，760，800，890

であった（単位：万円）。

**(1)**　それぞれの市の年間所得の平均値を求めよ。

**(2)**　それぞれの市の年間所得の範囲，分散，標準偏差を求めて，分布の散らばり具合を比較せよ。

**(3)**　E 市における 700 万円の所得の世帯と F 市における 1000 万円の所得の世帯では，どちらの方が相対的に上位の所得階層に属すると考えられるか。

**(4)**　両方の所得の分布状況は，この 10 世帯標本から判断するとどちらの方がばらつきがあると考えられるか。

**2.2**　日本の実質国民総生産の 1985 年から 1988 年にかけての値はそれぞれ，

291806.9，299023.9，312903.2，330886.9

であった（単位：10 億円）。この期間の対前年度比の平均を算術平均と幾何

平均によって比べよ（出所： 経済企画庁『国民経済計算年報』平成元年版)。

**2.3**　(2.14) で定義される標準化変量の平均は 0，標準偏差は 1 となることを示せ。

**2.4**　日本，アメリカ，ドイツの 3 カ国の所得の不平等度を比較したい。どのようにすればよいか（ただし，不平等度は所得の散らばり具合と考えよ)。

**2.5**　第 1 章の表 1.5 に示される 1988 年度の勤労者世帯の年間収入の度数分布から平均，標準偏差を求めよ。ただし，1000 万円以上の所得階層は，省いて計算すること。

**2.6**　問 1.5 の度数分布表を用いて，**(1)** 平均，**(2)** 分散，**(3)** モード，**(4)** 標準偏差をそれぞれ求めよ。

**2.7**　47, 61, 77, 74, 60, 43 の 6 つの標本があるとき，**(1)** 平均，**(2)** 分散，**(3)** メディアン，**(4)** 標準偏差をそれぞれ求めよ。

**2.8**　$(x, y)$ のデータが (1,3), (2,4), (3,2) のように 3 組あるものとする。このとき，**(1)** $x$ の平均，**(2)** $y$ の平均，**(3)** $x$ の分散，**(4)** $y$ の分散，**(5)** $x$ と $y$ の共分散，**(6)** $x$ と $y$ の相関係数をそれぞれ求めよ。さらに，**(7)** 得られた相関係数は，正の相関，負の相関，無相関のうちどれか。

**2.9**　次の 5 個のデータの平均，標準偏差および中央値を求めよ。

28，23，26，27，21

**2.10**　問 1.6 の度数分布表を利用して，平均と分散を求めよ。

**2.11**　2 つの変数 $x$ と $y$ の 5 組のデータが次に与えられている。

| $x_i$ | $-2$ | $-1$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|---|---|
| $y_i$ | 4 | 1 | 0 | 1 | 4 |

$x$ と $y$ のそれぞれの平均，分散および $x$ と $y$ の間の相関係数を求めよ。

# 第 3 章

# 確率

この章では，確率に関する基本的概念と計算法について述べる。確率は後の章で述べる確率変数の分布，また，それを用いた推定，検定等の推測統計学の基礎となる。3.1 節では，確率の計算にとって重要な役割を果たす集合について述べ，3.2 節では，集合の考え方を利用した事象や標本空間について述べる。最後に 3.3 節では，標本空間上で定義される確率について述べる。

## 3.1　基礎概念

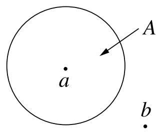
**集合**（set）とは，読んで字のごとく，ものの集まりのことであるが，その集まりに入るか否かがはっきりと判定できるようなものの集まりでなくてはならない。いま，A 大学の経済学専攻の学生の集団を考えよう。この集団は 1 つの集合であるといえる。なぜなら，経済学専攻の A 大学の学生という，その集団に入るか否かを決める判定基準を備えている集まりだからである。その意味で，A 大学の自宅外通学生の集まりは集合であるが，A 大学の自宅外通学生で親から仕送りが多い学生の集まりは集合ではない。なぜなら，個人によって仕送りの金額に対する多い少ないの感じ方が異なるため,「仕送りが多い」ということがその集団に入るか否かを決める判定基準としては曖昧だからである。ただし,「仕送りが多い」ということを，例えば 15 万円以上の仕送りがあること，と定義すれば，この学生の集まりは集合となることはいうまでもない。本節では，確率を学ぶために必要とされる最小限の集合の知識を解説する。

集合は通常アルファベットの大文字で表す。いま，$a$ が集合 $A$ に属するならば，$a$ を集合 $A$ の**要素**または**元**といい，このことを，

$$a \in A \quad \text{または} \quad A \ni a \tag{3.1}$$

と書く。次に，$b$ が集合 $A$ に属していないことを

**図** 3.1　**集合とその要素：** $\boldsymbol{a \in A,\ b \notin A}$




例　$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ のとき
$1 \in A$
であり
$9 \notin A$

$$b \notin A \quad \text{または} \quad A \not\ni b \tag{3.2}$$

と書く（図 3.1 参照)。

集合の表し方には，その集合の要素すべてを書き出す方法（列記法と呼ぶ）と，その集合の性質によって表す方法（説明法と呼ぶ）がある。例えば，サイコロの目の数の集合を $A$ とすると，その要素すべてを書き出して，

$$A = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$$

と表すことができる（列記法）。また，0 から 1 までの両端を含む区間（すなわち閉区間）に入る数値の集合を $B$ とすると，

$$B = \{x | 0 \leqq x \leqq 1\}$$

と表せる（説明法）。ただし，タテ棒の後ろは条件を表す式であり,「条件 $0 \leqq x \leqq 1$ を満たすような要素 $x$ の全体」が $B$ であるという意味である。上記の $A$ は説明法によって $\{i | 1 \leqq i \leqq 6,\ i$ は整数 $\}$ と表すこともできる。

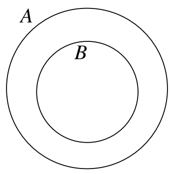
また，1 つも要素をもたない集合も考えられる。この集合のことを**空集合**といい，$\phi$ で表すことにする。逆に，すべての要素からなる集合も考えられ，この集合を**全体集合**といい，$\Omega$（ギリシア文字でオメガ $\omega$ の大文字）で表す。

いま，集合 $A$ と集合 $B$ という 2 つの集合を考えよう。集合 $A$ が集合 $B$ のすべての要素を含んでいるならば，集合 $B$ を集合 $A$ の**部分集合**といい，

$$A \supset B \qquad \text{または} \qquad B \subset A \tag{3.3}$$

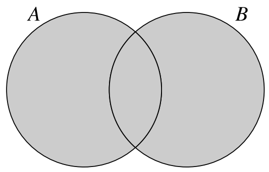
と書く（図 3.2 参照)。また，$A \supset B$ かつ $A \risingdotseq B$ のとき，集合 $B$ を集合 $A$ の**真部分集合**という。ただし，$A = B$（集合が等しい）の意味は，$A$ の要素と $B$ の要素が全く同じであることを意味する（$A \subset B$ かつ $A \supset B$)。$A \risingdotseq B$ はその否定である。

**図** 3.2　**集合の包含関係**: $\boldsymbol{A \supset B}$




例 1　$A=\{1,2,3,4,5,6\}$, $B=\{1,2\}$ のとき $A \supset B$
例 2　$A=\{1,2,3\}$, $B=\{1,2,3\}$ のとき
　$A \supset B$ かつ $A \subset B$ である。このとき $A=B$ と表す。
例 1 の場合，集合 $B$ は $A$ の真部分集合になっている。
例 2 の場合は $A$ と $B$ が同じ集合であることに注意。

**図** 3.3　**和集合**: $\boldsymbol{A \cup B}$




例 1　$A=\{1,2,3\}$, $B=\{2,3,4\}$ のとき
　$A \cup B=\{1,2,3,4\}$
例 2　$A=\{x|-1 \leqq x < 2\}$, $B=\{x|0 < x \leqq 4\}$ のとき
　$A \cup B=\{x|-1 \leqq x \leqq 4\}$

集合 $A$ と集合 $B$ の少なくともどちらか一方に属する要素の集まりを**和集合**といい，

$$A \cup B \qquad \text{または} \qquad B \cup A \tag{3.4}$$

と書く（図 3.3 参照）。

また，集合 $A$ と集合 $B$ のどちらにも属する要素の集まりを**共通集合**あるいは**積集合**といい，

$$A \cap B \qquad \text{または} \qquad B \cap A \tag{3.5}$$

と書く（図 3.4 参照）。

集合 $A$ に属していて集合 $B$ に属さない要素の集まりを**差集合**といい，

$$A - B \tag{3.6}$$

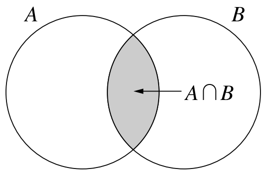
と表す（図 3.5 参照）。

集合 $A$ と全体集合 $\Omega$ を考えれば，集合 $A$ に属さない $\Omega$ の要素の集まりを考えることもできる。この集合のことを集合 $A$ の**補集合**といい，$A^c$ で表す（図 3.6）。

補集合の概念を用いれば，(3.6) の差集合は

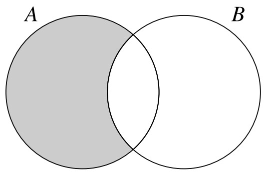
$$A - B = A \cap B^c$$

**図 3.4　共通集合**



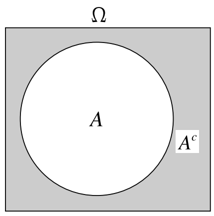

例 1　$A=\{1,\ 2,\ 3\}$，$B=\{2,\ 3,\ 4\}$ のとき
　　$A\cap B=\{2,\ 3\}$
例 2　$A=\{1,\ 2,\ 3\}$，$B=\{4,5\}$ のとき $A\cap B=\phi$
例 3　$A=\{x|-1\leqq x<2\}$，$B=\{x|0\leqq x<3\}$ のとき
　　$A\cap B=\{x|0\leqq x<2\}$

**図 3.5　差集合: $\boldsymbol{A-B}$**




例　$A=\{1,2,3,4\}$, $B=\{3,4\}$ のとき $A-B=\{1,2\}$
全体集合を $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$ とすると
$B^c=\{1,2,5,6\}$ であり
$A\cap B^c=\{1,2,3,4\}\cap\{1,2,5,6\}=\{1,2\}$
となっており，$A-B=A\cap B^c$ であることが
分かる。

**図 3.6　補集合**




例　$\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$，$A=\{1,2,3\}$
であれば $A^c=\{4,5,6\}$

と表されることが分かる（図 3.5 参照）。

以下に，集合の演算に関する公式を証明なしに与えておく。読者は図 3.1 ～図 3.6 で示したようなベン図を用いて確認してほしい。

**(1)　結合則**：$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$
**(2)　交換則**：$A\cup B=B\cup A$
**(3)　分配則**：$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$
**(4)　ド・モルガンの法則**：

$$(A\cup B)^c=A^c\cap B^c,\qquad (A\cap B)^c=A^c\cup B^c$$
$$\Omega-(A\cup B)=A^c\cap B^c,\qquad \Omega-(A\cap B)=A^c\cup B^c$$

**(1)** $\sim$ **(3)** については，$\cup$ と $\cap$ を入れかえても成り立つ。

## 3.2　標本空間

確率を考えるうえで有益な概念が事象という用語である。事象は前節で述べた集合という概念を具体的な試行の結果に用いたものである。ここで**試行**（trial）とは，繰返し可能な実験のことをいう。

例えば，1 個のサイコロを投げて出る目を調べる実験を行うとしよう。実験の可能な結果は，1，2，3，4，5，6 のどれかの目が出ることである。これらの可能な実験結果を**標本点**（sample point）といい，$\omega$ で表す。そして，この標本点の集まりを**事象**（event）という。例えば，偶数の目が出るという事象は 2，4，6 の目が出るという標本点の集まりである。また，実験のすべての可能な結果の集まりを**標本空間**（**全事象** sample space）といい，全体集合の記号と同じ $\Omega$ で表すことにする。すなわち，集合論の用語を用いれば，標本点は集合の要素であり，事象とは 1 つの集合であり，標本空間は全体集合であるといえる。また，事象については，これ以上分割できないものを**根元事象**（elementary event）といい，そうでない事象を**複合事象**と呼ぶ。例えば，サイコロ投げの例では，$1, 2, \cdots, 6$ という標本点を集合 $\{1\}, \{2\}, \cdots, \{6\}$ と考えたものが根元事象にあたり，偶数の目が出るというのは複合事象 $\{2, 4, 6\}$ である。

また，何の結果も起こらないという事象も考えられる。この事象のことを**空事象**（empty event）といい，$\phi$ で表すことにする。空事象は標本点を 1 つももたないので空集合に対応する。さらに，集合論の補集合に対応する事象を**余事象**（complementary event）という。すなわち，余事象とはある事象が起こらないという事象である。補集合と余事象の対応以外にも，前節で述べた集合論の演算はすべて事象にも当てはまる。例えば，和集合と積集合に対応する事象の概念として，和事象と積事象があり，集合の場合と同じく，$\cup$ と $\cap$ が記号として用いられる。また，$A \cap B = \phi$（空事象）が成り立つとき，事象 $A$ と $B$ は**排反**（exclusive）であるという。特に，$A \cap A^c = \phi$ となるので，任意の事象とその余事象は常に排反となる。

**例** 3.1　1 個のサイコロを投げるとき，それぞれの目が出ることをその目の数

字で表すことにすると，標本空間は $\Omega = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$ となる。根元事象は $\{1\}, \{2\}, \cdots, \{6\}$ である。また，$A$ を偶数の目が出る事象（複合事象）とすると，$A = \{2, 4, 6\}$ となり，その余事象は $A^c = \{1, 3, 5\}$，すなわち奇数の目が出る事象となる。また，$B = \{1, 2, 3, 4\}$ とすると，$A$ と $B$ の和事象と積事象はそれぞれ，$A \cup B = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6\}, A \cap B = \{2,\ 4\}$ となる。さらに，$C = \{1,\ 3\}$ とすると，$A \cap C = \phi$ となり，事象 $A$ と 事象 $C$ は排反である。また，$A \cap A^c = \phi$ となるので，事象 $A$ とその余事象 $A^c$ が排反であることが分かる。

## 3.3　確率

### 3.3.1　確率の定義と基本的性質

1 枚の硬貨を投げると，表か裏のどちらかが出る。このことを，前節の事象の概念を用いると，2 つの事象 $H = \{$ 表が出る $\}$，$T = \{$ 裏が出る $\}$ で表すことができる（$H$ は Head，$T$ は Tail の略)。ところで，1 枚の硬貨を投げて表が出る確率（probability）はいくらになるだろうか。もしこの硬貨が正常であれば（歪んでいない)，硬貨を投げたとき，$H$ と $T$ のどちらか一方が特に起こりやすいとは考えられない。そこで，$H$ と $T$ が起こる場合は**同様に確からしい**と仮定する（これはあくまでも人為的な仮定であって，科学的な法則ではないことに注意する必要がある)。そして，硬貨投げの場合，起こりうる場合は $H$ か $T$ の 2 つである。そこで，$H$ が起こる確率は 2 つのうち 1 つであることから 1/2 であると定義する。以上のことを一般的な形で定義すれば，次のようになる。

**定義** 3.1　**確率（ラプラスの算術的確率）**　標本空間に $N$ 個の標本点があって，それらの起こるのが同様に確からしいとする。さらに，事象 $A$ が $n(A)$ 個の標本点から成っているとする。このとき，事象 $A$ が起こる確率は $n(A)/N$ である。これを

$$\mathrm{P}(A) = \frac{n(A)}{N} \tag{3.7}$$

と書く。ただし，$n(\Omega) = N$ に注意せよ。

上の定義の中で，事象 $A$ がもっている標本点の数 $n(A)$ をその事象が起こる**場合の数**という。そのため，$n(\phi) = 0$，$n(\Omega) = N$ となる。

また，上で定義された確率をラプラスの算術的確率（あるいは理論的確率）という。このほかにも，確率には，相対度数に基づく経験的確率，個人の主観に基づく主観的確率などが考えられるが，ここでは算術的確率に基づいて話を進める。なお，現代の確率論では，コルモゴロフの確率公理を満たすものを確率と定義しているが，より上級の数学を必要とするので，ここでは省略する。

**例題** 3.1　1 個の正常なサイコロを投げるとき，それぞれの目が出ることをその目の数で表すことにする。1 の目が出る確率はいくらか。偶数の目が出る確率はいくらか。また，$A = \{1, 3\}$ とすると，事象 $A$ が起きる確率はいくらか。

**解**　標本空間は $\Omega = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$ となるので，標本空間の標本点の数（全体の場合の数）は 6 である。サイコロは正常なので，標本空間のそれぞれの標本点が起こるのは同様に確からしいと仮定する。このとき，1 の目の出る事象を $E_1$ と書くと，$E_1 = \{1\}$ となるので，1 の目の出る場合の数は 1 である。ゆえに，$\mathrm{P}(E_1) = \mathrm{P}(\{1\}) = 1/6$ となる。一般に，$i$　$(i = 1, \cdots, 6)$ の目が出る事象を $E_i$ と書くと，$E_i = \{i\}$ となるので，$\mathrm{P}(E_i) = 1/6$ となる。次に，出る目が偶数になる事象を $B$ で表すと，$B = \{2,\ 4,\ 6\}$ となり，$B$ が起こる場合の数は 3 となる。ゆえに，$\mathrm{P}(B) = 3/6 = 1/2$ となる。また，$A = \{1,\ 3\}$ については $\mathrm{P}(A) = 2/6 = 1/3$ となる。

確率には以下のような性質がある。任意の事象 $A$, $B$ について，

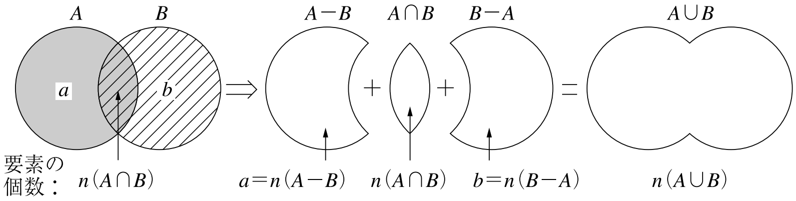
$$0 \leqq \mathrm{P}(A) \leqq 1 \qquad （特に，\mathrm{P}(\phi) = 0,\ \mathrm{P}(\Omega) = 1） \tag{3.8}$$

$$\mathrm{P}(A^c) = 1 - \mathrm{P}(A) \tag{3.9}$$

$$A \subset B \implies \mathrm{P}(A) \leqq \mathrm{P}(B) \tag{3.10}$$

**証明**　(3.8) に関する証明は，次のとおりである。事象 $A$ の場合の数を $n(A)$ で表すことにしよう。全体の場合の数は $n(\Omega) = N$ と書ける。事象 $A$ の場合の数は非負であり，また，全体の場合の数よりも大きくはならないので，$0 \leqq n(A) \leqq n(\Omega)$ が成り立つ。この不等式の両辺を $N = n(\Omega)$ で割れば，

**図** 3.7




(3.8) の不等式を得る。また，$n(\phi)=0$ なので，$\mathrm{P}(\phi)=0$ となる。$N=n(\Omega)$ であるので，$\mathrm{P}(\Omega)=1$ は明らか。

(3.9)，(3.10) の証明は練習問題として残す（問 3.2）。

### 3.3.2　加法定理と乗法定理

任意の事象 $A$，$B$ について，それらの事象の少なくともどちらか一方が起こる確率を考えよう。事象 $A$，$B$ の少なくともどちらか一方が起こる事象は，すでに述べたように集合論の記号を用いれば，$A\cup B$ と書くことができる。そこで，これを図示すれば，図 3.7 のようになる。

図 3.7 において，$a$ は $A$ に属していて $B$ に属していない場合の数 $n(A-B)$，$b$ は $B$ に属していて $A$ に属していない場合の数 $n(B-A)$ を示している。$n(A)$，$n(B)$ を $a$ と $b$ で表すと，

$$n(A)\,=\,a+n(A\cap B), \qquad n(B)=b+n(A\cap B) \tag{3.11}$$

が成立する。図 3.7 より，$A\cup B$ の場合の数 $n(A\cup B)$ は，

$$n(A\cup B)\,=\,a+b+n(A\cap B) \tag{3.12}$$

となる。この (3.12) に (3.11) の関係を代入すれば，

$$n(A\cup B)\,=\,n(A)+n(B)-n(A\cap B) \tag{3.13}$$

と書ける。そこで，上の式の両辺を全体の場合の数 $N=n(\Omega)$ で割れば，

**加法定理**

$$\mathrm{P}(A\cup B)\,=\,\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B) \tag{3.14}$$

を得る。また，事象 $A$ と $B$ が排反である場合，すなわち，$A \cap B = \phi$ の場合，$\mathrm{P}(A \cap B) = 0$ となるので，

**加法定理　（事象 $A$ と $B$ が排反の場合）**

$$\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) \tag{3.15}$$

が成り立つ。

次に，任意の事象 $A$，$B$ に対して，事象 $B$ が起こったという条件のもとで事象 $A$ が起こる確率を定義しよう（ただし，$\mathrm{P}(B) > 0$ とする）。この確率のことを**条件付き確率**と呼ぶ。

**例** 3.2　ある大学の文科系の全学生を対象として数学が好きか否かを調査し，学生を

$$A = \{\text{ 数学が好きと答えた学生 }\}$$
$$B = \{\text{ 経済学専攻の学生 }\}$$

という事象に分けることにする。1 人 1 人の学生は学籍番号で識別することができるので，その番号を書いた均質等大の番号札を箱の中に入れておき，その箱から 1 枚の番号札を抜き出せば，対象となる学生の中から 1 人の学生を無作為に抽出することができ，どの学生を抽出するかは同様に確からしいと仮定することができる（無作為の正確な意味については第 6 章 6.1 節参照）。また，1 つ 1 つの標本点はどの学生を抽出するかということを表しているので，事象の場合の数はその事象に属する学生数となる。いま，任意に 1 人の学生を抽出し，その学生が経済学専攻の学生である確率を求めよう。全体の場合の数を $N$ とすれば，

$$\mathrm{P}(B) = \frac{n(B)}{N} \tag{3.16}$$

となる。また，$A \cap B$ は，

$$A \cap B = \{\text{ 数学が好きと答えた経済学専攻の学生 }\}$$

となるので，抽出した学生が，数学が好きと答えた経済学専攻の学生である確率は，

$$\mathrm{P}(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{N} \tag{3.17}$$

となる。そこで，経済学専攻の学生の中から 1 人を抽出し，その学生が数学が好きな学生である確率を考えると，全体の場合の数は $n(B)$ となるので，その確率は，確率の定義 3.1 から $n(A \cap B)/n(B)$ となる。この確率を $\mathrm{P}(A|B)$ と書き，事象 $B$ が起こったという条件のもとで事象 $A$ が起こる**条件付き確率**という。また，(3.16) と (3.17) を用いれば，

$$\mathrm{P}(A|B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)} = \frac{n(A \cap B)/N}{n(B)/N} = \frac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(B)} \tag{3.18}$$

となる。この (3.18) より，次の乗法定理を得る。

**乗法定理**

$$\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(B)\mathrm{P}(A|B) \tag{3.19}$$

**例題** 3.2　ある大学の経済学部 500 人，法学部 300 人，文学部 200 人の合計 1000 人の学生について，数学が好きか嫌いかを調査したところ次の結果を得た (%)。 次の確率を求めよ。

| | 経済学部 | 法学部 | 文学部 |
|---|---|---|---|
| 好き | 30 | 20 | 10 |
| 嫌い | 70 | 80 | 90 |
| 計 | 100 | 100 | 100 |

**(1)**　その学生が経済学部の学生で数学が好きと答えた学生である確率

**(2)**　その学生が法学部か文学部の学生で数学が嫌いと答えた学生である確率

**解**　経済学部，法学部，文学部の学生の集合をそれぞれ $E$, $J$, $L$ で表すと，$\mathrm{P}(E) = 0.5$, $\mathrm{P}(J) = 0.3$, $\mathrm{P}(L) = 0.2$ となる。また，数学が好きと答えた学生の集合を $M$ で表すことにする。

**(1)**　$\mathrm{P}(M|E) = 0.3$ なので，乗法定理を用いて，

$$\mathrm{P}(E \cap M) = \mathrm{P}(E)\mathrm{P}(M|E) = 0.5 \times 0.3 = 0.15$$

となる。

**(2)**　求める確率は，集合の分配法則より

$$\mathrm{P}((J \cup L) \cap M^c) = \mathrm{P}((J \cap M^c) \cup (L \cap M^c))$$

である。ところが，$J \cap M^c$ と $L \cap M^c$ は排反な事象なので，排反の場合の加法定理を用いれば，

$$\begin{aligned}\mathrm{P}((J \cup L) \cap M^c) &= \mathrm{P}((J \cap M^c) \cup (L \cap M^c)) && \text{（分配法則）}\\ &= \mathrm{P}(J \cap M^c) + \mathrm{P}(L \cap M^c) && \text{（排反事象）}\\ &= \mathrm{P}(J)\mathrm{P}(M^c|J) + \mathrm{P}(L)\mathrm{P}(M^c|L) && \text{（乗法定理）}\\ &= 0.3 \times 0.8 + 0.2 \times 0.9 = 0.42\end{aligned}$$

となる。

次に事象の独立について説明する。例えば，1 個のサイコロを 2 回投げる実験を考えてみよう。第 1 回目に $i$ が出て，2 回目に $j$ が出ることを $(i, j)$ で表すことにする。この場合の標本空間 $\Omega$ は，$\Omega = \{(1,1), (1,2), \cdots, (6,6)\}$ であり，36 個の標本点からなる。1 回目に出た目が偶数であるという事象を $B$，2 回目に出た目が偶数であるという事象を $A$ とする。1 回目に偶数が出ようと奇数が出ようと 2 回目の結果に影響を与えないので，事象 $B$ が起こったという条件のもとで事象 $A$ が起こる確率 $\mathrm{P}(A|B)$ は，事象 $A$ が起こる確率 $\mathrm{P}(A)$ に等しくなる。すなわち，

$$\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(A|B) \tag{3.20}$$

が成立する。(3.20) が成り立つとき，**事象 $A$ は事象 $B$ と独立である**という。また，(3.20) を (3.19) に代入すれば，

$$\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B) \tag{3.21}$$

が成立する。(3.19) の $A$ と $B$ を入れかえれば，

$$\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A) \tag{3.22}$$

も成立する。もし (3.20) が成立すれば，(3.21) と (3.22) より

$$\mathrm{P}(B) = \mathrm{P}(B|A) \tag{3.23}$$

が成立し，事象 $B$ は事象 $A$ と独立になる。

ゆえに，(3.20)，(3.21)，(3.23) は同値であるので，これらのいずれかが成立しているならば，事象 $A$ と事象 $B$ は独立であるという。特に (3.21) が成り立つ場合を**独立**（independent）と呼ぶ場合が多い。

**事象 $A$ と $B$ は独立**

$$\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B) \tag{3.24}$$

**例** 3.3　例題 3.2 においては $\mathrm{P}(M|E)$（ある学生が経済学部の学生であることが分かっているとして，その学生が数学が好きと答えた確率）を考えたが，今度はこれを逆に考え，ある学生が数学が好きと答えたことが分かっているとして，その学生が経済学部の学生である確率を求めてみよう。例題 3.2 の記号を用いれば，求める確率は $\mathrm{P}(E|M)$ である。乗法定理を用いれば，これは

$$\mathrm{P}(E|M) = \frac{\mathrm{P}(E \cap M)}{\mathrm{P}(M)} \tag{3.25}$$

と表すことができる。ここで，$E$，$J$，$L$ は互いに排反で，しかもこれらの事象のどれかが必ず起こるので（なぜなら，$E \cup J \cup L = \Omega$，図 3.8 参照），

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(M) &= \mathrm{P}(\Omega \cap M) = \mathrm{P}((E \cup J \cup L) \cap M) \\ &= \mathrm{P}(E \cap M) + \mathrm{P}(J \cap M) + \mathrm{P}(L \cap M) \qquad (3.26)\end{aligned}$$

となる。また，乗法定理より

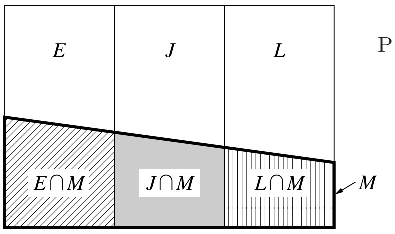
$$\begin{aligned}&\mathrm{P}(E \cap M) = \mathrm{P}(E)\mathrm{P}(M|E) = 0.5 \times 0.3 = 0.15 \qquad (3.27)\\ &\mathrm{P}(J \cap M) = \mathrm{P}(J)\mathrm{P}(M|J) = 0.3 \times 0.2 = 0.06\\ &\mathrm{P}(L \cap M) = \mathrm{P}(L)\mathrm{P}(M|L) = 0.2 \times 0.1 = 0.02\end{aligned}$$

となる。そこで，(3.26) と (3.27) を (3.25) に代入すれば，

$$\mathrm{P}(E|M) = \frac{0.15}{0.15 + 0.06 + 0.02} = \frac{15}{23} \fallingdotseq 0.65 \tag{3.28}$$

を得る。例題 3.2 では $\mathrm{P}(E) = 0.5$ であったものが，結果（数学が好き）が分かったあとには $\mathrm{P}(E|M) \fallingdotseq 0.65$ となっていることに注意されたい。$\mathrm{P}(E)$ のことを**事前確率**，$\mathrm{P}(E|M)$ のことを**事後確率**と呼ぶ。

**図** 3.8　**ベイズの定理（例** 3.3**）**




$$\mathrm{P}(E|M) = \frac{\mathrm{P}(E \cap M)}{\mathrm{P}(M)}$$
$$= \frac{\mathrm{P}(E \cap M)}{\mathrm{P}(E \cap M) + \mathrm{P}(J \cap M) + \mathrm{P}(L \cap M)}$$
$$= \frac{\mathrm{P}(E)\mathrm{P}(M|E)}{\mathrm{P}(E)\mathrm{P}(M|E) + \mathrm{P}(J)\mathrm{P}(M|J) + \mathrm{P}(L)\mathrm{P}(M|L)}$$

このような問題を一般化したのが**ベイズの定理**（Bayes' theorem）である。いま，$A_1$，$A_2$，$\cdots$，$A_n$ を互いに排反な事象（すなわち，$i \neq j$ について，$A_i \cap A_j = \phi$）で，これらの事象のどれかは必ず起こるものとする（すなわち，$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = \Omega$ となり，これを標本空間の分割という）。このときある事象 $B$ に対して，$\mathrm{P}(B|A_i)$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ が与えられているとき，

**ベイズの定理**

$$\mathrm{P}(A_i|B) = \frac{\mathrm{P}(A_i)\mathrm{P}(B|A_i)}{\sum_{j=1}^{n} \mathrm{P}(A_j)\mathrm{P}(B|A_j)} \qquad i = 1,\ 2,\ \cdots,\ n \qquad (3.29)$$

が成り立つ。

## 練習問題

**3.1**　人口統計によれば，出生性比 (= {(年間男子出生数)/(年間女子出生数)} × 100) は 105 前後といわれている。いま，簡略化のため，出生性比を 100 としたとき，**(1)** ある家庭で男子が生まれてくる確率はいくらか。また，**(2)** ある家庭が一姫二太郎となる確率を求めよ（標本空間は子供が 2 人いる家庭とする）。

**3.2**　(3.9)，(3.10) を証明せよ。

**3.3**　ある調査機関が 20 歳代 300 人，30 歳代 500 人，40 歳代 200 人，合計 1000 人に，自由時間をどのように過ごすかを調査したところ下表のような結

果を得た。

(%)

| | 20 代 | 30 代 | 40 代 |
|---|---|---|---|
| 余暇そのものを楽しむ | 41 | 33 | 27 |
| 家族の絆を深める | 19 | 35 | 35 |
| 心身の疲労回復 | 18 | 23 | 27 |
| 友人との人間関係の充実 | 22 | 9 | 11 |
| 合　計 | 100 | 100 | 100 |

この 1000 人の中から無作為に 1 人を選んだとき，次の確率を求めよ。

**(1)** その人が 30 代で家族の絆を深めると答えた人である確率。

**(2)** その人が 40 代で心身の疲労回復あるいは余暇そのものを楽しむと答えた人である確率。

**(3)** 20 代で友人との人間関係の充実と答えた人であるか，30 代で心身の疲労回復と答えた人である確率。

**(4)** その人が余暇そのものを楽しむと答えた人であることが分かっていたとして，その人が 20 代の人である確率。

**3.4** $A$ と $B$ の 2 つの集合を考える。$A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{2, 3, 8\}$ とするとき，**(1)** $A \cup B$, **(2)** $A \cap B$, **(3)** $A - B$, **(4)** $A \cap A^c$ をそれぞれ書き出せ。

**3.5** 1 つのサイコロを投げて出る目を調べる。$A$ を偶数の目が出る事象，$B$ を 3 の倍数の目が出る事象とする。このとき，**(1)** $\mathrm{P}(A)$, **(2)** $\mathrm{P}(B)$, **(3)** $\mathrm{P}(A \cup B)$, **(4)** $\mathrm{P}(A \cap B)$ をそれぞれ求めよ。

**3.6** ある大学の経済学部 ($E$) 300 人，法学部 ($J$) 200 人の合計 500 人の学生について，数学が好き ($M$) か嫌い ($M^c$) かを調査したところ次の結果を得た。

| | 経済学部 ($E$) | 法学部 ($J$) |
|---|---|---|
| 数学が好き ($M$) | 30 | 20 |
| 数学が嫌い ($M^c$) | 70 | 80 |
| 計 | 100 | 100 |

ただし，表中の数値は % で表されているものとする。このとき，**(1)** $\mathrm{P}(E)$, **(2)** $\mathrm{P}(J)$, **(3)** $\mathrm{P}(M|E)$, **(4)** $\mathrm{P}(M|J)$, **(5)** $\mathrm{P}((E \cup J) \cap M)$, **(6)**

$\mathrm{P}((E \cup J) \cap M^c)$，**(7)**　$\mathrm{P}((E \cap J) \cup M)$，**(8)**　$\mathrm{P}((E \cap J) \cup M^c)$，**(9)** $\mathrm{P}(E|M)$，**(10)**　$\mathrm{P}(J|M)$ の確率をそれぞれ求めよ。

第 4 章

# 確率変数と確率分布

この章では，第 3 章で述べた事象を数値で表すために確率変数という概念を導入し，確率変数にかかわるいくつかの概念を説明する。確率変数は「変数」という名前がついていることからも分かるように，第 1 章で述べた連続型と離散型の 2 種類がある。

## 4.1　確率変数

### 4.1.1　離散型確率変数

いま，1 つの硬貨を投げるとき，表が出ることを 0，裏が出ることを 1 という数字で表すことにする（第 3 章の言葉でいえば，それぞれ表が出る事象，裏が出る事象である）。また，0 と 1 という値をとる変数 $X$ を考え，$X = 0$ ならば，硬貨投げで表が出たことを意味し，$X = 1$ ならば，裏が出たことを意味するとする。このことを正確に書くと

$$X(\{\text{ 表が出る }\}) = 0, \qquad X(\{\text{ 裏が出る }\}) = 1$$

となる。以下では（　）内を省略して単に $X$ と表すことにする。第 3 章で述べたように硬貨投げで表が出る確率は 1/2，裏が出る確率は 1/2 である。この $X$ のように，$X$ のどの値が実現するかは確実には分からないが，その値が出る確率が分かっている変数を**確率変数**（random variable）という。

第 3 章 32 ページで定義した確率の記号 P を用いれば，確率変数 $X$ が実現値 $x$ をとる確率は

$$\mathrm{P}(X = x) = \frac{1}{2}, \qquad x = 0,\ 1$$

と書くことができる（ここでは，確率変数とそのとりうる値を区別するために，前者を大文字，後者を小文字で表す）。この硬貨投げの例では，確率変数 $X$ の

**表 4.1　硬貨投げの確率分布**

| $X$ のとる値 | 0 | 1 | 計 |
|---|---|---|---|
| その確率 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 1 |

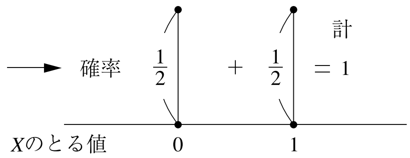
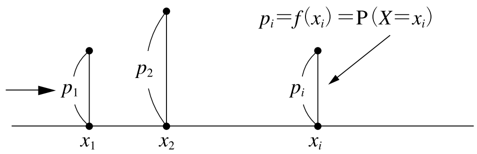



**表 4.2　確率変数 $X$ の分布（確率分布）**

| $X$ のとる値 | $x_1$ | $x_2$ | $\cdots$ | $x_i$ | $\cdots$ | 計 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| その確率 | $p_1$ | $p_2$ | $\cdots$ | $p_i$ | $\cdots$ | 1 |




（注）表上段の $X$ のとる値 $x_1$, $x_2$, $\cdots$, $x_i$, $\cdots$ において，最初の $\cdots$ は $x_3$ から $x_{i-1}$ までが省略されていることを表している。最後の $\cdots$ は $x_{i+1}$ 以降が省略されていると同時に無限（可算無限）に続くことを表している。$X$ のとる値が有限個（例えば $n$ 個）のときは，$x_{n+1} = x_{n+2} = \cdots = 0$ と考えればよい。

とりうる値は 0 か 1 という不連続な値である。このように不連続な値をとる確率変数を**離散型確率変数**という。

また，確率変数に付された確率の系列を**確率分布**（probability distribution）という。上の硬貨投げの例では表 4.1 のように確率分布が表現される。

表 4.1 から明らかなように，確率分布において確率の総和は 1 になる。表 4.1 のように，離散型確率変数に対応する確率分布を**離散型確率分布**という。

一般に，離散型確率変数は実数上の有限個あるいは可算無限個の値をとる。可算無限とは，1 番目，2 番目，$\cdots$ というように，無限ではあるが番号をつけていくことができることをいう。いま，離散型確率変数 $X$ が $x_1$, $x_2, \cdots$, $x_i$, $\cdots$ の値をとるとする。そして，それぞれの値をとる確率を $p_1$, $p_2$, $\cdots$, $p_i$, $\cdots$ とする。これを表 4.1 のように数表化すれば，表 4.2 のようになる。

ここで，確率 $p_i$ は，確率変数 $X$ のとりうる値によってその値が変わる。この意味において，$p_i$ は $X$ のとりうる値の関数と見ることができる。このことを

$$\mathrm{P}(X = x_i) = p_i = f(x_i), \qquad i = 1,\ 2,\ \cdots \tag{4.1}$$

と書くことにする。この $f(x_i)$ を確率変数 $X$ の**確率関数**（probability function）という。確率関数については，確率が非負であり，確率の総和が 1 となること

より，

$$p_i = f(x_i) \geqq 0, \qquad i = 1, 2, \cdots$$

$$\sum_i p_i = \sum_i f(x_i) = 1$$

という性質がある。ただし，総和記号 $\sum\limits_i$ は，有限個の和のときは $\sum\limits_{i=1}^{n}$，可算無限個の和のときは $\sum\limits_{i=1}^{\infty}$ を表すものとする。

また，$X$ が $x$ 以下の値をとる確率の合計を**分布関数**（distribution function）といい，

$$F(x) = \mathrm{P}(X \leqq x) = \sum_{i=1}^{r} p_i = \sum_{i=1}^{r} f(x_i), \quad x_r \leqq x < x_{r+1} \tag{4.2}$$

と書くことにする。分布関数には次の性質がある。

$$F(-\infty) = 0, \qquad F(\infty) = 1 \tag{4.3}$$

### 4.1.2　離散型確率分布

ここでは，離散型確率分布の例として 2 項分布，ポアソン分布を簡単に解説する。

**例** 4.1　ある野球選手のヒットを打つ確率はちょうど 3 割であるとする。この選手が 3 打席のうち 1 本ヒットを打つ確率を求めてみよう。

ヒットを打つという事象を $H$ で表すと $\mathrm{P}(H) = 0.3$ であり，ヒット以外はその余事象 $H^c$ であり，確率は $\mathrm{P}(H^c) = 1 - \mathrm{P}(H) = 0.7$ となる。3 打席中 1 本ヒットを打つ場合は $HH^cH^c$，$H^cHH^c$，$H^cH^cH$ の 3 通りが考えられる。またどの場合の確率も $0.3 \times 0.7^2 = 0.147$ である。よって，求める確率は，$3 \times 0.147 = 0.441$ である。

**例** 4.2　例 4.1 において，ヒットを打つ回数を $X$ とするとき，$X$ の確率分布を求めてみよう。

起こりうる場合は $HHH$，$HHH^c$，$HH^cH$，$H^cHH$，$HH^cH^c$，$H^cHH^c$，$H^cH^cH$，$H^cH^cH^c$ の 8 通りである。ヒットが 0 本の場合の確率は $0.7^3 = 0.343$，1 本は $3 \times 0.3 \times 0.7^2 = 3 \times 0.147$，2 本は $3 \times 0.3^2 \times 0.7 = 3 \times 0.063$，3 本の場合は $0.3^3 = 0.027$ となるので，求める確率分布は表 4.3 のようになる。

**表** 4.3　2 **項確率の確率分布（例** 4.2**）**

| $X$ のとる値 | 0 | 1 | 2 | 3 | 計 |
|---|---|---|---|---|---|
| その確率 | 0.343 | 0.441 | 0.189 | 0.027 | 1 |

（注）ヒットが 0 本の場合は 1 通り，$1 \times 0.343 = 0.343$
ヒットが 1 本の場合は 3 通り，$3 \times 0.147 = 0.441$
ヒットが 2 本の場合は 3 通り，$3 \times 0.063 = 0.189$
ヒットが 3 本の場合は 1 通り，$1 \times 0.027 = 0.027$

この例のように，試行の結果をある事象（すなわち，ヒットを打つ）が起こるか否かの 2 つに分類し，繰返しの実験でその事象が起こる回数の確率分布を 2 **項分布**（binominal distribution）という。いま，ある事象の起こる確率を $p$，その余事象の起こる確率を $q$ とし（すなわち，$p+q=1$ が成り立つ），$n$ 回の試行を行うとき，2 項分布の確率関数は次のように表される。

$$\mathrm{P}(X=x) \;=\; f(x) = \frac{n!}{x!(n-x)!}p^x q^{n-x}, \qquad x = 0, 1, \cdots, n \quad (4.4)$$

ただし，$n!$ は $n$ の階乗で，$n! = n(n-1)(n-2)\cdots 1$ である（$0! = 1$ と定義する）。係数 $\dfrac{n!}{x!(n-x)!}$ は，組合せの記号を用いて ${}_n\mathrm{C}_x$ と書かれることもあり，2 項係数という。例 4.2 を 2 項分布を用いて解くと，

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(X=0) \;&=\; f(0) = \frac{3!}{0!3!}0.7^3 = 0.343\\
\mathrm{P}(X=1) \;&=\; f(1) = \frac{3!}{1!2!}0.3 \times 0.7^2 = 0.441\\
\mathrm{P}(X=2) \;&=\; f(2) = \frac{3!}{2!1!}0.3^2 \times 0.7 = 0.189\\
\mathrm{P}(X=3) \;&=\; f(3) = \frac{3!}{3!0!}0.3^3 = 0.027
\end{aligned}$$

となる。また，このような起こるか否かの実験を 1 回だけ行うという試行を**ベルヌーイ試行**（Bernoulli trial）と呼び，そのときの分布（すなわち，$n=1$ のときの 2 項分布）を **ベルヌーイ分布** と呼ぶ。なお，確率変数 $X$ の分布が 2 項分布であるとき，**確率変数 $X$ は** 2 **項分布に従う**という。これは 2 項分布に限らず，任意の確率分布についても用いる。これを記号で次のように表す。

$$X \sim \text{（確率分布）}$$

(4.4) に示される 2 項分布の場合，$X \sim \mathrm{B}(n, p)$ と書かれることがある。B は 2 項分布（Binomial distribution）の頭文字を表している。また，$n$，$p$ が決まれば，(4.4) の $f(x)$ の値をすべて求めることができる。そのため，$\mathrm{B}(n, p)$ という書き表し方は，確率関数が $n$，$p$ に依存しているということを明示的に示しているのである。

2 項分布において，$np = \lambda$ を一定にして，$n$ を限りなく大きく（つまり $p$ を限りなく小さく）していくときの 2 項分布の極限の分布を，**ポアソン分布**（Poisson distribution）という。ポアソン分布の確率関数は次のように表される。

$$\mathrm{P}(X = x) = f(x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}, \qquad x = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots \tag{4.5}$$

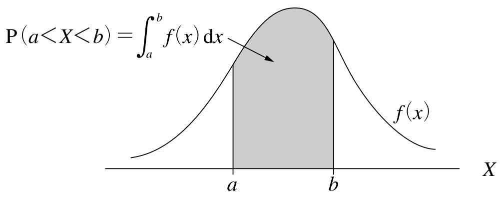
2 項分布は $n$ が大きく，$p$ が小さいとき，ポアソン分布で近似できる。

### 4.1.3　連続型確率変数

前述した離散型確率変数はそのとりうる値が有限個あるいは可算無限個であった。しかし，第 1 章でも述べたように，長さ，重さ，温度，時間などが実験（試行）の結果として用いられる場合，有限個あるいは可算無限個の点ではすべての結果を表すことができない。そこで，確率変数の実現値が連続した値（任意の実数値）をとる場合についても考慮する必要がある。このような確率変数を**連続型確率変数**といい，その確率分布を**連続型確率分布**という。

確率変数 $X$ が離散型であるときには，表 4.2 のように，$X$ の確率分布は，$X$ の実現値とそれが起こる確率の対応表で表すことができた。この対応表は，換言すれば，合計が 1 となる確率を $X$ の各実現値 $x_i$ に分配する規則を表したものといえる。ところが，確率変数 $X$ が連続型であるときには，$X$ の確率分布をこのような対応表で表すことはできない。このときには，確率を分配する規則は，連続曲線によって表される。この曲線を確率変数 $X$ の**確率密度関数**（probability density function）あるいは単に**密度関数**といい，$f(x)$ で表す。また，$X$ が連続型確率変数であるときには，$X$ が特定の実現値をとる確率ではなく，$X$ が特定の区間に入る確率を考える。連続型確率変数 $X$ が（開）区間 $(a, b)$ に入る確率は，この区間での確率密度関数と $x$ 軸との間の領域の面積で表される（図 4.1 の網掛け部分）。したがって，$X$ が区間 $(a, b)$ に入る確率は

**図** 4.1　**連続型確率変数の確率分布**




$$\mathrm{P}(a < X < b) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x, \qquad a < b \tag{4.6}$$

で表される。また，確率密度関数 $f(x)$ は，離散型確率分布の確率関数に対応する関数であるので，

$$f(x) \geqq 0, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = 1 \tag{4.7}$$

という性質をもっている。

$X$ が連続型確率変数のときには，その確率は区間の面積であるので，$X$ が特定の値 $a$ をとる確率は $x = a$ という線分の面積，すなわち，

$$\mathrm{P}(X = a) = \mathrm{P}(a \leqq X \leqq a) = \int_a^a f(x)\mathrm{d}x$$

であるので，0 となる。このことから，

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(a \leqq X \leqq b) &= \mathrm{P}(a < X \leqq b)\\ &= \mathrm{P}(a \leqq X < b) = \mathrm{P}(a < X < b)\end{aligned} \tag{4.8}$$

が成立する。

離散型確率分布のときと同じように，$X \leqq x$ となる確率を**分布関数** といい，

$$F(x) = \mathrm{P}(X \leqq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t \tag{4.9}$$

と書く（$f(x)\mathrm{d}x$ の $x$ を $t$ とおいているのは，積分の限界の $x$ とまぎらわしくないようにするためである)。この分布関数を用いると，

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(a < X < b) &= F(b) - F(a) \\ &= \int_{-\infty}^{b} f(x)\mathrm{d}x - \int_{-\infty}^{a} f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x\end{aligned} \tag{4.10}$$

と書くことができる。このように，確率密度関数 $f(x)$ によって連続型確率関数の確率分布が特徴づけられるとき，それを**連続型確率分布**という。また，分布関数については，離散型の場合と同様に

$$F(-\infty) = 0, \qquad F(\infty) = 1 \tag{4.11}$$

という性質がある。

連続型確率分布の例として，本書では正規分布（第 5 章），カイ 2 乗分布，$t$ 分布，$F$ 分布（いずれも第 6 章），指数分布（問 7.8）を取り上げる。

## 4.2　期待値

### 4.2.1　平均値

いま，1 個のサイコロを投げて，出る目の数だけ賞金（円）をもらうゲームを考えよう。出る目の数を確率変数 $X$ で表せば，その確率分布は表 4.4 のようになる。

ここで例えば，60 回サイコロを投げて表 4.5 のような結果が出たとする。1 回当りの賞金は第 2 章で述べた算術平均なので,（賞金）×（度数）の総和を 60 で割ることによって求められる。すなわち，

$$\frac{1\times 9+2\times 13+3\times 8+4\times 12+5\times 11+6\times 7}{60} = \frac{204}{60} = 3.4\ (\text{円})$$

と計算できる。これはまた,（賞金)×(相対度数）の総和

$$\begin{aligned} &1\times\frac{9}{60}+2\times\frac{13}{60}+3\times\frac{8}{60}+4\times\frac{12}{60}+5\times\frac{11}{60}+6\times\frac{7}{60} \\ &\quad = \frac{204}{60} = 3.4\ (\text{円}) \end{aligned}$$

としても計算できる。

もし，サイコロ投げの回数を十分大きくするならば，出る目の相対度数はその確率にほぼ等しくなる。したがって，1 回当りのサイコロ投げで得られる賞金は

$$1\times\frac{1}{6}+2\times\frac{1}{6}+3\times\frac{1}{6}+4\times\frac{1}{6}+5\times\frac{1}{6}+6\times\frac{1}{6} = \frac{7}{2} = 3.5\ (\text{円})$$

**表** 4.4　**サイコロの出目の確率分布**

| $X$ のとる値 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 計 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| その確率 | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | 1 |

（注）サイコロは正常に作られていると仮定している。ただし，32 ページで述べたように，この仮定はあくまで人為的な仮定であって科学的な法則ではないことに注意する。

**表** 4.5　**サイコロ投げの実験例**

| 出る目 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 計 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 度数 | 9 | 13 | 8 | 12 | 11 | 7 | 60 |
| 相対度数 | $\frac{9}{60}$ | $\frac{13}{60}$ | $\frac{8}{60}$ | $\frac{12}{60}$ | $\frac{11}{60}$ | $\frac{7}{60}$ | 1 |

と期待できる。

一般に，確率変数 $X$ の確率分布が 44 ページの表 4.2 のように与えられているとき，$\sum\limits_{i=1}^{n} x_i p_i$ を確率変数 $X$ の**期待値**（expectation）（**平均値**）といい，これを $\mathrm{E}[X]$ で表す。すなわち，

$$\mathrm{E}[X] = \sum_i x_i p_i = \sum_i x_i f(x_i) \tag{4.12}$$

これは第 2 章で述べた度数分布の形でまとめられた場合の平均値（加重平均）である。(2.2) を

$$\overline{x} = \sum_{i=1}^{k} x_i \left(\frac{f_i}{n}\right)$$

と変形して，相対度数 $f_i/n$ を確率 $p_i$ に置きかえたものと考えればよい（ただし (2.2) の $m_i$ を $x_i$ に置きかえている）。実際，上で述べたように，相対度数 $f_i/n$ は $n$ を無限に大きくしていくと確率 $p_i$ に近づいていく。すなわち，$n \to \infty$ のとき，$f_i/n \to p_i$ となる（これを**大数の法則**という）。

また，連続型確率変数については，総和記号の $\sum$ を $\int \cdots \mathrm{d}x$ という積分記号に，また確率関数 $f(x_i)$ を確率密度関数 $f(x)$ に置きかえることによって同様に定義できる。すなわち，連続型確率変数 $X$ の期待値は

$$\mathrm{E}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) \mathrm{d}x \tag{4.13}$$

と定義される。しかし，これ以後述べる期待値についての演算は離散型，連続型にかかわりなく成立するので，直感的に理解しやすい離散型確率変数を中心に述べていくことにする。

期待値の定義より次の定理が簡単に導かれる。

**定理** 4.1　$a$，$b$ が定数であるとき

$$\mathrm{E}[aX+b] = a\mathrm{E}[X]+b$$

**証明**

$$\begin{aligned}\mathrm{E}[aX+b] &= \sum_i (ax_i+b)p_i = \sum_i (ax_ip_i+bp_i) = \sum_i ax_ip_i + \sum_i bp_i \\ &= \underbrace{a\sum_i x_ip_i}_{=\mathrm{E}[X]} + b\underbrace{\sum_i p_i}_{=1} = a\mathrm{E}[X]+b\end{aligned}$$

### 4.2.2　分散，標準偏差

確率変数の分散（variance）は，期待値を用いて次のように定義される。

$$\mathrm{V}(X) = \mathrm{E}[(X-\mu)^2], \qquad \mu = \mathrm{E}[X] \tag{4.14}$$

$$= \begin{cases} \displaystyle\sum_i (x_i-\mu)^2 p_i & \text{（離散型）} \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f(x)\mathrm{d}x & \text{（連続型）} \end{cases}$$

分散 $\mathrm{V}(X)$ のことを $\sigma^2(X)$，$\sigma_X^2$ あるいは単に $\sigma^2$ と書くことも多い。分散 $\mathrm{V}(X)$ は第 2 章の (2.12) で述べた分散の定義 $s^2 = \dfrac{1}{n}\sum_i f_i(m_i-\overline{x})^2$ を変形した

$$s^2 = \sum_i (x_i-\overline{x})^2 \left(\frac{f_i}{n}\right)$$

を思い起こせば理解しやすいであろう（ただし，$m_i$ を $x_i$ に置きかえている）。

分散については，次の定理が成り立つ。

**定理** 4.2　$\mathrm{V}(X) = \mathrm{E}[X^2]-\mu^2$,　　ただし，$\mu = \mathrm{E}[X]$

**証明**

$$\begin{aligned} \mathrm{V}(X) &= \mathrm{E}[(X-\mu)^2] && \text{(定義)} \\ &= \mathrm{E}[X^2 - 2\mu X + \mu^2] && \text{(カッコ内の展開)} \\ &= \mathrm{E}[X^2] - 2\mu \mathrm{E}[X] + \mu^2 && \text{(定理 4.1 より)} \\ &= \mathrm{E}[X^2] - 2\mu^2 + \mu^2 = \mathrm{E}[X^2] - \mu^2 \end{aligned}$$

この定理は第 2 章の簡便公式 (2.13) に対応している。また，

> **定理** 4.3　$a$，$b$ が定数であるとき，
>
> $$\mathrm{V}(aX+b) = a^2\mathrm{V}(X)$$

が成り立つ（証明は問 4.2 参照)。この公式は，確率変数を $a$ 倍すれば，その分散は $a^2$ 倍になり，確率変数に定数を加えても分散の値は変わらないということを意味している（すなわち，確率分布のグラフを平行移動しても分散は不変である)。

分散の非負の平方根を**標準偏差**（standard deviation）という。すなわち，

$$\sigma(X) = \sqrt{\mathrm{V}(X)} = \sqrt{\mathrm{E}[(X-\mu)^2]} \tag{4.15}$$

標準偏差を単に $\sigma$，$\sigma_X$ と書くこともある。そして，確率変数 $X$ からその平均値 $\mu = \mathrm{E}[X]$ を引き，標準偏差 $\sigma = \sigma(X)$ で割った変数を，確率変数 $X$ の**標準化（基準化）**（standardized）された変数という（標準化については 2.4 節も参照)。すなわち，

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \tag{4.16}$$

標準化された変数について，

> **定理** 4.4　$\mathrm{E}[Z] = 0, \qquad \mathrm{V}(Z) = 1$

が成立する（証明は問 4.2 参照)。

(4.12) と (4.14) から 4.1.2 節で述べた 2 項分布とポアソン分布の平均と分散を求めることができる。結果だけを述べると，

| |
|---|
| 2 項分布：平均 $np$，分散 $npq$ |

| |
|---|
| ポアソン分布：平均 $\lambda$，分散 $\lambda$ |

となる（読者は定義にしたがって計算されたい）。

### 4.2.3　積率

一般に，$a$ を定数，$k$ を正の整数とするとき，

$$\mathrm{E}[(X-a)^k] \tag{4.17}$$

を $a$ の回りの $k$ 次の**積率**または**モーメント**（moment）という。この積率の概念を用いれば，平均値 $\mathrm{E}[X]$ は 0（原点）の回りの 1 次の積率，分散 $\mathrm{V}(X) = \mathrm{E}[(X-\mathrm{E}[X])^2]$ は平均値 $\mathrm{E}[X]$ の回りの 2 次の積率ということができる。

平均値の回りの $k$ 次の積率を

$$m_k = \mathrm{E}[(X-\mathrm{E}[X])^k] \tag{4.18}$$

で表すとき，

$$\gamma_1 = \frac{m_4}{m_2^2} - 3 \tag{4.19}$$

を**尖度**（せんど）（kurtosis）あるいは**尖り**（とがり）といい，確率分布が平均値の回りにどのくらい密集しているかを示す。特に，第 5 章で述べる**正規分布**は $\gamma_1 = 0$ となるので，尖度は正規分布と比べてどのくらい分布の裾野が広がっているかを表している（尖度の定義において 3 を引いているのは，正規分布のそれを 0 とするためであり，$\gamma_1 = m_4/m_2^2$ で尖度を定義している本もある）。また，

$$\gamma_2 = \frac{m_3}{m_2^{3/2}} \tag{4.20}$$

を**歪度**（わいど）（skewness）あるいは**歪み**（ゆがみ）といい，確率分布のひずみ具合を表す。特に，正規分布のような左右対称の確率分布の歪度は 0 となる。このように，尖度と歪度によって，正規分布からどれくらいかけ離れた分布であるかが分かるとともに，確率分布のおおよその形を捉えることができる。例えば，第 6 章で説明

されるカイ 2 乗分布（図 6.1）は右に歪んだ分布の例であり，このとき歪度は正の値となる（左に歪んだ分布の歪度は負の値となる）。また，同じく第 6 章で説明される $t$ 分布（図 6.4）は左右対称であるので歪度は 0 であるが，正規分布に比べて両裾の面積が広く，その尖度は正の値となる（ここでは，尖度の定義上，4 次までの積率が存在するものと仮定している）。

## 4.3　同時確率分布

### 4.3.1　同時確率分布と周辺分布

2 個の正常なサイコロを投げたとき，出る目の数をそれぞれ $X$，$Y$ とする。このとき，$X = i$（ただし，$i = 1,\ 2,\ \cdots,\ 6$），$Y = j$（ただし，$j = 1,\ 2,\ \cdots,\ 6$）となる確率は，$X$ の出る目と $Y$ の出る目は独立だから，独立事象の乗法定理 (3.24) より

$$\mathrm{P}(X = i,\ Y = j) = \mathrm{P}(X = i)\mathrm{P}(Y = j) = \frac{1}{36}, \quad i, j = 1,\ 2,\ \cdots,\ 6$$

となる。ただし P(　) の中の，(カンマ) は「かつ」 ∩ の意味である。このように，確率変数 $X$，$Y$ のとりうる値に対して，確率変数が 1 個の場合と同様に確率の系列が計算できる。この確率の系列を確率変数 $X$ と $Y$ の**同時確率分布**（joint probability distribution）という。

一般に，離散型確率変数 $X$，$Y$ の同時確率分布は，

$$\mathrm{P}(X = x_i,\ Y = y_i) = p_{ij} = f(x_i, y_j), \quad i = 1,\ 2,\ \cdots,\ n, \quad j = 1,\ 2,\ \cdots,\ m \tag{4.21}$$

で与えられる。ここで，$f(x_i, y_j)$ を確率変数 $X$，$Y$ の**同時確率関数**という。また，同時確率分布は表 4.6 のようにまとめることができる。表 4.6 において，$p_{i\cdot}$（ただし，$i = 1,\ 2,\ \cdots,\ n$）は，$Y$ のどの値をとるかに依存せず，$X$ が $x_i$ という値をとる確率である。これを確率変数 $X$ の**周辺分布**（marginal distribution）という。同様に $p_{\cdot j}$（ただし，$j = 1,\ 2,\ \cdots,\ m$）を確率変数 $Y$ の周辺分布という。このことを数式で書けば，次のようになる。

**表** 4.6　**同時確率分布**

| $X \backslash Y$ | $y_1$ | $y_2$ | $\cdots$ | $y_m$ | 計 |
|---|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | $p_{11}$ | $p_{12}$ | $\cdots$ | $p_{1m}$ | $p_{1\cdot}$ |
| $x_2$ | $p_{21}$ | $p_{22}$ | $\cdots$ | $p_{2m}$ | $p_{2\cdot}$ |
| $\vdots$ | | $\vdots$ | | | $\vdots$ |
| $x_n$ | $p_{n1}$ | $p_{n2}$ | $\cdots$ | $p_{nm}$ | $p_{n\cdot}$ |
| 計 | $p_{\cdot 1}$ | $p_{\cdot 2}$ | $\cdots$ | $p_{\cdot m}$ | 1 |

（注）$p_{i\cdot}$ は第 $i$ 行の和，$p_{\cdot j}$ は第 $j$ 列の和を表す省略された記号である。(4.22) 参照。ドット記法という。

$$\mathrm{P}(X = x_i) = p_{i\cdot} = \sum_{j=1}^{m} p_{ij} = f(x_i) \qquad (X\text{ の周辺分布}) \tag{4.22}$$

$$\mathrm{P}(Y = y_j) = p_{\cdot j} = \sum_{i=1}^{n} p_{ij} = f(y_j) \qquad (Y\text{ の周辺分布})$$

ここで，$f(x_i)$，$f(y_j)$ をそれぞれ確率変数 $X$，$Y$ の**周辺確率関数**という。また，確率の総和は 1 となるので，

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p_{ij} = \sum_{i=1}^{n} p_{i\cdot} = \sum_{j=1}^{m} p_{\cdot j} = 1 \tag{4.23}$$

が成り立つ。

また，2 つの連続型確率変数 $X$，$Y$ についても，$X$，$Y$ の**同時確率密度関数**および**周辺確率密度関数**を考えることができるが，2 重積分などの煩雑さを避けるためにここでは省略する。

### 4.3.2　条件付き分布

離散型確率変数 $X$，$Y$ の同時確率分布が表 4.6 のように与えられているとする。$Y$ が特定の値 $Y = y_j$ をとるという条件のもとで，$X = x_i$ となる確率を考える。第 3 章で述べた条件付き確率を用いれば，

$$\mathrm{P}(X = x_i | Y = y_j) = \frac{\mathrm{P}(X = x_i, Y = y_j)}{\mathrm{P}(Y = y_j)}, \tag{4.24}$$

$$i = 1,\ 2,\ \cdots,\ n, \quad j = 1,\ 2,\ \cdots,\ m$$

と表される。ここで，$Y = y_j$ という条件のもとで $X = x_i$ となる確率を，確率関数 $f(x_i|y_j)$ で表すと，上で述べた条件付き確率は

$$f(x_i|y_j) = \frac{f(x_i, y_j)}{f(y_j)} \tag{4.25}$$

となる。左辺の $f(x_i|y_j)$ を $Y = y_j$ を与えたときの $X = x_i$ の**条件付き確率関数**という。

次に，$X$ が $x_i$（ただし，$i = 1,\ 2,\ \cdots,\ n$）という値をとるという事象と，$Y$ が $y_j$（ただし，$j = 1,\ 2,\ \cdots,\ m$）という値をとる事象が独立であるということは，

$$\mathrm{P}(X = x_i, Y = y_j) = \mathrm{P}(X = x_i)\mathrm{P}(Y = y_j) \tag{4.26}$$

となることである（第 3 章の独立事象の乗法定理 (3.24) を参照)。このことを $X$ と $Y$ の同時確率関数 $f(x_i, y_j)$ と周辺確率関数 $f(x_i)$，$f(y_j)$ を用いて書けば，

$$f(x_i, y_j) = f(x_i)f(y_j) \tag{4.27}$$

あるいは，$p_{ij}$，$p_{i\cdot}$，$p_{\cdot j}$ で表すと

$$p_{ij} = p_{i\cdot}p_{\cdot j} \tag{4.28}$$

となる。(4.27) あるいは (4.28) が，すべての $i$ と $j$ の組合せについて成立するとき，確率変数 $X$ と $Y$ は**（統計的に）独立**であるという。また，以上のことは連続型確率変数についても同様に定義できる。連続型確率変数 $X$，$Y$ の**同時確率密度関数**を $f(x, y)$ とし，$X$，$Y$ の**周辺確率密度関数**をそれぞれ $f(x)$，$f(y)$ とする。このとき，$f(x, y) = f(x)f(y)$ が成立すれば，確率変数 $X$，$Y$ は（統計的に）独立であるという。

### 4.3.3　期待値

離散型確率変数の同時確率分布が表 4.6 のように与えられているとき，$X, Y$ の**期待値（平均値）**を次のように定義する。

$$\begin{aligned}\mathrm{E}[X] &= \sum_i\sum_j x_i p_{ij} \quad \Big(= \sum_i\sum_j x_i f(x_i, y_j)\Big) \\ &= \sum_i x_i \sum_j p_{ij} = \sum_i x_i p_{i\cdot} \quad \Big(= \sum_i x_i f(x_i)\Big)\end{aligned} \tag{4.29}$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}[Y] &= \sum_i \sum_j y_j p_{ij} \quad \left(= \sum_i \sum_j y_j f(x_i, y_j)\right) \\
&= \sum_j y_j \sum_i p_{ij} = \sum_j y_j p_{\cdot j} \quad \left(= \sum_j y_j f(y_j)\right)
\end{aligned}
$$

連続型確率変数の同時確率分布についても，その期待値（平均値）は 1 変数の場合と同様に定義できる。これ以後述べる期待値の演算は離散型，連続型にかかわりなく成立するが，証明は離散型確率変数についてのみ示すことにする。

**定理** 4.5　**確率変数の和の期待値**　確率変数 $X$，$Y$ について，

$$
\mathrm{E}[X \pm Y] = \mathrm{E}[X] \pm \mathrm{E}[Y] \qquad \text{(複合同順)}
$$

が成り立つ。

**証明**

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}[X \pm Y] &= \sum_i \sum_j (x_i \pm y_j) p_{ij} \\
&= \sum_i \sum_j x_i p_{ij} \pm \sum_i \sum_j y_j p_{ij} = \mathrm{E}[X] \pm \mathrm{E}[Y]
\end{aligned}
$$

確率変数の和に関する定理 4.5 は，確率変数が独立であるか否かにかかわらず成立するが，確率変数の積については独立であることが重要になる。

**定理** 4.6　**確率変数の積の期待値**　確率変数 $X$ と $Y$ が独立であるならば，

$$
\mathrm{E}[XY] = \mathrm{E}[X]\mathrm{E}[Y]
$$

が成り立つ。

**証明**

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}[XY] &= \sum_i \sum_j x_i y_j p_{ij} \\
&= \sum_i \sum_j x_i y_j p_{i\cdot} p_{\cdot j} \qquad \text{（確率変数の独立）} \\
&= \sum_i x_i p_{i\cdot} \sum_j y_j p_{\cdot j} = \mathrm{E}[X]\mathrm{E}[Y]
\end{aligned}
$$

次に，同時確率分布における分散は 1 変数の分散と同様に定義できる。すなわち，

$$
\begin{aligned}
\mathrm{V}(X) &= \mathrm{E}[(X-\mathrm{E}[X])^2] \\
&= \sum_i\sum_j (x_i-\mathrm{E}[X])^2 p_{ij} = \sum_i (x_i-\mathrm{E}[X])^2 p_{i\cdot}
\end{aligned} \tag{4.30}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{V}(Y) &= \mathrm{E}[(Y-\mathrm{E}[Y])^2] \\
&= \sum_i\sum_j (y_j-\mathrm{E}[Y])^2 p_{ij} = \sum_j (y_j-\mathrm{E}[Y])^2 p_{\cdot j}
\end{aligned}
$$

また，分散 $\mathrm{V}(X)$，$\mathrm{V}(Y)$ の非負の平方根 $\sqrt{\mathrm{V}(X)}$，$\sqrt{\mathrm{V}(Y)}$ を**標準偏差**といい，それぞれ $\sigma(X)$（または $\sigma_X$），$\sigma(Y)$（または $\sigma_Y$）などと表すことが多い。

次の式で定義される期待値を**共分散**（covariance）という。

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(X,Y) &= \mathrm{E}[(X-\mathrm{E}[X])(Y-\mathrm{E}[Y])] \\
&= \sum_i\sum_j (x_i-\mathrm{E}[X])(y_j-\mathrm{E}[Y]) p_{ij}
\end{aligned} \tag{4.31}
$$

先の分散の定義は，共分散の定義で $X=Y$ としたときであることに注意されたい。共分散については，

**定理 4.7**　$\mathrm{Cov}(X,Y)=\mathrm{E}[XY]-\mathrm{E}[X]\mathrm{E}[Y]$

が成り立つ。もし確率変数 $X$ と $Y$ が独立であれば，定理 4.6 より，

$$
\mathrm{E}[XY] = \mathrm{E}[X]\mathrm{E}[Y]
$$

となるので，

$$
\mathrm{Cov}(X,Y) = 0
$$

が導かれる。

確率変数 $X$ と $Y$ の共分散を $X$ と $Y$ の標準偏差 $\sigma(X)=\sqrt{\mathrm{V}(X)}$ と $\sigma(Y)=\sqrt{\mathrm{V}(Y)}$ で割った値を**相関係数**（correlation coefficient）という。また，相関係数を $\rho(X,Y)$ で表せば，

$$
\rho(X,Y) = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)} \tag{4.32}
$$

となる。$\rho(X,Y)$ のことを，$\rho_{XY}$ と表すこともある。確率変数 $X$ と $Y$ が独立であれば $\mathrm{Cov}(X,Y)=0$ となるので，

$$\rho(X, Y) = 0$$

となる。しかし，$\rho(X,Y) = 0$ のとき，確率変数 $X$ と $Y$ が独立となるとは限らないことに注意する必要がある（すなわち，逆は必ずしも正しくない)。このことから，次の定理が成り立つ。

> **定理** 4.8　**確率変数の和の分散**　$\rho(X,Y) = 0$ であるならば，
>
> $$\mathrm{V}(X \pm Y) = \mathrm{V}(X) + \mathrm{V}(Y)$$

また，定理 4.5 と定理 4.8 は $n$ 個の確率変数の場合にも拡張することができる。特に，$n$ 個の確率変数 $X_1$，$X_2$，$\cdots$，$X_n$ が互いに独立で，同一の平均値 $\mathrm{E}[X_i] = \mu$ と分散 $\mathrm{V}(X_i) = \sigma^2$ をもつとき，その**算術平均** $\overline{X} = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i$ の平均と分散については，次の定理が成り立つ。

> **定理** 4.9　$X_1$，$X_2$，$\cdots$，$X_n$ は互いに独立で同じ平均 $\mu$ と分散 $\sigma^2$ をもつとする。すなわち，
>
> $$\mathrm{E}[X_i] = \mu, \qquad \mathrm{V}(X_i) = \sigma^2, \qquad i = 1,\ 2,\ \cdots,\ n$$
>
> とすると，算術平均 $\overline{X} = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i$ について，
>
> $$\mathrm{E}[\overline{X}] = \mu, \qquad \mathrm{V}(\overline{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$$
>
> が成り立つ。

**証明**　定理 4.5 と定理 4.8 を用いれば，$\overline{X} = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i$ の平均と分散は，

$$\mathrm{E}[\overline{X}] = \mathrm{E}\left[\frac{1}{n}\sum_i X_i\right] = \frac{1}{n}\mathrm{E}[\sum_i X_i] = \frac{1}{n}\sum_i \mathrm{E}[X_i] = \frac{1}{n} n\mu = \mu$$

$$\mathrm{V}(\overline{X}) = \mathrm{V}\left(\frac{1}{n}\sum_i X_i\right) = \frac{1}{n^2}\mathrm{V}(\sum_i X_i) = \frac{1}{n^2}\sum_i \mathrm{V}(X_i) = \frac{1}{n^2} n\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}$$

となる。

**例題** 4.1　2 つの離散型確率変数 $X, Y$ の同時確率分布が次のように与えられているとき，以下の問に答えよ。

| $X$ \ $Y$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| 1 | $c$ | 0.3 |
| 2 | 0.2 | 0.1 |

**(1)** $c$ の値を求めよ。

**(2)** $X$ と $Y$ の周辺分布を求めよ。

**(3)** $X$ の周辺分布の平均と分散を求めよ。

**(4)** $Y = 0$ が与えられたときの $X$ の条件付き分布を求めよ。

**(5)** $Z = X + Y$ とするとき，$Z$ の確率分布を求めよ。

**解**

**(1)** 確率の総和は 1 となるので，$c + 0.3 + 0.2 + 0.1 = 1$ となる。よって，$c = 0.4$ となる。

**(2)** $X$ と $Y$ の周辺分布は，次の表のようになる。

| $X$ \ $Y$ | 0 | 1 | $X$ の周辺分布 |
|---|---|---|---|
| 1 | 0.4 | 0.3 | 0.7 |
| 2 | 0.2 | 0.1 | 0.3 |
| $Y$ の周辺分布 | 0.6 | 0.4 | 1.0 |

**(3)** (4.29) から $\mathrm{E}[X] = 1 \times 0.7 + 2 \times 0.3 = 1.3$，(4.30) から $\mathrm{V}(X) = (1 - 1.3)^2 \times 0.7 + (2 - 1.3)^2 \times 0.3 = 0.21$ を得る。

**(4)** (4.24) から，$\mathrm{P}(X = 1|Y = 0) = \mathrm{P}(X = 1, Y = 0)/\mathrm{P}(Y = 0) = 0.4/0.6 = 2/3$，同様にして，$\mathrm{P}(X = 2|Y = 0) = 1/3$ となる。

**(5)** $X = 1, Y = 0$ のとき $Z = X + Y = 1$ となり，その確率は $\mathrm{P}(Z = 1) = \mathrm{P}(X = 1, Y = 0) = 0.4$ となる。同様にして，$\mathrm{P}(Z = 2) = \mathrm{P}(X = 2, Y = 0) + \mathrm{P}(X = 1, Y = 1) = 0.2 + 0.3 = 0.5$，$\mathrm{P}(Z = 3) = \mathrm{P}(X = 2, Y = 1) = 0.1$ が得られる。よって，$Z$ の確率分布は次のようになる。

| $Z$ | 1 | 2 | 3 | 計 |
|---|---|---|---|---|
| $\mathrm{P}(Z = z)$ | 0.4 | 0.5 | 0.1 | 1 |

## 練習問題

**4.1**　2 個のサイコロを投げ，出る目の和を $X$ で表すとき，$X$ の確率分布を求めよ。

**4.2**　定理 4.3 と定理 4.4 を証明せよ。

**4.3**　『厚生白書』（平成元年版）によれば，1988 年の子供がいる世帯において，子供数が 1 人の世帯は 37.3 % あり，2 人の世帯は 46.3 %，3 人の世帯は 15.0 %，4 人以上の世帯は 1.4 % であった。いま，子供数 4 人以上の世帯を子供数 4 人の世帯と考え，次の問に答えよ。

**(1)**　子供数を $X$ として，$X$ の確率分布を求めよ。

**(2)**　夫の小遣いは子供 1 人の世帯では 3 万円であり，子供の数が 1 人増えるごとに 5000 円減っていくとするとき，夫の小遣いの期待値を求めよ。

**4.4**　問 4.1 の $X$ の平均値と分散を求めよ。また，$Y = 3X + 5$ としたときに，$Y$ の平均と分散を求めよ（定理 4.1，4.3 を参照）。

**4.5**　下表はある大学の経済学部の統計学と経済史の講義を受講した 1000 人の成績である。このとき，次の問に答えよ。

（単位：人）

| | | 統計学 | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | A | B | C | F |
| 経済史 | A | 50 | 60 | 70 | 120 |
| | B | 20 | 100 | 140 | 140 |
| | C | 20 | 10 | 50 | 120 |
| | F | 10 | 30 | 40 | 20 |

**(1)**　統計学と経済史の同時確率分布を求めよ。

**(2)**　統計学，経済史それぞれの周辺分布を求めよ。

**4.6**　硬貨を 3 回投げて，確率変数 $X$ を表が出る回数とする。このとき，**(1)** $f(0)$，**(2)** $f(1)$，**(3)** $f(2)$，**(4)** $f(3)$，**(5)** $f(4)$，**(6)** $F(-1)$，**(7)** $F(1.9)$，**(8)** $F(2)$，**(9)** $F(5)$ をそれぞれ求めよ。ただし，$f(x) = \mathrm{P}(X = x)$，$F(x) = \mathrm{P}(X \leqq x)$ を表すものとする。

**4.7**　$X$ を連続型確率変数とする。このとき，次の確率を求めよ。

**(1)** $\mathrm{P}(X = 2)$ を求めよ。

**(2)** $\mathrm{P}(2 < X < 5)$ を分布関数 $F(x)$ を用いて表せ。ただし，$F(x) = \mathrm{P}(X \leqq x)$ とする。

**4.8** 確率変数 $X$ の確率分布は以下のとおりとする。

| $X$ | 3 | 5 |
|---|---|---|
| $\mathrm{P}(X = x)$ | 0.2 | 0.8 |

このとき，以下の問に答えよ。

**(i)** 確率変数 $X$ の **(1)** 平均値，**(2)** 分散，**(3)** 標準偏差をそれぞれ求めよ。

**(ii)** 確率変数 $Y$ は $Y = 0.5X + 3$ として与えられるものとする。このとき，確率変数 $Y$ の **(4)** 平均値，**(5)** 分散，**(6)** 標準偏差をそれぞれ求めよ。

**4.9** 確率変数 $X$，$Y$ の同時確率分布は以下のように与えられているものとする。

| $X$ \ $Y$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| 2 | 0.2 | **(1)** |
| 4 | 0.1 | 0.4 |

このとき，$X$ と $Y$ の周辺分布はそれぞれ

| $X$ | **(2)** | **(3)** |
|---|---|---|
| $\mathrm{P}(X = x)$ | **(4)** | **(5)** |

| $Y$ | **(6)** | **(7)** |
|---|---|---|
| $\mathrm{P}(Y = y)$ | **(8)** | **(9)** |

となる。**(1)** ～ **(9)** に当てはまる数値を求めよ。

**4.10** 確率変数 $X$，$Y$ の同時確率分布は以下のように与えられているものとする。

| $X$ \ $Y$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| 2 | 0.2 | 0.2 |
| 4 | **(1)** | 0.5 |

このとき，以下の問に答えよ。

**(i)**　上の確率分布の **(1)** の値を求めよ。

**(ii)**　$X$ と $Y$ の **(2)** 共分散，**(3)** 相関係数を求めよ。

**(iii)**　$X = 4$ のもとで，**(4)** $Y = 0$，**(5)** $Y = 1$ となる確率を求めよ。

**(iv)**　確率変数 $X + Y$ の **(6)** 平均値，**(7)** 分散を求めよ。

**4.11**　$X$ と $Y$ の 2 変数の確率変数を考える。

**(1)**　$\mathrm{E}[X] = 3$, $\mathrm{E}[Y] = 2$ のとき，$\mathrm{E}[X + Y]$ の値を求めよ。

**(2)**　$\mathrm{V}(X) = 4$, $\mathrm{V}(Y) = 1$, $\rho(X, Y) = 0.5$ のとき，$\mathrm{Cov}(X, Y)$ の値を求めよ。

**(3)**　$\mathrm{Cov}(X, Y) = 10$, $\mathrm{E}[X] = 2$, $\mathrm{E}[Y] = 4$ のとき，$\mathrm{E}[XY]$ の値を求めよ。

**(4)**　$\mathrm{E}[X^2] = 11$, $\mathrm{E}[X] = 3$ のとき，$\mathrm{V}(X)$ の値を求めよ。

**(5)**　$X$ と $Y$ が独立のとき，$\mathrm{Cov}(X, Y)$ の値を求めよ。

**(6)**　$\mathrm{E}[XY] = 20$, $\mathrm{E}[X] = 7$, $\mathrm{E}[Y] = 8$ のとき，$\mathrm{Cov}(X, Y)$ の値を求めよ。

**(7)**　$X$ と $Y$ が独立で，$\mathrm{V}(X) = 3$, $\mathrm{V}(Y) = 5$ のとき，$\mathrm{V}(X + Y)$ の値を求めよ。

**4.12**　$X_1$, $X_2$, $\cdots$, $X_5$ の 5 変数の確率変数は互いに独立で，平均 3，分散 5 の同一の分布に従うものとする。$\overline{X}$ を 5 つの確率変数の標本平均とするとき，$\overline{X}$ の **(1)** 平均，**(2)** 分散を求めよ。

**4.13**　次の離散型確率分布の平均と分散を求めよ。

| $X$ | 0 | 2 | 5 | 9 |
|---|---|---|---|---|
| $\mathrm{P}(X = x)$ | 0.4 | 0.1 | 0.2 | 0.3 |

**4.14**　次の離散型確率分布の平均と分散を求めよ。

| $X$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $\mathrm{P}(X = x)$ | $p$ | $2p^2$ | $3p$ | $3p^2$ |

**4.15**　連続型確率変数 $X$ の確率密度関数が次のように与えられている。

$$f(x) = \begin{cases} a(1 - x), & (0 \leqq x \leqq 1) \\ 0, & (\text{その他}) \end{cases}$$

**(1)** $a$ の値を求めよ。

**(2)** $X$ の平均と分散を求めよ。

**(3)** $X$ の累積分布関数を求めよ。

**(4)** 中央値を求めよ。

**4.16** $X \sim \mathrm{B}(4,\ 0.7)$ のとき，次の確率を求めよ。ただし，$\mathrm{B}(n, p)$ とは，(4.4) のように表される分布（2 項分布）とする。

**(1)** $\mathrm{P}(X = 3)$，**(2)** $\mathrm{P}(2 \leqq X \leqq 3)$，**(3)** $\mathrm{P}(X \leqq 3)$

**4.17** 2 つの離散型確率変数 $X$ と $Y$ の同時分布が次のように与えられている。

| $X$ \ $Y$ | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| 1 | 0.1 | 0.2 | $a$ |
| 2 | 0.3 | 0.1 | 0.2 |

**(1)** $a$ の値を求めよ。

**(2)** $X$ と $Y$ の周辺分布を求めよ。また，$X$ と $Y$ は独立か。

**(3)** $X$ の平均と分散を求めよ。

**(4)** $X = 1$ が与えられたときの，$Y$ の条件付き分布およびその平均と分散を求めよ。

**(5)** $Z = 2X + Y$ とするとき，$Z$ の確率分布およびその平均と分散を求めよ。

第 5 章

# 正規分布と正規分布表

## 5.1 正規分布の特性

**正規分布**（normal distribution）は，以下の章で取り扱う標本分布，推定，検定等の基本となる連続型確率分布である。正規分布の確率密度関数は次のように表される。

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left( -\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2 \right) \tag{5.1}$$

ただし，$\exp(x) = e^x$（指数関数，$e$ は自然対数の底)。ここで，$X$ の平均 $\mathrm{E}[X]$ は $\mu$，分散 $\mathrm{V}(X)$ は $\sigma^2$ となる。また，正規分布の分布関数は第 4 章で述べたように

$$\begin{aligned} F(x) &= \mathrm{P}(X \leqq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t \\ &= \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2\right) \mathrm{d}t \end{aligned} \tag{5.2}$$

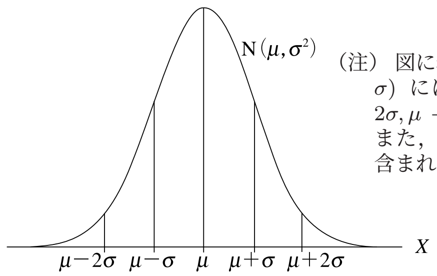
で表すことができる（この場合，解析的に積分値を求めることはできないので，後述の正規分布表によって確率を求めることになる)。このような平均 $\mu$，分散 $\sigma^2$ の正規分布を $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ と表し，確率変数 $X$ が正規分布 $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ に従うことを

$$X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2) \tag{5.3}$$

と表すことにする（N は正規分布 Normal distribution の頭文字を表す)。正規分布の確率密度関数 (5.1) を図で表せば，図 5.1 のようになり，この曲線を**正規曲線**という。正規曲線は平均と分散の値によって形が変わる。

確率密度関数 (5.1) と図 5.1 より正規分布には次の特徴があることが分かる。

**図** 5.1　**正規分布の確率密度関数**




（注）図に表してあるように，区間 $(\mu-\sigma,\mu+\sigma)$ には全体の 68.3 ％ が含まれ，$(\mu-2\sigma,\mu+2\sigma)$ には 95.4 ％ が含まれる。また，$(\mu-3\sigma,\mu+3\sigma)$ には 99.7 ％ が含まれる。

**(1)** 正規曲線は正の値をとり，しかも，正規曲線の下側の面積は 1 となる。

**(2)** 正規曲線は平均 $x=\mu$ に関して左右対称となる。

**(3)** 正規分布の平均，メディアン，モードはすべて等しく $\mu$ になる。

**(4)** 正規曲線は，$\mu-\sigma<x<\mu+\sigma$ では下に凹となり，$x<\mu-\sigma$ および $x>\mu+\sigma$ では下に凸となる。

正規分布の中で，特に平均が 0，分散が 1 の正規分布を**標準正規分布**といい，$\mathrm{N}(0,1)$ と表される。任意の正規分布 $\mathrm{N}(\mu,\sigma^2)$ は第 4 章で述べた標準化を行うことによって，標準正規分布 $\mathrm{N}(0,1)$ に変換することができる。いま，$X\sim\mathrm{N}(\mu,\sigma^2)$ とすると，

$$Z=\frac{X-\mu}{\sigma} \tag{5.4}$$

とおけば，確率変数 $Z$ は第 4 章の定理 4.4 より，$\mathrm{E}[Z]=0$，$\mathrm{V}(Z)=1$ となる。しかも，$Z$ は正規分布（すなわち，標準正規分布）に従うことが知られている（正規分布に従うという証明は本書の範囲を超えるので省略する）。

また，正規分布に従う母集団（**正規母集団**）からの標本平均 $\overline{X}$ は，平均 $\mu$，分散 $\sigma^2/n$ の正規分布に従うことが分かっている（標本平均の平均，分散については，第 4 章の定理 4.9 を参照せよ）。そして，その標準化した変数 $\sqrt{n}(\overline{X}-\mu)/\sigma$ もまた標準正規分布に従うことになる。さらに，任意の母集団（正規母集団に限らない）からの標本平均 $\overline{X}$ を標準化した変数は，標本の大きさが大きくなるに従って，標準正規分布に収束することが知られている（6.3 節，中心極限定理参照）。

**図** 5.2　**正規分布の上側確率**

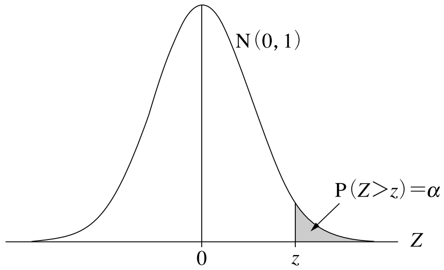
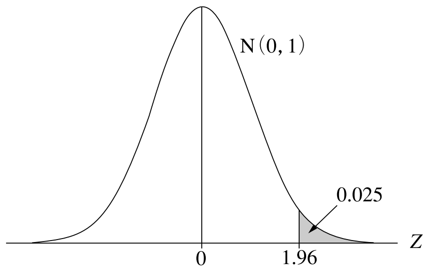



**図** 5.3　**正規分布の上側確率：** $\boldsymbol{\alpha = 0.025}$




## 5.2　正規分布表の使い方

いま，確率変数 $Z$ が標準正規分布に従っているとき，$Z$ が 1.96 より大きくなる確率 $\mathrm{P}(Z > 1.96)$ を求めるにはどのようにすればよいだろうか。一般に，正規分布のような連続型確率分布の確率の計算は，確率密度関数の積分を行わなければならないが，正規分布を含めて主要な確率分布の確率はあらかじめ計算されて表となっており，本書でも巻末に付表としてまとめられている。本節では，その中の**正規分布表**の使い方を述べる（表 5.1 は巻末の付表 1 と同じものである）。

付表 1，表 5.1 では，N(0, 1) の**上側確率**が計算されている。上側確率とは確率変数 $Z$ がある値 $z$ よりも大きくなる確率 $\mathrm{P}(Z > z)$ のことをいい（図 5.2 参照），$\mathrm{P}(Z > z) = \alpha$ となるとき，$z$ のことを **100 $\boldsymbol{\alpha}$ パーセント（%）点**と

**表 5.1　正規分布の上側 100$\alpha$ パーセント点**

| $z$ | .00 | .01 | .02 | .03 | .04 | .05 | .06 | .07 | .08 | .09 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.0 | .5000 | .4960 | .4920 | .4880 | .4841 | .4801 | .4761 | .4721 | .4681 | .4641 |
| 0.1 | .4602 | .4562 | .4522 | .4483 | .4443 | .4404 | .4364 | .4325 | .4286 | .4247 |
| 0.2 | .4207 | .4168 | .4129 | .4091 | .4052 | .4013 | .3974 | .3936 | .3897 | .3859 |
| 0.3 | .3821 | .3783 | .3745 | .3707 | .3669 | .3632 | .3594 | .3557 | .3520 | .3483 |
| 0.4 | .3446 | .3409 | .3372 | .3336 | .3300 | .3264 | .3228 | .3192 | .3156 | .3121 |
| 0.5 | .3085 | .3050 | .3015 | .2981 | .2946 | .2912 | .2877 | .2843 | .2810 | .2776 |
| 0.6 | .2743 | .2709 | .2676 | .2644 | .2611 | .2579 | .2546 | .2514 | .2483 | .2451 |
| 0.7 | .2420 | .2389 | .2358 | .2327 | .2297 | .2266 | .2236 | .2207 | .2177 | .2148 |
| 0.8 | .2119 | .2090 | .2061 | .2033 | .2005 | .1977 | .1949 | .1922 | .1894 | .1867 |
| 0.9 | .1841 | .1814 | .1788 | .1762 | .1736 | .1711 | .1685 | .1660 | .1635 | .1611 |
| 1.0 | .1587 | .1563 | .1539 | .1515 | .1492 | .1469 | .1446 | .1423 | .1401 | .1379 |
| 1.1 | .1357 | .1335 | .1314 | .1292 | .1271 | .1251 | .1230 | .1210 | .1190 | .1170 |
| 1.2 | .1151 | .1131 | .1112 | .1094 | .1075 | .1057 | .1038 | .1020 | .1003 | .0985 |
| 1.3 | .0968 | .0951 | .0934 | .0918 | .0901 | .0885 | .0869 | .0853 | .0838 | .0823 |
| 1.4 | .0808 | .0793 | .0778 | .0764 | .0749 | .0735 | .0721 | .0708 | .0694 | .0681 |
| 1.5 | .0668 | .0655 | .0643 | .0630 | .0618 | .0606 | .0594 | .0582 | .0571 | .0559 |
| 1.6 | .0548 | .0537 | .0526 | .0516 | .0505 | .0495 | .0485 | .0475 | .0465 | .0455 |
| 1.7 | .0446 | .0436 | .0427 | .0418 | .0409 | .0401 | .0392 | .0384 | .0375 | .0367 |
| 1.8 | .0359 | .0351 | .0344 | .0336 | .0329 | .0322 | .0314 | .0307 | .0301 | .0294 |
| 1.9 | .0287 | .0281 | .0274 | .0268 | .0262 | .0256 | .0250 | .0244 | .0239 | .0233 |
| 2.0 | .0228 | .0222 | .0217 | .0212 | .0207 | .0202 | .0197 | .0192 | .0188 | .0183 |
| 2.1 | .0179 | .0174 | .0170 | .0166 | .0162 | .0158 | .0154 | .0150 | .0146 | .0143 |
| 2.2 | .0139 | .0136 | .0132 | .0129 | .0125 | .0122 | .0119 | .0116 | .0113 | .0110 |
| 2.3 | .0107 | .0104 | .0102 | .0099 | .0096 | .0094 | .0091 | .0089 | .0087 | .0084 |
| 2.4 | .0082 | .0080 | .0078 | .0075 | .0073 | .0071 | .0069 | .0068 | .0066 | .0064 |
| 2.5 | .0062 | .0060 | .0059 | .0057 | .0055 | .0054 | .0052 | .0051 | .0049 | .0048 |
| 2.6 | .0047 | .0045 | .0044 | .0043 | .0041 | .0040 | .0039 | .0038 | .0037 | .0036 |
| 2.7 | .0035 | .0034 | .0033 | .0032 | .0031 | .0030 | .0029 | .0028 | .0027 | .0026 |
| 2.8 | .0026 | .0025 | .0024 | .0023 | .0023 | .0022 | .0021 | .0021 | .0020 | .0019 |
| 2.9 | .0019 | .0018 | .0018 | .0017 | .0016 | .0016 | .0015 | .0015 | .0014 | .0014 |
| 3.0 | .0013 | .0013 | .0013 | .0012 | .0012 | .0011 | .0011 | .0011 | .0010 | .0010 |
| 3.1 | .0010 | .0009 | .0009 | .0009 | .0008 | .0008 | .0008 | .0008 | .0007 | .0007 |
| 3.2 | .0007 | .0007 | .0006 | .0006 | .0006 | .0006 | .0006 | .0005 | .0005 | .0005 |
| 3.3 | .0005 | .0005 | .0005 | .0004 | .0004 | .0004 | .0004 | .0004 | .0004 | .0003 |
| 3.4 | .0003 | .0003 | .0003 | .0003 | .0003 | .0003 | .0003 | .0003 | .0003 | .0002 |

（注）本文の記述からも分かるように，表の見方には，$z$ が与えられたときの面積を求める場合と，逆に面積が与えられたときの $z$ の値を求める場合がある。

いう。また，$\mathrm{P}(|Z| > z)$ を**両側確率**と呼び，$\mathrm{P}(|Z| > z) = \alpha$ となるとき，$z$ のことを **100 ($\alpha$/2) パーセント点**という（ただし，この場合は $z > 0$ とする）。

表 5.1 の左端には $z$ の小数点第 1 位までの数値が与えられており，上端には $z$ の小数点第 2 位の数値が与えられている。確率 $\mathrm{P}(Z > 1.96)$ を求める場合，左端の 1.9 と上端の 0.06 が交差するところ，すなわち，0.0250 が求める確率となる（図 5.3 参照）。

**例題** 5.1　$Z \sim \mathrm{N}(0, 1)$ のとき，$\mathrm{P}(Z \geqq 1.64)$ を求めよ（等号がついていることに注意）。

**図** 5.4　**例題** 5.2

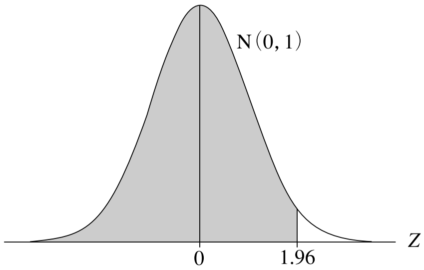
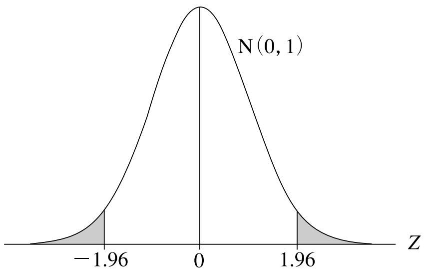



**図** 5.5　**標準正規分布は平均 $Z=0$ に対して左右対称（例題** 5.3**）**




**解**　連続型確率変数がある特定の点をとる確率は 0 となるので，$\mathrm{P}(Z = 1.64) = 0$ である。ゆえに，

$$\mathrm{P}(z \geqq 1.64) = \mathrm{P}(Z > 1.64) = 0.0505$$

**例題** 5.2　$\mathrm{P}(Z < 1.96)$ を求めよ。

**解**　$\mathrm{P}(Z < 1.96)$ は 1 から $\mathrm{P}(Z > 1.96)$ を引いたものに等しいので，

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(Z < 1.96) &= 1 - \mathrm{P}(Z > 1.96)\\ &= 1 - 0.0250 = 0.9750 \qquad \text{（図 5.4 参照）}\end{aligned}$$

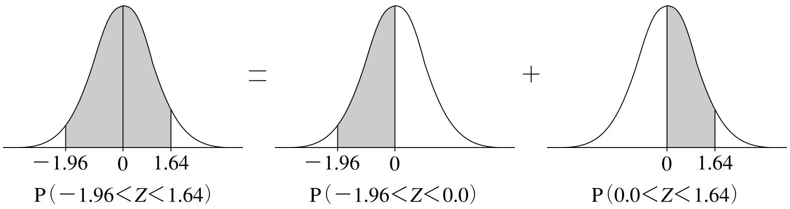
**例題** 5.3　$\mathrm{P}(Z < -1.96)$ を求めよ。

**解**　標準正規分布の確率密度関数は原点で左右対称となるので，

$$\mathrm{P}(Z < -1.96) = \mathrm{P}(Z > 1.96) = 0.0250 \qquad \text{（図 5.5 参照）}$$

**例題** 5.4　$\mathrm{P}(-1.96 < Z \leqq 1.64)$ を求めよ。

**図** 5.6　**例題** 5.4 **の考え方** (1)




**解**　原点において確率を分割し，$\mathrm{P}(-1.96 < Z < 0.0)$ と $\mathrm{P}(0.0 \leqq Z \leqq 1.64)$ を求め，それらを足し合わせればよい。

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{P}(-1.96 < Z \leqq 1.64) \\
&\quad = \mathrm{P}(-1.96 < Z < 0.0) + \mathrm{P}(0.0 \leqq Z \leqq 1.64) \qquad \text{（図 5.6 参照）} \\
&\quad = \mathrm{P}(0.0 < Z < 1.96) + \mathrm{P}(0.0 < Z < 1.64) \\
&\quad = (0.5 - \mathrm{P}(Z > 1.96)) + (0.5 - \mathrm{P}(Z > 1.64)) \\
&\quad = (0.5 - 0.0250) + (0.5 - 0.0505) \\
&\quad = 0.4750 + 0.4495 = 0.9245
\end{aligned}
$$

あるいは，$\mathrm{P}(-1.96 < Z \leqq 1.64)$ は 1 から $\mathrm{P}(Z < -1.96) = \mathrm{P}(Z > 1.96)$ と $\mathrm{P}(Z > 1.64)$ を引いたものに等しいことから，

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{P}(-1.96 < Z \leqq 1.64) \\
&\quad = 1.0 - \mathrm{P}(Z > 1.96) - \mathrm{P}(Z > 1.64) \\
&\quad = 1.0 - 0.0250 - 0.0505 = 0.9245
\end{aligned}
$$

となる（図 5.7）。

**例題** 5.5　$\mathrm{P}(0.25 < Z < 1.96)$ を求めよ。

**解**　$\mathrm{P}(0.25 < Z < 1.96)$ は $\mathrm{P}(Z > 0.25)$ から $\mathrm{P}(Z > 1.96)$ を引いたものに等しいので，

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{P}(0.25 < Z < 1.96) \\
&\quad = \mathrm{P}(Z > 0.25) - \mathrm{P}(Z > 1.96) = 0.4013 - 0.0250 = 0.3763
\end{aligned}
$$

**図** 5.7　**例題** 5.4 **の考え方** (2)

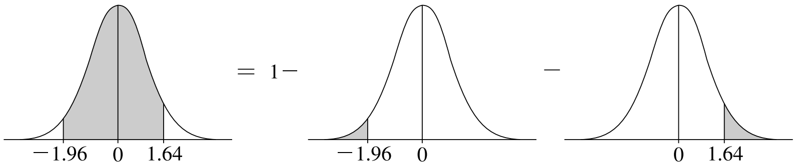



**図** 5.8　**例題** 5.5

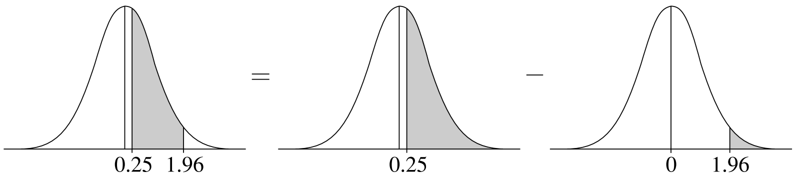
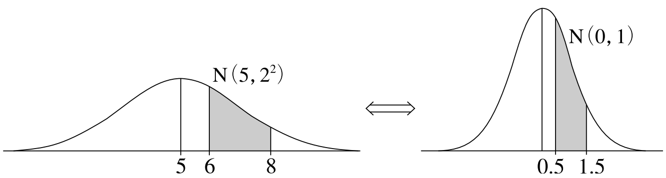



**図** 5.9　**標準化による確率の求め方**




となる（図 5.8）。

また，任意の正規分布に従う確率変数の確率も，確率変数の標準化をすることにより，正規分布表から求めることができる。

**例題** 5.6　$X \sim \mathrm{N}(5,\ 2^2)$ のとき，$\mathrm{P}(6 < X < 8)$ を求めよ。

**解**　$X \sim \mathrm{N}(5,\ 2^2)$ なので，$Z = (X-5)/2$ とおけば，$Z \sim \mathrm{N}(0,\ 1)$ となる。よって，

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(6 < X < 8) &= \mathrm{P}\left(\frac{6-5}{2} < \frac{X-5}{2} < \frac{8-5}{2}\right) = \mathrm{P}(0.5 < Z < 1.5)\\ &= \mathrm{P}(Z > 0.5) - \mathrm{P}(Z > 1.5) = 0.3085 - 0.0668 = 0.2417\end{aligned}$$

となる（図 5.9）。

**例題** 5.7　ある会社の従業員の通勤時間は平均 60 分，標準偏差 15 分の正規分布に従っているという。この会社の 2.5 % の従業員は通勤時間の長さに不満を

抱いているという。彼らは何分以上の通勤時間を強いられているか。ただし，この会社の従業員は通勤時間の長さに対して同じ意思表明をするものと仮定する。

**解**　$X$ を従業員の通勤時間とすると，$X \sim \mathrm{N}(60, 15^2)$ となる。そこで $Z = (X-60)/15$ とおけば，$Z \sim \mathrm{N}(0,1)$ を得る。いま，$x$ 分以上の通勤時間に対して，従業員が不満を抱くとすると，$\mathrm{P}(X \geqq x) = \mathrm{P}(Z \geqq (x-60)/15) = 0.025$ となる。正規分布表より，$(x-60)/15 = 1.96$ となり，$x = 89.4$ が得られる。彼らは，89.4 分以上の通勤時間を強いられていることになる。

## 練習問題

**5.1**　$Z \sim \mathrm{N}(0,\ 1)$ として，次の確率を求めよ。

**(1)** $\mathrm{P}(Z \geqq 1.57)$，**(2)** $\mathrm{P}(Z < 1.34)$，**(3)** $\mathrm{P}(-0.37 < Z \leqq 1.6)$，**(4)** $\mathrm{P}(0.55 < Z < 1.67)$，**(5)** $\mathrm{P}(-2.08 < Z < -0.21)$

**5.2**　$X \sim \mathrm{N}(2,\ 9)$ として，次の確率を求めよ。

**(1)** $\mathrm{P}(X \geqq 5.6)$，**(2)** $\mathrm{P}(X < 10)$，**(3)** $\mathrm{P}(1 < X \leqq 4.7)$，**(4)** $\mathrm{P}(3.2 < X < 7.7)$，**(5)** $\mathrm{P}(-1.3 < X < 1.19)$

**5.3**　A 大学の経済学部の自宅外通学生 1200 人の月額仕送りは，平均 10 万円，標準偏差 4 万円の正規分布に従っているものとする。これらの学生に対する大学の調査では，経済的ゆとりを感じるためには月額最低 12 万円が必要であるという。仕送りだけで経済的ゆとりを感じている学生は何人いるか。

**5.4**　A 大学の統計学の講義では，毎年受講生の 33 % が不可になるという。今年の受講生の試験の成績は，平均 70 点，標準偏差 12 点の正規分布に従っているとして，不可にならないためには最低何点取ればよいか。

**5.5**　市町村が発行する母子手帳には，乳幼児の体重および身長の 10 パーセンタイル値と 90 パーセンタイル値を記した発育値のグラフが記載されている。いま，生後 1 カ月の男子乳児の体重が平均 $4400g$，標準偏差 $469g$ の正規分布に，また身長が平均 $54.5cm$，標準偏差 $1.95cm$ の正規分布にそれぞれ従っていると仮定して，生後 1 カ月の男子乳児の体重と身長と 10 パーセンタイル値と 90 パーセンタイル値を求めよ。ここで，10 パーセンタイル値とは，例えば 100 人の乳幼児のうち，小さいほうから数えて 10 番目の乳幼児

の数値をいう。

**5.6**　$Z \sim \mathrm{N}(0,1)$ のとき，**(1)**　$\mathrm{P}(Z > 0)$，**(2)**　$\mathrm{P}(Z < -2.22)$，**(3)**　$\mathrm{P}(Z = 1.0)$，**(4)**　$\mathrm{P}(-0.3 < Z < 0.5)$ をそれぞれ求めよ。

**5.7**　$X \sim \mathrm{N}(-2,4^2)$ のとき，**(1)**　$\mathrm{P}(X > 2)$，**(2)**　$\mathrm{P}(X < -2)$，**(3)**　$\mathrm{P}(-3 < X < 1)$，**(4)**　$\mathrm{P}(|X| < 0.4)$ をそれぞれ求めよ。

**5.8**　$X \sim \mathrm{N}(3,25)$ のとき，**(1)**　$\mathrm{P}(|X| < x) = 0.9$ となる $x$，**(2)**　$\mathrm{P}(X < x) = 0.025$ となる $x$ を小数第 1 位まで求めよ。

**5.9**　$X \sim \mathrm{N}(5,2^2)$ のとき，次の確率を求めよ。

**(1)** $\mathrm{P}(X \geqq 4)$，**(2)** $\mathrm{P}(X \leqq 5)$，**(3)** $\mathrm{P}(X \leqq 3)$，**(4)** $\mathrm{P}(3.5 \leqq X \leqq 4.5)$，**(5)**　$\mathrm{P}(|X-4| > 0.5)$

**5.10**　ある試験の得点の分布が平均 68 点，標準偏差 8 点の正規分布に従うとき，次の各問に答えよ。

**(1)**　60 点以上を合格とするとき，この試験で何 % の受験生が不合格となるか。

**(2)**　この試験で 78 点をとったとき，上位何 % 以内にいるといえるか。

**(3)**　上位 5 % に入るためには何点が必要か。

# 第 6 章
# 標本分布

## 6.1　無作為抽出

序説で述べたように，統計分析の重要な目的の 1 つは，分析の対象とされている集団（**母集団** population）に関する数量的な特性を，そこから取り出されたデータ（**標本** sample）を用いて，いかに正確に引き出すか，ということにある。また，母集団から標本を取り出すことを**標本抽出**（sampling）という。例えば，平成元年の兵庫県の勤労者 1 世帯当り 1 年間の平均所得水準を知りたいとする。この場合，兵庫県の全勤労者家計を，一軒一軒回って所得額を尋ねることは，コスト的にも時間的にも無理である。では，どのようにして標本をとればよいのだろうか。調査者がたまたま芦屋市に住んでいるので，調査の対象を芦屋市に限定してしまったらどうだろうか。芦屋市は，日本でも有数の金持ちが住んでいることで有名である。調査対象から求められた勤労者家計の所得の平均値は，おそらく母集団の平均を上回っているだろう。このように，母集団の特性を偏りなく表している標本を取り出さないと，母集団に関して間違った統計的推測を行ってしまうことになる。そのためには，母集団から無作為に標本が選ばれなければならない。例えば，兵庫県の勤労者家計にすべて番号をつけて，それぞれの番号を書いたカードを大きな箱に入れてよくかき混ぜて，そこから目隠しをして 1 枚ずつカードを取り出して標本を抽出するというような方法が考えられる。このような場合には，各世帯が標本に選ばれる確率は同等といえよう。このように作為なく抽出された標本を**無作為標本**（random sample）と呼ぶ。母集団に関する特性を統計的に推論するには，この無作為標本に基づいて行わなければならない。

さて，母集団から取り出された無作為標本が，$n$ 個の要素からなっているとしよう。$n$ は **標本の大きさ**（sample size）あるいは標本サイズと呼ばれる。$n$ 個の標本とはいわないことに注意（$n$ 個の要素が集まって 1 個の標本をなして

いる）。標本を構成する要素は，標本抽出が終わった実現値に着目すれば，$n$ 個の数値の集まりであり確率的な要素はない。しかし，標本抽出の行為を繰り返して行うと考えれば，一般に，要素のとる値は抽出のたびに異なるから，確率変数と考えられる。ここでは，第 4 章で用いたように，標本を確率変数の意味で考える場合には，大文字を使って $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ で表し，実現値を考える場合には，小文字を用いて $(x_1\ , x_2, \cdots, x_n)$ によって表すことにする。

無作為抽出によって得られた大きさ $n$ の標本から求められる平均，すなわち，**標本平均**を $\overline{X}$ とすれば，

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \tag{6.1}$$

と求められる。また，この標本から求められる**標本（不偏）分散**を $S^2$ で表すと，

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2 \tag{6.2}$$

となる。標本平均や標本分散を用いて，母集団の重要な特性値である母平均や母分散を推定するわけであるが，推定の問題は次章で詳しく取り上げる。ここでは，標本平均や標本分散についてもう少し掘り下げて考えてみよう。標本平均，標本分散は，抽出される標本を構成する要素に依存している。例えば，兵庫県の勤労者世帯から無作為に 100 世帯が標本として取り出されたとしよう。その標本から標本平均，標本分散が計算される。次に，新たに 100 世帯を無作為抽出し，そこから標本平均，標本分散を計算したとしよう。2 度目に計算された標本平均，標本分散は，最初に計算された値とは異なるであろう。このプロセスを繰り返し 1000 回行ったとしよう。すると，1000 個の標本平均，標本分散が得られ，標本平均，標本分散についての相対度数分布が描けることになる。このことは，標本平均，標本分散が取り出される標本観測値に依存した確率変数と考えられ，確率分布をもつことを意味している。

一般に，標本平均，標本分散のみならず，取り出された標本観測値に依存した特性値を**統計量**（statistic）と呼ぶ。 統計量 $(T)$ は，抽出された標本の要素の関数として，次のように表される。

$$T = f(X_1, X_2, \cdots, X_n) \tag{6.3}$$

統計量の実現値のこと（上式の標本 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ をその実現値 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ で置きかえたもの）を**統計値**という。

また，統計量の従う分布のことを**標本分布**（sampling distribution）と呼ぶ。以下では，まず，標本平均の標本分布について考察し，次いで，標本分散の標本分布について考える。

## 6.2　標本平均の分布

標本平均は，確率変数であり確率分布をもつことが前節で示されたが，ここでは，標本平均の確率分布の特性値である平均と分散を求めてみよう。議論は，母集団を構成する要素が有限の場合（**有限母集団** finite population と呼ぶ）と，無限の場合（**無限母集団** infinite population と呼ぶ）に分けて行われる。

### 6.2.1　有限母集団からの標本抽出

有限母集団が $N$ 個の要素から構成されており，それぞれの要素を $(x_1, x_2, \cdots, x_N)$ とする。また，この母集団の平均（母平均），分散（母分散）をそれぞれ $\mu$，$\sigma^2$ で表そう。母平均，母分散は，それぞれ，

$$\mu = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i \qquad \sigma^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \mu)^2$$

によって与えられる。

この母集団から大きさ $n$ の標本を無作為に抽出し，標本平均を計算することを考えよう。この場合に，1 つの要素が取り出されたとき，その要素を母集団に戻して標本抽出を続けるかどうかによって，得られる標本の性質は異なってくるであろう。1 度取り出した要素を母集団に戻さない抽出方法は，**非復元抽出**（sampling without replacement）と呼ばれ，戻して抽出を行う方法は**復元抽出**（sampling with replacement）と呼ばれている。この節では，以下，非復元抽出を対象として議論を進める。

母集団の要素の数が $N$ 個と有限個なので，そこから大きさ $n$ の無作為標本を非復元抽出する組合せは有限である。例えば，$N = 3, n = 2$ の場合は，取り出し方は 3 つのものから 2 つのものを選ぶ組合せの数 ${}_3\mathrm{C}_2 = 3$ 通りある。取

り出された各々の場合について標本平均が計算され，それを平均した値が標本平均の平均になる。いま，無作為標本を抽出する組合せの数を $m$ とし，それぞれの場合について計算された標本平均の値を $Z_1, Z_2, \cdots, Z_m$ としよう。標本平均の平均を $\mathrm{E}[\overline{X}] = \mu_{\overline{X}}$ で表すと，

$$\mathrm{E}[\overline{X}] = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} Z_i \tag{6.4}$$

となる。また，標本平均の分散を $\mathrm{V}(\overline{X})$ で表すと，

$$\mathrm{V}(\overline{X}) = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} (Z_i - \mu_{\overline{X}})^2 \tag{6.5}$$

で与えられる。標本平均 $Z_1, Z_2, \cdots, Z_m$ は母集団の要素 $(x_1, x_2, \cdots, x_N)$ に依存しているが，そのことを考慮して $\mathrm{E}[\overline{X}], \mathrm{V}(\overline{X})$ を計算すると，次のようになることが分かっている。

$$\mathrm{E}[\overline{X}] = \mu \tag{6.6}$$

$$\mathrm{V}(\overline{X}) = \frac{N-n}{N-1} \cdot \frac{\sigma^2}{n} \tag{6.7}$$

上式が成立していることを，$N = 3, n = 2$ の場合について確かめてみよう。この場合，$Z_1, Z_2, Z_3$ は，それぞれ，$(X_1, X_2)$，$(X_1, X_3)$，$(X_2, X_3)$ の平均で与えられる。したがって，$\mathrm{E}[\overline{X}]$ は，

$$\mathrm{E}[\overline{X}] = \frac{1}{3}\left(\frac{X_1 + X_2}{2} + \frac{X_1 + X_3}{2} + \frac{X_2 + X_3}{2}\right) = \frac{X_1 + X_2 + X_3}{3} = \mu$$

分散 $\mathrm{V}(\overline{X})$ については

$$\mathrm{V}(\overline{X}) = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} Z_i^2 - (\mathrm{E}[\overline{X}])^2$$

となることを利用すると（51 ページの簡便公式）

$$\begin{aligned}\mathrm{V}(\overline{X}) &= \frac{1}{3}\left(\frac{(X_1 + X_2)^2}{4} + \frac{(X_1 + X_3)^2}{4} + \frac{(X_2 + X_3)^2}{4}\right) \\ &\quad - \left(\frac{X_1 + X_2 + X_3}{3}\right)^2 \\ &= \frac{1}{12}(X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 + (X_1 + X_2 + X_3)^2)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{9}(X_1+X_2+X_3)^2 \\
=\;& \frac{1}{12}(X_1^2+X_2^2+X_3^2)-\frac{1}{36}(X_1+X_2+X_3)^2 \\
=\;& \frac{1}{4}\left(\frac{X_1^2+X_2^2+X_3^2}{3}-\left(\frac{X_1+X_2+X_3}{3}\right)^2\right) \\
=\;& \frac{\sigma^2}{4}\quad\left(=\frac{3(=N)-2(=n)}{3(=N)-1}\cdot\frac{\sigma^2}{2(=n)}\right)
\end{aligned}
$$

このように上記の結果が確かめられた。

### 6.2.2　無限母集団からの標本抽出

この節では，母集団を構成する要素の数が無限個の場合，すなわち無限母集団の場合を考えよう。母集団が無限個の要素から成り立つということは，どういうことを意味するのであろうか。先ほど，兵庫県の全勤労者世帯の年間所得の集合について触れたが，これは明らかに有限母集団の例である。兵庫県を，近畿地方，さらには，日本全域に拡張してもそれを構成する要素は，有限個のままである。次のような例を考えてみよう。サイコロを振り，出た目の数を記録していく。際限なくサイコロを振り続ければ，その集合は無限個の要素からなる。これは，無限母集団である。この場合は，母集団を形成する要素，すなわち，出たサイコロの目は，ある確率分布関数から生起されたと考えられる。サイコロの出目の数を $X$ という確率変数で表すと，$f(x)$ の確率関数は，

$$
f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{6} & (x=1,2,3,4,5,6)\\[2ex] 0 & (\text{その他の } x \text{ の値について})\end{cases}
$$

となる。母集団の平均，分散は，母集団を特徴づける確率分布の平均と分散に対応する。サイコロの目の例では，母平均は 3.5，母分散は 35/12 である。

一般に，無限母集団から抽出された無作為標本の構成要素を $(X_1,\ X_2,\ \cdots,\ X_n)$ で表すと，$X_i$ は相互に独立に同一の確率分布に従う確率変数と考えられる。

無限母集団から無作為に取り出された大きさ $n$ の標本について計算される標本平均 $\mathrm{E}[\overline{X}]$，分散 $\mathrm{V}(\overline{X})$ を求めてみよう。平均，分散は，

$$
\mathrm{E}[\overline{X}]=\mu \tag{6.8}
$$

$$\mathrm{V}(\overline{X}) = \mathrm{E}[(\overline{X} - \mu)^2] = \frac{\sigma^2}{n} \tag{6.9}$$

で与えられる。この結果は，第 4 章で証明された定理 4.9 から導かれる。分散を求めるときに留意する点は，無作為標本を構成する要素 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ が，相互に独立に，同一の確率分布に従っていることである。

分散を表す (6.9) は，有限母集団に付いて求めた分散 (6.7) で，母集団の要素の数 $N$ を無限大にしたときに得られることも，付け加えておこう。また，有限母集団において復元抽出された無作為標本の各要素は，相互に独立に，同一の確率分布に従っているから，標本平均の平均と分散は，それぞれ (6.8) と (6.9) で与えられる。なお，母集団が正規分布であれば，$\overline{X} \sim N(\mu, \sigma^2/n)$ となる。

## 6.3 中心極限定理

前節では，標本平均が確率変数であり，確率分布をもつことを示し，その平均，分散を，有限母集団，無限母集団のそれぞれの場合について求めた。注意すべきことは，そこで得られた結果が，母集団を特徴づける確率分布に全く依存していないことである。また，標本平均が従う確率分布の形状がどのようなものであれ，上記の結果は成立する。

しかし，ここで標本平均の分布について，もう少し掘り下げて考えてみよう。考察したい問題は，標本平均の分布型について何かいえないのか，ということである。この問いに対して回答を与えてくれるのが，**中心極限定理**（central limit theorem）である。以下，考察の対象を無限母集団に限定しよう。無限母集団からの大きさ $n$ の無作為標本に基づく標本平均 $\overline{X}$ は，平均が母平均 $\mu$ に等しく，分散は母分散 $\sigma^2$ を $n$ で割った値に等しい。ここで，$Z_n$ を次のように定義しよう。

$$Z_n = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}, \qquad \overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \tag{6.10}$$

$Z_n$ は，平均 0，分散 1 をもつ確率変数である。また，$Z$ の添え字 $n$ は $Z_n$ が $n$（標本の大きさ）に依存する変数であることを表している。$Z_n$ の分布型について中心極限定理は次のように述べている。

**定理** 6.1　**中心極限定理**　(6.10) で与えられる $Z_n$ の分布は，標本の大きさ $n$ が大きくなるにつれて，標準正規分布 N(0, 1) に近づいていく。

この定理の証明は高度になるので省略するが，もとの母集団の分布型について，何ら仮定を置かずに定理は証明されることに注意しよう。その分布が，連続型であろうと，離散型であろうと，母集団の平均と分散が存在するだけで，定理は成立するのである。

(6.10) を $\overline{X}$ について書き直すと，次式が得られる。

$$\overline{X} = \mu + Z_n \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \tag{6.11}$$

$n$ が十分に大きいと，$Z_n$ は正規分布に従うから，$Z_n$ の 1 次関数である $\overline{X}$ も近似的に正規分布で表すことができる。その平均と分散は，前節で見たとおり，$\mu$ と $\sigma^2/n$ である。すなわち $\overline{X}$ は $\mathrm{N}(\mu,\ \sigma^2/n)$ に従う。中心極限定理がどのように利用されるのか例題によって見てみよう。

**例題** 6.1　A 市の勤労者家計の年間所得は，過去の調査から平均 550 万円，標準偏差 250 万円の分布に従う，ということが分かっている。また，この分布は，時間の経過によって影響を受けない安定的なものであるとする。いま，100 世帯の標本を抽出するとき，その平均所得が 600 万円を超える確率を求めたい。

**解**　母平均 $\mu = 550$，母分散 $\sigma^2 = 250^2$，標本の大きさ $n = 100$ である。標本平均 $\overline{X}$ は，中心極限定理により近似的に $\mathrm{N}(550,\ 250^2/100)$ に従う。これに対して，$Z_n = (\overline{X} - 550)/(250/\sqrt{100})$ は N(0, 1) に従う。したがって，標本平均が 600 を超える確率は，付表 1 より

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(\overline{X} > 600) &= \mathrm{P}\Big(Z_n > \frac{600 - 550}{25}\Big) \\ &= \mathrm{P}(Z_n > 2) = 0.0228 \end{aligned}$$

と求められる。すなわち，100 世帯の平均所得が 600 万円を超える確率は，3 ％にも満たないことが分かる。

中心極限定理は，母集団の確率分布が何であろうと，十分に多くの観測値から計算される標本平均の分布が正規分布によりうまく近似されるということを示している。このことは，正規分布が現実の確率現象の描写によく用いられることを理論的に支持しているといえよう。最後に，母集団の分布が正規分布に

従う場合には，中心極限定理を用いなくても，標本の大きさ $n$ に関係なく，標本平均の分布が正規分布になることに注意しよう。これは，母集団から抽出された各要素が，正規分布に従っており，標本平均がそれらの 1 次関数で表されることから導かれる。

**例題** 6.2　K 市の勤労者家計の資産水準の分布は，過去の調査から正規分布に従うことが分かっている。また，この分布の標準偏差は 360 万円である。いま，この母集団の平均を標本平均で推定するとき，推定値の誤差が 10 万円より大きくならない確率を 0.8 にしたい。そのためにはどのくらいの大きさの標本が必要であろうか。

**解**　標本の大きさ $n$ は，次の不等式を満足しなければならない。

$$\mathrm{P}(|\overline{X} - \mu| \leqq 10) = 0.8$$

ここで，$\overline{X}$ は標本平均，$\mu$ は母平均である。一方，$Z_n = (\overline{X} - \mu)/(360/\sqrt{n})$ は標準正規分布に従う。また $|Z_n|$ が，ある値を超えない確率が 0.8 となるような臨界値は，正規分布表から求められる。すなわち，

$$\mathrm{P}(|Z_n| \leqq 1.282) = 0.8$$

という関係が得られる。$Z_n$ の定義式を代入し，整理すると，次式が得られる。

$$\mathrm{P}\left(|\overline{X} - \mu| \leqq 1.282 \times \frac{360}{\sqrt{n}}\right) = 0.8$$

したがって，この不等式と最初に示された不等式を比較することにより $n$ は求められる。すなわち，

$$1.282 \times \frac{360}{\sqrt{n}} = 10$$

必要な標本の大きさは，2130 となる。

## 6.4　正規母集団からの標本分布

前節で紹介された中心極限定理は，標本平均の分布を考えるうえで正規分布の重要性を示唆している。この節では，母集団の確率分布が正規分布によって表されているという仮定のもとで，標本平均，標本分散等の標本分布に関連した議論を進めていこう。

### 6.4.1　標本分散の標本分布：カイ 2 乗分布

標本分散の分布を考えるうえでは，次の定理が重要である。

> **定理** 6.2　平均 $\mu$，分散 $\sigma^2$ の正規分布に従う母集団（**正規母集団**と呼ぶ）からの大きさ $n$ の無作為標本を $X_1, X_2, \cdots, X_n$ で表す。このとき，
>
> $$U = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i - \mu}{\sigma}\right)^2 \tag{6.12}$$
>
> は，**自由度 $n$ のカイ 2 乗分布**（chi-square distribution）に従う（$U \sim \chi^2(n)$ と表される）。

$(X_i - \mu)/\sigma \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$ は，互いに独立に N(0, 1) に従うから，上記の定理は，互いに独立な標準正規確率変数の 2 乗和は，カイ 2 乗分布に従うことを示している。

カイ 2 乗分布の確率密度関数は，複雑になるのでここでは示さないが，カイ 2 乗分布の密度関数の形状は自由度とともに変化することに注意しよう。図 6.1 には，自由度が，1, 2, 3, 4, 6 のそれぞれについて，密度関数を描いてある。

また，さまざまな自由度に対して，カイ 2 乗分布に従う確率変数が，ある値よりも大きくなる確率とその臨界点（パーセント点と呼ぶ）の組合せが，付表 2 に示されている。例えば，自由度 5 のカイ 2 乗分布に従う確率変数が，ある値よりも大きくなる確率が 5 % であるときに，その値は付表 2 より，11.07 となる。この点は，自由度 5 のカイ 2 乗分布の 5 パーセント点と呼ばれる（図 6.2 参照）。

標本分散の標本分布は，このカイ 2 乗分布を用いて表現することができる。

> **定理** 6.3　$S^2$ を，平均 $\mu$，分散 $\sigma^2$ の正規母集団から無作為抽出された大きさ $n$ の標本（不偏）分散とする。このとき，
>
> $$U = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i - \overline{X}}{\sigma}\right)^2 \tag{6.13}$$
>
> は，**自由度 $n-1$ のカイ 2 乗分布** $\chi^2(n-1)$ に従う。

この定理が成り立つことを，$n = 2$ の場合について確かめておこう。 $n = 2$

**図** 6.1　**カイ** 2 **乗分布の密度関数**

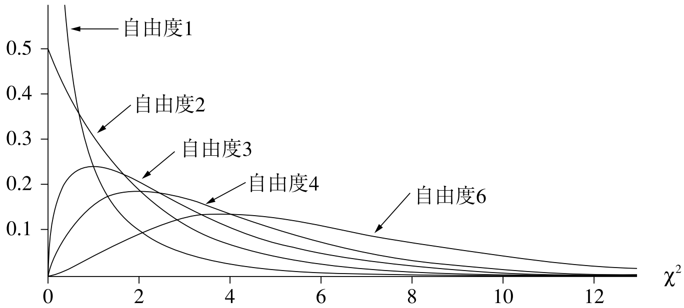
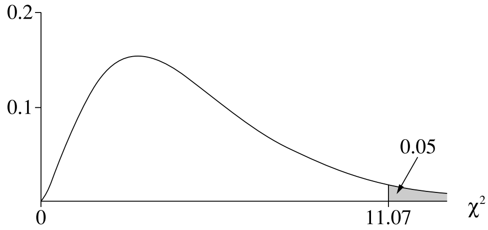



**図** 6.2　**自由度** 5 **のカイ** 2 **乗分布の密度関数**




の場合には，$U$ は，

$$U = \frac{(X_1 - \overline{X})^2}{\sigma^2} + \frac{(X_2 - \overline{X})^2}{\sigma^2}$$

となる。$\overline{X} = (X_1 + X_2)/2$ であるから，代入すれば，

$$U = \frac{((X_1 - X_2)/2)^2}{\sigma^2} + \frac{((X_2 - X_1)/2)^2}{\sigma^2} = \left(\frac{X_1 - X_2}{\sqrt{2}\sigma}\right)^2$$

$X_1$，$X_2$ は独立に $\mathrm{N}(\mu,\ \sigma^2)$ に従うから，$X_1 - X_2$ は $\mathrm{N}(0,\ 2\sigma^2)$ に従う（130 ページの（8.12) を参照)。さらに，$X_1 - X_2$ を $\sqrt{2}\sigma$ で除した変数は $\mathrm{N}(0,\ 1)$ に従う。よって，カイ 2 乗分布の定理 6.2 により，$U$ は自由度 1 のカイ 2 乗分布に従う。このように，$n = 2$ の場合に，定理が成立することが確かめられた。上記の定理がどのように利用されるのか，例題によって見ておこう。

**例題** 6.3　神戸市灘区の勤労者家計の年間所得は正規分布に従っていることが分かっている。母集団の分散は未知であるので，母集団から 17 人を無作為に選

び出して標本分散を計算して，母分散を推定したい。そのときに，標本分散が母分散の 2 倍を超えない確率はいくらになるだろうか。

**解**　標本分散を $S^2$，母分散を $\sigma^2$ で表すと，求める確率は

$$\mathrm{P}(S^2 \leqq 2 \times \sigma^2) = \mathrm{P}\left(\frac{S^2}{\sigma^2} \leqq 2\right)$$

である。また，上記の定理を用いると，

$$U = \frac{16 \times S^2}{\sigma^2}$$

は，自由度 16 のカイ 2 乗分布に従う。求める確率を $U$ について表すと

$$\mathrm{P}\left(\frac{S^2}{\sigma^2} \leqq 2\right) = \mathrm{P}(U \leqq 16 \times 2) = \mathrm{P}(U \leqq 32)$$

したがって，自由度 16 のカイ 2 乗分布に従う確率変数が 32 を超えない確率は，付表 2 より

$$\mathrm{P}(U \leqq 32) = 1 - 0.01 = 0.99$$

と求められる。

最後に自由度という概念について若干説明を加えておこう。上記の定理に即していえば，自由度とは，標本分散を構成する 2 乗の項（これは $n$ 項ある）の中で独立な項の数と考えられる。

$$\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X}) = 0$$

が成立するから，1 つの項（例えば，$X_n - \overline{X}$）は，他の項の 1 次関数として表すことができる。したがって，独立な項の数は $n-1$ となり，これが自由度となる。

### 6.4.2　$t$ 分布

平均 $\mu$，分散 $\sigma^2$ の正規母集団からの大きさ $n$ の無作為標本を考えよう。そこから計算された標本平均は，平均 $\mu$，分散 $\sigma^2/n$ の正規分布に従うことはすでに見たとおりである。その結果，

$$Z_n = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$$

は N(0, 1) に従う。しかし，この式に基づいて計算ができる前提として，母集団の分散 $\sigma^2$ が既知でなければならない。母分散が未知の場合には，その代わりに，標本分散 $S^2$ を用いて，

$$T_n = \frac{\overline{X} - \mu}{S/\sqrt{n}}$$

を計算することが考えられるが，その場合には，$T_n$ の分布はどのようになるであろうか。この問いに答えるために，まず，次の定理を紹介しておこう。

**定理** 6.4　$Z$ を標準正規分布に従う確率変数とし，$U$ を自由度 $k$ のカイ 2 乗分布に従う確率変数とする。もし，$Z$ と $U$ が独立ならば，

$$T_k = \frac{Z}{\sqrt{U/k}} \tag{6.14}$$

は，**自由度 $k$ の $t$ 分布**（$t$–distribution）に従う（$T_k \sim t(k)$ と表される）。

$t$ 分布の密度関数は複雑な形をしているので，ここでは省略するが，$t$ 分布の密度関数の形状も，カイ 2 乗分布同様，自由度に依存している。図 6.3 には，自由度 1, 4 の場合の密度関数が描かれている。$t$ 分布は 0 を中心とした左右対称の分布である。自由度が 1 の場合には，**コーシー分布**（Cauchy distribution）とも呼ばれている。この分布は，分布の両裾が厚く，平均も分散も存在しない分布である。$t$ 分布の確率密度関数は，自由度が増すにつれて，分布の両裾は薄くなっていき，正規分布に近づいていく。

付表 3 には，さまざまな自由度に対して，$t$ 分布に従う確率変数の絶対値が，ある値よりも大きくなる確率とその臨界点の組合せが示されている。例えば，自由度 10 の $t$ 分布に従う確率変数の絶対値が，ある値よりも大きくなる確率が 1 % であるときに，その値は，付表 3 より 3.169 となる（図 6.4 参照)。

さらに，定理 6.4 を用いて，次の定理が得られる。

**定理** 6.5　平均 $\mu$，分散 $\sigma^2$ の正規母集団からの大きさ $n$ の無作為標本を $X_1, X_2, \cdots, X_n$ で表す。また，標本平均，標本分散をそれぞれ，$\overline{X}$，$S^2$ で表す。このとき，

**図** 6.3　***t* 分布の密度関数**

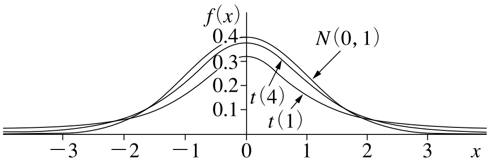
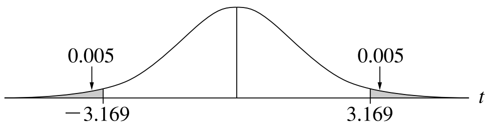



**図** 6.4　**自由度** 10 **の *t* 分布の密度関数**




$$T_n = \frac{\overline{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \tag{6.15}$$

は，**自由度 $\boldsymbol{n-1}$ の $\boldsymbol{t}$ 分布** $t(n-1)$ に従う。

この定理は次のように証明される。まず，$Z_n$ は上で見たように標準正規分布に従うことが分かっている。また，前節で示されたように，

$$U_n = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$$

は，自由度 $n-1$ のカイ 2 乗分布に従っている。さらに，$Z_n$ と $U_n$ は独立に分布することが示される（証明は略）。したがって，定理 6.4 を適用すると，

$$\begin{aligned} T_n &= \frac{Z_n}{\sqrt{U_n/(n-1)}} = \frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \Bigg/ \sqrt{\frac{(n-1)S^2/\sigma^2}{n-1}} \\ &= \frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \Bigg/ \sqrt{\frac{S^2}{\sigma^2}} = \frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \end{aligned}$$

は，自由度 $n-1$ の $t$ 分布に従うことが分かる。

### 6.4.3　*F* 分布

正規分布に関連した最後の分布として $F$ 分布を紹介しよう。

**定理** 6.6　$U$ を自由度 $m$ のカイ 2 乗分布に従う確率変数，$V$ を自由度 $n$ のカイ 2 乗分布に従う確率変数とする。さらに，$U$ と $V$ は互いに独立に

**図** 6.5　$\boldsymbol{F}$ **分布の密度関数**

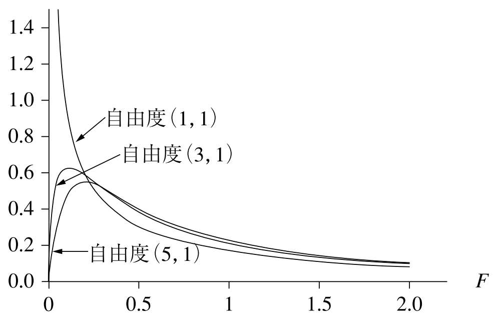
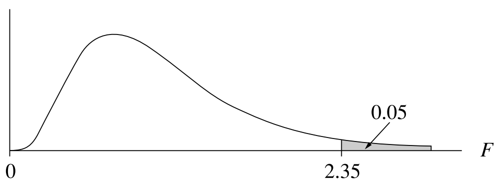



**図** 6.6　**自由度** (10,20) **の** $\boldsymbol{F}$ **分布の密度関数**




分布するものとする。このとき，

$$Y = \frac{U/m}{V/n} \tag{6.16}$$

は，**自由度** $(\boldsymbol{m}, \boldsymbol{n})$ **の** $\boldsymbol{F}$ **分布**（$F$–distribution）に従う（$Y \sim F(m, n)$ と表される）。

$F$ 分布の密度関数はここでは省略するが，その形状は，カイ 2 乗分布，$t$ 分布と同様，自由度に依存する。図 6.5 には，自由度が (1,1)，(3,1)，(5,1) の $F$ 分布の密度関数が描かれている。

付表 4 には，さまざまな自由度に対して，$F$ 分布に従う確率変数が，ある値よりも大きくなる確率が，5 %，2.5 %，1 %，0.5 % の場合についてその臨界点の値が示されている。例えば，自由度 (10,20) の $F$ 分布に従う確率変数が，ある値よりも大きくなる確率が 5 % であるときに，その値は付表 4 より，2.35 となる（図 6.6 参照）。

上記の定理を用いると標本分散の比率の分布を導くことができる。いま，1 つの

正規母集団からとられた 2 つの 独立な無作為標本を考えよう。それぞれの標本の大きさを，$n_1$，$n_2$ としよう。また，標本分散を $S_1^2$，$S_2^2$ で表そう。すでに見たように，

$$U_{n_1} = \frac{(n_1-1)S_1^2}{\sigma^2}$$
$$U_{n_2} = \frac{(n_2-1)S_2^2}{\sigma^2}$$

はそれぞれ，自由度 $n_1-1$ と自由度 $n_2-1$ のカイ 2 乗分布に従う。また，両標本とも独立に抽出されているから，2 つのカイ 2 乗分布も独立に分布している。したがって，上記の定理が使用できる。$V$ を次のように定義する。

$$V = \frac{U_{n_1}/(n_1-1)}{U_{n_2}/(n_2-1)} = \frac{S_1^2/\sigma^2}{S_2^2/\sigma^2} = \frac{S_1^2}{S_2^2}$$

$V$ は定理 6.6 により，自由度 $(n_1-1, n_2-1)$ の $F$ 分布に従う。結果をまとめておこう。

**定理** 6.7　正規母集団からの 2 つの独立な無作為標本を考える。それぞれの標本の大きさを $n_1$，$n_2$，標本分散を $S_1^2$，$S_2^2$ で表す。このとき，標本分散の比 $S_1^2/S_2^2$ は自由度 $(n_1-1, n_2-1)$ の $F$ 分布に従う。

この定理を応用した例題を示しておこう。

**例題** 6.4　神戸市西区の勤労者家計の年間所得の分布は正規分布によって描写されている。 この分布の分散は未知なので，それを標本分散によって推定したい。そのために 2 人の調査員 A 君と B さんが独立に標本を集めようとしている。A 君は標本の大きさを 9 にし，B さんは標本の大きさを 16 にする予定である。このときに A 君の標本から計算された標本分散が，B さんの標本から計算された標本分散の 4 倍を超えない確率はいくらになるか。

**解**　A 君，B さんの標本分散をそれぞれ $S_1^2$，$S_2^2$ で表すと，求める確率は，

$$\mathrm{P}(S_1^2 \leqq 4 \times S_2^2)$$

である。また，上記の定理を用いると，標本分散の比 $V = S_1^2/S_2^2$ は，自由度 (8, 15) の $F$ 分布に従う。上の不等式を $V$ について書き直すと，求める確率は $\mathrm{P}(V \leqq 4)$ となる。付表 4 の $F$ 分布表からこの値は 0.99 となる。

## 練習問題

**6.1**　K 大学の学生の父親の平均所得を調査するために，大学で奨学金をもらっている学生のリストから，無作為に 50 人を取り出して調査を行った。この調査方法は適切なものといえるか。もし適切でないなら，標本平均は，母平均を推定するうえで，どのような偏りをもたらすと考えられるか。

**6.2**　箱の中に 4 枚のカードが入っている。そのカードには，1，5，7，15 と番号が書いてある。この母集団の平均と分散はいくらか。この箱から 3 枚のカードを無作為に非復元抽出して，標本平均を計算する。このとき，標本平均の平均，分散を求めよ。そして，その答えが (6.7) で与えられた公式を満足することを確かめよ。

**6.3**　N 市の勤労者 1 世帯当り純金融資産残高（= 金融資産残高 − 金融負債残高）は，過去の調査から平均 480 万円，標準偏差 320 万円の正規分布により記述され，安定的であることが分かっている。このとき，

**(1)**　64 世帯を無作為抽出したときに，その標本平均が，450 万円以上 500 万円以下である確率を求めよ。

**(2)**　標本を無作為に抽出したときに，その標本平均が 520 万円以上になる確率が 5 % を超えないためには，標本の大きさは少なくともいくら必要か。

**6.4**　問 6.3 において，標本を無作為抽出したときに，その標本標準偏差が 400 万円以上になる確率が 5 % を超えないためには，標本の大きさは少なくともいくら必要か。

**6.5**　問 6.3 において，無作為標本を 2 度取り出し標本分散を計算することを考える。第 1 の標本分散を $S_1^2$，第 2 の標本分散を $S_2^2$ で表す。第 1 の標本の大きさが 9 であるときに，$S_1^2/S_2^2$ が 2.5 以上になる確率が 5 % を超えないためには，第 2 の標本の大きさ（標本数）は少なくともいくら必要か。

**6.6**　次の問に答えよ。

**(1)**　$X \sim \chi^2(5)$ のとき，$\mathrm{P}(X < x) = 0.99$ となる $x$ を求めよ。

**(2)**　$X \sim \chi^2(9)$ のとき，$\mathrm{P}(X < x) = 0.025$ となる $x$ を求めよ。

**(3)** $X \sim \chi^2(16)$ のとき，$\mathrm{P}(x < X < 28.85) = 0.925$ となる $x$ を求めよ。

**6.7**　$X_1, X_2, \cdots, X_{2500}$ は無作為標本であり，すべての $i = 1, 2, \cdots, 2500$ について，$X_i \sim \chi^2(1)$ とする。標本平均を $\overline{X} = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i$（ただし，$n = 2500$）としたとき，以下の問に答えよ（$\chi^2(1)$ 分布からの確率変数の平均は 1，分散は 2 となる）。

**(1)** この場合，どの分布表を使うべきか答えよ（$\mathrm{N}(0,1)$ か $\chi^2$ のどちらかを選べ）。

**(2)** $\mathrm{P}(\overline{X} < x) = 0.025$ となる $x$ を求めよ。

**(3)** $\mathrm{P}(0.98 < \overline{X} < 1.05)$ を求めよ。

**6.8**　$X_1, X_2, \cdots, X_9$ は無作為標本であり，すべての $i = 1, 2, \cdots, 9$ について，$X_i \sim \mathrm{N}(3, 25)$ とする。$\overline{X}$ を $\overline{X} = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i$ と定義する（ただし，$n = 9$ とする）。このとき，以下の問に答えよ。

**(1)** $\overline{X}$ の平均を求めよ。

**(2)** $\overline{X}$ の分散を求めよ。

**(3)** $\mathrm{P}(\overline{X} < 0)$ を求めよ。

**(4)** $\mathrm{P}(\overline{X} > x) = 0.1$ となるような $x$ を求めよ。

**6.9**　次の問に答えよ。

**(1)** $X \sim t(5)$ のとき，$\mathrm{P}(X < x) = 0.99$ となる $x$ を求めよ。

**(2)** $X \sim t(9)$ のとき，$\mathrm{P}(X < x) = 0.025$ となる $x$ を求めよ。

**(3)** $X \sim t(16)$ のとき，$\mathrm{P}(x < X < 1.746) = 0.925$ となる $x$ を求めよ。

**(4)** $X \sim t(5)$ のとき，$\mathrm{P}(x < X) = 0.95$ となる $x$ を求めよ。

**(5)** $X \sim t(27)$ のとき，$\mathrm{P}(0.0 < X)$ の確率を求めよ。

**(6)** $X \sim t(13)$ のとき，$\mathrm{P}(-1.35 < X)$ の確率を求めよ。

**6.10**　平均 $\mu$，分散 $\sigma^2$ の正規母集団からの大きさ $n$ の無作為標本を $X_1, X_2, \cdots, X_n$ で表す。このとき，以下の分布を求めよ（例えば，$\mathrm{N}(0,1)$, $\chi^2(n)$, $F(n,m)$, $\cdots$ のように，分布の記号で答えよ）。

**(1)** $X_1$，**(2)** $\overline{X}$，**(3)** $\dfrac{\overline{X} - \mu}{\sigma}$，**(4)** $\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\dfrac{X_i - \mu}{\sigma}\right)^2$,

**(5)** $\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\dfrac{X_i - \overline{X}}{\sigma}\right)^2$，**(6)** $\dfrac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$，**(7)** $\dfrac{\overline{X} - \mu}{S/\sqrt{n}}$,

**(8)** $\left(\dfrac{X_n - \mu}{\sigma}\right)^2$

ただし，$\overline{X}$，$S^2$ をそれぞれ標本平均，標本分散とする。

**6.11**　平均 35，標準偏差 10 の正規母集団から，大きさ 25 の無作為標本を抽出した。その標本平均を $\overline{X}$ とするとき，次の確率を求めよ。

(1)　$\mathrm{P}(\overline{X} \geqq 34.6)$，**(2)**　$\mathrm{P}(\overline{X} \leqq 34.2)$，**(3)**　$\mathrm{P}(34 \leqq \overline{X} \leqq 35.5)$

**6.12**　ある電気製品の寿命は正規分布に従い，その標準偏差は 7.2 時間であるという。この製品 81 個の無作為標本の平均寿命が製品全体の平均寿命（母平均）と 1 時間以上異なる確率はいくらか。

**6.13**　ある工場で作られた乾電池の寿命は標準偏差 4.2 分の正規分布に従うという。

(1)　36 個の無作為標本をとって寿命を測定するとき，これらの標本平均は製品全体の平均寿命（母平均）の推定値としてどの程度正確であるといえるか。ただし，確率は 0.95 とする。

**(2)**　もし母平均を 1 分以内まで正確に推定したいとすれば，どれだけの大きさの標本が必要か。ただし，確率は 0.95 とする。

# 第 7 章

# 推定

われわれの関心が，勤労者世帯の年間収入の全国平均を知ることにあるとしよう。第 1 章の表 1.5 から勤労者世帯の年間収入の平均値を計算すると，約 604 万円となる（表 1.5 からは，年間収入が 1000 万円以上の階級値が計算できないので，仮に 1500 万円とした)。このとき，母集団は全国の勤労者世帯の年間収入であり，調査された 5097 世帯の年間収入は無作為標本であると考えられる。この無作為標本から得られた標本平均の実現値が 604 万円であり，これは全国平均（母平均）の推定値である。

第 6 章で説明したように，標本平均は標本抽出のたびに変動する確率変数である。 したがって，標本平均の実現値が，ぴったり母平均の値に一致することはまず期待できない。 しかし，標本平均の実現値が，母平均の値と著しく異なるということも滅多にないと考えられる。 ここで問題となるのは，母平均は未知であるので，標本平均の実現値がどの程度母平均の推定値として正確であるか（どの程度母平均に近いか）は分からない，ということである。 例えば，勤労者世帯の年間収入の例では，標本平均の実現値 604 万円がどの程度全国平均の値に近いかに関しては何もいえない。 そこで，得られた推定値の良さを測る尺度が必要となる。 この章の前半では，標本に基づいて母数を 1 つの点で推定する場合，得られた推定値の良さを測る理論的な尺度について説明する。

推定値が，母数の値にぴったり一致することはまず期待できないと先に述べた。しかし，母数がある区間にあるとして推定を行えば，その区間が母数の真の値を含む信頼度（100 ページ参照）が確定できる。このように，母数の値がある区間内にあるとして推定することを**区間推定**（interval estimation）という。 この章の後半では，この区間推定について説明する。

## 7.1 推定と推定量

母集団の分布が平均 $\mu$，分散 $\sigma^2$ の正規分布であるとき（これを正規母集団といい，$\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ と略記する），この母集団から大きさ $n$ の無作為標本 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ が抽出されたものとしよう（ここでは標本をまだ確率変数と考えていないので小文字で表す）。母集団の平均（母平均）$\mu$ の値が未知であり，われわれの関心がこの $\mu$ の値を知ることにあるならば，われわれは標本から $\mu$ の値を推定しなければならない。$\mu$ をある 1 つの値で推定することを**点推定**（point estimation）という。

$\mu$ の点推定を行うとき，通常は，標本平均

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

を計算し，この値を $\mu$ の点推定値とする。標本平均 $\overline{x}$ は，標本実現値 $x_i$ の関数となっている。したがって，標本平均 $\overline{x}$ は統計値である（統計値については，77 ページを参照せよ）。

この $\overline{x}$ に含まれる標本実現値 $x_i$ を，対応する標本確率変数 $X_i$ で置きかえた

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

を標本平均の**推定量**（estimator）という。$\overline{X}$ は，厳密には，標本平均確率変数と呼ぶべきであるが，単に標本平均といわれることが多い。ここでも，$\overline{X}$ を単に標本平均といい，その実現値を標本平均の実現値と呼ぶことにする。標本平均 $\overline{X}$ は，標本確率変数 $X_i$ の関数であるので，統計量である（統計量については，76 ページを参照せよ）。

一般に，無作為標本 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ が与えられたときに，ある母数（パラメータ）$\theta$ を推定するための統計量 $\hat{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ を**推定量**といい，その実現値 $\hat{\theta}(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ を**推定値**（estimate）という（$\hat{\theta}$ をハットシータまたはシータハットと読む）。第 6 章で説明したように，統計量の従う分布を標本分布という。推定量は統計量の一種であるので，推定量も標本分布に従う。例えば，正規母集団 $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ からの大きさ $n$ の無作為標本の標本平均 $\overline{X}$ の標本分布は，

$\mathrm{N}(\mu, \sigma^2/n)$ である（6.2 節参照）。標本分布の標準偏差を**標準誤差**（standard error）という。したがって，$\overline{X}$ の標本分布の標準誤差は $\sigma(\overline{X}) = \sigma/\sqrt{n}$ である。

## 7.2　推定量の性質

推定値は推定量の実現値であるので，何らかの意味で良い推定値とは，対応する推定量（の標本分布）が何らかの意味で良い性質をもっている，ということである。本節では，推定量のもつべき望ましい性質について説明する。

### 7.2.1　不偏性

ある母数 $\theta$ の推定量を

$$\hat{\theta} = \hat{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)$$

とすると，

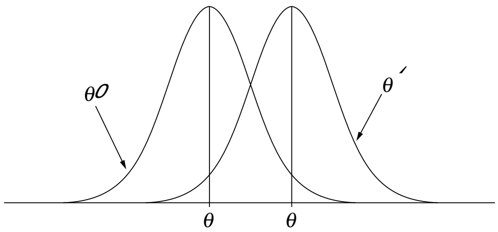
$$\mathrm{E}[\hat{\theta}] = \theta$$

が成立するとき，$\hat{\theta}$ を $\theta$ の**不偏推定量**（unbiased estimator）という。また，不偏推定量の実現値を**不偏推定値**（unbiased estimate）という。

もし，この**不偏性**（unbiasedness）という性質が満たされないならば，何回も推定を繰り返したときに，多くの推定値が，母数の真の値よりも大きな，または小さな値に集中する傾向がある。しかし，不偏性が満たされるならば，多くの推定値を得たときに，母数の値よりも大きな推定値と小さな推定値が大体同じ割合で現れる。不偏性というのは，多くの推定値が母数の値よりも大きな値，または小さな値に偏らないという意味で推定量のもつべき望ましい性質の 1 つである。

図 7.1 は，母数 $\theta$ の不偏推定量 $(\hat{\theta})$ と上への偏り（母数の値よりも大きな値に多くの推定量が偏ること）がある推定量 $(\widetilde{\theta})$ の標本分布を示したものである。この場合には，$\theta$ の推定量としては，$\hat{\theta}$ の方が $\widetilde{\theta}$ よりも優れていることは明らかであろう。

**図** 7.1　**不偏推定量 ($\hat{\theta}$) と上への偏りのある推定量 ($\widetilde{\theta}$)**




（注）　$\mathrm{E}[\hat{\theta}] = \theta$，$\mathrm{E}[\widetilde{\theta}] = \theta'$ で $\theta < \theta'$ である。

**例** 7.1　標本平均 $\overline{X}$ の平均（$\overline{X}$ の標本分布の平均）は母平均 $\mu$ であるので，

$$\mathrm{E}[\overline{X}] = \mu$$

が成立している。したがって，標本平均は母平均の不偏推定量である。

**例** 7.2　母分散の推定量として，

$$S^{*2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$$

よりも標本分散

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$$

の方が望ましいと考えられるのは，$S^2$ が $\sigma^2$ の不偏推定量となっているからである。実際，

$$\mathrm{E}[S^{*2}] = \frac{n-1}{n}\sigma^2 = \sigma^2 - \frac{\sigma^2}{n}$$

となることが示され，$n$ が有限である限り，$S^{*2}$ には $-\sigma^2/n$ だけの偏りがある。$S^2$ は $\sigma^2$ の不偏推定量であるので，$S^2$ を特に**標本不偏分散**ということがある（19 ページで述べた標本分散 $S^2$ の定義とその注意をもう一度読み返してほしい)。この $S^2$ の正の平方根を**標本標準偏差**という。

### 7.2.2　一致性

ある母数 $\theta$ の推定量 $\hat{\theta}$ が，

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}(|\hat{\theta}-\theta| \geqq \epsilon) = 0, \qquad \text{任意の } \epsilon > 0 \text{ について}$$

を満たすとき，$\hat{\theta}$ を**一致推定量**（consistent estimator）という。この式は，正数 $\epsilon$ をどんなに小さくとっても，$\hat{\theta}$ と $\theta$ との距離 ($|\hat{\theta}-\theta|$) が $\epsilon$ 以上になる確率は，$n$ が大きくなるに従ってゼロに近づいていく，ということを意味している。$\hat{\theta}$ が $\theta$ の一致推定量であることを，$\hat{\theta}$ が $\theta$ に**確率収束**するといい，このことを

$$\mathrm{plim}\ \hat{\theta} = \theta$$

と書く。

推定量 $\hat{\theta}$ が，$\theta$ の一致推定量であるための 1 つの十分条件は，

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{E}[\hat{\theta}] = \theta, \qquad \lim_{n\to\infty} \mathrm{V}(\hat{\theta}) = 0$$

が成立することである。ただし，これは必要条件ではない。

**例** 7.3　例えば，標本平均では

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{E}[\overline{X}] = \lim_{n\to\infty} \mu = \mu$$

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{V}(\overline{X}) = \lim_{n\to\infty} \frac{\sigma^2}{n} = 0$$

であるので，$\overline{X}$ は母平均の一致推定量である。

$\overline{X}$ は一致推定量だから，

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}(|\overline{X}-\mu| \geqq \epsilon) = 0, \qquad \epsilon > 0$$

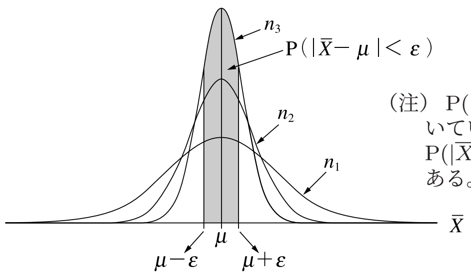
が成立する。この式を書きかえると

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}(|\overline{X}-\mu| < \epsilon) = 1, \qquad \epsilon > 0$$

となる（不等号の向きに注意）。この式は，$n$ が大きくなるに従って，$\overline{X}$ の標本分布が $\mu$ に集中していくことを示している。図 7.2 は，標本が大きくなるに従って，$\overline{X}$ の分布が $\mu$ に集中していく様子を示したものである。図 7.2 から，$n$ が大きくなるに従って，$\mathrm{P}(|\overline{X}-\mu| < \epsilon)$ が大きくなる（1 に近づいてゆく）ことが分かるであろう。

母分散 $\sigma^2$ の推定量については，$S^2$ も $S^{*2}$ もともに一致推定量であることを示すことができるが，詳しいことについては省略する。

**図** 7.2　$\boldsymbol{n_1 < n_2 < n_3}$ **に対する** $\overline{X}$ **の標本分布**




（注）$\mathrm{P}(|\overline{X}-\mu|<\epsilon)$ の意味は，$n_3$ のときについていえば，図の網掛け部分の面積である。$\mathrm{P}(|\overline{X}-\mu| \geqq \epsilon)$ はその外側の部分の面積である。

### 7.2.3　有効性

これまでに，不偏性と一致性という，2 つの推定量のもつべき望ましい性質について説明した。いま，ある母数 $\theta$ に対する 2 つの推定量 $\hat{\theta}$ と $\widetilde{\theta}$ があり，これらはともに不偏性と一致性をもっているとしよう。このとき，いずれの推定量がより望ましいかは，これら 2 つの基準では判定できない。しかし，2 つの推定量のうち，$\hat{\theta}$ の分散の方が $\widetilde{\theta}$ の分散よりも小さいならば，$\hat{\theta}$ の方が $\widetilde{\theta}$ よりも望ましい推定量といえよう。その理由は，分散の小さい推定量の標本分布の方が，母数の回りに集中している度合が大きく，真の母数に近い推定値を生み出す確率が大きいからである。$\hat{\theta}$ の分散の方が $\widetilde{\theta}$ の分散よりも小さいとき，$\hat{\theta}$ を**相対的に有効な推定量** であるという。

**例** 7.4　正規母集団 $\mathrm{N}(\mu,\ \sigma^2)$ から大きさ $n$ の無作為標本を抽出して $\mu$ を推定する場合，標本平均 $\overline{X}$ と標本中央値（メディアン）$\widetilde{X}$ の 2 つの推定量が考えられる。$\overline{X}$ と $\widetilde{X}$ は，ともに不偏かつ一致推定量であることが知られている。$\overline{X}$ の分散は (6.9) より $\mathrm{V}(\overline{X}) = \sigma^2/n$ である。$\widetilde{X}$ の分散は，$n$ が大きいときには，$\mathrm{V}(\widetilde{X}) = (\pi/2)(\sigma^2/n)$ で近似されることが分かっている。よって，$\widetilde{X}$ と $\overline{X}$ の分散の比（これを**相対的有効性**という）は，$n$ が大きいときには，

$$\frac{\mathrm{V}(\widetilde{X})}{\mathrm{V}(\overline{X})} = \frac{\pi}{2} \fallingdotseq 1.57 > 1$$

となる。この式は，標本平均 $\overline{X}$ の方が標本中央値 $\widetilde{X}$ よりも相対的に有効であることを示している。

ある推定量が，他の推定量よりも相対的に有効であるとしても，さらに相対的に有効な推定量が存在するかもしれない。したがって，相対的有効性の概念からは，ある推定量が最も有効であるか否かは分からない。不偏推定量に限っていえば，ある推定量が最も有効であるか否かを確認する手段として，推定量の分散の下限（直観的には最小値と考えてよい）を与える**クラーメル・ラオの不等式**というものがある。

ある母数 $\theta$ の不偏推定量のうち，もしクラーメル・ラオの不等式の下限を達成する推定量があれば，この推定量は $\theta$ の不偏推定量のうちで最小の分散をもっている。このような推定量を**有効推定量**（efficient estimator）といい，**有効性**（efficiency）は推定量のもつべき望ましい性質の 1 つである。

例えば，標本平均 $\overline{X}$ の分散は，クラーメル・ラオの不等式の下限を達成することが分かっている。したがって，標本平均は母平均のすべての不偏推定量の中で最小の分散をもつので有効推定量である。

標本平均は，不偏性，一致性，および有効性という 3 つの望ましい性質をもっている。このことは，母平均の推定量として標本平均を用いることに対する理論的な根拠を与えている。なお，標本平均は，補注（107 ページ）で示されるように，**最尤法**（さいゆうほう）（maximum likelihood method）という推定量を求める方法から導かれる母平均の推定量である（本書で述べる推定量の求め方は，最尤法と第 9 章で触れる最小 2 乗法である）。

## 7.3　区間推定

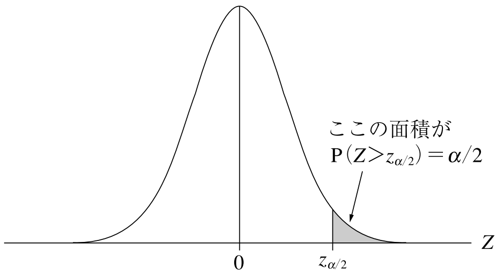
前節までは，点推定と推定量のもつべき望ましい性質について説明した。この節では，母数が 2 つの値の間，すなわち，ある区間にあるとして推定する，いわゆる**区間推定**について説明する。

### 7.3.1　平均の区間推定：母分散が既知の場合

正規母集団 $\mathrm{N}(\mu,\ \sigma^2)$ の平均の区間推定について考えよう。最初は簡略化のため，母分散 $\sigma^2$ が既知であると仮定する。

大きさ $n$ の無作為標本 $X_1,\ X_2,\ \cdots,\ X_n$ の標本平均 $\overline{X}$ の標本分布は $\mathrm{N}(\mu,$

**図** 7.3　**標準正規分布の上側確率が $\boldsymbol{\alpha/2}$ となる点** $(z_{\alpha/2})$




$\sigma^2(\overline{X}))$ である（ただし，$\sigma(\overline{X}) = \sigma/\sqrt{n}$ とする）。66 ページで述べた標準化の公式を適用すると

$$Z_n = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma(\overline{X})}$$

は標準正規分布に従う。よって，標準正規分布表から

$$\mathrm{P}(|Z_n| < z_{\alpha/2}) = \mathrm{P}\left(\left|\frac{\overline{X} - \mu}{\sigma(\overline{X})}\right| < z_{\alpha/2}\right) = 1 - \alpha \tag{7.1}$$

を満たす $z_{\alpha/2}$ の値を見つけることができる（図 7.3）。$z_{\alpha/2}$ は標準正規分布の上側確率が $\alpha/2$ となる点，すなわち，$\mathrm{P}(Z_n > z_{\alpha/2}) = \alpha/2$ を満たす点である。例えば，$\alpha = 0.05$ ならば $z_{\alpha/2} = 1.96$ であり，$\alpha = 0.10$ ならば $z_{\alpha/2} = 1.645$ である。

$\mu$ の区間推定は (7.1) に基づいて行われる。$\sigma(\overline{X}) > 0$ だから，(7.1) の (　) 内の式，$|\overline{X} - \mu|/\sigma(\overline{X}) < z_{\alpha/2}$ を $\mu$ について解くと，(7.1) は

$$\mathrm{P}(\overline{X} - z_{\alpha/2}\sigma(\overline{X}) < \mu < \overline{X} + z_{\alpha/2}\sigma(\overline{X})) = 1 - \alpha \tag{7.2}$$

となる。(7.2) は，$\mu$ が区間 $(\overline{X} - z_{\alpha/2}\sigma(\overline{X}),\ \overline{X} + z_{\alpha/2}\sigma(\overline{X}))$ に含まれる確率が $1 - \alpha$ であることを示している。確率変数 $\overline{X}$ をその実現値 $\overline{x}$ で置き換えた区間

$$(\overline{x} - z_{\alpha/2}\sigma(\overline{x}),\ \ \overline{x} + z_{\alpha/2}\sigma(\overline{x}))$$

を，母平均 $\mu$ の**信頼係数**（または**信頼度**）$1-\alpha$ の**信頼区間**（confidence interval）といい，信頼区間の上限と下限を**信頼限界**という。

**例題** 7.1　正規母集団 $\mathrm{N}(\mu,\ 2^2)$ から大きさ 16 の標本をとって標本平均を計算したところ，$\overline{x} = 3.2$ であった。$\mu$ の信頼係数 0.95 の信頼区間を求めよ。

**解**　信頼係数 0.95（すなわち，$\alpha = 0.05$）に対する $z_{\alpha/2}$ の値は 1.96 である。$n = 16,\ \sigma = 2$ であるので，$\overline{X}$ の標準偏差は

$$\sigma(\overline{x}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{2}{\sqrt{16}} = 0.5$$

となる。信頼限界を

$$\overline{x} \pm z_{\alpha/2}\sigma(\overline{x}) = 3.2 \pm 1.96 \times 0.5$$

から計算すると，2.22 および 4.18 となるので，信頼区間 0.95 の信頼区間は (2.22, 4.18) である。

標本 $X_1,\ X_2,\ \cdots,\ X_n$ の実現値がとられるまでは，$\overline{X}$ は確率変数であるので，(7.2) は成立する。しかし，$\overline{X}$ の実現値が $\overline{x}$ であるとき，$\mu$ の信頼区間は $(\overline{x} - z_{\alpha/2}\sigma(\overline{x}), \overline{x} + z_{\alpha/2}\sigma(\overline{x}))$ と計算されるが，$\mu$ がこの区間に入る確率が $1 - \alpha$ である，という解釈はできない。例題 7.1 では，信頼係数 0.95 の信頼区間は (2.22, 4.18) であったが，$\mathrm{P}(2.22 < \mu < 4.18) = 0.95$ とは書けない。その理由は，標本実現値から計算された信頼区間 (2.22, 4.18) には確率変数が存在しないからである。$2.22 < \mu < 4.18$ は成立するか，成立しないか，のいずれかである（例えば，$\mu$ の真の値が 3.5 であれば成立，4.5 であれば不成立)。したがって，しいていえば，$\mathrm{P}(2.22 < \mu < 4.18)$ は 0 か 1 かのいずれかである。このことから，$1 - \alpha$ を信頼区間が成立する確率とはいわず，信頼係数という。

それでは，信頼係数にはどういう意味があるのであろうか。例えば，正規母集団 $\mathrm{N}(\mu,\ \sigma^2)$ から大きさ $n$ の標本を抽出する実験を 100 回繰り返して，100 個の信頼係数 0.95 の信頼区間を計算したとする。このとき，95 個程度の信頼区間が $\mu$ の真の値を含むと考えられる，というのが信頼係数 0.95 の意味である。

### 7.3.2　平均の区間推定：母分散が未知の場合

母分散 $\sigma^2$ が既知のときは，$Z_n = (\overline{X} - \mu)/\sigma(\overline{X}) \sim \mathrm{N}(0,\ 1)$ から $\mu$ の信頼区間が計算できた。しかし，実際には，母分散 $\sigma^2$ は未知である場合の方が多い。$\sigma^2$ が未知のときには，$\sigma(\overline{X}) = \sigma/\sqrt{n}$ の $\sigma$ が未知であるので，(7.2) から

導出された信頼区間は標本のみからは計算できない。このとき考えられるのは，未知母数 $\sigma$ をその推定量である標本標準偏差 $S$ で置きかえることである。

第 6 章で示されたように，$Z_n = (\overline{X} - \mu)/(\sigma/\sqrt{n})$ の $\sigma$ を $S$ で置きかえた統計量

$$T_n = \frac{\overline{X} - \mu}{S/\sqrt{n}}$$

は自由度 $k = n - 1$ の $t$ 分布に従う（定理 6.5）。よって，$t$ 分布表（付表 3）から

$$\mathrm{P}(|T_n| < t_{\alpha/2}(k)) = \mathrm{P}\Big(\Big|\frac{\overline{X} - \mu}{S/\sqrt{n}}\Big| < t_{\alpha/2}(k)\Big) = 1 - \alpha \tag{7.3}$$

を満たす $t$ 分布の上側 $100\alpha$ パーセント点 $t_{\alpha/2}(k)$ の値を見つけることができる。例えば，$n = 11$（すなわち，$k = 10$），$\alpha = 0.05$ のとき，$t$ 分布表から $t_{\alpha/2}(k) = 2.228$ である。

(7.3) の（　）内の式 $|(\overline{X} - \mu)/(S/\sqrt{n})| < t_{\alpha/2}(k)$ を $\mu$ について解くと，(7.3) は

$$\mathrm{P}\Big(\overline{X} - t_{\alpha/2}(k)\frac{S}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{X} + t_{\alpha/2}(k)\frac{S}{\sqrt{n}}\Big) = 1 - \alpha \tag{7.4}$$

となる。よって，信頼係数 $1 - \alpha$ の信頼区間の信頼限界は，確率変数 $\overline{X}$，$S$ をその実現値 $\overline{x}$，$s$ で置き換えて，$\overline{x} \pm t_{\alpha/2}(k)(s/\sqrt{n})$ で与えられる。信頼係数の意味は，母分散が既知の場合と同じである。

標本が大きいとき（数学的には，$n \to \infty$），$t$ 分布は標準正規分布に収束することが分かっている。この事実から，標本数（標本の大きさ）が有限であっても，ある程度大きいならば（目安として，正規母集団を仮定した場合，$n \geqq 25$），統計量 $T_n$ があたかも標準正規分布に従うとみなしても差し支えない。このときは，$t_{\alpha/2}(k)$ の代わりに標準正規分布のパーセント点 $z_{\alpha/2}$ を使用して信頼区間が計算される。このように，標本が大きいときにある統計量が標準正規分布に従うと見なして推測を行うことを，**正規分布による近似**，あるいは単に**正規近似** という。

**例題** 7.2　正規母集団 $\mathrm{N}(\mu,\ \sigma^2)$ から大きさ 9 の標本をとって標本平均と標本標準偏差を計算したところ，それぞれ，$\overline{x} = 3.2$，$s = 2.1$ であった。$\mu$ の信頼係数 0.95 の信頼区間を求めよ。

**解**　$n = 9$, $\overline{x} = 3.2$, $s = 2.1$, $t_{\alpha/2}(k) = 2.306$（自由度は $k = 9 - 1 = 8$）であるので，信頼係数 0.95 の信頼限界は

$$\overline{x} \pm t_{\alpha/2}(k)\frac{s}{\sqrt{n}} = 3.2 \pm 2.306 \times \frac{2.1}{\sqrt{9}}$$

から計算される。よって，信頼係数 0.95 の信頼区間は (1.586, 4.814) となる。

例題 7.2 において $t$ 分布を使わずに正規分布で近似したとすると，信頼区間は (1.828, 4.572) となる。この信頼区間は $t_{\alpha/2}(k) = 2.306$ の代わりに $z_{\alpha/2} = 1.96$ を使用して得られたものである。標本の大きさは 9 であり，それほど大きいとは考えられない。この正規近似による信頼区間は，$t$ 分布に基づいた正確な信頼区間に比べて区間の幅がかなり狭くなっている。このことから，$n$ が小さいときには，近似は良好でないことが分かる。

例題 7.2 で，標本の大きさのみが異なっていて，$n = 25$ であったとすると，$t$ 分布による正確な信頼区間は (2.333, 4.067) となる（信頼係数は 0.95）。一方，正規近似による信頼区間は (2.377, 4.023) であるので，2 つの信頼区間に大差はなく，近似はかなり良好であるといえる。

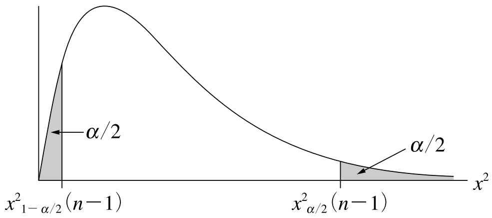
母集団が正規分布に従わない場合でも，標本が大きければ（目安として，正規母集団でない場合，$n \geqq 100$），中心極限定理により標本平均は正規分布に収束する（6.3 節参照）。この事実から，母集団分布が正規分布ではなく，かつ母分散が未知の場合でも，標本が大きければ正規近似によって母平均の信頼区間を計算することができる。このときの信頼区間の計算手順は，母分散が既知のときのそれと基本的には同じである（7.3.4 節で，比率の区間推定を求めるという具体例が与えられている）。

このように，標本が大きい場合の近似分布を**漸近分布**（ぜんきんぶんぷ）（asymptotic distribution）といい，漸近分布に基づいて推測を行うことを**大標本法**という。 これに対して，標本が小さい場合の厳密な分布を**小標本分布**あるいは**精密分布**といい（例えば，$t$ 分布），この小標本分布に基づいて推測を行うことを**小標本法**という。

### 7.3.3　分散の区間推定

正規母集団 $\mathrm{N}(\mu,\ \sigma^2)$ から抽出された大きさ $n$ の無作為標本に基づく標本分散を $S^2$ とすると，

**図** 7.4　**自由度 $n-1$ のカイ** 2 **乗分布の下側および上側確率が $\alpha/2$ となる点** $\left(\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1), \chi^2_{\alpha/2}(n-1)\right)$




$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = \sum_{i=1}^{n} \frac{(X_i - \overline{X})^2}{\sigma^2} \tag{7.5}$$

は自由度 $n-1$ のカイ 2 乗分布に従う（定理 6.3)。自由度 $n-1$ のカイ 2 乗分布の下側および上側確率が $\alpha/2$ となる点を，それぞれ $\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)$ および $\chi^2_{\alpha/2}(n-1)$ とする（図 7.4 参照)。

このとき，

$$\mathrm{P}\left(\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1) < \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} < \chi^2_{\alpha/2}(n-1)\right) = 1-\alpha \tag{7.6}$$

が成立する。(7.6) の (　) 内の式を $\sigma^2$ について解くと，

$$\mathrm{P}\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)} < \sigma^2 < \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\right) = 1-\alpha$$

となる。このことから，信頼係数 $1-\alpha$ の信頼区間は，確率変数 $S^2$ をその実現値 $s^2$ で置き換えて，

$$\left(\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)},\ \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\right)$$

で与えられる。

**例題** 7.3　正規母集団 $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ から大きさ 20 の標本をとって標本分散を計算にしたところ，$s^2 = 17.2$ であった。信頼係数 0.95 の $\sigma^2$ の信頼区間を求めよ。

**解**　$n = 20$，$s^2 = 17.2$ である。また付表 2 より $\chi^2_{1-\alpha/2}(19) = 8.91$，$\chi^2_{\alpha/2}(19) = 32.85$ であるので，信頼係数 0.95 の信頼区間は

$$\left(19 \times \frac{17.2}{32.85},\ 19 \times \frac{17.2}{8.91}\right) = (9.95, 36.68)$$

となる。

### 7.3.4　比率の区間推定

これまでは，正規母集団の平均と分散に対する区間推定について説明してきた。本節では，2 項分布の母数に対する区間推定について簡単に説明する。ここでの区間推定は，母集団が正規分布に従わないときの母数の区間推定の 1 つの例を与えている。

第 1 章の表 1.5 から，1988 年度の年間収入が 700 万円以上の勤労者世帯は，調査された 5097 世帯の 29.2 % であることが分かる。いま，ある勤労者世帯の年間収入が 700 万円未満であるか，それ以上であるかのみに注目し，全国の勤労者世帯のうち何 % の世帯の年間収入が 700 万円以上であるかを推定したいものとしよう。すなわち，年間収入が 700 万円以上の勤労者世帯の全国の勤労者世帯数に対する比率を $p$ とすると，この $p$ の値を推定したいのである。

いま，$i$ 番目の勤労者世帯の年間収入が 700 万円未満であれば $X_i = 0$，700 万円以上であれば $X_i = 1$ となるような確率変数 $X_i$ を考えよう。このとき，$n$ 世帯を調査して，$X_i$ の合計 $\sum_{i=1}^{n} X_i$ を求めると，この合計が年間収入が 700 万円以上である世帯の数である。$R = \sum_{i=1}^{n} X_i$ とおくと，$R$ は平均 $np$，分散 $npq$（ただし，$q = 1 - p$）の 2 項分布に従う確率変数である（53 ページ参照）。したがって，$X_1, X_2, \cdots, X_n$ の標本平均

$$\hat{p} = \frac{R}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

は母数 $p$ の推定量であり，$\hat{p}$ の標本分布の平均は $p$，分散は $pq/n$ である。$\mathrm{E}[\hat{p}] = p$ であることから，$\hat{p}$ は母数 $p$ の不偏推定量であることが分かる。

2 項分布の母数 $p$ の信頼区間を求めるには，第 4 章（46 ページ）で与えられた確率関数に基づいて 2 項分布の確率を計算しなければならない。しかし，$n$ が大きいときには，この計算はきわめて煩雑である。このことから，2 項分布の母数の区間推定は，$\hat{p}$ が標本平均であるので中心極限定理が適用できるという事実に注目して，7.3.2 節の最後で述べた正規近似によって行われることが多い。

母数 $p$ の推定量 $\hat{p}$ の平均は $p$，分散は $pq/n$（ただし，$q = 1 - p$）であるので，これらの平均と分散をもつ正規分布 $\mathrm{N}(p,\ pq/n)$ が $\hat{p}$ の漸近分布である。

ここで問題となる点は，$\hat{p}$ の標準誤差 $\sqrt{pq/n}$ には，未知母数である $p$ と $q$ が含まれており，標準誤差が標本のみからは計算できないという点である。そこで，1つの簡便法として，未知母数 $p$ にその推定量 $\hat{p}$ を代入して，$\hat{p}$ の標準誤差を $\sqrt{\hat{p}\hat{q}/n}$ （ただし，$\hat{q} = 1 - \hat{p}$）で近似するという方法がとられることが多い。ここでもその方法に従い，$\mathrm{N}(p,\ \hat{p}\hat{q}/n)$ を $\hat{p}$ の漸近分布と考えることにする。

正規分布の標準化の公式から，

$$Z_n = \frac{\hat{p} - p}{\sqrt{\hat{p}\hat{q}/n}}$$

が標準正規分布に従うので，$z_{\alpha/2}$ を標準正規分布の上側確率が $\alpha/2$ となる点とすると

$$\mathrm{P}\left(\left|\frac{\hat{p} - p}{\sqrt{\hat{p}\hat{q}/n}}\right| < z_{\alpha/2}\right) = 1 - \alpha \tag{7.7}$$

が近似的に成立する。(7.7) の ( ) 内の式を $p$ について解くと

$$\mathrm{P}\left(\hat{p} - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}} < p < \hat{p} + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}\right) = 1 - \alpha$$

となるので，$p$ の信頼係数 $1 - \alpha$ の（近似的な）信頼区間は

$$\left(\hat{p} - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}},\ \ \hat{p} + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}\right)$$

で与えられる。

**例題** 7.4　第 1 章，表 1.5 から，1988 年度の年間収入が 700 万円以上の勤労者世帯の比率の信頼係数 0.95 の信頼区間を求めよ。

**解**　$n = 5097,\ \hat{p} = 0.292$ であるので，漸近分布の標準誤差は $\sqrt{\hat{p}\hat{q}/n} = 0.00636$ となる。信頼係数 0.95 に対する $z_{\alpha/2}$ の値は 1.96 であるので，

$$\hat{p} \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}} = 0.292 \pm 1.96 \times 0.00636$$

から信頼限界を計算すると，信頼区間は (0.280, 0.304) となる。

## 数学補注──最尤法

正規母集団 $\mathrm{N}(\mu,\ \sigma^2)$ からの大きさ $n$ の無作為標本の実現値を $x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n$ とする。各 $x_i$ に対する確率密度関数 $f(x_i)$ の積

$$f(x_1)f(x_2)\cdots f(x_n) \;=\; \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{n/2}}\exp\Bigl(-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2\Bigr)$$

を母数 $\mu$ と $\sigma^2$ の関数と見たとき，これを**尤度関数**（likelihood function）といい，$L(\mu, \sigma^2)$ で表す。この尤度関数を最大にする母数の値を見出して，それを母数の推定値とする，という推定法が**最尤法**である。

確率密度関数の積は，離散型確率変数の場合の同時確率に相当する。母数 $\mu$ と $\sigma^2$ の値は未知であるが，それらの真の値は，手中にある標本 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ が得られる確率（確率密度関数の積）を最も大きくするような値であったと考えるのが，最尤法の考え方である。

尤度関数の対数をとった関数を**対数尤度関数**といい，上例の場合

$$L(\mu,\ \sigma^2) \;=\; -\frac{n}{2}\log 2\pi - \frac{n}{2}\log\sigma^2 - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2$$

で与えられる。尤度関数を最大にする母数の値は，対数尤度関数を最大化することによって求められる。尤度関数を最大化するよりも，対数尤度関数を最大にする方が数学的には扱いやすい。

対数尤度関数を $\mu$ と $\sigma^2$ で偏微分してゼロと置くと，

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L(\mu,\ \sigma^2)}{\partial\mu} \;&=\; \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu) = 0\\
\frac{\partial L(\mu,\ \sigma^2)}{\partial\sigma^2} \;&=\; -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2 = 0
\end{aligned}$$

となる。上の 2 つの式を $\mu$ と $\sigma^2$ について解くと，$\mu$ と $\sigma^2$ の**最尤推定値**

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i \tag{7.8}$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\hat{\mu})^2 \tag{7.9}$$

が得られる。

(7.8)，(7.9) の解は，対数尤度関数が最大値を取るための必要条件にすぎない。これらが実際に最大値を与えることを確認することは可能であるが，ここでは省略する。

(7.8) の標本実現値 $x_i$ を標本確率変数 $X_i$ で置きかえた

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \overline{X}$$

が $\mu$ の**最尤推定量**（maximum likelihood estimator）である。このことから，標本平均は母平均の最尤推定量であることが分かる。

(7.9) の標本実現値 $x_i$ を標本確率変数 $X_i$ で置きかえ，$\hat{\mu}$ を $\overline{X}$ で置きかえた

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$$

が $\sigma^2$ の最尤推定量である。$\sigma^2$ の最尤推定量は，本文では $S^{*2}$ と書かれているが，これは不偏推定量ではない。しかし，$S^{*2}$ を若干変形した標本分散 $S^2$ は不偏推定量である。

## 練習問題

**7.1** 分散が既知の正規母集団 $\mathrm{N}(\mu, 3^2)$ から大きさ 25 の無作為標本をとり，その標本平均を計算したところ，$\overline{x} = 8.2$ であった。$\mu$ の信頼係数 0.9 および 0.95 の信頼区間を求めよ。

**7.2** 正規母集団 $\mathrm{N}(\mu,\ \sigma^2)$ から大きさ 12 の無作為標本をとり，その標本平均と標本標準偏差を計算したところ，$\overline{x} = 10.5$，$s = 3.6$ であった。$\mu$ の信頼係数 0.9 および 0.95 の信頼区間を求めよ。

**7.3** 1988 年度の勤労者世帯の年間収入の全国平均を調べるため，5097 世帯の年間収入を調査したところ，平均が 604 万円，標準偏差が 274 万円であった。全国平均の信頼係数 0.9 および 0.95 の信頼区間を求めよ。

**7.4** 第 $t$ 年の実質国民総生産を $GNP_t$ で表す。1975 年から 1987 年までの日本の GNP の対前年比 $100 \times (GNP_t - GNP_{t-1})/GNP_{t-1}$ が次の表で与えられている。

**GNP の対前年比伸び率**　(%)

| 年度 | GNP 対前年比 | 年度 | GNP 対前年比 |
|---|---|---|---|
| 1975 | 2.7 | 1982 | 3.1 |
| 1976 | 4.8 | 1983 | 3.2 |
| 1977 | 5.3 | 1984 | 5.1 |
| 1978 | 5.2 | 1985 | 4.9 |
| 1979 | 5.3 | 1986 | 2.5 |
| 1980 | 4.3 | 1987 | 4.5 |
| 1981 | 3.7 | | |

（出所）　経済企画庁『国民経済計算年報』（平成元年版）。

GNP の対前年比が正規分布に従うと仮定して，その平均の信頼係数 0.9 および 0.95 の信頼区間を求めよ。

**7.5**　正規母集団 $\mathrm{N}(\mu,\ \sigma^2)$ から大きさ 12 の標本をとって標本分布を計算したところ，$s^2 = 2.8$ であった。$\sigma^2$ の信頼係数 0.9 および 0.95 の信頼区間を求めよ。

**7.6**　問 7.4 のデータを使って，GNP の対前年比の分散の信頼係数 0.9 および 0.95 の信頼区間を求めよ。

**7.7**　あるインスタントラーメンを美味しいと思うかそうでないかを，100 人にアンケート調査したところ，67 人が美味しいと思うと答えた。 このラーメンを美味しいと思う人の比率の信頼係数 0.90 および 0.95 の信頼区間を求めよ。

**7.8**　**指数分布**（exponential distribution）といわれる分布の確率密度関数は

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\lambda}\exp\left(-\dfrac{x}{\lambda}\right) & (x \geqq 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases}$$

で与えられる。ただし，$\exp(x) = e^x$ で $\lambda$ は正のパラメータである。

(1)　$x_1, x_2, \cdots, x_n$ を指数分布型の母集団からの無作為標本の実現値とするとき，尤度関数を書け。

(2)　パラメータ $\lambda$ の最尤推定量を求めよ。

**7.9**　$X_1$，$X_2$，$X_3$ の大きさ 3 の無作為標本がある。それぞれは平均 $\mu$，分散 $\sigma^2$ の正規分布に従うものとする。母平均 $\mu$ の推定量を，以下のような 3 種類を考える。

$$\overline{X}=\frac{1}{3}X_1+\frac{1}{3}X_2+\frac{1}{3}X_3,\quad \widetilde{X}=\frac{1}{6}X_1+\frac{1}{2}X_2+\frac{1}{3}X_3,$$
$$\hat{X}=\frac{1}{2}X_1+\frac{1}{4}X_2+\frac{1}{5}X_3$$

このとき，**(1)** $\overline{X}$ の平均，**(2)** $\widetilde{X}$ の平均，**(3)** $\hat{X}$ の平均，**(4)** $\overline{X}$ の分散，**(5)** $\widetilde{X}$ の分散をそれぞれ求めよ。

**7.10**　問 7.9 で扱った $\overline{X}$，$\widetilde{X}$，$\hat{X}$ について，以下の問に，○か×で答えよ（正しければ○，誤りなら×を記入せよ）。

**(1)** $\overline{X}$ は $\mu$ の不偏推定量である。
**(2)** $\widetilde{X}$ は $\mu$ の不偏推定量である。
**(3)** $\hat{X}$ は $\mu$ の不偏推定量である。
**(4)** $\widetilde{X}$ は $\overline{X}$ より有効である。
**(5)** $\mu$ の不偏推定量は無数に考えることができる。
**(6)** $\mu$ の有効推定量は 1 つしかない。

**7.11**　$X_1, X_2, \cdots, X_n$ の大きさ $n$ の無作為標本がある。それぞれは平均 $\mu$，分散 $\sigma^2$ の正規分布に従うものとする。母分散 $\sigma^2$ の推定量を $S^{*2}$ と $S^2$ の 2 通り考える。

$$S^{*2}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2,\qquad S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$$

以下の問に，○か×で答えよ（正しければ○，誤りなら×を記入せよ）。

**(1)** $S^{*2}$ は $\sigma^2$ の不偏推定量である。
**(2)** $S^2$ は $\sigma^2$ の不偏推定量である。

**7.12**　平均 $\mu$，分散 $3^2$ の正規母集団から大きさ 25 の無作為標本をとって，標本平均を計算したところ，$\overline{x}=8.05$ であった。

**(1)** 母平均 $\mu$ の信頼区間を求めるには，どの分布表を使えばよいか。$\mathrm{N}(0,1)$，$\mathrm{N}(\mu,\sigma^2)$，$t(15)$，$t(19)$，$\chi^2(6)$，$\chi^2(16)$ のような分布の記号で答えよ。
**(2)** 信頼係数 0.99 の母平均 $\mu$ の信頼区間を求めよ。

**7.13**　平均 $\mu$，分散 $\sigma^2$ の正規母集団から大きさ 12 の無作為標本をとって，標本平均を計算したところ，$\overline{x}=12.6$，$s^2=9$ であった。

**(1)** 母平均 $\mu$ の信頼区間を求めるには，どの分布表を使えばよいか。
**(2)** 信頼係数 0.90 の母平均 $\mu$ の信頼区間を求めよ。

**7.14**　平均 $\mu$，分散 $\sigma^2$ の正規母集団から大きさ 400 の無作為標本をとって，標本平均を計算したところ，$\overline{x} = 2.56$，$s^2 = 4^2$ であった。

**(1)**　母平均 $\mu$ の信頼区間を求めるには，どの分布表を使えばよいか。

**(2)**　信頼係数 0.95 の母平均 $\mu$ の信頼区間を求めよ。

**7.15**　平均 $\mu$，分散 $\sigma^2$ の正規母集団から大きさ 16 の無作為標本をとって，標本分散を計算したところ，$s^2 = 1.44$ であった。

**(1)**　母分散 $\sigma^2$ の信頼区間を求めるには，どの分布表を使えばよいか。

**(2)**　信頼係数 0.90 の母分散 $\sigma^2$ の信頼区間を求めよ。

**7.16**　1991 年〜94 年の日本の実質国内総支出の成長率は，3.9，1.1，0.1，0.5 だった（単位は%）。この実質国内総支出の成長率は，それぞれ独立に，平均 $\mu$，分散 $\sigma^2$ の正規分布に従うと仮定する。

**(1)**　母平均 $\mu$ の信頼区間を求めるには，どの分布表を使えばよいか。

**(2)**　信頼係数 0.90 の母平均 $\mu$ の信頼区間を求めよ。

**7.17**　1997 年度のイチローは，536 打数のうち，185 本のヒットを打った。それぞれの打数は，独立であると仮定する（前打席の三振は，後に尾を引かないものとする）。このとき，イチローの打率（＝ヒット数÷打数）の信頼区間を信頼係数 0.95 で求めたい。

**(1)**　イチローの打率の信頼区間を求めるには，どの分布表を使えばよいか。

**(2)**　この信頼区間の上限を求めよ。

**(3)**　この信頼区間の下限を求めよ。

**7.18**　平均 $\mu$，分散 $\sigma^2$ の母集団からとった大きさ 2 の無作為標本を $X_1, X_2$ とし，$Y = aX_1 + bX_2$ とする。

**(1)**　$Y$ が $\mu$ の不偏推定量となるためには，$a$，$b$ はどのような条件を満たさなければならないか。

**(2)**　**(1)** の条件のもとで $Y$ の分散が最小となるように $a$，$b$ の値を定めよ。

**7.19**　ある工場で作られた乾電池の寿命は標準偏差 5 分の正規分布に従うという。49 個の乾電池の平均寿命が 61.2 分であるとき，母平均の 90 % および 95 % の信頼区間を求めよ。

**7.20**　正規母集団 $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ から 15 個の無作為標本をとり標本（不偏）分散

を計算したところ，$s^2 = 3.6$ であった。$\sigma^2$ の 90 % および 95 % の信頼区間を求めよ。

**7.21**　正規母集団 $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ から 16 個の無作為標本をとり標本平均と標本（不偏）分散を計算したところ，$\overline{x} = 10.2$, $s^2 = 8.4$ であった。$\mu$ の 90 % および 95 % の信頼区間を求めよ。

**7.22**　あるテレビ番組の視聴率を調査するため 300 人にアンケートしたところ，45 人がその番組を見たという。この番組の視聴率の 90 % および 95 % 信頼区間を求めよ。

第 8 章

# 仮説検定

抽出された標本をもとにして母集団に関する知識を得ることが統計的推測の目的であるが，その推測の方法として，前章で述べた推定と，本章で述べる仮説検定の 2 つのやり方がある。推定では，標本に含まれている情報から母集団の特性を表す母数（パラメータ）を 1 つの値または区間に対応づけることが問題であった。それに対して仮説検定では，母集団の特性についてわれわれがあらかじめもっている知識，判断等を標本に基づいて検証することを目的とする。いいかえると，母集団の特性についてわれわれが先験的に設ける仮説が経験的に観察されるデータと矛盾しないかどうかを調べるのである。

例えば，2001 年の勤労者世帯の年間収入の母平均が 637 万円であったとしよう。『家計調査年報』には，全国を 10 地域に分けて，地域別の年間収入の情報も掲載されている。このような地域別の収入の標本平均値をもとにして，いろいろな仮説を検定することが可能である。例えば，近畿地方の収入に注目して「それは全国平均に等しい」という仮説や，首都圏に比べて経済の地盤沈下が起きているといわれて久しいので,「近畿地方の年間収入は関東地方に比べて少ない」という仮説が立てられるかもしれない。このような仮説を，標本から得られる情報を用いてできるだけ体系的に検証しようというのが，仮説検定の考え方である。

上の例は，大ざっぱな常識に基づいて立てた仮説であるが，経済や経営などの社会現象に対してはある程度体系的な先験的知識や情報が数多くあり，それらを実際の標本（データ）で検証することはひんぱんになされる。経済理論の妥当性を検証するという研究上の関心だけではなく，政府の経済政策や企業の経営戦略を立案するときにも，ある手段がもたらすと考えられる効果を標本（データ）を通じて検証しておくことは，実際の意思決定を下す際に非常に重要なことである。このように仮説検定の考え方には汎用性があるが，本章ではその手続きを概観する。

## 8.1　仮説検定の考え方

本節では，仮説検定の考え方の基礎を会得するため，まず次の例題を考える。

**例題** 8.1　ある型の乗用車の燃費は，従来車では平均 $17\,km/\ell$，標準偏差 $2\,km/\ell$ の正規分布に従うという。改良車が開発され，16 台の走行テストを行ったところ，平均は $18\,km/\ell$ であった。改良車の燃費は従来車よりも良くなったといえるか。ただし，改良車の標準偏差は，従来車と同じ $2\,km/\ell$ であるものとする。

**解**　この例題で，改良車の燃費を表す確率変数を $X$ とすると，$X$ は平均 $\mu$，分散 $2^2$ の正規分布に従う。したがって，母集団は $\mathrm{N}(\mu, 2^2)$ であると考えられる。第 $i$ 番目の改良車の燃費を表す確率変数（無作為標本）を $X_i$ とすると，$X_1$，$X_2$，$\cdots$，$X_{16} \sim \mathrm{N}(\mu,\ 2^2)$ となる。改良車の走行テストの結果が，平均 $18\,km/\ell$ であるが，このことは，実際に改良車を走らせて，$X_1$，$X_2$，$\cdots$，$X_{16}$ の実現値の平均を計算すると $18\,km/\ell$ であったことを意味する。この $18\,km/\ell$ という結果は，従来車の平均 $17\,km/\ell$ よりも大きいが，これはこの母集団（改良車の燃費の分布）の平均 $\mu$ が従来車の平均 $17\,km/\ell$ よりも真に大きくなったため生じたのか，あるいは実際には従来車の平均 $17\,km/\ell$ と変わらないが好条件が重なってたまたま生じたのか，を統計的に判断したいとき仮説検定が用いられる。

仮説検定では，まず**帰無仮説**（null hypothesis）と**対立仮説**（alternative hypothesis）を立てる。従来車の燃費が $17\,km/\ell$ であるので，改良車の燃費が従来車と同じならば $\mu = 17$ であり，従来車よりも良くなっていれば $\mu > 17$ である。従来車よりも悪くなっていれば $\mu < 17$ であるが，改良車の燃費が従来車よりも悪いということはないように思われる。事実，走行試験の結果は $18\,km/\ell$ であるので，$17\,km/\ell$ より大きかった。そこで，この問題では $\mu < 17$ の場合は考える必要がないと思われるので，次のように帰無仮説と対立仮説を立てる。

帰無仮説　$H_0 : \mu = 17$　　（改良車の燃費は従来車と同じ）

対立仮説　$H_1 : \mu > 17$　　（改良車の燃費は従来車よりも良くなった）

一般に，仮説検定では，捨てたい仮説を帰無仮説にすることが多い。仮説検定を行って仮説を捨てるとき，帰無仮説を**棄却する**（reject）といい，捨てずに採用することを**採択する**（accept）という。この問題では，帰無仮説が棄却されて対立仮説が採択されたとき，燃費が向上したといえるので，棄却したい仮説は $\mu = 17$ である。棄却したいということは，無に帰したいという意味であるので，棄却したい仮説を帰無仮説というのである。

いま，$X_i$ を走行テストで使われる各車の燃費を表す確率変数（無作為標本）とする。帰無仮説のもとでは $\mu = 17$ であり，分散は既知で $2^2$ であるので，$X_1$，$X_2$，$\cdots$，$X_{16} \sim \mathrm{N}(17,\, 2^2)$ である。よって，標本平均の分布は

$$\overline{X} = \frac{1}{16}\sum_{i=1}^{16} X_i \sim \mathrm{N}\Big(17, \frac{2^2}{16}\Big) \tag{8.1}$$

となる。実際の走行試験の結果が 18 $km/\ell$ （すなわち，$\overline{X}$ の実現値が 18）であるが，(8.1) で与えられる確率変数としての $\overline{X}$ が 18 よりも大きくなる確率を計算することによって，帰無仮説が正しいとき，18 という実現値がどの程度起こりやすいか（起こりにくいか）を知ることができる。(8.1) から，標準化して確率を計算すると

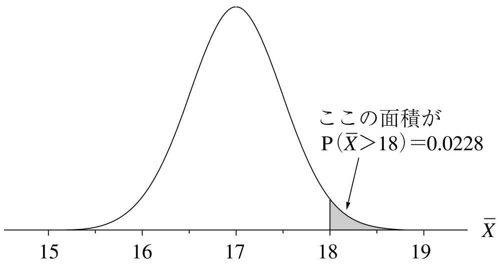
$$\mathrm{P}(\overline{X} \geqq 18) = \mathrm{P}\Big(\frac{\overline{X}-17}{2/\sqrt{16}} > \frac{18-17}{2/\sqrt{16}}\Big) = \mathrm{P}(Z \geqq 2) = 0.0228$$

が得られる。この確率を $p$ 値という。$p$ 値が 0.0228 ということは，$H_0 : \mu = 17$ が正しいとすれば，改良車 16 台の走行テストを 100 回繰り返したとき，$\overline{X}$ の実現値が 18 以上になるのは 2 回程度であることを意味する。走行テストの結果が $\overline{x} = 18$ のとき，$H_0 : \mu = 17$ が正しくて，100 回中 2 回程度しか起きないような珍しい事象がたまたま起こったと解釈するよりも，対立仮説 $H_1 : \mu > 17$ が正しくて $\overline{x} = 18$ が得られたと解釈する方が自然なように思われる。例えば，対立仮説が正しくて，$\mu = 17.5$ であったとすると，$\overline{X} \geqq 18$ となる確率は

$$\mathrm{P}(\overline{X} \geqq 18) = \mathrm{P}\Big(\frac{\overline{X}-17.5}{2/\sqrt{16}} > \frac{18-17.5}{2/\sqrt{16}}\Big) = \mathrm{P}(Z \geqq 1) = 0.1587$$

となる。このことは，対立仮説 $H_1 : \mu = 17.5$ が正しければ，改良車 16 台の走行テストを 100 回繰り返したとき，$\overline{x}$ が 18 以上になるのは 16 回程度であることを意味し，十分起こりうると考えられる。ただし，例え対立仮説が正しく

**図** 8.1　P($\overline{X} > 18$) **となる領域**




ても，真の $\mu$ の値が 17.1 のように帰無仮説での $\mu$ の値に近ければ，$\overline{X} > 18$ となる確率は 0.1587 よりも小さくなるが，0.0228 よりは大きい。

検定では，$\overline{X} > 18$ となる確率（すなわち，$p$ 値）がある値よりも小さければ，帰無仮説 $H_0$ は正しいという可能性は小さく，対立仮説 $H_1$ が正しいと判断される。この判断の基準となる確率の値を**有意水準**といい，有意水準は，通常 $\alpha$ で表される。有意水準を決める理論的な根拠はないが，慣例として，$\alpha =$ 0.01 (1 %), 0.05 (5 %), 0.10 (10 %) が使われることが多い。$\alpha = 0.05$ ということは，帰無仮説のもとで起こる事象が，100 回の実験で 5 回くらいしか起こらない場合，珍しい事象だと判断して帰無仮説を棄却する（対立仮説を採択する）ことを意味する。すなわち，有意水準は，帰無仮説のもとで起こる事象がどの程度珍しければ帰無仮説を棄却するのかを判断する基準である。有意水準 0.01 で帰無仮説が棄却される場合，100 回の実験で 5 回ではなく 1 回くらいしか起こらない珍しい事象が起こったことになるので，有意水準 0.05 で棄却される場合よりも帰無仮説は強く棄却されることになる。帰無仮説が有意水準 0.05 で棄却されるとき「有意である」，0.01 で棄却されるとき「高度に有意である」と表現されることもある。

例えば，例題 8.1 で，有意水準を 0.05 ($\alpha = 0.05$) とすると，帰無仮説が正しいとき，$\mathrm{P}(\overline{X} \geqq 18) = 0.0228$ なので，有意水準の 0.05 よりも小さい。よって，帰無仮説は棄却される（対立仮説が採択される）。しかし，有意水準を 0.01 とすると，$\mathrm{P}(\overline{X} \geqq 18) = 0.0228$ は 0.01 よりも大きいので帰無仮説は採択されることになる（図 8.1 参照）。このことから，有意水準は検定の結果を見てから決めるのではなく，検定を行う前に決めるべきだといわれている。

## 8.2　正規母集団の平均の検定：母分散が既知の場合

8.1 節で，検定の基本的な考え方を示したが，本節では母集団が正規分布であり，母分散 $\sigma^2$ が既知であるときの母平均 $\mu$ の検定について説明する。母分散が未知の場合については，後ほど説明する。母分散が既知の場合は，8.1 節での説明と重複するところがあるが，ここでは最初から体系的に説明することにする。

仮説検定を行うには，目的に応じて帰無仮説と対立仮説を立てる。ここでは，母平均 $\mu$ が特定の値（例えば，$\mu_0$）に等しいか否かを検定したいので，帰無仮説を $H_0 : \mu = \mu_0$ とする。対立仮説として次の 3 つのものが考えられ，対立仮説に応じて**右側検定**，**左側検定**，**両側検定**という。

$$H_1 : \mu > \mu_0 \qquad \text{（右側検定）}$$
$$H_1 : \mu < \mu_0 \qquad \text{（左側検定）}$$
$$H_1 : \mu \fallingdotseq \mu_0 \qquad \text{（両側検定）}$$

$\mu$ に関して，$\mu_0$ より大きいか小さいかの情報がないときには，両側検定が用いられる。例題 8.1 のように何らかの情報があって，帰無仮説が正しくないときには $\mu$ が $\mu_0$ より大きい（小さい）ことが分かっているとき，右側検定（左側検定）が用いられる。両側検定に対して，右側検定と左側検定を**片側検定**という。また，$\mu = \mu_0$ のようにパラメータの値が 1 点だけの仮説を**単純仮説**，$\mu > \mu_0$ のようにパラメータの値が 1 点だけではない仮説を**複合仮説**という。

8.1 節では，$\mathrm{P}(\overline{X} > 18)$ の値を直接計算して，有意水準よりも小さければ帰無仮説を棄却する，という方法がとられたが，通常は次のようにして仮説検定を行う。正規母集団 $\mathrm{N}(\mu,\ \sigma^2)$ から抽出された大きさ $n$ の無作為標本を $X_1,\ X_2,\ \cdots,\ X_n$ とすると

$$\overline{X} \sim \mathrm{N}\Big(\mu,\ \frac{\sigma^2}{n}\Big)$$

となるので，標準化すると

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim \mathrm{N}(0,\ 1)$$

となる。帰無仮説は $H_0 : \mu = \mu_0$ であるので，帰無仮説が正しいとき

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \sim \mathrm{N}(0,\ 1)$$

が成立する。

まず，対立仮説が $H_1 : \mu > \mu_0$ の場合を考えよう。実現値が取られる前は，$Z$ は確率変数であり，帰無仮説が正しければ標準正規分布に従うので，$Z$ の平均は 0 である ($\mathrm{E}[Z] = 0$)。しかし，対立仮説が正しいとき，$\mu > \mu_0$ であるので，$Z$ の平均は

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}[Z] &= \mathrm{E}\Big[\frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\Big] = \mathrm{E}\Big[\frac{\overline{X} - \mu + \mu - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\Big] \\
&= \mathrm{E}\Big[\frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}\Big] + \frac{\mu - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{\mathrm{E}[\overline{X}] - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} + \frac{\mu - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \\
&= \frac{\mu - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} > 0 \qquad \text{（ただし，}\mathrm{E}[\overline{X}] = \mu,\ \mu > \mu_0\text{）} \qquad (8.2)
\end{aligned}$$

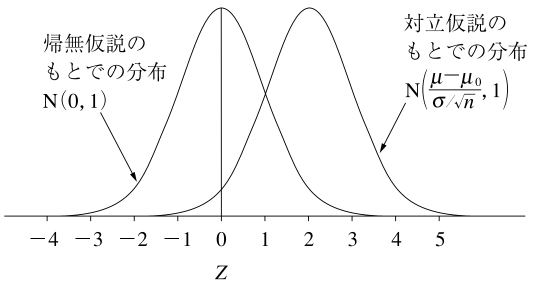
となる。したがって，$Z$ は，帰無仮説が正しくないとき，平均が正で分散が 1 の正規分布となるので，帰無仮説が正しいときに比べて，$Z$ の実現値は大きくなりやすい（図 8.2 参照)。このことから，$Z$ の実現値がある程度大きくなれば，帰無仮説を棄却することが考えられる。では，どのくらい大きければ帰無仮説を棄却すれば良いのであろうか。

帰無仮説が正しいとき，$Z$ は標準正規分布に従うので

$$\mathrm{P}(Z > z_\alpha) = \mathrm{P}\Big(\frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} > z_\alpha\Big) = \alpha \qquad (8.3)$$

を満たす $z_\alpha$ の値を標準正規分布表から求めることができる（この $z_\alpha$ は標準正規分布の上側 100 $\alpha$ パーセント点である)。例えば，$\alpha = 0.05$ のとき，$z_{0.05} = 1.645$ である。この $\alpha = 0.05$ は有意水準を表しており，1.645 よりも右側の $z$ 軸の部分に $Z$ の実現値がくるのは，100 回の実験で 5 回くらいしか起こらない。このことから，帰無仮説が正しいとき

**図** 8.2　**帰無仮説と対立仮説のもとでの** $Z$ **の分布**




$$Z = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma}$$

の実現値が 1.645 よりも大きかったとすると，100 回の実験で 5 回くらいしか起こらない珍しいことが起こったことになるので，帰無仮説は正しくないと判断される。すなわち，$Z$ の実現値が 1.645 よりも大きければ，帰無仮説は有意水準 0.05 で棄却される。$Z = (\overline{X} - \mu)/(\sigma/\sqrt{n})$ の実現値が 1.645 よりも大きければ帰無仮説は棄却されるので，1.645 よりも右側の $z$ 軸の部分を**棄却域**（critical region），左側の $z$ 軸の部分を**採択域**（acceptance region）といい，1.645 を**棄却点**（critical value）あるいは臨界値という。また，$Z = (\overline{X} - \mu)/(\sigma/\sqrt{n})$ を**検定統計量**（test statistic），その実現値を**検定統計値**という。

一般に，有意水準が $\alpha$ のとき，棄却点は (8.3) を満たす $z_\alpha$ で与えられ，棄却域は $z_\alpha$ の右側の $z$ 軸の部分であり，$\{Z|Z > z_\alpha\}$ と表される。また，採択域は $z_\alpha$ の左側の $z$ 軸の部分である ($\{Z|Z \leqq z_\alpha\}$)。対立仮説が $H_1 : \mu > \mu_0$ のとき，棄却域が棄却点の右側にくるので，右側検定という。

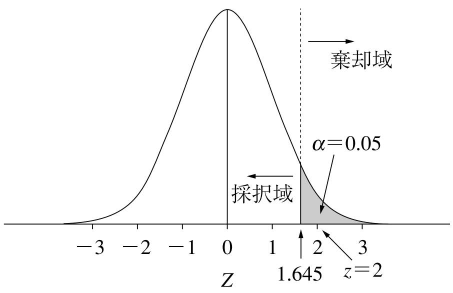
例題 8.1 の場合，検定統計値は

$$z = \frac{\overline{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{18 - 17}{2/\sqrt{16}} = 2$$

となる。有意水準を $\alpha = 0.05$ とすると，棄却点は $z_\alpha = 1.645$ であり，検定統計値の方が棄却点より大きいので，検定統計値は棄却域に入る（図 8.3 参照）。よって，帰無仮説は有意水準 0.05 で棄却される。

次に，対立仮説が $H_1 : \mu < \mu_0$ の場合を考えよう。(8.2) と同様にして，対立仮説が正しいとき，$\mathrm{E}[Z] < 0$ であることが分かる。よって，帰無仮説が正し

**図** 8.3　**検定の棄却域**




くないとき，$Z$ は平均が負で分散が 1 の正規分布となるので，帰無仮説が正しいときに比べて，$Z$ の実現値は小さくなりやすい。このことから，$Z$ の実現値がある程度小さくなれば，帰無仮説を棄却すればよい。

帰無仮説が正しいとき，$Z$ は標準正規分布に従い，標準正規分布は原点に対して左右対称であるので

$$\mathrm{P}(Z < -z_\alpha) = \mathrm{P}\Big(\frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} < -z_\alpha\Big) = \mathrm{P}\Big(\frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} > z_\alpha\Big) = \alpha$$

を満たす $z_\alpha$ の値を標準正規分布表から求めることができる。よって，右側検定のときと同様にして，有意水準 $\alpha$ の検定の棄却点は $-z_\alpha$ であり，棄却域は $\{Z|Z < -z_\alpha\}$ となる。また，採択域は $\{Z|Z \geqq -z_\alpha\}$ である。対立仮説が $H_1 : \mu < \mu_0$ のとき，棄却域が棄却点の左側にくるので，左側検定という。正規分布の母平均の検定では，有意水準が等しければ，右側検定の棄却域と左側検定の棄却点は原点に関して左右対称になっている。

対立仮説が $H_1 : \mu \fallingdotseq \mu_0$ で帰無仮説が正しくないとき，$Z$ の実現値は，帰無仮説が正しいときに比べて，大きくなりやすいのか，あるいは小さくなりやすのか分からない。このことから，両側検定では，$Z$ の実現値がある程度大きくなるか，あるいは小さくなれば，帰無仮説を棄却する。

帰無仮説が正しいとき，$Z$ は標準正規分布に従うので，

$$\mathrm{P}(|Z| > z_{\alpha/2}) = \mathrm{P}\Big(\Big|\frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\Big| > z_{\alpha/2}\Big) = \alpha \tag{8.4}$$

を満たす $z_{\alpha/2}$ の値を標準正規分布表から求めることができる。例えば，$\alpha = 0.05$ のとき，$z_{\alpha/2} = 1.96$ である。(8.4) の (　) 内の絶対値を外すと

$$\begin{aligned} &\mathrm{P}(Z < -z_{\alpha/2},\ Z > z_{\alpha/2}) \\ &\quad = \mathrm{P}\Big(\frac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} < -z_{\alpha/2},\ \frac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} > z_{\alpha/2}\Big) = \alpha \end{aligned} \tag{8.5}$$

となる。このことから，両側検定の棄却域は $\{Z|Z < -z_{\alpha/2},\ Z > z_{\alpha/2}\}$ である。右（左）側検定では，帰無仮説が正しくないときに，検定統計値が大きく（小さく）なりやすいので，右（左）端に棄却域を設定する。しかし，両側検定では，帰無仮説が正しくないとき，検定統計値が大きくなりやすいのか，あるいは小さくなりやすいのか分からないので，左右両端に有意水準を半分ずつ割り当てて棄却域を設定するのである。このことから，両側検定の棄却点は $z_\alpha$ ではなく，$\pm z_{\alpha/2}$ となる。

**例題** 8.2　ある乾電池の電圧が 1.5 $V$ から 0.8 $V$ に下がるまでの時間を調べるため，49 個の乾電池で実験したところ，平均が $\overline{x} = 68.4$ 分であった。この乾電池の放電特性が，分散が既知で $\sigma^2 = 14^2$ の正規分布 $\mathrm{N}(\mu, 14^2)$ に従うものとして，帰無仮説 $H_0 : \mu = 72$ を対立仮説 $H_1 : \mu \fallingdotseq 72$ に対して有意水準 0.05 で検定せよ。

**解**　$\alpha = 0.05$ であり，また両側検定であるので，標準正規分布表から棄却域は $\{Z < -1.96,\ Z > 1.96\}$ となる。また，検定統計量の値は

$$z = \frac{\overline{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{68.4-72}{14/\sqrt{49}} = -1.8$$

よって，検定統計量の値が採択域に入るので，帰無仮説は有意水準 0.05 で採択される。

ここまでは，棄却域を標準正規分布に基づいて設定してきたが，$\overline{X}$ の分布に基づいて表すもう 1 つの方法がある。まず，対立仮説が $H_1 : \mu > \mu_0$ の場合を考えよう。

$$\mathrm{P}\Big(\frac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} > z_\alpha\Big) = \alpha$$

から

$$\mathrm{P}\Big(\overline{X} > \mu_0 + z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\Big) = \alpha$$

となり，棄却域を $\overline{X}$ で表すと

$$\overline{X} > \mu_0 + z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

となる。同様にして，対立仮説が $H_1 : \mu < \mu_0$ のときの棄却域は

$$\overline{X} < \mu_0 - z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

となる。

例題 8.1 の場合，$\mu_0 = 17$，$\sigma = 2$，$n = 16$ であり，有意水準を $\alpha = 0.05$ とすると $z_\alpha = 1.645$ であるので，$\overline{X}$ で表した棄却域は

$$\overline{X} > \mu_0 + z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 17 + 1.645 \times \frac{2}{\sqrt{16}} = 17.82$$

である。$\overline{X}$ の実現値は $\overline{x} = 18$ であるので棄却域に入る。よって，帰無仮説は有意水準 0.05 で棄却される。

対立仮説が $H_1 : \mu \fallingdotseq \mu_0$ のときは，(8.5) から棄却域は次のように表される。

$$\left\{ \overline{X} \middle| \overline{X} < \mu_0 - z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \overline{X} > \mu_0 + z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right\}$$

例題 8.2 の場合，$\mu_0 = 72$，$\sigma = 14$，$n = 49$ であり，有意水準は $\alpha = 0.05$ であるので，$z_{\alpha/2} = 1.96$ である。よって，$\overline{X}$ で表した棄却域は

$$\overline{X} < \mu_0 - z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 72 - 1.96 \times \frac{14}{\sqrt{49}} = 68.08$$

$$\overline{X} > \mu_0 + z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 72 + 1.96 \times \frac{14}{\sqrt{49}} = 75.92$$

となる。$\overline{X}$ の実現値は $\overline{x} = 68.4$ であるので棄却域に入らない。よって，帰無仮説は有意水準 0.05 で採択される。

これまで述べてきた検定の手順をまとめると，次のようになる。

**(1)** 帰無仮説と対立仮説を立てる。

**(2)** 有意水準を決めて，対立仮説に応じた棄却域を決める。

**(3)** 検定統計量の実現値が棄却域に入れば帰無仮説を棄却し，入らなければ帰無仮説を採択する。

**表** 8.1　2 **種類の誤り**

| | | 行動 | |
|---|---|---|---|
| | | $H_0$ を採択 | $H_0$ を棄却 |
| 母集団の可能な状態 | $H_0$ が真 | 正しい判定 | 第 1 種の過誤 ($\alpha$) |
| | $H_0$ が偽 | 第 2 種の過誤 ($\beta$) | 正しい判定 |

## 8.3　2 種類の過誤

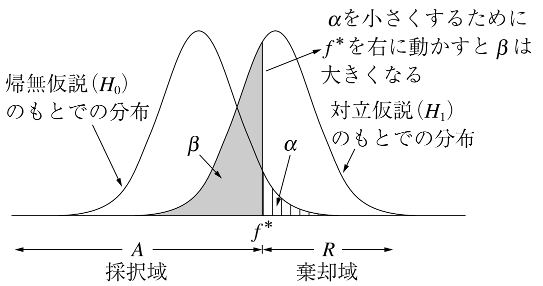
仮説検定を行うとき，分析者は帰無仮説が正しいか正しくないかを知っている訳ではない。というより，知らないから仮説検定を行うのである。仮説検定は一種の決定（行動）であり，帰無仮説が正しいか否かには関係なく，検定統計値が棄却域に入れば帰無仮説を棄却し，入らなければ採択するという行動をとる。帰無仮説が正しくないとき，帰無仮説を棄却すれば正しい行動であるが，帰無仮説が正しいのに帰無仮説を棄却すれば誤った行動である。この誤りを**第 1 種の過誤**（type I error）という。例えば，有意水準が 0.05 のとき，帰無仮説が正しくても，検定統計値は 100 回の実験で 5 回くらいは棄却域に入るので，帰無仮説は 100 回の実験で 5 回くらいは誤って棄却される。すなわち，有意水準 $\alpha$ は，第 1 種の過誤を犯す確率を表しているのである。このことから，第 1 種の過誤を**アルファ・エラー**と呼ぶことがある。

逆に，帰無仮説が正しくないのに帰無仮説を採択すれば，これも誤った行動である。この誤りを**第 2 種の過誤**（type II error）という。第 2 種の過誤を犯す確率を $\beta$ で表し，第 2 種の過誤を**ベータ・エラー**ともいう（表 8.1 および 図 8.4 参照)。第 2 種の過誤を犯す確率が $\beta$ であるので，第 2 種の過誤を犯さない確率，すなわち帰無仮説が正しくないとき帰無仮説を棄却する確率は $1-\beta$ で与えられ，この確率 $1-\beta$ を**検定力**（power）あるいは**検出力**という。

この検定力を分かりやすく説明するために，次の例題を考えよう。

**例題** 8.3　64 個の標本が $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ からとられたものであり，$\sigma = 16$ が分かっているものとする。標本平均を計算したところ $\overline{x} = 82$ であった。このとき，帰無仮説と対立仮説をそれぞれ，$H_0 : \mu = 78$，$H_1 : \mu = 80$ として有意水

**図 8.4　第 1 種の誤りの確率 ($\alpha$) と第 2 種の誤りの確率 ($\beta$)**




準が 0.05 であるときの検定力を求めよ。

**解**　対立仮説は，一般的には複合事象であるが，ここでは簡略化のため単純事象にしている。対立仮説で与えられる $\mu$ の値 $(\mu = 80)$ の方が，帰無仮説で与えられる $\mu$ の値 $(\mu = 78)$ よりも大きいので，ここでの検定は右側検定となる。なお，検定力を計算する場合には，棄却域を $\overline{X}$ で表した方が分かりやすい。

検定力を求める手順は次のとおりである。

**(1)**　帰無仮説を正しいものとして，$\overline{X}$ による棄却域を設定する。

**(2)**　**(1)** で設定された棄却域に $\overline{X}$ が入る確率を，対立仮説が正しいものとして計算する。この確率が検定力である。

上の手順に従って，まず，$\overline{X}$ による棄却域を求めると

$$\overline{X} > \mu_0 + z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 78 + 1.645 \times \frac{16}{\sqrt{64}} = 81.29$$

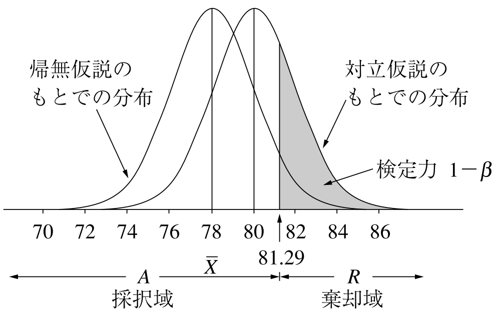
となる。

次に，検定力は対立仮説が正しいときに帰無仮説を棄却する確率であるので，検定力は次の式で表される。

$$1 - \beta = \mathrm{P}(\overline{X} > 81.29)$$

ここで，$\overline{X}$ の分布は，帰無仮説 $(\mu = 78)$ ではなく，対立仮説 $(\mu = 80)$ が正しいと仮定しているので，$\overline{X} \sim \mathrm{N}(78,\, 16^2/64)$ ではなく，$\overline{X} \sim \mathrm{N}(80,\, 16^2/64)$

**図 8.5　帰無仮説と対立仮説のもとでの $\overline{X}$ の分布**




であることに注意（図 8.5 参照）。

標準化して確率を計算すると

$$1-\beta\,=\,\mathrm{P}\Big(\frac{\overline{X}-80}{16/\sqrt{64}}>\frac{81.29-80}{16/\sqrt{64}}\Big)=\mathrm{P}(Z>0.645)=0.26$$

となる。よって，検定力は 0.26 である。第 2 種の過誤を犯す確率は，1 から検定力を引いたものであるので，$\beta=1-0.26=0.74$ である。

次に，有意水準が 0.01 のとき，検定力がどうなるかを見てみよう。有意水準が 0.01 のとき，$\overline{X}$ による棄却域は

$$\overline{X}\,>\,\mu_0+z_\alpha\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=78+2.326\times\frac{16}{\sqrt{64}}=82.652$$

となる。したがって，検定力は

$$\begin{aligned}1-\beta\,&=\,\mathrm{P}(\overline{X}>82.652)=\mathrm{P}\Big(\frac{\overline{X}-80}{16/\sqrt{64}}>\frac{82.652-80}{16/\sqrt{64}}\Big)\\&=\,\mathrm{P}(Z>1.33)=0.0918\end{aligned}$$

となり，第 2 種の過誤を犯す確率は $\beta=0.9082$ となる。このことは，第 1 種の過誤を犯す確率（有意水準）を 0.05 から 0.01 に下げると，第 2 種の過誤を犯す確率が 0.74 から 0.9082 まで上がることを示している。すなわち，第 1 種の過誤を犯す確率と第 2 種の過誤を犯す確率の間には，トレード・オフの関係があり，第 1 種の過誤を犯す確率を小さくして，同時に第 2 種の過誤を犯す確率も小さくすることはできない。ネイマン・ピアソンの考え方は，第 1 種の過

誤の確率（有意水準）を一定値（例えば，0.05, 0.01）に固定して，第 2 種の過誤をできるだけ小さくする（検定力をできるだけ大きくする）ような検定を選ぶというものである（この基準を検定における **ネイマン・ピアソンの検定基準** という)。右（左）側検定では，右（左）端に棄却域を設定すれば，上記のような検定ができる。両側検定では，上記の基準を満足する検定はできないが，両端に棄却域を設定すればほぼ満足のいく検定ができるといわれている。

ここでは，対立仮説を単純仮説で表したが，通常は対立仮説は複合仮説である。対立仮説が複合仮説であるとき，例えば，例題 8.3 で $H_1 : \mu > 78$ であるとき，78 より大きいすべての $\mu$ の値に対して，例題 8.3 と同様にして検定力を計算することができる。$\mu$ の真値は未知であるが，$\mu$ の真値が帰無仮説の値 78 と大きく離れていて 100 であったとすると，検定力は

$$\begin{aligned} 1-\beta &= \mathrm{P}(\overline{X} > 82.652) = \mathrm{P}\Big(\frac{\overline{X}-100}{16/\sqrt{64}} > \frac{82.652-100}{16/\sqrt{64}}\Big) \\ &= \mathrm{P}(Z > -8.674) \fallingdotseq 1 \end{aligned}$$

となり，ほとんど確実に帰無仮説を棄却する。これが，$H_1 : \mu > \mu_0$ のとき，棄却域を右端に設定する理由である。

## 8.4　正規母集団の平均の検定：母分散が未知の場合

これまで述べてきた標準正規分布を用いる仮説検定の方法は，母分散 $\sigma^2$ が既知であるといういささか非現実的な状況を前提にしていた。ここでは，母集団が正確にまたは近似的に正規分布に従うという条件はそのままで，$\sigma^2$ が未知のときの母平均に関する検定手続きを考えよう。

正規母集団 $\mathrm{N}(\mu,\ \sigma^2)$ からの大きさ $n$ の無作為標本を $X_1,\ X_2,\ \cdots,\ X_n$，その標本平均を $\overline{X}$ とすると

$$Z = \frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim \mathrm{N}(0,\ 1) \tag{8.6}$$

が成り立つ。$\sigma$ が既知であれば，これまで述べてきたように (8.6) に基づいて検定が行われる。しかし，ここでは $\sigma$ が未知であるので，その推定量

$$S = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}$$

で置きかえると，定理 6.5 より

$$T = \frac{\overline{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1) \tag{8.7}$$

となる。ただし，$t(n-1)$ は自由度 $n-1$ の $t$ 分布を表している。この (8.7) に基づいて，母分散が未知のときの母平均の検定が行われる。

まず，帰無仮説が $H_0:\ \mu = \mu_0$，対立仮説が $H_1:\ \mu > \mu_0$ のときを考えよう。帰無仮説 $H_0 : \mu = \mu_0$ が正しいとき

$$\mathrm{P}(T > t_\alpha(n-1)) = \mathrm{P}\Big(\frac{\overline{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} > t_\alpha(n-1)\Big) = \alpha \tag{8.8}$$

が成立する。ただし，$t_\alpha(n-1)$ は自由度 $n-1$ の $t$ 分布の上側 $100\alpha$ パーセント点である。このことから，母分散が未知のときの母平均の検定で使われる検定統計量は

$$T = \frac{\overline{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \tag{8.9}$$

であり，棄却域は $t_\alpha(n-1)$ より右側の部分 ($\{T | T > t_\alpha(n-1)\}$) である。あるいは，(8.8) を $\overline{X}$ について解くと

$$\overline{X} > \mu_0 + t_\alpha(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}$$

となり，$\overline{X}$ に基づいた棄却域が得られる。

同様にして，対立仮説が $H_1 : \mu < \mu_0$ のときは，

$$T = \frac{\overline{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} < -t_\alpha(n-1)$$

ならば，帰無仮説は有意水準 $\alpha$ で棄却される。また，$\overline{X}$ に基づく棄却域は

$$\overline{X} < \mu_0 - t_\alpha(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}$$

となる。

対立仮説が $H_1 : \mu \fallingdotseq \mu_0$ のときも，母分散が既知のときと同様に考えて

$$|T| = \left|\frac{\overline{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}\right| > t_{\alpha/2}(n-1)$$

ならば，帰無仮説は有意水準 $\alpha$ で棄却される。また，$\overline{X}$ に基づく棄却域は

$$\overline{X} < \mu_0 - t_{\alpha/2}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}, \qquad \overline{X} > \mu_0 + t_{\alpha/2}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}$$

となる。

**例題** 8.4　ある型の乗用車の燃費の平均は，従来車では $17\,km/\ell$ であった。改良車が開発され，16 台の走行テストを行ったところ，平均は $18\,km/\ell$，標準偏差は $2\,km/\ell$ と計算された。改良車の燃費は正規分布で近似できるものとして，改良車の燃費の平均が従来車よりも大きくなったといえるか。有意水準 0.05 で検定せよ。

**解**　この問題でも，対立仮説は右側仮説が妥当だと考えられるので，帰無仮説を $H_0 : \mu = 17$，対立仮説を $H_1 : \mu > 17$ とする。$t$ 分布表から，自由度 15，有意水準 0.05 の棄却点を求めると，$t_{0.05}(15) = 1.753$ であるので，棄却域は $\{T|T > 1.753\}$ となる。$\overline{x} = 18$，$s = 2$ を (8.9) に代入して検定統計量の実現値を計算すると

$$t = \frac{\overline{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} = \frac{18 - 17}{2/\sqrt{16}} = 2 > 1.753$$

となる。検定統計量の実現値が棄却域に入るので，有意水準 0.05 で帰無仮説は棄却される。

例題 8.1 と例題 8.4 の違いは次のとおりである。例題 8.1 では母分散が既知で $\sigma = 2$ であったので，標準正規分布に基づいて棄却域が設定されていた。しかし，例題 8.4 では母分散が未知であるので，検定統計値を計算するのにその推定値 $s = 2$ が使われており，$t$ 分布によって棄却域が設定されなければならない。自由度が小さいときには，$t$ 分布は正規分布よりも裾が広いので，棄却域 $\{T|T > 1.753\}$ は標準正規分布に基づく棄却域 $\{Z|Z > 1.645\}$ よりも狭くなるのである。

**例題** 8.5　ある年のわが国の製造業における労働者の週当り平均労働時間は 41 時間であった。数年後に，労働時間が短縮されているかどうかを見るために，25 人の製造業労働者を無作為に抽出して週当り労働時間を調べたところ，平均

40.7 時間，標準偏差 0.9 時間であった。週当り労働時間が正規分布で近似できるものとして，労働時間が短縮したといえるかどうかを有意水準 0.01 で検定せよ。また，標本を増加して 144 人の製造業労働者について調べたところ，平均 40.5 時間，標準偏差 0.8 時間であった。有意水準 0.01 で検定せよ。

**解**　題意から，帰無仮説を $H_0 : \mu = 41$，対立仮説を $H_1 : \mu < 41$ とする。$t$ 分布表から，自由度 24，有意水準 0.01 の棄却点を求めると，$-t_{0.01}(24) = -2.492$ であるので，棄却域は $\{T|T < -2.492\}$ となる。$\overline{x} = 40.7$，$s = 0.9$ を (8.9) に代入して検定統計量の実現値を計算すると

$$t = \frac{\overline{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} = \frac{40.7 - 41}{0.9/\sqrt{25}} = -1.667 > -2.492$$

となる。検定統計量の実現値が棄却域に入らないので，有意水準 0.01 で帰無仮説は採択される。

付表 3 の $t$ 分布表には，$n = 144$ の場合は載っていないが，$n = 144$ は大きいので，(8.9) が標準正規分布（$t$ 分布表で自由度が $\infty$ の場合）に従うとみなして差し支えない。標準正規分布表から，有意水準 0.01 の棄却点を求めると，$-t_{0.01}(\infty) = -2.326$ であるので，棄却域は $\{T|T < -2.326\}$ となる。$\overline{x} = 40.5$，$s = 0.8$ を (8.9) に代入して検定統計量の実現値を計算すると

$$t = \frac{40.5 - 41}{0.8/\sqrt{144}} = -7.5 < -2.326$$

となる。検定統計量の実現値が棄却域に入るので，有意水準 0.01 で帰無仮説は棄却される。この場合には，有意水準 0.01 で労働時間は短縮したといえる。

## 8.5　平均値の差の検定

2 つの母集団を考え，それらの平均の間に有意な差があるかどうかに関心をもつことも多い。例えば，北海道と九州の勤労者世帯の平均収入に差があるかどうか，2 つの異なった銘柄の電球の間で平均寿命に差があるかどうか，などである。2 つの正規母集団を $\mathrm{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$ および $\mathrm{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$ とすると，これらの母集団の平均が等しいかどうかを検定したいので，帰無仮説は $H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 0$

（または $\mu_1 = \mu_2$）である。また，対立仮説としては，次の 3 つの中から状況に応じて適当と考えられるものを選ぶ。

$$H_1:\ \mu_1 - \mu_2 > 0 \qquad （右側検定）$$

$$H_1:\ \mu_1 - \mu_2 < 0 \qquad （左側検定）$$

$$H_1:\ \mu_1 - \mu_2 \fallingdotseq 0 \qquad （両側検定）$$

それぞれの母集団から大きさ $n_1$ および $n_2$ の無作為標本 $X_{11}$, $X_{12}$, $\cdots$, $X_{1n_1}$ および $X_{21}$, $X_{22}$, $\cdots$, $X_{2n_2}$ を抽出し，それぞれの標本平均を $\overline{X}_1$ および $\overline{X}_2$ とすると

$$\overline{X}_1 = \frac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1} X_{1i} \sim \mathrm{N}\Big(\mu_1,\ \frac{\sigma_1^2}{n_1}\Big)$$
$$\overline{X}_2 = \frac{1}{n_2}\sum_{i=1}^{n_2} X_{2i} \sim \mathrm{N}\Big(\mu_2,\ \frac{\sigma_2^2}{n_2}\Big)$$

となる。ここでの標本は無作為標本であるので，$\overline{X}_1$ と $\overline{X}_2$ は独立である。よって，定理 4.5 と定理 4.8 から

$$\mathrm{E}[\overline{X}_1 - \overline{X}_2] = \mathrm{E}[\overline{X}_1] - \mathrm{E}[\overline{X}_2] = \mu_1 - \mu_2 \tag{8.10}$$
$$\mathrm{V}(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) = \mathrm{V}(\overline{X}_1) + \mathrm{V}(\overline{X}_2) = \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2} \tag{8.11}$$

となる。2 つの正規分布に従う確率変数の和と差は再び正規分布に従うことが分かっているので（正規**分布の再生性**という），$\overline{X}_1 - \overline{X}_2$ も正規分布に従う。$\overline{X}_1 - \overline{X}_2$ の平均と分散は，それぞれ (8.10) と (8.11) であるので

$$\overline{X}_1 - \overline{X}_2 \sim \mathrm{N}\Big(\mu_1 - \mu_2,\ \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}\Big) \tag{8.12}$$

となることが分かる。

まず，$\sigma_1^2$ と $\sigma_2^2$ が既知の場合を考えよう。帰無仮説 $H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 0$ が正しいとき，(8.12) から

$$\overline{X}_1 - \overline{X}_2 \sim \mathrm{N}\Big(0,\ \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}\Big)$$

となるので，標準化すると次の検定統計量が得られる。

$$Z = \frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{\sqrt{\sigma_1^2/n_1 + \sigma_2^2/n_2}} \sim \mathrm{N}(0,\,1) \tag{8.13}$$

対立仮説が $H_1 : \mu_1 - \mu_2 > 0$ のとき，棄却域は $\{Z|Z > z_\alpha\}$ であり，$H_1 : \mu_1 - \mu_2 < 0$ のとき，$\{Z|Z < -z_\alpha\}$ である。ただし，$z_\alpha$ は標準正規分布の上側 $100\alpha$ パーセント点である。また，$H_1 : \mu_1 - \mu_2 \fallingdotseq 0$ のとき，棄却域は $\{Z|Z < -z_{\alpha/2},\ Z > z_{\alpha/2}\}$ となる。

**例題** 8.6　あるデパートで，店員とアルバイト学生が同じ商品の包装をし，1 時間の作業によって下のような結果が得られた。

| | 人数 | 平均包装数 |
|---|---|---|
| 店員 | 5 | 64 |
| アルバイト学生 | 9 | 56 |

包装作業には店員の方がアルバイト学生よりも熟練しているとみなしてよいかどうかを，有意水準 0.05 で検定せよ。ただし，店員の包装数は，平均が $\mu_1$，分散が 30.5 の正規分布で近似でき，アルバイト学生の包装数は，平均が $\mu_2$，分散が 75.6 の正規分布で近似できるものとする。

**解**　作業能率の平均に差がないという仮説を帰無仮説とし，店員の方がアルバイト学生よりも作業能率の平均が高いという仮説を対立仮説とする。すなわち

$$H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 0, \qquad H_1 : \mu_1 - \mu_2 > 0$$

とする。有意水準が 0.05 であるので，棄却域は $\{Z|Z > z_{0.05} = 1.645\}$ となる。

$\overline{x}_1 = 64$，$\sigma_1^2 = 30.5$，$n_1 = 5$ および $\overline{x}_2 = 56$，$\sigma_2^2 = 75.6$，$n_2 = 9$ を (8.13) に代入すると，検定統計量の実現値は

$$z = \frac{\overline{x}_1 - \overline{x}_2}{\sqrt{\sigma_1^2/n_1 + \sigma_2^2/n_2}} = \frac{64 - 56}{\sqrt{30.5/5 + 75.6/9}} = 2.101 > 1.645$$

検定統計値が棄却域に入るので，帰無仮説は有意水準 0.05 で棄却される。よって，店員の方がアルバイト学生よりも作業能率は高いと判定される。

次に，$\sigma_1^2$ と $\sigma_2^2$ が未知の場合を考えよう。$\sigma_1^2$ と $\sigma_2^2$ が未知で $\sigma_1^2 \fallingdotseq \sigma_2^2$ の場合，$n_1$ と $n_2$ がともに大きくないならば，平均の差を厳密に検定することはできない。したがって，ここでは，$n_1$ と $n_2$ がともに大きい場合を取り扱う。

帰無仮説と対立仮説は，$\sigma_1^2$ と $\sigma_2^2$ が既知の場合と同様である。$\sigma_1^2$ と $\sigma_2^2$ が既知の場合には，検定統計量は (8.13) で与えられた。しかし，ここでは，$\sigma_1^2$ と $\sigma_2^2$ が未知であるので，(8.13) の $\sigma_1^2$ と $\sigma_2^2$ をそれらの不偏推定量

$$S_1^2 = \frac{1}{n_1 - 1}\sum_{i=1}^{n_1}(X_{1i} - \overline{X}_1)^2 \tag{8.14}$$

$$S_2^2 = \frac{1}{n_2 - 1}\sum_{i=1}^{n_2}(X_{2i} - \overline{X}_2)^2 \tag{8.15}$$

で置きかえることを考える。このとき，検定統計量は

$$Z = \frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{\sqrt{S_1^2/n_1 + S_2^2/n_2}} \tag{8.16}$$

で表される。$n_1$ と $n_2$ がともに大きいとき，中心極限定理によって (8.16) は標準正規分布に近づいていく。すなわち，$Z$ の漸近分布が N(0, 1) となる。このことから，$n_1$ と $n_2$ がともに大きいときには，$\sigma_1^2$ と $\sigma_2^2$ が既知の場合と同様にして，標準正規分布に基づいて棄却域を設定することができる。なお，$n_1$ と $n_2$ がともに大きいときの正規近似は，母集団が正規分布でなくても成立する。しかし，$n_1$ と $n_2$ がともに大きくないときには，(8.13) の分布は正規分布でも $t$ 分布でもないことに注意せよ。

**例題** 8.7　A 地方と B 地方で勤労者世帯の平均収入に差があるかどうかを見るために，それぞれの地域で次のような無作為標本を得たとしよう。

| | 標本の大きさ ($n_i$) | 平均 ($\overline{x}_i$) | 標準偏差 ($s_i$) |
|---|---|---|---|
| A | 154 | 615 | 40 |
| B | 120 | 606 | 32 |

有意水準 0.05 で，有意な差があるかどうかを検定せよ。

**解**　A 地方を添え字 1，B 地方を添え字 2 で表す。ここでは，A 地方の勤労者世帯の方が B 地方の勤労者世帯よりも平均収入が高いかどうかは分からないので，とにかく差があるかどうかを調べるものとする。このとき，帰無仮説と対立仮説は次のように表される。

$$H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 0, \qquad H_1 : \mu_1 - \mu_2 \fallingdotseq 0$$

$n_1$ と $n_2$ はともに大きいので，(8.16) で与えられる検定統計量は正規分布で近似できる。有意水準が 0.05 で，対立仮説が両側なので，棄却点は $z_{0.025} = 1.96$ である。よって，棄却域は $\{Z|Z < -1.96,\ Z > 1.96\}$ となる。

$n_1 = 154$，$\overline{x}_1 = 615$，$s_1 = 40$，$n_2 = 120$，$\overline{x}_2 = 606$，$s_2 = 32$ を (8.16) に代入すると，検定統計量の実現値は

$$z = \left|\frac{\overline{x}_1 - \overline{x}_2}{\sqrt{s_1^2/n_1 + s_2^2/n_2}}\right| = \left|\frac{615 - 606}{\sqrt{40^2/154 + 32^2/120}}\right| = 2.069 > 1.96$$

となる。よって，検定統計値が棄却域に入るので，帰無仮説は有意水準 0.05 で棄却される。すなわち，A 地方と B 地方の勤労者世帯の平均収入には有意な差があるといえる。

## 8.6　等分散の検定

2 つの母集団を考え，それらの分散の間に有意な差があるかどうかに興味がある場合がある。例えば，株価の上下変動が，バブル期以前と以降で同じかどうかを調べたい場合である。株価の上下変動が大きいということは，大きく得をする場合もあるが大きく損をする場合もあるという意味で，株価は危険資産であるということになる。この場合は，株式には手を出さないという方が賢明であろう。この問題を解決するためには，それぞれの母集団から無作為に抽出された標本の標本不偏分散を用いることになる。

2 つの正規母集団 $\mathrm{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$ および $\mathrm{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$ を考える。それぞれの母集団から大きさ $n_1$ および $n_2$ の標本を無作為に抽出し，それぞれの標本不偏分散を $S_1^2$ および $S_2^2$ とする。ただし，$S_1^2$ および $S_2^2$ は (8.14) および (8.15) で与えられている。

このとき，定理 6.3 より，

$$\frac{(n_1-1)S_1^2}{\sigma_1^2} \sim \chi^2(n_1-1), \qquad \frac{(n_2-1)S_2^2}{\sigma_2^2} \sim \chi^2(n_2-1)$$

が得られる。さらに，2 つの母集団から抽出された標本は無作為標本なので，$S_1^2$ と $S_2^2$ は独立である。

2 つの正規母集団の分散が等しいかどうかを検定するので，帰無仮説は $H_0$ : $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ である。まず，対立仮説が $H_1 : \sigma_1^2 > \sigma_2^2$ の場合を考えよう。帰無仮説が正しいときには，$\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ であるので，$S_1^2$ と $S_2^2$ の実現値が大きく離れることはあまりないと考えられる。したがって，$S_1^2/S_2^2$ の実現値は 1 に近くなりやすい。逆に，対立仮説が正しいときには，$\sigma_1^2 > \sigma_2^2$ であるので，$S_1^2$ の実現値は $S_2^2$ の実現値よりも大きくなりやすいと考えられる。したがって，$S_1^2/S_2^2$ の実現値は 1 よりも大きくなりやすい。このことから，$S_1^2/S_2^2$ が 1 に比べてある程度大きくなれば帰無仮説を棄却するという検定が考えられる。

定理 6.6 を利用すると，

$$V = \frac{\dfrac{(n_1-1)S_1^2}{\sigma_1^2}\Big/(n_1-1)}{\dfrac{(n_2-1)S_2^2}{\sigma_2^2}\Big/(n_2-1)} = \frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2}$$

が，自由度 $(n_1-1,\, n_2-1)$ の $F$ 分布に従うことが分かる。帰無仮説が正しいとき，$\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ であるので，$V$ の分母，分子にある $\sigma_1^2$ と $\sigma_2^2$ が相殺される。よって，$S_1^2/S_2^2$ は，自由度 $(n_1-1,\, n_2-1)$ の $F$ 分布に従う。この $S_1^2/S_2^2$ が，帰無仮説が $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$，対立仮説が $H_1$ : $\sigma_1^2 > \sigma_2^2$ であるときの検定統計量である。

帰無仮説が正しいとき，

$$\mathrm{P}\Big(\frac{S_1^2}{S_2^2} > F_\alpha(n_1-1, n_2-1)\Big) = \alpha \tag{8.17}$$

が成立する。ただし，$F_\alpha(n_1-1, n_2-1)$ は，自由度 $(n_1-1,\, n_2-1)$ の $F$ 分布の上側 100 $\alpha$ パーセント点であり，付表 4 の $F$ 分布表から得られる。(8.17) から，有意水準 $\alpha$ の棄却域は

$$\frac{S_1^2}{S_2^2} > F_\alpha(n_1-1, n_2-1)$$

となる。

対立仮説が $H_1 : \sigma_1^2 < \sigma_2^2$ で帰無仮説が正しくないときには，$S_2^2$ の方が $S_1^2$ よりも大きくなりやすいと考えられる。したがって，$H_1 : \sigma_1^2 > \sigma_2^2$ のときと逆に考えると，有意水準 $\alpha$ の棄却域は

$$\frac{S_2^2}{S_1^2} > F_\alpha(n_2-1, n_1-1)$$

となる。

以上をまとめると，次のようになる。

**(1)**　$H_1 : \sigma_1^2 > \sigma_2^2$ のとき，検定統計量は $S_1^2/S_2^2$ であり，棄却点として自由度 $(n_1-1,\ n_2-1)$ の $F$ 分布から得られる $F_\alpha(n_1-1, n_2-1)$ を用いる。

**(2)**　$H_1 : \sigma_1^2 < \sigma_2^2$ のとき，検定統計量は $S_2^2/S_1^2$ であり，棄却点としては自由度 $(n_2-1,\ n_1-1)$ の $F$ 分布から得られる $F_\alpha(n_2-1, n_1-1)$ を用いる。

両側検定のとき，対立仮説は $H_1 : \sigma_1^2 \fallingdotseq \sigma_2^2$ であるので，帰無仮説が正しくないとき，$\sigma_1^2 > \sigma_2^2$ であるのか，$\sigma_1^2 < \sigma_2^2$ であるのか分からない。したがって，この場合，有意水準 $\alpha$ の棄却域は，

$$\frac{S_1^2}{S_2^2} > F_{\alpha/2}(n_1-1, n_2-1) \quad \text{または} \quad \frac{S_2^2}{S_1^2} > F_{\alpha/2}(n_2-1, n_1-1)$$

となる。

**例題** 8.8　表 8.2 は日経平均株価指数の上昇率（年率 %）のデータである。この表を使って，バブル期以降（1990 年～）の方が，バブル期以前（～1989 年）よりも，株価の変動が大きくなっているかどうかを有意水準 0.05 で検定せよ。ただし，上昇率は正規分布に従い，各年で独立であると仮定する。

**解**　バブル期以前の分散を $\sigma_1^2$，バブル期以降の分散を $\sigma_2^2$ とし，帰無仮説を $H_0:\ \sigma_1^2 = \sigma_2^2$，対立仮説を $H_0:\ \sigma_1^2 < \sigma_2^2$ とする。$F$ 分布表から，自由度 $(n_2-1,\ n_1-1) = (9, 13)$，有意水準 0.05 の棄却点を求めると，$F_{0.05}(n_2-1, n_1-1) = 2.71$ であるので，棄却域は $\{F | F > 2.71\}$ となる。

$\sigma_1^2$ と $\sigma_2^2$ の不偏推定値 $s_1^2$ と $s_2^2$ は

$$\overline{x}_1 = \frac{1}{14}(9.6 + 8.1 + \cdots + 26.0) = 16.5$$
$$\overline{x}_2 = \frac{1}{10}((-13.6) + (-17.5) + \cdots + 9.3) = -5.8$$

から

**表 8.2　株価上昇率**

（年率，％）

| 年 | 上昇率 | 年 | 上昇率 | 年 | 上昇率 | 年 | 上昇率 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1976 | 9.6 | 1982 | − 1.5 | 1988 | 16.3 | 1994 | 4.4 |
| 1977 | 8.1 | 1983 | 19.0 | 1989 | 26.0 | 1995 | − 12.9 |
| 1978 | 10.1 | 1984 | 19.9 | 1990 | − 13.6 | 1996 | 21.4 |
| 1979 | 13.3 | 1985 | 19.0 | 1991 | − 17.5 | 1997 | − 12.9 |
| 1980 | 9.5 | 1986 | 30.5 | 1992 | − 25.2 | 1998 | − 16.4 |
| 1981 | 9.3 | 1987 | 41.7 | 1993 | 5.0 | 1999 | 9.3 |

$$s_1^2 = \frac{1}{14-1}(9.6^2 + 8.1^2 + \cdots + 26.0^2 - 14 \times 16.5^2) = 118.4$$
$$s_2^2 = \frac{1}{10-1}((-13.6)^2 + (-17.5)^2 + \cdots + 9.3^2 - 10 \times (-5.8)^2) = 219.5$$

となる。検定統計量の実現値を計算すると

$$\frac{s_2^2}{s_1^2} = \frac{219.5}{118.4} = 1.85 < 2.71$$

となるので，検定統計値は棄却域には入らない。よって，有意水準 0.05 で帰無仮説 $H_0$ を採択することになる。すなわち，バブル期以前と以降とでは，変動が大きくなったとはいえないことが確かめられた。

## 8.7　比率の検定

これまでは，平均値の水準や差に関する仮説の検定手続きを扱ってきたが，この節では母集団に占めるある属性をもつものの割合や比率に関する仮説を検定することを考える。例えば，個人所得に占める貯蓄率，労働力人口に占める失業率，政党や内閣の支持率など，割合や比率に関心がもたれることは非常に多い。

母集団のうちである属性をもつものの割合を $p$ で表そう。無作為に抽出された大きさ $n$ の標本を $X_1$，$X_2$，$\cdots$，$X_n$ とし，その属性をもてば $X_i = 1$，もたなければ $X_i = 0$ とする。例えば，何人かの人にアンケートをとり，$i$ 番目の人がある政党を支持すれば $X_i = 1$，支持しなければ $X_i = 0$ とする。このとき，

$$R = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$$

とすると，$R$ はその属性をもつものの個数となる。100 人にアンケートをとり，30 人がある政党を支持すれば，$X_1$，$X_2$，$\cdots$，$X_{100}$ のうち，1 が 30 個で 0 が 70 個であるので，$R = X_1 + X_2 + \cdots + X_{100} = 30$ である。無作為に抽出された大きさ $n$ の標本のうち $R$ 個がその属性をもつので，$p$ の点推定量として $\hat{p} = R/n$ が得られる。標本比率 $\hat{p}$ は

$$\hat{p} = \frac{R}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

であるので，標本平均になっている。よって，中心極限定理から，$n$ がある程度大きいとき

$$\frac{\hat{p} - p}{\sqrt{p\,q/n}} \sim \mathrm{N}(0,\ 1) \tag{8.18}$$

が成立する。ただし，$q = 1 - p$ である（母数 $p$ の値が極端に 0 または 1 に近い場合には，この正規近似はあまりよくない）。

帰無仮説を $H_0 : p = p_0$ とし，対立仮説が $H_1 : p > p_0$ のときは右側検定，$H_1 : p < p_0$ のときは左側検定，$H_1 : p \fallingdotseq p_0$ のときは両側検定を使う。

帰無仮説が正しいときには，$p = p_0$ であるので，(8.18) から

$$Z = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{p_0\,q_0/n}} \sim \mathrm{N}(0,\ 1)$$

が成立する。ただし，$q_0 = 1 - p_0$ である。この式は，帰無仮説のもとでの検定統計量 $Z = (\hat{p} - p_0)/\sqrt{p_0\,q_0/n}$ の漸近分布が $\mathrm{N}(0,\ 1)$ であることを示している（区間推定では，$p$ の値が未知であったので，(8.18) の分母にある $\sqrt{p\,q/n}$ の未知母数 $p$, $q$ をそれらの推定値 $\hat{p}$, $\hat{q}$ で置きかえ，$\sqrt{\hat{p}\,\hat{q}/n}$ とした。しかし，検定統計量では，帰無仮説によって $p$ の値 $p_0$ が与えられるので，$\sqrt{p_0\,q_0/n}$ となることに注意）。

対立仮説が $H_1 : p > p_0$ のとき

$$\frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{p_0\,q_0/n}} > z_\alpha$$

ならば帰無仮説は有意水準 $\alpha$ で棄却され，対立仮説が $H_1 : p < p_0$ のとき

$$\frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{p_0\,q_0/n}} < -z_\alpha$$

ならば帰無仮説は有意水準 $\alpha$ で棄却される。ただし，$z_\alpha$ は標準正規分布の上側 100 $\alpha$ パーセント点である。

また，対立仮説が $H_1 : p \fallingdotseq p_0$ のとき

$$\frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{p_0\, q_0/n}} < -z_{\alpha/2} \qquad \text{または} \qquad \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{p_0\, q_0/n}} > z_{\alpha/2}$$

ならば帰無仮説は有意水準 $\alpha$ で棄却される。

**例題** 8.9　サイコロを 340 回ころがしたら，1 の目が 65 回出た。このサイコロは 1 の目が出やすいと判断してよいか。有意水準 0.05 で検定せよ。

**解**　この問題では，1 の目が出やすいことを疑っているので，帰無仮説と対立仮説は，それぞれ，

$$H_0 :\ p = \frac{1}{6} = 0.167$$

$$H_1 :\ p > \frac{1}{6} = 0.167 \qquad \text{（1 の目が出やすい）}$$

と考えられる。また，$n$ が大きいので，正規分布で近似できると考えられる。有意水準 0.05 のとき，棄却域は $\{Z | Z > 1.645\}$ である。$\hat{p} = 65/340 = 0.191$ から，検定統計量の実現値は

$$z = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{p_0\, q_0/n}} = \frac{0.191 - 0.167}{\sqrt{0.167 \times 0.833/340}} = 1.187 < 1.645 = z_{0.05}$$

となる。検定統計量の値が，棄却域に入らないので，帰無仮説は有意水準 0.05 で採択される。よって，特に 1 の目が出やすいとはいえない。

## 練習問題

**8.1**　ある洋服販売店は，何年もの間，週当り平均 $\mu = 120$ 着，標準偏差 $\sigma = 20$ 着の紳士服を販売してきた。このたび，戦略的情報システム（SIS）を導入したところ，4 週間の平均で 135 着の売上げがあった（標準偏差は変化していないものとする）。過去と比べて売上げが上がったかどうかを，1 %，5 %，10 % の有意水準を用いて検定せよ。

**8.2**　問 8.1 において，洋服店主は SIS の導入の効果により平均売上げを 140 着に拡大したと信じているものとしよう。このとき，$\alpha = 0.05$ を用いる上の検定において，$\beta$ はいくらか（対立仮説を $\mu = 140$ とする）。また，$\alpha = 0.01$ とすれば $\beta$ はどうなるか。

**8.3**　ある職業の平均年収が 740 万円，630 万円，690 万円であるという 3 つの推計結果が，3 つの異なった研究機関から発表された。その職業をもつ 16 人からなる標本を調査したところ，その平均年収は 655 万円，標準偏差 60 万円であった。

**(1)**　5 % の有意水準で，3 つの研究機関が出した仮説をそれぞれ検定せよ。

**(2)**　平均年収を $\mu$ として，$\mu$ に対する 95 % の信頼区間を作れ。次に，その信頼区間に単に入るか否かを見ることで，3 つのそれぞれの仮説を検定せよ。このやり方は **(1)** より簡単であろうか。

**8.4**　総務省『住宅統計調査』によれば，1986 年の新設住宅の 1 戸当り平均床面積は $80.9m^2$ であった。同年に，東京都下の 100 戸の新設住宅を無作為に抽出して調べたところ，床面積の平均が $62.5m^2$ であった。東京都の住宅事情に関する仮説を立てて検定せよ。ただし，標準偏差は全国と東京都で差がなく，$18m^2$ であることが分かっているものとせよ。

**8.5**　次の表は，日米の実質国民総生産（GNP）の成長率（%）を 1956 ～ 89 年について示したものである。このとき，次の問に答えよ（$n_1$ と $n_2$ はそれほど大きくはないが，正規近似を用いてよい）。

**日米の国民総生産 (GNP) の推移**

(%)

| 年 | 日本 | アメリカ | 年 | 日本 | アメリカ | 年 | 日本 | アメリカ | 年 | 日本 | アメリカ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | 1960 | 11.9 | 2.6 | 1971 | 4.4 | 2.8 | 1981 | 3.7 | 1.9 |
| | | | 1962 | 8.9 | 5.3 | 1972 | 8.5 | 5.0 | 1982 | 3.1 | −2.5 |
| | | | 1963 | 8.4 | 4.1 | 1973 | 7.9 | 5.2 | 1983 | 3.2 | 3.6 |
| | | | 1964 | 11.6 | 5.3 | 1974 | −1.4 | −0.5 | 1984 | 5.1 | 6.8 |
| | | | 1965 | 5.9 | 5.8 | 1975 | 2.7 | −1.3 | 1985 | 4.9 | 3.4 |
| 1956 | 7.4 | 2.1 | 1966 | 10.7 | 5.8 | 1976 | 4.8 | 4.9 | 1986 | 2.5 | 2.7 |
| 1957 | 8.1 | 1.7 | 1967 | 11.1 | 2.9 | 1977 | 5.3 | 4.7 | 1987 | 4.6 | 3.7 |
| 1958 | 6.7 | −0.8 | 1968 | 12.8 | 4.2 | 1978 | 5.2 | 5.3 | 1988 | 5.7 | 4.4 |
| 1959 | 9.3 | 5.8 | 1969 | 12.5 | 2.4 | 1979 | 5.3 | 2.5 | 1989 | 4.9 | 3.0 |
| 1960 | 13.6 | 2.2 | 1970 | 10.8 | −0.3 | 1980 | 4.3 | −0.2 | | | |

**(1)** 日米の成長率の平均値の間に有意な差があるかどうかを検定せよ。

**(2)** 日本の成長率の平均の方がアメリカのそれより高いという予想を立てた場合，果たしてそういえるかどうかを検定せよ。

**8.6** わが国の社会資本の中でも，その整備が遅れているものに下水道の総人口普及率がある。1988 年における処理人口の総人口に対する比は 0.40 であったが，日米構造協議の効果もあり，普及率の改善が予想されている。そこで，全国の 1 万人を無作為に抽出して下水道が公的に処理される住宅に住んでいるか否かを調べたところ，4800 人が処理されていると解答したとしよう。その場合，1988 年に比べて下水道普及が改善したといえるか。

**8.7** ある仮説を検定したいが，以下の判断の中で，どれが正しい判定になるのか。正しい判断の場合は○，間違った判断の場合は×を記入せよ。

**(1)** 仮説が実際に正しいとき，検定結果から，その仮説を受け入れる。

**(2)** 仮説が実際に正しくないとき，検定結果から，その仮説を受け入れる。

**(3)** 仮説が実際に正しいとき，検定結果から，その仮説を棄却する。

**(4)** 仮説が実際に正しくないとき，検定結果から，その仮説を棄却する。

**8.8** ある洋服販売店は，何年もの間，週当り平均 90 着，分散 $10^2$ の紳士服を販売してきた（1 週間の売上げは，正規分布に従うと仮定する）。このたび，SIS を導入したところ，4 週間の平均で 101 着の売上げがあった。このとき，過去の売上げと比べて差があるかどうかを検定したい。ただし，SIS 導入に対して，分散は変化していないものとする。

**(1)** 帰無仮説を，どのように設定すればよいか。

**(2)** 検定統計量の値を求めよ。

**(3)** 問 8.7 の **(1)**〜**(4)** の中で，有意水準はどの確率か。

**(4)** 有意水準 5 %で検定すると，帰無仮説は採択されるか，それとも棄却されるか。

**(5)** 有意水準 1 %で検定すると，結果はどうなるか。

**8.9** 100 人を対象にアンケート調査を行い，41 人が内閣を支持すると答えた。このとき，内閣支持率 ($p$) が 50 % を割ったと判断してよいかどうかを，検定したい。

**(1)** 帰無仮説 ($H_0$)，対立仮説 ($H_1$) をともに記せ。

**(2)** 検定統計量の値を求めよ。

**(3)** 検定統計量の分布を答えよ。検定を行う際にどの分布表を用いればよいか。$\mathrm{N}(0,1)$, $t(1)$, $t(2)$, $t(3)$, $\cdots$, $\chi^2(1)$, $\chi^2(2)$, $\chi^2(3)$, $\cdots$ のような分布の記号で答えよ。

**(4)** 内閣支持率が 50 % を割ったと判断できるなら○，できないなら×を記入せよ（有意水準は 5 % で検定する）。

**8.10**　1997 年〜2000 年の国内総生産（GDP）の成長率は,

（%）

| 年 | 1997 | 1998 | 1999 | 2000 |
|---|---|---|---|---|
| GDP 成長率 | 3.9 | 1.1 | 0.1 | 0.5 |

であった。各年の成長率はそれぞれ独立に，平均 $\mu$ の正規分布に従うものとする。内閣府経済社会総合研究所は 2001 年の経済成長率を 4.5 % と予測を行った（これは，フィクションである）。しかし，ある経済研究所は，この予測は高すぎると考えた。そこで，この予測が本当に高すぎるかどうかを検定することにした。

**(1)** 帰無仮説 $(H_0)$，対立仮説 $(H_1)$ をともに記せ。

**(2)** 検定統計量の値を小数第 2 位（小数第 3 位を四捨五入）まで求めよ。

**(3)** 検定統計量の分布を答えよ。検定を行う際にどの分布表を用いればよいか。$\mathrm{N}(0,1)$, $t(1)$, $t(2)$, $t(3)$, $\cdots$, $\chi^2(1)$, $\chi^2(2)$, $\chi^2(3)$, $\cdots$ のような分布の記号で答えよ。

**(4)** 有意水準 1 % で，予測が本当に高すぎるかどうかを検定したい。予測が本当に高すぎると判定されれば○，可能であると判定されれば×を記入せよ。

**8.11**　正規母集団 $\mathrm{N}(\mu, 2^2)$ から大きさ 25 の標本をとって標本平均を計算したところ，$\overline{x} = 2.9$ であった。母平均が 3.5 と考えてよいかどうかを，有意水準 5 % で検定したい。

**(1)** 帰無仮説 $(H_0)$，対立仮説 $(H_1)$ をともに記せ。

**(2)** 検定統計量の値を求めよ。

**(3)** 検定統計量の分布を答えよ。検定を行う際にどの分布表を用いればよいか。

**(4)** 検定の結果，母平均が 3.5 と考えてよいと判定されれば○，それ以外は×を記入せよ。

**8.12** GDP の成長率のデータを使って，第一次石油ショック（1973 年）を境に，日本の経済構造が変化したかどうかを調べる。各年の GDP の成長率のデータは，以下のとおりであった。

（%）

| 年 | 1971 | 1972 | 1973 | 1974 | 1975 | 1976 | 1977 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| GDP 成長率 | 4.8 | 8.4 | 8.1 | $-1.1$ | 3.0 | 4.1 | 4.4 |

各年の成長率はそれぞれ独立に，分散 10 の正規分布に従うものとする。1974 年以降の成長率は 1973 年までの成長率よりも小さいかどうかを検定せよ。

**(1)** 検定統計量の値を 絶対値で 小数第 2 位（小数第 3 位を四捨五入）まで求めよ。

**(2)** 検定統計量の分布を答えよ。検定を行う際にどの分布表を用いればよいか。

**(3)** 有意水準 10 % で，有意な差があるかどうかを検定したい。成長率が小さくなったと判定されれば○，変わっていないと判定されれば×を記入せよ。

**8.13** 関東地方と近畿地方で勤労者世帯の平均収入（年収）に差があるかどうかを調べたい。関東地方と近畿地方から，それぞれ 289 人，225 人を無作為に抽出して，標本平均，標本分散を計算したところ，以下の表を得た。

| | 標本の大きさ（人） | 標本平均（万円） | 標本分散 |
|---|---|---|---|
| 関東 | 289 | 642 | 361 |
| 近畿 | 225 | 637 | 961 |

勤労者世帯の年収は正規分布に従うものと仮定する。このとき，以下の問に答えよ。

**(1)** 検定統計量の値を 絶対値で 小数第 2 位（小数第 3 位を四捨五入）まで求めよ。

**(2)** 検定統計量の分布を答えよ。検定を行う際にどの分布表を用いればよいか。

**(3)**　有意水準 1 % で，有意な差があるかどうかを検定したい。有意な差があると判定されれば○，有意な差がないと判定されれば×を記入せよ。

**8.14**　36 個の標本が $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ からとられたものであり，$\sigma = 7$ が分かっているものとする。標本平均を計算したところ $\overline{x} = 20$ であった。このとき，次の各問に答えよ。

**(1)**　仮説 $H_0 : \mu = 18$ を対立仮説 $H_1 : \mu = 22$ に対して有意水準 5 % で検定せよ。

**(2)**　有意水準を 1 % として検定せよ。

**(3)**　有意水準が 5 % および 1 % のときの検出力を求めよ。

**8.15**　新しく開発された製品の寿命試験において 12 個の製品を検査したところ，標本平均が $\overline{x} = 87$ （時間），標本（不偏）分散が $s^2 = 49$（時間）であった。この製品の寿命が正規分布に従うとして，次の各問に答えよ。

**(1)**　新しく開発された製品の寿命の 95 % 信頼区間を求めよ。

**(2)**　従来の製品の平均寿命が 83 時間であるとき，この新製品の平均寿命は延びたといえるか。有意水準 5 % で検定せよ。

**8.16**　2 つの正規母集団 $\mathrm{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$，$\mathrm{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$ からそれぞれ大きさ 160 および 180 の 2 組の標本をとって $\overline{x}_1 = 33$，$\overline{x}_2 = 33.6$，$s_1^2 = 10$，$s_2^2 = 12$ を得た。このとき，仮説 $H_0 : \mu_1 = \mu_2$ を対立仮説 $H_1 : \mu_1 \fallingdotseq \mu_2$ に対して有意水準 5 % で検定せよ。ただし，$\overline{x}_i$，$s_i^2$　$(i = 1, 2)$ はそれぞれ標本平均および標本（不偏）分散である。

**8.17**　サイコロを 240 回ころがしたら，6 の目が 54 回出た。このサイコロは 6 の目が出やすいと判断してよいか。有意水準 1 % で検定せよ。

**8.18**　ある大晦日のテレビ番組の視聴率は 70 % を超えるという。このことを確かめるため，3000 人にアンケート調査を行ったところ 2070 人が視聴していた。真の視聴率が 70 % であるという仮説を有意水準 5 % で検定せよ。

**8.19**　長さ 60 $m$ のトイレット・ペーパーを生産している工場で，裁断機が正しく機能しているかを調べるため，5 個のロールを無作為に抽出して長さを測定したところ，次の測定値が得られた（単位は $m$）。

59　56　62　61　57

裁断機が正しく機能しているかを，有意水準 5 % で検定せよ。

# 第 9 章
# 回帰分析

## 9.1　回帰関係の意味

表 9.1 は，1980 年から 1998 年までの，実質家計最終消費支出 ($Y$) と実質家計可処分所得 ($X$) を示したものである。図 9.1 は，それらのデータを散布図で表したものである。図 9.1 から，2 つの変数 $X$ と $Y$ の間には，完全な直線関係はないが，それらのデータはある直線の周りに散布している様子がうかがえる。なお，図 9.1 に描かれた直線は，後で説明する最小 2 乗法によって，これらのデータに当てはめられた直線である。

前章までは，確率変数を大文字で，その実現値を小文字で表してきた。しかし，回帰を扱う場合には，変数の個数が多くなるので，確率変数と実現値をいちいち区別するとかえって煩雑になる。したがって，本章では，確率変数を大文字で表し，その実現値を小文字で表すという区別はしないが，大きな混乱はないものと思われる。なお，特に標本確率変数とその実現値を区別するときは，そのつどその旨を明記している。

一般に，2 つの変数 $X$ と $Y$ があり，それらの間に線形関係があって，

$$Y_t = \alpha + \beta X_t \tag{9.1}$$

で表されるものとしよう。ここで，$X_t$ と $Y_t$ は，変数 $X$ と $Y$ の第 $t$ 時点での観測値である（今後，簡略化のために，$X_t$ と $Y_t$ そのものを変数と呼ぶこともある）。$Y_t$ を消費支出，$X_t$ を可処分所得とすると，(9.1) は，マクロ経済学でいうケインズ型の**消費関数**である。消費関数では，$\alpha$ と $\beta$ に関して，通常 $\alpha > 0$ と $0 < \beta < 1$ が仮定される（係数条件）。$\alpha > 0$ は，所得がなくても ($X_t = 0$) 消費は存在することを意味する。(9.1) を $X_t$ で微分すると $\mathrm{d}Y_t/\mathrm{d}X_t = \beta$ となるので，$\beta$ は**限界消費性向**と呼ばれている。$\beta > 0$ は，所得が増加すれば消費も増加し，$\beta < 1$ は，増加した所得を全部消費に回すことはない（多少とも貯

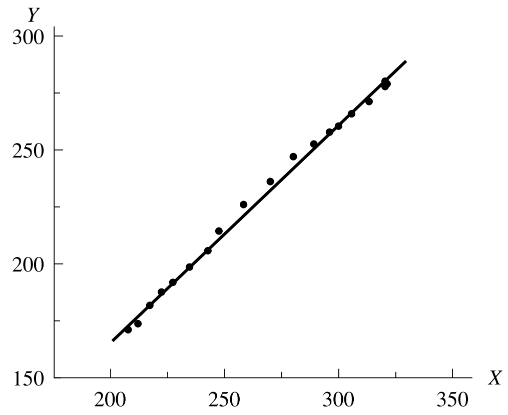
**表 9.1　実質家計消費支出と実質家計可処分所得**

（単位：兆円）

| 年 | 消費 $(Y)$ | 可処分所得 $(X)$ | 年 | 消費 $(Y)$ | 可処分所得 $(X)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1980 | 170.7 | 208.0 | 1990 | 246.2 | 280.1 |
| 1981 | 173.1 | 212.1 | 1991 | 252.1 | 290.3 |
| 1982 | 180.8 | 217.0 | 1992 | 257.4 | 296.3 |
| 1983 | 186.8 | 222.6 | 1993 | 260.0 | 300.1 |
| 1984 | 191.6 | 227.7 | 1994 | 265.3 | 306.0 |
| 1985 | 197.9 | 234.5 | 1995 | 270.6 | 313.6 |
| 1986 | 204.8 | 242.7 | 1996 | 278.6 | 321.5 |
| 1987 | 213.6 | 247.8 | 1997 | 279.8 | 320.3 |
| 1988 | 224.9 | 258.5 | 1998 | 277.7 | 320.5 |
| 1989 | 235.6 | 270.6 | | | |

（出所）　経済企画庁『国民経済計算年報』（平成 12 年度版）。

**図 9.1　実質家計最終消費支出 $(Y)$ と実質家計可処分所得 $(X)$ の散布図**




蓄に回す），ということを意味する。ただし，実際のデータを使って推定を行う場合，得られた結果が必ずしも係数条件を満たすとは限らない。

2つの変数 $X$ と $Y$ の間に，理論上は厳密な線形関係があるとしても，実際に観測されたそれらのデータが完全な線形関係を満たすことは期待できない。その理由は，観測データには（特に経済データには），種々の測定誤差が不可避的に入り込むからである。したがって，$Y_t$ と $X_t$ の理論的な関係式が $Y_t = \alpha + \beta X_t$ であっても，実際のデータには観測誤差などが含まれるため，$Y_t$ は $\alpha + \beta X_t$ の上には完全にはのらず，$Y_t$ は $\alpha + \beta X_t$ の上下に散らばる。この，$Y_t$ と $\alpha + \beta X_t$

の差が誤差として定式化される。誤差を $u_t$ で表すと，$X_t$ と $Y_t$ の間には次の関係式が成り立つ。

$$Y_t = \alpha + \beta X_t + u_t \tag{9.2}$$

これを 2 **変数線形回帰モデル**，あるいは単に**回帰モデル**（regression model）という。

## 9.2　回帰モデルの諸仮定

2 変数線形回帰モデル (9.2) の $Y_t$ は，$X_t$ によって説明できる部分 $(\alpha+\beta X_t)$ と説明できない誤差 $(u_t)$ の和として表されている。(9.2) のように定式化された回帰モデルでは，変数 $Y_t$ は，$\alpha+\beta X_t$ を通じて変数 $X_t$ に依存するが，$X_t$ は $Y_t$ には依存しないと仮定されている。例えば，$X_t$ を温度，$Y_t$ を鉄棒の長さとすると，通常温度が上がれば鉄棒の長さは延びるので，$Y_t$ は $X_t$ に依存する。しかし，鉄棒の長さを無理矢理 $1mm$ 延ばしてもその地域の温度が上がるわけではないので，$X_t$ は $Y_t$ には依存しない。すなわち，$X_t$ の変動は $Y_t$ に影響を与えるが，逆は成立するとは限らない。このことから，$Y_t$ を**従属変数**（dependent variable），$X_t$ を**独立変数**（independent variable）という。なお，計量経済学では，$Y_t$ を**被説明変数**，$X_t$ を**説明変数**ということも多い。

回帰モデル (9.2) において，$X$ と $Y$ の理論的な関係を表した部分 $\alpha+\beta X_t$ を（真の）**回帰直線**という。$\alpha$ と $\beta$ は，それぞれ，回帰直線の定数項（切片）と勾配を表す未知パラメータであり，これらをまとめて，**回帰係数**という。

$u_t$ は，観測が不可能な種々の誤差を集約したものであるので，$u_t$ を**誤差項**（error term）という。通常，誤差は何らかの分布に従う確率変数であるので，$u_t$ も確率変数とみなされる。独立変数 $X_t$ は指定された変数であり，非確率変数であると仮定される。しかし，従属変数 $Y_t$ は，非確率的な部分 $\alpha+\beta X_t$ と確率変数 $u_t$ の和であるので，確率変数である。

誤差項については，通常次の 3 つの仮定が置かれる。

**(1)**　$\mathrm{E}[u_t] = 0$

**(2)**　$\mathrm{V}(u_t) = \sigma^2$

**(3)**　$\mathrm{E}[u_t u_s] = 0$　　　（ただし，$t \fallingdotseq s$）

仮定 **(1)** は，誤差は系統的にプラスまたはマイナスに偏ることはなく，平均するとゼロになる，ということを意味している。仮定 **(1)** のもとでは，期待値に関する定理 4.1 より

$$\begin{aligned}\mathrm{E}[Y_t] &= \mathrm{E}[\alpha + \beta X_t + u_t] \\ &= \alpha + \beta X_t + \underbrace{\mathrm{E}[u_t]}_{=0} = \alpha + \beta X_t\end{aligned}$$

となり，$Y_t$ の期待値が $Y_t$ と $X_t$ の間の理論的な関係式（回帰直線）に等しくなる。仮定 **(2)** は，誤差項の分散は時点を通じて一定であることを意味している。仮定 **(3)** は，異なった時点の誤差項どうしは互いに無相関であることを意味している。

誤差項は無数の微少な誤差の和と考えられるので，中心極限定理（6.3 節参照）によって，その分布は正規分布であると仮定されることが多い（これを**正規性の仮定**という)。誤差項の正規性の仮定は，回帰係数の推定では特に必要とはされないが，検定を行う場合には不可欠の仮定である。本章では，誤差項は正規分布に従うと仮定する。正規分布では，確率変数どうしが互いに無相関であることと，互いに独立であることは同値である。したがって，誤差項が正規分布に従うときには，仮定 **(3)** と誤差項どうしが互いに独立であるということは，同値である。

(9.2) で表される回帰モデルを 2 変数線形回帰モデルといったが，ここで“ 線形 ”の意味について若干の注意を述べる。線形回帰モデルの“ 線形 ”は，回帰係数（$\alpha$ と $\beta$）に関して線形という意味であって，従属変数と独立変数に関しては非線形であってもかまわない。例えば,

$$\log Y_t = \alpha + \beta \log X_t + u_t \tag{9.3}$$

という回帰モデルでも，$Y'_t = \log Y_t$，$X'_t = \log X_t$ とおくと

$$Y'_t = \alpha + \beta X'_t + u_t$$

という 2 変数回帰モデルで表すことができる。このように，もとの変数に何らかの変換（例えば，対数をとる）を施しても，変換の結果得られた回帰式が回帰係数に関して線形であれば，以下で述べる回帰モデルに関する推測はそのまま成立する。ただし，回帰係数の意味は異なったものとなるので，注意を要する。

(9.3) のように，変数が対数で表されているとき，**対数線形回帰モデル**という。対数線形回帰モデル (9.3) の両辺を $X_t$ で微分すると

$$\frac{\mathrm{d}\log Y_t}{\mathrm{d}X_t} = \beta\frac{\mathrm{d}\log X_t}{\mathrm{d}X_t}$$

となる。左辺は，

$$\frac{\mathrm{d}\log Y_t}{\mathrm{d}X_t} = \frac{\mathrm{d}\log Y_t}{\mathrm{d}Y_t}\,\frac{\mathrm{d}Y_t}{\mathrm{d}X_t} = \frac{1}{Y_t}\frac{\mathrm{d}Y_t}{\mathrm{d}X_t}$$

であり，右辺は

$$\beta\frac{\mathrm{d}\log X_t}{\mathrm{d}X_t} = \beta\frac{1}{X_t}$$

であるので，

$$\beta = \frac{\mathrm{d}Y_t/Y_t}{\mathrm{d}X_t/X_t}$$

が得られる。この式から，$\beta$ は $X_t$ が 1 %変化したとき，$Y_t$ が何%変化するかを表していることが分かる。すなわち，対数を取らない通常の回帰モデル (9.2) では $\beta = \mathrm{d}Y_t/\mathrm{d}X_t$ であるので，勾配係数 $\beta$ は $Y_t$ の $X_t$ に対する限界変化率を表しているが，対数線形回帰モデルでは，勾配係数は，$Y_t$ の $X_t$ に対する**弾力性**を表しているのである。

## 9.3　最小 2 乗法

2 つの変数 $X$ と $Y$ の $n$ 組の観測値 $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \cdots, (X_n, Y_n)$ が与えられたものとしよう。これらのデータから，回帰モデル

$$Y_t = \alpha + \beta X_t + u_t, \qquad u_t \sim \mathrm{N}(0, \sigma^2)$$

の未知パラメータ $\alpha$，$\beta$ および $\sigma^2$ を推定する方法を考えよう。

**図** 9.2　**真の回帰直線（実線）と推定回帰直線（点線）**

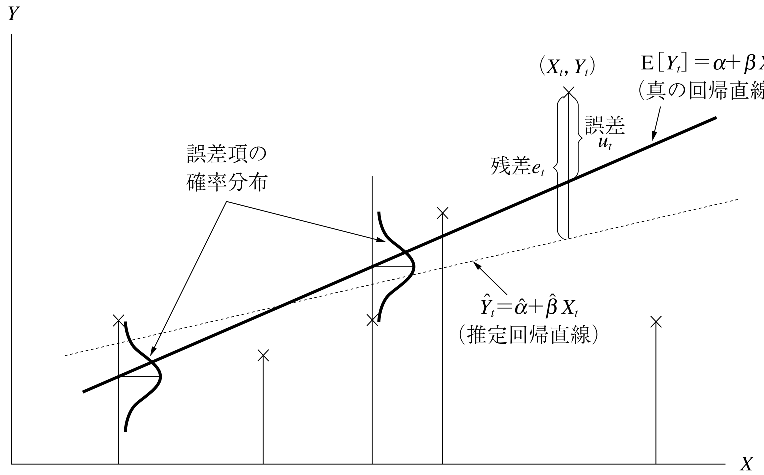



図 9.2 の実線で表された直線は，（観測できない）真の回帰直線

$$\mathrm{E}[Y_t] = \alpha + \beta X_t$$

であり，この直線と観測値 $Y_t$ との垂直距離（偏差）が誤差 $u_t$ である。回帰直線の $\alpha$ と $\beta$ を，何らかの方法で得られたそれらの推定値 $\hat{\alpha}$ と $\hat{\beta}$ で置きかえた

$$\hat{Y}_t = \hat{\alpha} + \hat{\beta}X_t$$

を，**推定回帰直線**という（$\hat{\alpha}$ はハットアルファまたはアルファハットと読む)。図 9.2 の点線で表された直線が推定回帰直線である。図中の $\times$ は $X$ と $Y$ のデータを表す。

$\hat{\alpha}$ と $\hat{\beta}$ が $\alpha$ と $\beta$ の真の値に正確に一致することは期待できないので，推定回帰直線が真の回帰直線に正確に一致することも期待できない。観測値 $Y_t$ と真の回帰直線との偏差を誤差といったが，$Y_t$ とその推定値 $\hat{Y}_t$ との差

$$e_t = Y_t - \hat{Y}_t$$

を**残差**（residual）という。誤差 $(u_t)$ は観測されないが，残差 $(e_t)$ は観測されるので，誤差と残差は異なった概念であり，残差は誤差の推定値であると考えられる（図 9.2 参照)。

$\alpha$ と $\beta$ の推定値を得るための 1 つの方法は，推定回帰直線と各観測値との間の「距離」と考えられる量をできるだけ小さくするような $\hat{\alpha}$ と $\hat{\beta}$ の値を選ぶという方法である。おのおのの観測値と推定回帰直線の垂直「距離」（残差）にはばらつきがある。しかも，残差は誤差の推定値であるので，仮定 **(1)** によりプラスとマイナスがほぼ半分ずつ現れると考えられる。このことから，残差そのものの和を観測値全体と推定回帰直線の距離と考えると，プラスとマイナスが相殺されるので，場合によっては 0 になってしまう。事実，後で示すように，最小 2 乗法で推定を行うと，残差の和は 0 になる。そこで，残差の絶対値の和を観測値全体と推定回帰直線の距離と考えるのが 1 つの考え方である（最小絶対偏差推定法)。しかし，絶対値は数学的な取扱いが容易ではないので，残差を 2 乗したものの和（残差 2 乗和）を観測値全体と推定回帰直線の距離と考えることにする。この残差 2 乗和を最小にする $\hat{\alpha}$ と $\hat{\beta}$ の値を見つけようというのが**最小 2 乗法**（least squares method）の考え方である。

残差 2 乗和は

$$L = L(\hat{\alpha},\ \hat{\beta}) = \sum_{t=1}^{n} e_t^2 = \sum_{t=1}^{n} (Y_t - \hat{Y}_t)^2 = \sum_{t=1}^{n} (Y_t - \hat{\alpha} - \hat{\beta} X_t)^2$$

で与えられる。これを最小にする $\hat{\alpha}$ と $\hat{\beta}$ の値を求めるために，$L$ を $\hat{\alpha}$ と $\hat{\beta}$ で偏微分すると

$$\begin{aligned} \frac{\partial L(\hat{\alpha},\ \hat{\beta})}{\partial \hat{\alpha}} &= -2 \sum_{t=1}^{n} (Y_t - \hat{\alpha} - \hat{\beta} X_t) \\ \frac{\partial L(\hat{\alpha},\ \hat{\beta})}{\partial \hat{\beta}} &= -2 \sum_{t=1}^{n} X_t (Y_t - \hat{\alpha} - \hat{\beta} X_t) \end{aligned}$$

が得られる。$\partial L / \partial \hat{\alpha} = 0$，$\partial L / \partial \hat{\beta} = 0$ とおくと，次の**正規方程式**（normal equation）と呼ばれる方程式が得られる。

$$n\hat{\alpha} + \left( \sum_{t=1}^{n} X_t \right) \hat{\beta} = \sum_{t=1}^{n} Y_t \tag{9.4}$$

$$\left( \sum_{t=1}^{n} X_t \right) \hat{\alpha} + \left( \sum_{t=1}^{n} X_t^2 \right) \hat{\beta} = \sum_{t=1}^{n} X_t Y_t \tag{9.5}$$

この正規方程式は，$\hat{\alpha}$ と $\hat{\beta}$ を未知数とする 2 元連立 1 次方程式であるので，正規方程式を解けば残差 2 乗和を最小にする $\hat{\alpha}$ と $\hat{\beta}$ の値が求まる。(9.4) の両辺に $\sum_{t=1}^{n} X_t$ を掛け，(9.5) の両辺に $n$ を掛けて，辺々を差し引くと

$$\hat{\beta} = \frac{n\sum_{t=1}^{n} X_t Y_t - \sum_{t=1}^{n} X_t \sum_{t=1}^{n} Y_t}{n\sum_{t=1}^{n} X_t^2 - \left(\sum_{t=1}^{n} X_t\right)^2} \tag{9.6}$$

となり，$\hat{\beta}$ が求まる。$Y_t$ が実現値であるとき，$\hat{\beta}$ を $\beta$ の**最小 2 乗推定値**（least squares estimate）という。また，$Y_t$ を実現値ではなく（標本）確率変数と考えたとき，$\hat{\beta}$ を**最小 2 乗推定量**（least squares estimator）という。

$\hat{\alpha}$ を固定すれば，残差 2 乗和 $L$ は $\beta$ の 2 次関数であるので，下に向かって凸の形をしており，逆に $\hat{\beta}$ を固定すれば，$L$ は $\hat{\alpha}$ の 2 次関数で，下に向かって凸の形をしている。このことから，$L$ を $\hat{\alpha}$ と $\hat{\beta}$ の関数と見たとき，$L$ は $\hat{\alpha}$–$\hat{\beta}$ 平面上でお椀が浮いているような形になっていることが分かる。したがって，$\partial L/\partial\hat{\alpha} = 0$，$\partial L/\partial\hat{\beta} = 0$（極値の必要条件）を満たす $\hat{\alpha}$ と $\hat{\beta}$ を求めれば，そのとき $L$ が最小となる。

$\sum_{t=1}^{n} X_t = n\overline{X}$，$\sum_{t=1}^{n} Y_t = n\overline{Y}$ から $\hat{\beta}$ は次のように変形できる。

$$\hat{\beta} = \frac{n\sum_{t=1}^{n} X_t Y_t - n^2\overline{X}\,\overline{Y}}{n\sum_{t=1}^{n} X_t^2 - n^2\overline{X}^2} = \frac{\sum_{t=1}^{n} X_t Y_t - n\overline{X}\,\overline{Y}}{\sum_{t=1}^{n} X_t^2 - n\overline{X}^2}$$

さらに，

$$\sum_{t=1}^{n} X_t Y_t - n\overline{X}\,\overline{Y} = \sum_{t=1}^{n} (X_t - \overline{X})(Y_t - \overline{Y}) \tag{9.7}$$

$$\sum_{t=1}^{n} X_t^2 - n\overline{X}^2 = \sum_{t=1}^{n} (X_t - \overline{X})^2 \tag{9.8}$$

を使うと，

$$\hat{\beta} = \frac{\sum_{t=1}^{n} (X_t - \overline{X})(Y_t - \overline{Y})}{\sum_{t=1}^{n} (X_t - \overline{X})^2}$$

となる。

$x_t = X_t - \overline{X}$，$y_t = Y_t - \overline{Y}$ とおくと（回帰分析では，よく平均からの偏差を小文字で表す），$\hat{\beta}$ は次のように書ける。

$$\hat{\beta} = \frac{\sum_{t=1}^{n} x_t y_t}{\sum_{t=1}^{n} x_t^2} \tag{9.9}$$

正規方程式 (9.4) の両辺を $n$ で割ると，

$$\overline{Y} = \hat{\alpha} + \hat{\beta}\,\overline{X} \tag{9.10}$$

が得られる。この式は，推定された回帰直線は点 $(\overline{X},\ \overline{Y})$ を通ることを意味している。また，(9.10) から，$\alpha$ の最小 2 乗推定値を得ることができる。

$$\hat{\alpha} = \overline{Y} - \hat{\beta}\,\overline{X} \tag{9.11}$$

**例題** 9.1　次の 5 つのデータがあるとき，回帰係数の最小 2 乗推定値を求めよ。

| $X_t$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $Y_t$ | 2 | 5 | 4 | 8 | 6 |

**解**　まず，回帰係数を計算するため次の表を作る。

| | $X_t$ | $Y_t$ | $X_t^2$ | $Y_t^2$ | $X_tY_t$ |
|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 1 | 4 | 2 |
| | 2 | 5 | 4 | 25 | 10 |
| | 3 | 4 | 9 | 16 | 12 |
| | 4 | 8 | 16 | 64 | 32 |
| | 5 | 6 | 25 | 36 | 30 |
| 合計 | 15 | 25 | 55 | 145 | 86 |

表から，

$$\sum_{t=1}^{n} X_t = 15, \quad \sum_{t=1}^{n} X_t^2 = 55, \quad \sum_{t=1}^{n} Y_t = 25, \quad \sum_{t=1}^{n} X_tY_t = 86$$

なので，正規方程式は

$$5\hat{\alpha} + 15\hat{\beta} = 25$$
$$15\hat{\alpha} + 55\hat{\beta} = 86$$

となる。この 2 元連立 1 次方程式を解くと，$\hat{\alpha} = 1.7$，$\hat{\beta} = 1.1$ を得る。

また，$x_t = X_t - \overline{X}$，$y_t = Y_t - \overline{Y}$ として，偏差形の表を作ると

| | $X_t$ | $Y_t$ | $x_t$ | $y_t$ | $x_t^2$ | $y_t^2$ | $x_t y_t$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | $-2$ | $-3$ | 4 | 9 | 6 |
| | 2 | 5 | $-1$ | 0 | 1 | 0 | 0 |
| | 3 | 4 | 0 | $-1$ | 0 | 1 | 0 |
| | 4 | 8 | 1 | 3 | 1 | 9 | 3 |
| | 5 | 6 | 2 | 1 | 4 | 1 | 2 |
| 合計 | 15 | 25 | 0 | 0 | 10 | 20 | 11 |

この表から，

$$\overline{X} = \frac{15}{5} = 3, \qquad \overline{Y} = \frac{25}{5} = 5,$$
$$\sum_{t=1}^{n} x_t^2 = 10, \qquad \sum_{t=1}^{n} x_t y_t = 11$$

となるので，(9.9) と (9.11) に代入すると，

$$\hat{\beta} = \frac{\sum_{t=1}^{5} x_t y_t}{\sum_{t=1}^{5} x_t^2} = \frac{11}{10} = 1.1$$
$$\hat{\alpha} = \overline{Y} - \hat{\beta}\overline{X} = 5 - 1.1 \times 3 = 1.7$$

が得られる。以上の結果から，推定された回帰直線は，

$$\hat{Y}_t = 1.7 + 1.1 X_t$$

と書ける。

誤差項の分散 ($\sigma^2$) を**誤差分散**というが，この誤差分散は残差に基づいて推定される。誤差分散の推定に先立って，まず残差に関する制約について述べる。

$\hat{\alpha}$ と $\hat{\beta}$ を $\alpha$ と $\beta$ の最小 2 乗推定値とすると，残差は

$$e_t = Y_t - \hat{Y}_t = Y_t - \hat{\alpha} - \hat{\beta} X_t$$

で与えられる。$L$ を $\hat{\alpha}$ で偏微分した式

$$\frac{\partial L(\hat{\alpha},\ \hat{\beta})}{\partial \hat{\alpha}} = -2 \sum_{t=1}^{n} \underbrace{(Y_t - \hat{\alpha} - \hat{\beta} X_t)}_{e_t} = 0$$

から $\sum_{t=1}^{n} e_t = 0$ となる。また，$L$ を $\hat{\beta}$ で偏微分した式

$$\frac{\partial L(\hat{\alpha},\ \hat{\beta})}{\partial \hat{\beta}} = -2\sum_{t=1}^{n} X_t(\underbrace{Y_t - \hat{\alpha} - \hat{\beta}X_t}_{e_t}) = 0$$

から $\sum_{t=1}^{n} X_t e_t = 0$ となる。すなわち，残差には $\sum_{t=1}^{n} e_t = 0$ と $\sum_{t=1}^{n} X_t e_t = 0$ の 2 つの制約があることになる。

この制約の意味を理解するため，例えば $n = 5$ の場合を考えよう。このとき，制約は

$$e_1 + e_2 + e_3 + e_4 + e_5 = 0$$
$$X_1 e_1 + X_2 e_2 + X_3 e_3 + X_4 e_4 + X_5 e_5 = 0$$

となる。いま，仮に $e_3$，$e_4$，$e_5$ の値をそれぞれ $e_3 = 1$，$e_4 = 2$，$e_5 = 3$ とする。このとき，制約から

$$e_1 + e_2 = -1 - 2 - 3 = -6$$
$$X_1 e_1 + X_2 e_2 = -X_3 - 2X_4 - 3X_3$$

となるが，$X_1$，$X_2$，$X_3$，$X_4$，$X_5$ の値はデータとして与えられているので，この式は $e_1$ と $e_2$ を未知数とする 2 元 1 次連立方程式である。したがって，この方程式が解をもてば，$e_1$ と $e_2$ の値は方程式の解として一意に定まってしまう。このことは，$e_1$，$e_2$，$e_3$，$e_4$，$e_5$ のうち，どれか 3 つは任意の値をとることができるが，どれか 3 つが特定の値をとると（例えば，$e_3$，$e_4$，$e_5$），残りの 2 つ $(e_1,\ e_2)$ は方程式の解として定まってしまい，任意の値をとることはできないことを意味する。

同様にして，$e_1$，$e_2$，$\cdots$，$e_n$ のうち $n-2$ 個は任意の値をとることができるが，$n-2$ 個の値が定まると，残りの 2 個は連立方程式の解として定まってしまい，任意の値をとることができない。このことから，$e_1$，$e_2$，$\cdots$，$e_n$ の**自由度**は $n-2$ であるといわれる。すなわち，$e_1$，$e_2$，$\cdots$，$e_n$ のうち，自由な値がとれるのは，2 つの制約のため，$n-2$ 個となるのである。

$s^2$ を次のように定義すると，

$$\begin{aligned} s^2 &= \frac{1}{n-2}\sum_{t=1}^{n} e_t^2 = \frac{1}{n-2}\sum_{t=1}^{n}(Y_t - \hat{Y}_t)^2 \\ &= \frac{1}{n-2}\sum_{t=1}^{n}(Y_t - \hat{\alpha} - \hat{\beta}X_t)^2 \end{aligned}$$

$s^2$ が $\sigma^2$ の不偏推定量である。すなわち，

$$\mathrm{E}[s^2] = \sigma^2$$

が成立する。$s^2$ は $e_1$，$e_2$，$\cdots$，$e_n$ に基づいて定義されており，その自由度は $n-2$ であるので，残差 2 乗和 $(\sum_{t=1}^{n} e_t^2)$ を $n$ ではなく，$n-2$ で割ったとき $\sigma^2$ の不偏推定量が得られるのである。

## 9.4　最小 2 乗推定量の分布と性質

$\hat{\alpha}$ の分布と $\hat{\beta}$ の分布は，それぞれ，

$$\hat{\alpha} \sim \mathrm{N}\Big(\alpha,\ \sigma^2\big(\frac{1}{n} + \frac{\overline{X}^2}{\sum_{t=1}^{n} x_t^2}\big)\Big) \tag{9.12}$$

$$\hat{\beta} \sim \mathrm{N}\Big(\beta,\ \frac{\sigma^2}{\sum_{t=1}^{n} x_t^2}\Big) \tag{9.13}$$

であることが分かっている。$\mathrm{E}[\hat{\alpha}] = \alpha$，$\mathrm{E}[\hat{\beta}] = \beta$ であるので，$\hat{\alpha}$ と $\hat{\beta}$ は $\alpha$ と $\beta$ の不偏推定量である。

従属変数 $Y_1$，$Y_2$，$\cdots$，$Y_n$ の 1 次関数（線形関数）で表される推定量を**線形推定量**という。(9.9) と (9.11) から分かるように，最小 2 乗推定量は線形推定量である。回帰係数のすべての線形かつ不偏な推定量（線形不偏推定量）の中で，最小の分散をもつのは最小 2 乗推定量であることを示すことができるので，最小 2 乗推定量は，線形不偏推定量のクラス（集まり）の中では有効推定量である（**ガウス・マルコフの定理**と呼ばれる）。 このことから，最小 2 乗推定量は**最良線形不偏推定量**（best linear unbiased estimator, BLUE）であるといわれる。

(9.13) から，$\hat{\beta}$ の分散は

$$\mathrm{V}(\hat{\beta}) = \frac{\sigma^2}{\sum_{t=1}^{n} x_t^2} \tag{9.14}$$

で与えられる。しかし，(9.14) には未知母数 $\sigma^2$ が含まれているので，その推定量 $s^2$ で置きかえると

$$\hat{\mathrm{V}}(\hat{\beta}) = \frac{s^2}{\sum\limits_{t=1}^{n} x_t^2}$$

となる。ここで，V にハットがついているのは，これが，$\hat{\beta}$ の分散の推定量であることを表すためである。この $\hat{\mathrm{V}}(\hat{\beta})$ の正の平方根を $\hat{\beta}$ の**標準誤差**（standard error）といい，$Se(\hat{\beta})$ と書く。

$$Se(\hat{\beta}) = \frac{s}{\sqrt{\sum\limits_{t=1}^{n} x_t^2}}$$

同様に，$\hat{\alpha}$ の標準誤差は

$$Se(\hat{\alpha}) = s\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{\overline{X}^2}{\sum\limits_{t=1}^{n} x_t^2}}$$

となる。

$\hat{\beta}$ の分布は (9.13) で与えられているので，標準化すると

$$Z = \frac{\hat{\beta} - \beta}{\sigma / \sqrt{\sum\limits_{t=1}^{n} x_t^2}} \sim \mathrm{N}(0,\ 1) \tag{9.15}$$

となる。また，$U = (n-2)s^2/\sigma^2 \sim \chi^2(n-2)$ で，$U$ と $Z$ は独立となる (証明略)。定理 6.4 から，$Z/\sqrt{U/(n-2)} \sim t(n-2)$ を得る。すなわち

$$\frac{\hat{\beta} - \beta}{s / \sqrt{\sum\limits_{t=1}^{n} x_t^2}} = \frac{\hat{\beta} - \beta}{Se(\hat{\beta})} \sim t(n-2)$$

この事実を使って，$\beta$ に関する仮説の検定を行う。いま，帰無仮説が $\beta = \beta_0$ のとき，検定統計量は

$$t_{\hat{\beta}} = \frac{\hat{\beta} - \beta_0}{Se(\hat{\beta})}$$

で与えられ，帰無仮説が正しいときには，自由度 $n-2$ の $t$ 分布に従う。

対立仮説としては，次の 3 つのうちから適当なものを選ぶ。

両側検定　$H_1:\ \beta \fallingdotseq \beta_0$

右側検定　$H_1:\ \beta > \beta_0$

左側検定　$H_1:\ \beta < \beta_0$

$\beta$ に関して，$\beta_0$ より大きいか小さいかの情報がない場合には，両側検定が用いられる。また，何らかの情報で，帰無仮説が正しくなく，$\beta$ が $\beta_0$ より大きい（小さい）ことが分かっている場合には，右側検定（左側検定）が用いられる。各検定の棄却域は 次のとおりである。

両側検定　$|\,t_{\hat{\beta}}\,| > t_{\alpha/2}(n-2)$

右側検定　$t_{\hat{\beta}} > t_{\alpha}(n-2)$

左側検定　$t_{\hat{\beta}} < -t_{\alpha}(n-2)$

ただし，$t_\alpha(n-2)$ は自由度 $n-2$ の $t$ 分布の上側 $100\alpha$ パーセント点である。

$\beta$ に関する検定のうち，特に，$\beta_0 = 0$ のとき，すなわち帰無仮説が $H_0 : \beta = 0$ のとき，この仮説は $X_t$ が $Y_t$ に何の影響も与えないことを意味する。回帰分析は，$X_t$ が $Y_t$ に影響を与えることを想定して行われるので，もしこの帰無仮説が採択されれば，回帰分析を行うことの意味が失われる。このことから，帰無仮説 $H_0 : \beta = 0$ に対して検定を行うことは特に重要なことであると考えられる。この帰無仮説に対する検定統計量

$$t_{\hat{\beta}} = \frac{\hat{\beta}}{Se(\hat{\beta})}$$

は $\hat{\beta}$ の $\boldsymbol{t}$ **値**（t-value）と呼ばれ，統計分析ソフトでは標準で出力される。

同様に，帰無仮説 $H_0 : \alpha = \alpha_0$ に対する検定統計量は

$$t_{\hat{\alpha}} = \frac{\hat{\alpha} - \alpha_0}{Se(\hat{\alpha})}$$

であり，その $t$ 値は

$$t_{\hat{\alpha}} = \frac{\hat{\alpha}}{Se(\hat{\alpha})}$$

である。

**例題** 9.2　例題 9.1 のデータを使って誤差分散の不偏推定値を求め，回帰係数がゼロであるという仮説を有意水準 5 % で検定せよ。

**解**　まず，残差を計算するための表を作る。表において，$Y_t$ の計算値 $\hat{Y}_t$ は次のようにして求めている。

推定回帰直線は

$$\hat{Y}_t = 1.7 + 1.1X_t$$

であるので，$X_1 = 1$ を代入すると $\hat{Y}_1 = 1.7 + 1.1 \times 1 = 2.8$ となり $X_2 = 2$ を代入すると $\hat{Y}_1 = 1.7 + 1.1 \times 2 = 3.9$ となる。以下，同様にして $\hat{Y}_3$，$\hat{Y}_4$ および $\hat{Y}_5$ が求まる。

| | $X_t$ | $Y_t$ | $\hat{Y}_t$ | $e_t = Y_t - \hat{Y}_t$ | $e_t^2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 2.8 | −0.8 | 0.64 |
| | 2 | 5 | 3.9 | 1.1 | 1.21 |
| | 3 | 4 | 5.0 | −1.0 | 1.00 |
| | 4 | 8 | 6.1 | 1.9 | 3.61 |
| | 5 | 6 | 7.2 | −1.2 | 1.44 |
| 合計 | 15 | 25 | | 0.0 | 7.90 |

この表と例題 9.1 の表から，

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-2}\sum_{t=1}^{5} e_t^2} = \sqrt{\frac{7.9}{3}} = 1.623$$

$$Se(\hat{\beta}) = \frac{s}{\sqrt{\sum_{t=1}^{5} x_t^2}} = \frac{1.623}{\sqrt{10}} = 0.513$$

$$Se(\hat{\alpha}) = s\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{\overline{X}^2}{\sum_{t=1}^{5} x_t^2}} = 1.623\sqrt{\frac{1}{5} + \frac{3^2}{10}} = 1.702$$

が得られる。

帰無仮説 $H_0 : \beta = 0$ を，対立仮説 $H_1 : \beta \fallingdotseq 0$ に対して検定する。検定統計量の値（$t$ 値）は，

$$t_{\hat{\beta}} = \frac{\hat{\beta}}{Se(\hat{\beta})} = \frac{1.1}{0.513} = 2.144$$

となる。検定が両側検定で自由度が 3 であるとき，$t$ 分布表から有意水準 0.05 の棄却域は

$$|t_{\hat{\beta}}| > t_{0.025}(3) = 3.182 \qquad （なぜなら，\mathrm{P}(|\ t_{\hat{\beta}}\ | > 3.182) = 0.05）$$

である。よって，検定統計量の値は採択域に入るので，帰無仮説は採択される。このことは，$X$ は $Y$ に有意な影響を与える変数ではないことを示している。

同様にして，帰無仮説 $H_0 : \alpha = 0$ を，対立仮説 $H_1 : \alpha \neq 0$ に対して検定する。検定統計量の値（$t$ 値）は，

$$t_{\hat{\alpha}} = \frac{\hat{\alpha}}{Se(\hat{\alpha})} = \frac{1.7}{1.702} = 0.999$$

であるので，検定統計量の値は再び採択域に入る。よって，帰無仮説は採択される。

## 9.5 決定係数

従属変数 $Y_t$ の平均からの偏差の 2 乗和 $\sum_{t=1}^{n}(Y_t - \overline{Y})^2$ を $Y_t$ の**平均の回りの全変動**といい，残差 2 乗和を**回帰によって説明できない変動**という。また，$\sum_{t=1}^{n}(\hat{Y}_t - \overline{Y})^2$ を**回帰によって説明できる変動**という。これらの変動には，次の関係式が成立する。

$$\underbrace{\sum_{t=1}^{n}(Y_t - \overline{Y})^2}_{\text{平均の回りの変動}} = \underbrace{\sum_{t=1}^{n}(\hat{Y}_t - \overline{Y})^2}_{\text{回帰によって説明できる変動}} + \underbrace{\sum_{t=1}^{n} e_t^2}_{\text{回帰によって説明できない変動}} \tag{9.16}$$

(9.16) は，$Y_t$ の平均の回りの変動が，回帰によって説明できる変動と説明できない変動の和で表されることを示している。

(9.16) の両辺を $\sum_{t=1}^{n}(Y_t - \overline{Y})^2$ で割ると

$$1 = \frac{\sum_{t=1}^{n}(\hat{Y}_t - \overline{Y})^2}{\sum_{t=1}^{n}(Y_t - \overline{Y})^2} + \frac{\sum_{t=1}^{n} e_t^2}{\sum_{t=1}^{n}(Y_t - \overline{Y})^2}$$

となり

$$\frac{\sum_{t=1}^{n}(\hat{Y}_t-\overline{Y})^2}{\sum_{t=1}^{n}(Y_t-\overline{Y})^2}=1-\frac{\sum_{t=1}^{n}e_t^2}{\sum_{t=1}^{n}(Y_t-\overline{Y})^2}=1-\frac{\sum_{t=1}^{n}e_t^2}{\sum_{t=1}^{n}y_t^2}$$

が得られる。この式の左辺を $R^2$ と書いて，**決定係数**（coefficient of determination）という。

$$R^2=\frac{\sum_{t=1}^{n}(\hat{Y}_t-\overline{Y})^2}{\sum_{t=1}^{n}(Y_t-\overline{Y})^2}=1-\frac{\sum_{t=1}^{n}e_t^2}{\sum_{t=1}^{n}y_t^2}$$

$R^2$ は回帰によって説明できる変動の全変動に占める割合を表しており，推定された回帰直線のデータへの当てはまりの良さ（goodness of fit）を測る尺度である。

$$1-R^2=\frac{\sum_{t=1}^{n}e_t^2}{\sum_{t=1}^{n}y_t^2}\geqq 0$$

なので，$0\leqq R^2\leqq 1$ となり，$-1\leqq R\leqq 1$ である。$R=1$ のとき，すべてのデータが正の傾きをもつ直線上にあり，$R=-1$ のとき，すべてのデータが負の傾きをもつ直線上にある。

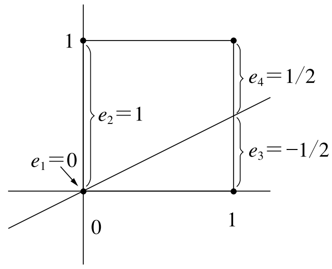
決定係数は，推定された回帰直線のデータへの当てはまりの良さを示す尺度であるが，定数項がない回帰モデルを推定した場合には，決定係数には何の意味もない。このことを示すため，次の例を考えよう（この例は，Becker and Kennedy (1992), A lesson in least squares and R squared, *American Statistician*, 46, 282-283 による)。

4 つのデータ (0, 0)，(0, 1)，(1, 0)，(1, 1) を考える。これらのデータは完全に散らばっており，$Y$ と $X$ の間には何の関係もないので，最小 2 乗法で回帰直線を当てはめると，(0, 1/2) を通り $X$ 軸に水平な直線 ($Y=1/2$) となるはずである。しかし，回帰直線に定数項がないとき，モデルは

$$Y_t=\beta X_t+u_t$$

と表され，このモデルでは，推定回帰直線は必然的に原点を通る。

**図** 9.3　4 **つのデータと残差**




このとき，データ (0, 0) に対する残差は強制的に 0 であり ($e_1 = 0$)，データ (0, 1) に対する残差は強制的に 1 である ($e_2 = 1$)（図 9.3 参照)。データ (1, 0) とデータ (1, 1) に対する残差を，それぞれ，$e_3$，$e_4$ と置くと，残差 2 乗和は

$$e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 + e_4^2 = 0^2 + 1^2 + e_3^2 + e_4^2$$

となり，$e_3^2 + e_4^2$ が最小になるときに残差 2 乗和も最小になる。$e_4 = e_3 + 1$ なので，

$$e_3^2 + e_4^2 = e_3^2 + (e_3 + 1)^2 = 2e_3^2 + 2e_3 + 1 = 2\left(e_3 + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}$$

となり，$e_3 = -1/2$, $e_4 = 1/2$ のとき残差 2 乗和は最小値

$$e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 + e_4^2 = 0^2 + 1^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{2}$$

をもつことが分かる。

$\overline{Y}$ の回りの全変動は

$$\begin{aligned}\sum_{t=1}^{4}(Y_t - \overline{Y})^2 &= \left(0 - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(1 - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(0 - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(1 - \frac{1}{2}\right)^2 \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1\end{aligned}$$

なので，決定係数は

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{t=1}^{n} e_t^2}{\sum_{t=1}^{n}(Y_t - \overline{Y})^2} = 1 - \frac{3/2}{1} = -\frac{1}{2}$$

となり，負になってしまう。このことから，定数項のないモデルでは，決定係数には何の意味もないことが分かる。

**例題** 9.3　例題 9.1 で推定された回帰直線の決定係数を求めよ。

**解**　例題 9.1 から $\sum_{t=1}^{n} y_t^2 = 20$，例題 9.2 から $\sum_{t=1}^{n} e_t^2 = 7.9$ であるので，決定係数の値は

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{t=1}^{n} e_t^2}{\sum_{t=1}^{n} y_t^2} = 1 - \frac{7.9}{20} = 0.605$$

となる。

## 9.6　数値例

回帰モデル推定の実例として，表 9.1 のデータを使って消費関数を推定しよう。この数値例の計算結果を電卓で確認するのは，容易な作業ではない。できれば，パソコンで統計ソフトやエクセルなどを使って確認してほしい。なお，ここでは，小数点以下 4 桁目を四捨五入した数値を示しているが，パソコンで再計算したとき，小数点以下で若干異なる結果が得られる可能性がある。

例題 9.1 では，データが簡単なため，$X_t$ と $Y_t$ の偏差形を直接計算したが，現実のデータで偏差形の計算を行うのは容易ではない。そこで，公式 (9.7) と (9.8) を使って $\beta$ の最小 2 乗推定値を求める。

まず，

$$\sum_{t=1}^{n} X_t = 5090.2, \qquad \sum_{t=1}^{n} Y_t = 4367.5$$

から，$\overline{X} = 267.905$，$\overline{Y} = 229.868$ となる。また

$$\sum_{t=1}^{n} X_t Y_t = 1198268.83, \qquad \sum_{t=1}^{n} X_t^2 = 1393321.8$$

から

$$\sum_{t=1}^{n} x_t y_t = \sum_{t=1}^{n} (X_t - \overline{X})(Y_t - \overline{Y}) = \sum_{t=1}^{n} X_t Y_t - n\overline{X}\,\overline{Y} = 28195.886$$

$$\sum_{t=1}^{n} x_t^2 = \sum_{t=1}^{n} (X_t - \overline{X})^2 = \sum_{t=1}^{n} X_t^2 - n\overline{X}^2 = 29633.109$$

よって，(9.9) から

$$\hat{\beta} = \frac{\sum_{t=1}^{n} x_t y_t}{\sum_{t=1}^{n} x_t^2} = 0.951$$

となる。また，(9.11) から $\alpha$ の最小 2 乗推定値は

$$\hat{\alpha} = \overline{Y} - \hat{\beta}\overline{X} = 229.868 - 0.951 \times 267.905 = -24.910$$

となる。

残差 2 乗和を計算するため，例題 9.2 と同様にして 165 ページの表を作る。この表では，$\sum_{t=1}^{n} e_t = 0.003$ となっており，$\sum_{t=1}^{n} e_t = 0$ とはなっていないが，これは丸めの誤差のためである。この表から

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-2}\sum_{t=1}^{n} e_t^2} = \sqrt{\frac{95.818}{19-2}} = 2.374$$
$$Se(\hat{\beta}) = \frac{s}{\sqrt{\sum_{t=1}^{n} x_t^2}} = \frac{2.374}{\sqrt{29633.109}} = 0.0138$$
$$Se(\hat{\alpha}) = s\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{\overline{X}^2}{\sum_{t=1}^{n} x_t^2}} = 2.374 \times \sqrt{\frac{1}{19} + \frac{267.905^2}{29633.109}} = 3.735$$

が得られる。

限界消費性向 $\beta$ は非負であると考えられるので，帰無仮説を $H_0 : \beta = 0$，対立仮説を $H_1 : \beta > 0$ として有意水準 0.01 の検定を行う。検定統計量の値（$t$ 値）は，

$$t_{\hat{\beta}} = \frac{\hat{\beta}}{Se(\hat{\beta})} = \frac{0.951}{0.0138} = 68.913$$

となる。検定が右側検定で自由度が 17 であるとき，$t$ 分布表から有意水準 0.01 の棄却域は

$$t_{\hat{\beta}} > t_{0.01}(17) = 2.567 \qquad \text{（なぜなら，}\mathrm{P}(t_{\hat{\beta}} > 2.567) = 0.01\text{）}$$

| 年度 | $Y_t$ | $X_t$ | $\hat{Y}_t$ | $e_t = Y_t - \hat{Y}_t$ | $e_t^2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1980 | 170.7 | 208.0 | 172.870 | −2.170 | 4.709 |
| 1981 | 173.1 | 212.1 | 176.771 | −3.671 | 13.476 |
| 1982 | 180.8 | 217.0 | 181.433 | −0.633 | 0.401 |
| 1983 | 186.8 | 222.6 | 186.762 | 0.038 | 0.001 |
| 1984 | 191.6 | 227.7 | 191.614 | −0.014 | 0.000 |
| 1985 | 197.9 | 234.5 | 198.084 | −0.184 | 0.034 |
| 1986 | 204.8 | 242.7 | 205.886 | −1.086 | 1.179 |
| 1987 | 213.6 | 247.8 | 210.739 | 2.861 | 8.185 |
| 1988 | 224.9 | 258.5 | 220.919 | 3.981 | 15.848 |
| 1989 | 235.6 | 270.6 | 232.432 | 3.168 | 10.036 |
| 1990 | 246.2 | 280.1 | 241.471 | 4.729 | 22.363 |
| 1991 | 252.1 | 290.3 | 251.176 | 0.924 | 0.854 |
| 1992 | 257.4 | 296.3 | 256.885 | 0.515 | 0.265 |
| 1993 | 260.0 | 300.1 | 260.501 | −0.501 | 0.251 |
| 1994 | 265.3 | 306.0 | 266.114 | −0.814 | 0.663 |
| 1995 | 270.6 | 313.6 | 273.346 | −2.746 | 7.541 |
| 1996 | 278.6 | 321.5 | 280.862 | −2.262 | 5.117 |
| 1997 | 279.8 | 320.3 | 279.721 | 0.079 | 0.006 |
| 1998 | 277.7 | 320.5 | 279.911 | −2.211 | 4.889 |
| 合計 | 5090.2 | 4367.5 | 4367.497 | 0.003 | 95.818 |

である。よって，検定統計量の値は棄却域に入るので，帰無仮説は有意水準 1 % で棄却される。すなわち，変数 $X$ の係数は，有意水準 1 %で有意にゼロとは異なり，所得は消費に有意な影響を与える変数であるといえる。

同様にして，帰無仮説 $H_0 : \alpha = 0$ を，対立仮説 $H_1 : \alpha \fallingdotseq 0$ に対して有意水準 0.01 で検定する。検定統計量の値（$t$ 値）は，

$$t_{\hat{\alpha}} = \frac{\hat{\alpha}}{Se(\hat{\alpha})} = -\frac{24.910}{3.735} = -6.669$$

となる。検定が両側検定で自由度が 17 であるとき，$t$ 分布表から有意水準 0.01 の棄却域は

$$|t_{\hat{\beta}}| > t_{0.005}(17) = 2.898 \qquad \text{（なぜなら，P}(|\,t_{\hat{\beta}}\,| > 2.898) = 0.01\text{）}$$

である。よって，検定統計量の値は棄却域に入るので，帰無仮説は有意水準 1 % で棄却される。

また，

$$\sum_{t=1}^{n} y_t^2 = \sum_{t=1}^{n} Y_t^2 - n\overline{Y}^2 = 1030870 - 19 \times 229.868^2 = 26924.019$$

から，決定係数は

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{t=1}^{n} e_t^2}{\sum_{t=1}^{n} y_t^2} = 1 - \frac{95.818}{26924.019} = 0.996$$

となる。

以上の結果をまとめて，次のように書くことが多い。

$$Y_t = \underset{(-6.669)}{-24.910} + \underset{(68.913)}{0.951} X_t, \qquad R^2 = 0.996$$

ただし，(　) 内の数値は $t$ 値である。

限界消費性向の推定値 $\hat{\beta} = 0.951$ は，経済理論的に期待される条件 $0 < \beta < 1$ を満たしているが，かなり 1 に近く，やや大きすぎるように思われる。また，決定係数も 1 に近く，データへの当てはまりは良好なように見えるが，定数項の推定値は負となっており，これは経済理論に反するものである。しかし，ここで扱われたデータの期間は，1980 年代後半のバブル景気の時期と 90 年以後のバブル崩壊後の不景気の時期を同時に含んでおり，構造変化が起きている可能性がある。したがって，90 年以前と以後に期間を分けて再推定を行うことが必要かもしれないが，ここでの目的は回帰の推定例を示すことにあるので，このことに関してはこれ以上の考察は行わないことにする。

## 練習問題

**9.1**　回帰モデル

$$Y_t = \alpha + \beta X_t + u_t$$

の $\beta$ の最小 2 乗推定値を $\hat{\beta}$ とし，$r$ を $X$ と $Y$ の間の標本相関係数とするとき，

$$r = \hat{\beta}\sqrt{\frac{\sum_{t=1}^{n}(X_t-\overline{X})^2}{\sum_{t=1}^{n}(Y_t-\overline{Y})^2}}$$

となることを示せ。

**9.2**　回帰モデル

$$Y_t = \alpha + \beta X_t + u_t$$

を考える。$\alpha$ と $\beta$ の最小 2 乗推定値を $\hat{\alpha}, \hat{\beta}$ とし，残差を

$$e_t = Y_t - \hat{Y}_t = Y_t - (\hat{\alpha} + \hat{\beta}X_t)$$

とするとき，$Y_t = \overline{Y}_t = (Y_t - \hat{Y}_t) + (Y_t - \overline{Y}_t)$，$\sum_{t=1}^{n} e_t = 0$，$\sum_{t=1}^{n} X_t e_t = 0$ を利用して

$$\sum_{t=1}^{n}(Y_t-\overline{Y})^2 = \sum_{t=1}^{n} e_t^2 + \sum_{t=1}^{n}(\hat{Y}_t-\overline{Y})^2$$

となることを示せ。ただし，$\overline{Y}$ は $Y$ の標本平均であり，$\overline{Y} = \alpha + \beta\overline{X} + \overline{u}_t$ で表されることに注意せよ（$\sum_{t=1}^{n}(\hat{Y}_t-\overline{Y})^2$ は，本文の決定係数の説明のところで述べた，回帰によって説明できる変動である）。

**9.3**　回帰モデル

$$Y_t = \alpha + \beta X_t + u_t$$

を考える。$X$ と $Y$ の 9 組のデータをとって，$\sum_{t=1}^{n} X_t$，$\sum_{t=1}^{n} X_t^2$ などを計算したところ，$\sum_{t=1}^{n} X_t = 45$，$\sum_{t=1}^{n} Y_t = 45$，$\sum_{t=1}^{n} X_t^2 = 285$，$\sum_{t=1}^{n} X_t Y_t = 279$，$\sum_{t=1}^{n} Y_t = 277$ であった。このとき，次の各問に答えよ。

**(1)**　$\alpha$ と $\beta$ の最小 2 乗推定値を求めよ。

**(2)**　$\sigma^2$ の不偏推定値を求めよ。

**(3)**　$\alpha$ と $\beta$ の最小 2 乗推定値の標準誤差を求めよ。

**(4)**　仮説 $H_0 : \alpha = 0$ および $H_0 : \beta = 0$ を検定せよ。

**(5)**　決定係数を求めよ。

**9.4** 回帰モデル

$$Y_t = \alpha + \beta X_t + u_t$$

を考える。16 組のデータをとって，$\beta$ の最小 2 乗推定値を計算したところ 0.8 であり，その $t$ 値は 2.5 であった。このとき，帰無仮説 $H_0$： $\beta = 1$ を検定する方法を考えよ。

**9.5** 次表のデータは 1976 年から 87 年までの原油輸入量（単位：億バレル）と実質国民総生産（単位：兆円）である。

**原油輸入と国民総生産**

（単位：億バレル, 兆円）

| 年 | 原油輸入価格量 ($Y_t$) | 国民総生産 ($X_t$) |
|---|---|---|
| 1976 | 17.5 (2.86) | 200 (5.30) |
| 1977 | 17.3 (2.85) | 210 (5.35) |
| 1978 | 17.2 (2.84) | 221 (5.40) |
| 1979 | 17.2 (2.84) | 233 (5.45) |
| 1980 | 15.6 (2.75) | 242 (5.49) |
| 1981 | 14.3 (2.66) | 250 (5.52) |
| 1982 | 12.9 (2.56) | 258 (5.55) |
| 1983 | 13.3 (2.59) | 268 (5.59) |
| 1984 | 13.1 (2.57) | 281 (5.64) |
| 1985 | 12.2 (2.50) | 294 (5.68) |
| 1986 | 11.8 (2.47) | 302 (5.71) |
| 1987 | 11.6 (2.45) | 318 (5.76) |

（注）　( ) 内の数値は各データの自然対数値。
（出所）東洋経済新報社『経済統計年鑑』(1987 および 1989 年版)。

各変数の自然対数をとった 2 変数線形回帰モデル（**対数線形モデル**と呼ぶ）

$$\log Y_t = \alpha + \beta \log X_t + u_t$$

を想定して，問 9.3 の (**1**) ～ (**5**) と同じ問に答えよ。

また，得られた結果の意味について考えてみよ（ヒント：上の対数線形モデルの両辺を $X$ で微分すると，$\beta = \mathrm{d}\log Y/\mathrm{d}\log X = (X/Y)(\mathrm{d}Y/\mathrm{d}X)$ ：**弾力性**の定義が得られる）。

**9.6** 回帰モデル $Y_t = \alpha + \beta X_t + u_t$ を考える。ただし，誤差項 $u_t$ ($t =$

$1, 2, \cdots, n$) は互いに独立に $u_t \sim \mathrm{N}(0, \sigma^2)$ の正規分布に従うものとする。2 つの変数 $X$ と $Y$ の 5 組のデータが次に与えられている。

| $X_t$ | 3 | −1 | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|---|---|
| $Y_t$ | 4 | 1 | 0 | 1 | 4 |

**(1)**　回帰係数の推定値 $\hat{\alpha}$，$\hat{\beta}$ を求めよ。

**(2)**　決定係数 $R^2$ を求めよ。

**(3)**　誤差項の分散 $\sigma^2$ の推定値 $s^2$ を求めよ。

**(4)**　回帰係数の推定値の標準誤差 $Se(\hat{\alpha})$，$Se(\hat{\beta})$ を求めよ。

**(5)**　回帰係数 $\alpha$，$\beta$ の 95 % 信頼区間を求めよ。

**(6)**　誤差項の分散 $\sigma^2$ の 99 % 信頼区間を求めよ。

**(7)**　$X$ が $Y$ に影響を与えているかどうかを，有意水準 10 % で検定せよ。

第 10 章

# 回帰分析： 重回帰と諸問題

## 10.1　重回帰

2 変数線形回帰モデル (9.2) では，独立変数は $X_t$ ただ 1 つだけであった。しかし，実際には，従属変数 $Y_t$ を理論的に説明する変数が 2 つ以上存在することも十分にありうる。独立変数が 2 つ以上ある回帰を**重回帰**（multiple regression）という（前章のように，独立変数が 1 つだけの回帰を**単回帰**という）。

$n$ 組のデータ $(Y_t,\ X_{1t},\ X_{2t},\ \cdots,\ X_{kt})$，$t = 1, 2, \cdots, n$ を用いて，$k$ 変数の多重回帰モデルを考える。

$$Y_t = \beta_1 X_{1t} + \beta_2 X_{2t} + \cdots + \beta_k X_{kt} + u_t \tag{10.1}$$

ただし，$X_{it}$ は $i$ 番目の説明変数の第 $t$ 番目の観測値を表す。$u_t$ は誤差項（または，攪乱項）で，前章と同じ仮定を用いる（すなわち，$u_1,\ u_2,\ \cdots,\ u_n$ は互いに独立に，平均ゼロ，分散 $\sigma^2$ の正規分布に従う）。$\beta_1,\ \beta_2,\ \cdots,\ \beta_k$ は推定されるべき未知パラメータである。

すべての $t$ について，$X_{1t} = 1$ とすれば，$\beta_1$ は定数項として表される。すなわち，$k = 2$，$X_{1t} = 1$ で，しかも，$X_{2t}$，$\beta_1$，$\beta_2$ がそれぞれ $X_t$，$\alpha$，$\beta$ に置きかえられたとき，第 9 章で扱った単回帰に一致する。

重回帰モデルの係数 $\beta_i$ は $Y$ を変数 $X_i$ で偏微分した値であり，**偏回帰係数**と呼ばれる。その意味は他の変数を固定しておいたとき，変数 $X_i$ が 1 単位増加したときの $Y$ の増分である。

$\hat\beta_1,\ \hat\beta_2,\ \cdots,\ \hat\beta_k$ を何らかの推定量とし，次のような関数 $L(\hat\beta_1, \hat\beta_2, \cdots, \hat\beta_k)$ を定義する。

$$\begin{aligned} L(\hat\beta_1, \hat\beta_2, \cdots, \hat\beta_k) &= \sum_{t=1}^{n} e_t^2 = \sum_{t=1}^{n} (Y_t - \hat Y_t)^2 \\ &= \sum_{t=1}^{n} (Y_t - \hat\beta_1 X_{1t} - \hat\beta_2 X_{2t} - \cdots - \hat\beta_k X_{kt})^2 \end{aligned}$$

このとき，$L(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2, \cdots, \hat{\beta}_k)$ を最小とするような $\hat{\beta}_1$, $\hat{\beta}_2$, $\cdots$, $\hat{\beta}_k$ が最小 2 乗推定量である。

関数 $L(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2, \cdots, \hat{\beta}_k)$ の最小化のためには,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2, \cdots, \hat{\beta}_k)}{\partial \hat{\beta}_1} &= -2\sum_{t=1}^{n} X_{1t}(Y_t - \hat{\beta}_1 X_{1t} - \hat{\beta}_2 X_{2t} - \cdots - \hat{\beta}_k X_{kt}) = 0 \\
\frac{\partial L(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2, \cdots, \hat{\beta}_k)}{\partial \hat{\beta}_2} &= -2\sum_{t=1}^{n} X_{2t}(Y_t - \hat{\beta}_1 X_{1t} - \hat{\beta}_2 X_{2t} - \cdots - \hat{\beta}_k X_{kt}) = 0 \\
&\vdots \\
\frac{\partial L(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2, \cdots, \hat{\beta}_k)}{\partial \hat{\beta}_k} &= -2\sum_{t=1}^{n} X_{kt}(Y_t - \hat{\beta}_1 X_{1t} - \hat{\beta}_2 X_{2t} - \cdots - \hat{\beta}_k X_{kt}) = 0
\end{aligned}$$

を満たす $\hat{\beta}_1$, $\hat{\beta}_2$, $\cdots$, $\hat{\beta}_k$ を求める必要がある。

したがって，前章の (9.4) と (9.5) に対応する $k$ 変数線形回帰モデルの正規方程式は,

$$\left.\begin{aligned}
\hat{\beta}_1\sum_{t=1}^{n} X_{1t}^2 + \hat{\beta}_2\sum_{t=1}^{n} X_{1t}X_{2t} + \cdots + \hat{\beta}_k\sum_{t=1}^{n} X_{1t}X_{kt} &= \sum_{t=1}^{n} X_{1t}Y_t \\
\hat{\beta}_1\sum_{t=1}^{n} X_{2t}X_{1t} + \hat{\beta}_2\sum_{t=1}^{n} X_{2t}^2 + \cdots + \hat{\beta}_k\sum_{t=1}^{n} X_{2t}X_{kt} &= \sum_{t=1}^{n} X_{2t}Y_t \\
&\vdots \\
\hat{\beta}_1\sum_{t=1}^{n} X_{kt}X_{1t} + \hat{\beta}_2\sum_{t=1}^{n} X_{kt}X_{2t} + \cdots + \hat{\beta}_k\sum_{t=1}^{n} X_{kt}^2 &= \sum_{t=1}^{n} X_{kt}Y_t
\end{aligned}\right\} \quad (10.2)$$

となる。$k$ 本の連立方程式を $\hat{\beta}_1$, $\hat{\beta}_2$, $\cdots$, $\hat{\beta}_k$ について解く。得られた解が $\beta_1$, $\beta_2$, $\cdots$, $\beta_k$ の最小 2 乗推定量となる。通常，コンピュータを利用して，この $k$ 本の連立方程式の解を得ることになる。

誤差項（または，攪乱項）$u_t$ の分散 $\sigma^2$ の推定量 $s^2$ は,

$$s^2 = \frac{1}{n-k}\sum_{t=1}^{n} e_t^2 = \frac{1}{n-k}\sum_{t=1}^{n}(Y_t - \hat{\beta}_1 X_{1t} - \hat{\beta}_2 X_{2t} - \cdots - \hat{\beta}_k X_{kt})^2$$

として表される。

$k$ 変数の回帰モデルの場合は，自由度は $n-k$ になる。$k$ は回帰係数の数に対応する。前章の単回帰の場合は，回帰係数は定数項 $\alpha$ と傾き $\beta$ の 2 つであったため，自由度が $n-2$ となった。

## 10.2　推定量の性質

回帰係数の最小 2 乗推定量は，2 変数線形回帰モデルの場合と同じ性質をもっている。したがって，誤差分散の推定と回帰係数に関する仮説検定も同様の方法によって行うことができる。

このとき，

$$\begin{aligned} &\mathrm{E}[\hat{\beta}_i] = \beta_i \qquad \mathrm{plim}\ \hat{\beta}_i = \beta_i \qquad i = 1, 2, \cdots, k \\ &\mathrm{E}[s^2] = \sigma^2 \qquad \mathrm{plim}\ s^2 = \sigma^2 \end{aligned}$$

を証明することができる（証明略）。plim については，7.2.2 節を参照せよ。すなわち，$\hat{\beta}_i$ も $s^2$ もともに不偏推定量であり，一致推定量である。$\hat{\beta}_i$ の分散については後述するが，$\hat{\beta}_i$ は線形で不偏推定量のクラスの中では，最小の分散をもつ推定量（誤差項に正規分布を仮定したときには，有効推定量）であることも知られている（ガウス・マルコフの定理，156 ページ参照）。以上の最小 2 乗推定量の性質は，重回帰の場合でも，単回帰と同じ性質をもつのである。

**$\hat{\beta}_i$ の分散について：**　まず，係数推定値の分散と正規方程式との関係をみる。簡略化のため，前章で扱った単回帰を考える。(9.4)，(9.5) を行列表示すると，

$$\begin{pmatrix} n & \sum_{t=1}^{n} X_t \\ \sum_{t=1}^{n} X_t & \sum_{t=1}^{n} X_t^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\alpha} \\ \hat{\beta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{t=1}^{n} Y_t \\ \sum_{t=1}^{n} X_t Y_t \end{pmatrix}$$

となる。さらに，$\hat{\alpha}$，$\hat{\beta}$ について，まとめて，

$$\begin{pmatrix} \hat{\alpha} \\ \hat{\beta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n & \sum_{t=1}^{n} X_t \\ \sum_{t=1}^{n} X_t & \sum_{t=1}^{n} X_t^2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \sum_{t=1}^{n} Y_t \\ \sum_{t=1}^{n} X_t Y_t \end{pmatrix}$$

を得る。右辺の逆行列の部分と最小 2 乗推定量の分散，共分散とは以下のような関係がある。

$$\begin{pmatrix} \mathrm{V}(\hat{\alpha}) & \mathrm{Cov}(\hat{\alpha}, \hat{\beta}) \\ \mathrm{Cov}(\hat{\alpha}, \hat{\beta}) & \mathrm{V}(\hat{\beta}) \end{pmatrix} = \sigma^2 \begin{pmatrix} n & \sum_{t=1}^{n} X_t \\ \sum_{t=1}^{n} X_t & \sum_{t=1}^{n} X_t^2 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$
= \frac{\sigma^2}{n\sum_{t=1}^{n} X_t^2 - (\sum_{t=1}^{n} X_t)^2} \begin{pmatrix} \sum_{t=1}^{n} X_t^2 & -\sum_{t=1}^{n} X_t \\ -\sum_{t=1}^{n} X_t & n \end{pmatrix}
$$

$$
= \frac{\sigma^2}{n\sum_{t=1}^{n} x_t^2} \begin{pmatrix} \sum_{t=1}^{n} x_t^2 + n\overline{X}^2 & -\sum_{t=1}^{n} X_t \\ -\sum_{t=1}^{n} X_t & n \end{pmatrix}
$$

$$
= \sigma^2 \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}
$$

すなわち，最小 2 乗推定量 $\hat{\alpha}$，$\hat{\beta}$ の分散 $\mathrm{V}(\hat{\alpha})$，$\mathrm{V}(\hat{\beta})$ は，

$$
\mathrm{V}(\hat{\alpha}) = \sigma^2 a_{11} = \sigma^2\Big(\frac{1}{n} + \frac{\overline{X}^2}{\sum_{t=1}^{n} x_t^2}\Big), \qquad \mathrm{V}(\hat{\beta}) = \sigma^2 a_{22} = \frac{\sigma^2}{\sum_{t=1}^{n} x_t^2}
$$

と書き表される。これは，156 ページの (9.12) と (9.13) で示される $\hat{\alpha}$ と $\hat{\beta}$ の分散と同じものである。ただし，前章と同じく，$x_t = X_t - \overline{X}$ とする。

重回帰の場合も同様の関係がある。(10.2) を行列表示することによって，

$$
\begin{pmatrix} \sum_{t=1}^{n} X_{1t}^2 & \sum_{t=1}^{n} X_{1t}X_{2t} & \cdots & \sum_{t=1}^{n} X_{1t}X_{kt} \\ \sum_{t=1}^{n} X_{2t}X_{1t} & \sum_{t=1}^{n} X_{2t}^2 & \cdots & \sum_{t=1}^{n} X_{2t}X_{kt} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{t=1}^{n} X_{kt}X_{1t} & \sum_{t=1}^{n} X_{kt}X_{2t} & \cdots & \sum_{t=1}^{n} X_{kt}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \\ \vdots \\ \hat{\beta}_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{t=1}^{n} X_{1t}Y_t \\ \sum_{t=1}^{n} X_{2t}Y_t \\ \vdots \\ \sum_{t=1}^{n} X_{kt}Y_t \end{pmatrix}
$$

が得られ，$\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2, \cdots, \hat{\beta}_k$ についてまとめると，

$$
\begin{pmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \\ \vdots \\ \hat{\beta}_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{t=1}^{n} X_{1t}^2 & \cdots & \sum_{t=1}^{n} X_{1t}X_{kt} \\ \sum_{t=1}^{n} X_{2t}X_{1t} & \cdots & \sum_{t=1}^{n} X_{2t}X_{kt} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \sum_{t=1}^{n} X_{kt}X_{1t} & \cdots & \sum_{t=1}^{n} X_{kt}^2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \sum_{t=1}^{n} X_{1t}Y_t \\ \sum_{t=1}^{n} X_{2t}Y_t \\ \vdots \\ \sum_{t=1}^{n} X_{kt}Y_t \end{pmatrix} \tag{10.3}
$$

となる。

よって，(10.3) の右辺の逆行列の部分について，$a_{ij}$ を

$$\begin{pmatrix} \sum_{t=1}^n X_{1t}^2 & \sum_{t=1}^n X_{1t}X_{2t} & \cdots & \sum_{t=1}^n X_{1t}X_{kt} \\ \sum_{t=1}^n X_{2t}X_{1t} & \sum_{t=1}^n X_{2t}^2 & \cdots & \sum_{t=1}^n X_{2t}X_{kt} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{t=1}^n X_{kt}X_{1t} & \sum_{t=1}^n X_{kt}X_{2t} & \cdots & \sum_{t=1}^n X_{kt}^2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{pmatrix}$$

と定義するとき，$\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2, \cdots, \hat{\beta}_k$ の分散と $a_{ij}$ との関係は,

$$\mathrm{V}(\hat{\beta}_i) = \sigma^2 a_{ii}$$

となることが分かっている。

$\mathrm{V}(\hat{\beta}_i)$ には未知母数 $\sigma^2$ が含まれているので，$\sigma^2$ を $s^2$ で置きかえて，$\hat{\beta}_i$ の分散の推定量は,

$$\hat{\mathrm{V}}(\hat{\beta}_i) = s^2 a_{ii}$$

によって与えられる。さらに，$\hat{\mathrm{V}}(\hat{\beta}_i)$ の平方根は $\hat{\beta}_i$ の標準誤差と呼ばれ，それは,

$$Se(\hat{\beta}_i) = s\sqrt{a_{ii}}$$

となる。

**分布について：**　$\mathrm{E}[\hat{\beta}_i] = \beta_i$，$\mathrm{V}(\hat{\beta}_i) = \sigma^2 a_{ii}$ であり，しかも，$u_t$ の分布を正規分布と仮定すると，$\hat{\beta}_i$ の分布は,

$$\hat{\beta}_i \sim \mathrm{N}(\beta_i, \sigma^2 a_{ii})$$

となることが分かっている。標準化することによって,

$$\frac{\hat{\beta}_i - \beta_i}{\sigma\sqrt{a_{ii}}} \sim \mathrm{N}(0,1)$$

が得られる。さらに,

$$\frac{(n-k)s^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-k)$$

となり（証明略），しかも，$\hat{\beta}_i$ と $s^2$ の独立性（証明略）から，定理 6.4 を用いると，

$$\frac{\dfrac{\hat{\beta}_i - \beta_i}{\sigma\sqrt{a_{ii}}}}{\sqrt{\dfrac{(n-k)s^2}{\sigma^2}\Big/(n-k)}} = \frac{\hat{\beta}_i - \beta_i}{s\sqrt{a_{ii}}} = \frac{\hat{\beta}_i - \beta_i}{Se(\hat{\beta}_i)} \sim t(n-k)$$

となる。よって，$\beta_i$ の区間推定や仮説検定を行うことができる。特に，帰無仮説 $H_0$： $\beta_i = 0$ の場合の検定統計量は，$t$ 値と呼ばれ，

$$t_{\hat{\beta}_i} = \frac{\hat{\beta}_i}{Se(\hat{\beta}_i)}$$

によって与えられる。帰無仮説 $H_0$： $\beta_i = 0$ が正しいもとで，$t_{\hat{\beta}_i}$ は自由度 $n-k$ の $t$ 分布に従う。

## 10.3　自由度修正済み決定係数

また，回帰式の当てはまりの良さを見る尺度として用いられる決定係数 $R^2$ についても，単回帰と同様に表される。すなわち，

$$R^2 = \frac{\sum_{t=1}^{n}(\hat{Y}_t - \overline{Y})^2}{\sum_{t=1}^{n}(Y_t - \overline{Y})^2} = 1 - \frac{\sum_{t=1}^{n} e_t^2}{\sum_{t=1}^{n}(Y_t - \overline{Y})^2} = 1 - \frac{\sum_{t=1}^{n} e_t^2}{\sum_{t=1}^{n} Y_t^2 - n\overline{Y}^2}$$

である。ただし，$\hat{Y}_t = \hat{\beta}_1 X_{1t} + \hat{\beta}_2 X_{2t} + \cdots + \hat{\beta}_k X_{kt}$，$e_t = Y_t - \hat{Y}_t$ とする。

$R^2$ は，説明変数を増やすことによって，現実のデータを使う限り必ず大きくなる。なぜなら，説明変数が増えることによって，残差平方和 $\sum_{t=1}^{n} e_t^2$ が必ず減少するからである。したがって，$R^2$ を基準にすると，被説明変数にとって意味のない変数でも，説明変数が多いほど，よりよいモデルということになる。この点を改善するために，**自由度修正済み決定係数** $\overline{R}^2$ を用いる。自由度修正済み決定係数は次のように定義される。

$$\overline{R}^2 = 1 - \frac{\sum_{t=1}^{n} e_t^2/(n-k)}{\sum_{t=1}^{n}(Y_t - \overline{Y})^2/(n-1)} = 1 - \frac{\sum_{t=1}^{n} e_t^2/(n-k)}{\left(\sum_{t=1}^{n} Y_t^2 - n\overline{Y}^2\right)\Big/(n-1)}$$

分子の $\sum_{t=1}^{n} e_t^2/(n-k)$ は $u_t$ の分散 $\sigma^2$ の不偏推定量に対応している。また，分母の $\sum_{t=1}^{n}(Y_t-\overline{Y})^2/(n-1)$ は $Y_t$ の標本不偏分散である。このように，自由度修正済み決定係数は，1 から不偏分散比を差し引いたものと解釈できる。

決定係数 $R^2$ と自由度修正済み決定係数 $\overline{R}^2$ との間には，

$$\overline{R}^2 = 1 - (1 - R^2)\frac{n-1}{n-k}$$

という関係がある（各自確認しておくこと）。さらに，変形することによって，

$$\frac{1-\overline{R}^2}{1-R^2} = \frac{n-1}{n-k} \geqq 1$$

という関係が得られ，したがって，$\overline{R}^2 \leqq R^2$ という結果を得る。$k=1$ のときのみに等号が成り立つ。単回帰でも $k=2$ の場合がほとんどなので（すなわち，ほとんどの場合，定数項を含める），単回帰のときでも $\overline{R}^2$ の計算は可能である。決定係数 $R^2$ については，回帰式に定数項が含まれている限り，$0 \leqq R^2 \leqq 1$ となるが，自由度修正済み決定係数 $\overline{R}^2$ は負になることもありうる。

新たに変数が追加され，$R^2$ が増加したとしよう。このとき，$1-R^2$ は減少するが，$k$ が大きくなるので，$(n-1)/(n-k)$ は増加する。したがって，$\overline{R}^2$ は増加する可能性もあるし，減少する可能性もある。もし $\overline{R}^2$ が増加したならば，追加された変数は $Y_t$ を説明するのに意味のある変数であり，もし $\overline{R}^2$ が減少したならば，追加された変数は意味のない変数である，と判断されるのである。

**例題** 10.1　前章の例題 9.1 で推定された回帰直線の自由度修正済み決定係数を求めよ。

**解**　例題 9.1 から $\sum_{t=1}^{n} y_t^2 = \sum_{t=1}^{n}(Y_t-\overline{Y})^2 = 20$，例題 9.2 から $\sum_{t=1}^{n} e_t^2 = 7.9$ であるので，自由度修正済み決定係数の値は，

$$\overline{R}^2 = 1 - \frac{\sum_{t=1}^{n} e_t^2/(n-k)}{\sum_{t=1}^{n}(Y_t - \overline{Y})^2/(n-1)} = 1 - \frac{7.9/(5-2)}{20/(5-1)} = 0.473$$

と計算される（$n=5$，$k=2$ に注意せよ）。

**（注意）**　2 つの回帰式を $\overline{R}^2$ で比較する場合，被説明変数が同じである必要がある。すなわち，$Y_t = \alpha + \beta X_t + u_t$ と $\Delta Y_t = \alpha + \beta X_t + u_t$ の 2 つの回帰式の $R^2$ や $\overline{R}^2$ の大小を比較することには何の意味もない（ただし，$\Delta Y_t = Y_t - Y_{t-1}$ とする）。しかし，$Y_t = \alpha + \beta X_t + u_t$ と $Y_t = \alpha + \beta X_t + \gamma Z_t + u_t$ の 2 つの回帰式を $\overline{R}^2$ で比較することは可能であり，$\overline{R}^2$ の大きい方の回帰式を選ぶべきである。

## 10.4　多重共線性

重回帰において，実際にデータを用いてある経済理論を実証する場合，係数推定値の符号が理論どおりでない，推定値の有意性が低い，といった問題に度々直面する。これは多重共線性という問題が起こって，このような不自然な推定値を得る場合が多い。

簡単化のために，(10.1) において，定数項がなく，しかも，説明変数が 2 つの回帰式

$$Y_t = \beta_1 X_{1t} + \beta_2 X_{2t} + u_t$$

を考える。$X_{1t}$ と $X_{2t}$ の相関が大きいことを**多重共線性**（multicollinearity）が強いという。$X_{1t}$ と $X_{2t}$ の相関が大きい場合は，$\beta_1$，$\beta_2$ の推定値は不安定になる。極端な場合，$X_{1t}$ と $X_{2t}$ の相関が 1 の場合（完全相関の場合）は，すべての $t$ について，$X_{1t} = \gamma X_{2t}$ と書き表される。この場合，回帰式は

$$Y_t = \beta_1 X_{1t} + \beta_2 X_{2t} + u_t = (\beta_1\gamma + \beta_2)X_{2t} + u_t$$

となり，$\beta_1\gamma + \beta_2$ を推定することは可能だが，$\beta_1$，$\beta_2$ を別々に推定することはできなくなる。すなわち，$\beta_1\gamma + \beta_2$ の推定値が一定値となる $\hat{\beta}_1$，$\hat{\beta}_2$ の組合せは無数に存在することになる。この意味で，$\hat{\beta}_1$，$\hat{\beta}_2$ は不安定であるといえる。

より詳しく見るために，$X_{1t}$ と $X_{2t}$ の間の相関と最小 2 乗推定量 $\hat{\beta}_1$，$\hat{\beta}_2$ の分散との関係を調べてみる。10.2 節で述べたとおり，最小 2 乗推定量の分散は，

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} \mathrm{V}(\hat{\beta}_1) & \mathrm{Cov}(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2) \\ \mathrm{Cov}(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2) & \mathrm{V}(\hat{\beta}_2) \end{pmatrix} &= \sigma^2 \begin{pmatrix} \sum_{t=1}^{n} X_{1t}^2 & \sum_{t=1}^{n} X_{1t}X_{2t} \\ \sum_{t=1}^{n} X_{2t}X_{1t} & \sum_{t=1}^{n} X_{2t}^2 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \frac{\sigma^2}{D} \begin{pmatrix} \sum_{t=1}^{n} X_{2t}^2 & -\sum_{t=1}^{n} X_{1t}X_{2t} \\ -\sum_{t=1}^{n} X_{2t}X_{1t} & \sum_{t=1}^{n} X_{1t}^2 \end{pmatrix} \qquad (10.4)\end{aligned}$$

と書き表される。ただし，$D = \left(\sum_{t=1}^{n} X_{1t}^2\right)\left(\sum_{t=1}^{n} X_{2t}^2\right) - \left(\sum_{t=1}^{n} X_{1t}X_{2t}\right)^2$ である。簡単化のため，$\overline{X}_1 = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} X_{1t} = 0$，$\overline{X}_2 = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} X_{2t} = 0$ とする。$X_{1t}$ と $X_{2t}$ との標本相関係数を $r$ とすると，

$$r = \frac{\sum_{t=1}^{n}(X_{1t} - \overline{X}_1)(X_{2t} - \overline{X}_2)}{\sqrt{\sum_{t=1}^{n}(X_{1t} - \overline{X}_1)^2 \sum_{t=1}^{n}(X_{2t} - \overline{X}_2)^2}} = \frac{\sum_{t=1}^{n} X_{1t}X_{2t}}{\sqrt{\sum_{t=1}^{n} X_{1t}^2 \sum_{t=1}^{n} X_{2t}^2}}$$

となる。さらに，$r$ を用いて，$\mathrm{V}(\hat{\beta}_1)$，$\mathrm{V}(\hat{\beta}_2)$ を書き直すと，(10.4) は，

$$\left.\begin{aligned}\mathrm{V}(\hat{\beta}_1) &= \frac{\sigma^2 \sum_{t=1}^{n} X_{2t}^2}{\left(\sum_{t=1}^{n} X_{1t}^2\right)\left(\sum_{t=1}^{n} X_{2t}^2\right) - \left(\sum_{t=1}^{n} X_{1t}X_{2t}\right)^2} = \frac{\sigma^2}{(1 - r^2)\sum_{t=1}^{n} X_{1t}^2} \\ \mathrm{V}(\hat{\beta}_2) &= \frac{\sigma^2 \sum_{t=1}^{n} X_{1t}^2}{\left(\sum_{t=1}^{n} X_{1t}^2\right)\left(\sum_{t=1}^{n} X_{2t}^2\right) - \left(\sum_{t=1}^{n} X_{1t}X_{2t}\right)^2} = \frac{\sigma^2}{(1 - r^2)\sum_{t=1}^{n} X_{2t}^2}\end{aligned}\right\} (10.5)$$

と変形される。この 2 つの式は，$r$ が 1 または $-1$ に近づくにつれて（または，$r^2$ が 1 に近づくにつれて），$\mathrm{V}(\hat{\beta}_1)$，$\mathrm{V}(\hat{\beta}_2)$ は大きくなるということを意味する。推定量の分散 $\mathrm{V}(\hat{\beta}_1)$，$\mathrm{V}(\hat{\beta}_2)$ が大きくなるということは，係数の推定値の有意性が低くなるということになる。すなわち，本来は $X_{1t}$ や $X_{2t}$ が $Y_t$ に影響を与えているにもかかわらず，統計的に有意な推定値は得られなくなるので，回帰分析によって理論モデルを立証しようという試みは成功しなくなるのである。

完全な多重共線性の場合（$X_{1t} = \gamma X_{2t}$ の場合）は，$r = \pm 1$ を意味し，

$$\left(\sum_{t=1}^{n} X_{1t}^2\right)\left(\sum_{t=1}^{n} X_{2t}^2\right) - \left(\sum_{t=1}^{n} X_{1t}X_{2t}\right)^2 = 0$$

となる。(10.5) から，完全な多重共線性の場合は推定値の分散が無限大となることが分かる。推定値の分散が無限大ということは，係数パラメータ $(\beta_1, \beta_2)$ の値がどこにあるか分からないということを意味する。その意味で，多重共線性が起こっていれば，推定値は不安定になるということになる。以下に，多重共線性が起こっていると考えられる場合をまとめておくことにする。

**多重共線性の症状：**　多重共線性が起こっていると考えられるケースは,

**(1)** 推定値の符号が理論と合わない。
**(2)** 決定係数（$R^2$ や $\overline{R}^2$）は大きいが，個々の推定値の $t$ 値は小さい。これは推定値の標準誤差が大きくなるためである。
**(3)** 観測値の数（データ数）を少しでも増やすと，推定値が大きく変わる傾向がある。
**(4)** 説明変数を増減すると，推定値が大きく変動する傾向がある。

等である。多重共線性を回避するための決め手となる手段は存在しないが，さまざまな工夫が提案されている。例えば，経済理論から得られる情報を用いてパラメータ数を減らして推定する手法がある。詳細については，計量経済学のテキストを参照されたい。

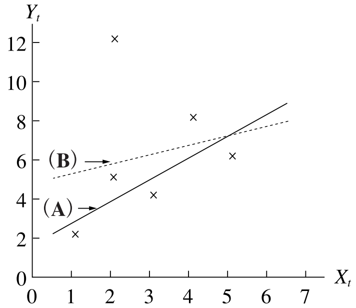
## 10.5　ダミー変数

### 10.5.1　異常値

データに**異常値**が含まれている場合，経済構造がある時期から変化した場合，**ダミー変数**（dummy variable）を使う。

ダミー変数とは，0 と 1 から成る変数のことである。例えば，データが $n$ 期間あるとして，$t_0$ 期目のデータが，回帰直線から離れている場合（異常値の場合）を考える。このとき，

**図** 10.1　**異常値**




$$D_t = \begin{cases} 0 & t \neq t_0 \text{ のとき} \\ 1 & t = t_0 \text{ のとき} \end{cases}$$

という変数を作り，

$$Y_t = \alpha + \beta X_t + \gamma D_t + u_t$$

を推定する。$\gamma$ の推定値 $\hat{\gamma}$ の $t$ 値 $t_{\hat{\gamma}} = \hat{\gamma}/Se(\hat{\gamma})$ を調べることによって，異常値かどうかの検定が可能となる。すなわち，仮説検定の結果，$\gamma$ はゼロではないと判断されれば，$t_0$ 番目のデータは異常値であると考えることができる。

**数値例：**　前章の例題 9.1 で使われた数値例に，6 期目に異常値を加えた数値例を取りあげる。

| $t$ | $Y_t$ | $X_t$ | $D_t$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 1 | 0 |
| 2 | 5 | 2 | 0 |
| 3 | 4 | 3 | 0 |
| 4 | 8 | 4 | 0 |
| 5 | 6 | 5 | 0 |
| 6 | 12 | 2 | 1 |

第 6 期目が異常値である。

**(A)** は $i = 1, 2, 3, 4, 5$ のデータを使って，推定した回帰直線である。**(B)** は $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ のデータを使って，推定した回帰直線である。**(A)**，**(B)** の推定結果は以下のとおりである。

$$\textbf{(A)} \quad Y_t = \underset{(0.999)}{1.7} + \underset{(2.144)}{1.1} X_t$$

$$R^2 = 0.605, \quad \overline{R}^2 = 0.473, \quad s^2 = 1.623^2$$

$$\textbf{(B)} \quad Y_t = \underset{(1.323)}{4.815} + \underset{(0.411)}{0.477} X_t$$

$$R^2 = 0.041, \quad \overline{R}^2 = -0.199, \quad s^2 = 3.820^2$$

ただし，係数の推定値の下の (　) 内は $t$ 値を表すものとする。

このように，異常値が 1 つ加わると，推定結果が大幅に変わる（図 10.1 を参照せよ）。この異常値を処理するために，ダミー変数を用いて，

$$Y_t = \alpha + \beta X_t + \gamma D_t + u_t$$

として推定を行う。$D_t$ は，$t = 1, 2, 3, 4, 5$ のとき $D_t = 0$ とし，$t = 6$ のとき $D_t = 1$ とする変数である。この回帰式の意味は，

$$Y_t = \begin{cases} \alpha + \beta X_t + u_t & t = 1, 2, 3, 4, 5 \text{ のとき} \\ (\alpha + \gamma) + \beta X_t + u_t & t = 6 \text{ のとき} \end{cases}$$

となる。推定結果は,

$$Y_t = \underset{(0.999)}{1.7} + \underset{(2.144)}{1.1} X_t + \underset{(4.378)}{8.1} D_t$$

$$R^2 = 0.933, \quad \overline{R}^2 = 0.784, \quad s^2 = 1.623^2$$

となる。定数項や $X_t$ の係数の推定値は，**(A)** と同じである。ダミー変数 $D_t$ の $t$ 値は 4.378 と高く，$t_{0.025}(3) = 3.1824$ より大きいので，$H_0:\ \gamma = 0$ という仮説は有意水準 5% の両側検定で棄却される。よって，6 期目のデータは異常値であるといえる。この場合，$\hat{Y}_6 = Y_6$，すなわち，$e_6 = 0$ となることに注意せよ。

### 10.5.2　**構造変化**

ダミー変数を用いることによって，構造変化を盛り込んで回帰式を推定することができる。$t_0$ 期目以前と以降とで，経済構造が変化している場合を考える。

$$D_t = \begin{cases} 0 & t = 1, 2, \cdots, t_0 \text{ のとき} \\ 1 & t = t_0 + 1, t_0 + 2, \cdots, n \text{ のとき} \end{cases}$$

というダミー変数を作り，

$$Y_t = \alpha + \beta X_t + \gamma D_t + u_t$$

を推定する（定数項だけが，$t_0$ 期目以前と以降とで，変化したと考えた場合)。この場合，説明変数の数は，定数項も含めて，3 つとなる（すなわち，$k = 3$)。

または，

$$Y_t = \alpha + \beta X_t + \gamma D_t + \delta D_t X_t + u_t$$

を推定する（定数項も係数も変化したと考えた場合)。上式では，説明変数の数は，定数項も含めて，4 つとなる（すなわち，$k = 4$)。(10.1) における各変数との対応関係は，

$$(X_{1t},\ X_{2t},\ X_{3t},\ X_{4t}) = (1,\ X_t,\ D_t,\ D_t X_t)$$
$$(\beta_1,\ \beta_2,\ \beta_3,\ \beta_4) = (\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta)$$

となっている。

構造変化の場合も，異常値のときと同様に，$\gamma$ や $\delta$ の推定値の有意性を調べることによって，構造変化の検定を行うことができる。

$n = 20$，$t_0 = 8$ の例を示すと，

| $t$ | $Y_t$ | $X_t$ | $D_t$ | $D_t X_t$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | $Y_1$ | $X_1$ | 0 | 0 |
| 2 | $Y_2$ | $X_2$ | 0 | 0 |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ |
| 8 | $Y_8$ | $X_8$ | 0 | 0 |
| 9 | $Y_9$ | $X_9$ | 1 | $X_9$ |
| 10 | $Y_{10}$ | $X_{10}$ | 1 | $X_{10}$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ |
| 20 | $Y_{20}$ | $X_{20}$ | 1 | $X_{20}$ |

となる。

**数値例：** 前章の 9.6 節で用いられた消費のデータを用いて，1990 年（バブル期）以前と以降とで消費構造が変化しているかどうかを調べる。そのためには，まず，

$$D_t = \begin{cases} 0 & t = 1980, \cdots, 1990 \text{ のとき} \\ 1 & t = 1991, \cdots, 1998 \text{ のとき} \end{cases}$$

というダミー変数を作る。次に，回帰式

$$Y_t = \alpha + \beta X_t + \gamma D_t + \delta D_t X_t + u_t$$

を推定する。

得られた推定結果は次のとおりとなった。

$$Y_t = \underset{(-13.303)}{-\ 48.410} + \underset{(69.231)}{1.052}\ X_t + \underset{(4.120)}{47.934}\ D_t \underset{(-4.711)}{-\ 0.183}\ D_t X_t$$

$$R^2 = 0.999, \quad \overline{R}^2 = 0.999, \quad s^2 = 1.151^2$$

ダミー変数 $D_t$ の $t$ 値は 4.120 と高く，$t_{0.005}(15) = 2.947$ よりも大きいので，$H_0$： $\gamma = 0$ という仮説は有意水準 1 % の両側検定で棄却される。同様に，$D_t X_t$ の $t$ 値は $-4.711$ で，$t_{0.005}(15) = 2.947$ よりも絶対値で大きいので，$H_0$： $\delta = 0$ という仮説も有意水準 1 % の両側検定で棄却される。したがって，1990 年以降，定数項も限界消費性向もともに変化したと結論づけられる。ただし，1990 年以前の限界消費性向が 1.052 と 1 を超え，また，定数項も $-48.410$ と有意になっていて，経済理論的には満足できる結果だとはいえない。しかし，これ以上の考察は行わないことにする。

## 10.6　系列相関と不均一分散

第 9 章と本章のこれまでは，誤差項に関して，「$u_1, u_2, \cdots, u_n$ は互いに独立に，平均ゼロ，分散 $\sigma^2$ の正規分布に従う」という仮定を前提としてきた。この前提が崩れた場合，最小 2 乗推定量は，線形不偏推定量ではあるが，有効推定量でないことが知られている。

誤差項の仮定を満たさない代表的な 2 つの場合

**図** 10.2　**正の系列相関**

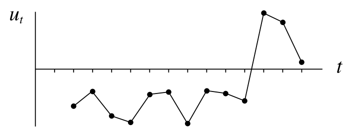
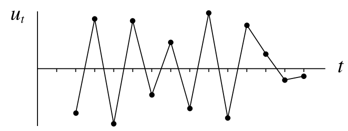



**図** 10.3　**負の系列相関**




**(1)**　$t \fallingdotseq s$ について，$\mathrm{Cov}(u_t, u_s) \fallingdotseq 0$　　$\longrightarrow$　　系列相関
**(2)**　$\mathrm{V}(u_t) = \sigma_t^2$　　$\longrightarrow$　　不均一分散

を考え，このとき最小 2 乗推定量にどのような問題が起こるか，そして，その改善方法等を簡単に解説する。

### 10.6.1　系列相関

最小 2 乗法の仮定の 1 つに,「誤差項 $u_1, u_2, \cdots, u_n$ はそれぞれ独立に分布する」というものがあった。$u_1, u_2, \cdots, u_n$ が互いに相関をもつことを**系列相関**（serial correlation）と呼ぶ。さらに，$u_1, u_2, \cdots, u_n$ の系列について，それぞれの符号が，$+++-----++----++$ のように，プラスが連続で続いた後で，マイナスが連続で続くというような場合（図 10.2），$u_1, u_2, \cdots, u_n$ は**正の系列相関**があるという。また，$+-+-+-+-+$ のように交互にプラス，マイナスになる場合（図 10.3），$u_1, u_2, \cdots, u_n$ は**負の系列相関**があるという。

系列相関の特徴としては，$u_1, u_2, \cdots, u_t$ から $u_{t+1}$ の符号が予想できるということである。これは「 $u_1, u_2, \cdots, u_n$ はそれぞれ独立に分布する」という仮定に反する。なぜなら,「 $u_1, u_2, \cdots, u_n$ はそれぞれ独立に分布する」ということは，$u_t$ の符号は $u_1, \cdots, u_{t-1}, u_{t+1}, \cdots, u_n$ を用いても予想できないということを意味するからである。

**ダービン・ワトソン比について：**　誤差項の系列相関，特に，$u_t$ と $u_{t-1}$ との間の相関の有無を検定するために考案された統計量が**ダービン・ワトソン比**であり，$DW$ と表される。この統計量は時系列データのときのみ意味をもつものである。

数式を用いて表すと，ダービン・ワトソン比とは，回帰式が

$$
\begin{aligned}
&Y_t = \beta_1 X_{1t} + \beta_2 X_{2t} + \cdots + \beta_k X_{kt} + u_t \qquad (10.6)\\
&u_t = \rho u_{t-1} + \epsilon_t
\end{aligned}
$$

のときに，$H_0$： $\rho = 0$，$H_1$： $\rho \fallingdotseq\!\!\!\!/\ 0$ の検定を行うための検定統計量である。ただし，$\epsilon_1, \epsilon_2, \cdots, \epsilon_n$ は互いに独立とする。また，$\rho$ は理論上，$|\rho| < 1$ となる必要がある。

ダービン・ワトソン比の定義は次のとおりである。

$$
DW = \frac{\sum\limits_{t=2}^{n}(e_t - e_{t-1})^2}{\sum\limits_{t=1}^{n} e_t^2}
$$

ダービン・ワトソン比 $DW$ は近似的に，次のように表される。

$$
\begin{aligned}
DW &= \frac{\sum\limits_{t=2}^{n}(e_t - e_{t-1})^2}{\sum\limits_{t=1}^{n} e_t^2} = \frac{\sum\limits_{t=2}^{n} e_t^2 - 2\sum\limits_{t=2}^{n} e_t e_{t-1} + \sum\limits_{t=2}^{n} e_{t-1}^2}{\sum\limits_{t=1}^{n} e_t^2}\\
&= \frac{2\sum\limits_{t=1}^{n} e_t^2 - (e_1^2 + e_n^2)}{\sum\limits_{t=1}^{n} e_t^2} - 2\frac{\sum\limits_{t=2}^{n} e_t e_{t-1}}{\sum\limits_{t=1}^{n} e_t^2} \fallingdotseq 2(1-\hat{\rho})
\end{aligned}
$$

途中の式の展開で，以下の 2 つの近似が用いられる。

$$
\frac{e_1^2 + e_n^2}{\sum\limits_{t=1}^{n} e_t^2} \fallingdotseq 0, \qquad \frac{\sum\limits_{t=2}^{n} e_t e_{t-1}}{\sum\limits_{t=1}^{n} e_t^2} = \frac{\sum\limits_{t=2}^{n} e_t e_{t-1}}{\sum\limits_{t=2}^{n} e_{t-1}^2 + e_n^2} \fallingdotseq \frac{\sum\limits_{t=2}^{n} e_t e_{t-1}}{\sum\limits_{t=2}^{n} e_{t-1}^2} = \hat{\rho}
$$

すなわち，$\hat{\rho}$ は $e_t$ と $e_{t-1}$ の回帰係数である。$u_t = \rho u_{t-1} + \epsilon_t$ において，$u_t$，$u_{t-1}$ の代わりに $e_t$，$e_{t-1}$ に置きかえた，$\rho$ の最小 2 乗推定値が $\hat{\rho}$ に対応する。

$DW \fallingdotseq 2(1-\hat{\rho})$ の関係から，次のことがいえる.

**(1)** ダービン・ワトソン比 $DW$ の値が 2 前後のとき，$\hat{\rho}$ はゼロに近く，誤差項に系列相関はないと判定される。

**(2)** ダービン・ワトソン比 $DW$ が 2 より十分に小さいとき（0 に近いとき），$\hat{\rho}$ は 1 に近い値となるので，誤差項に正の系列相関があると判定される。

**(3)**　ダービン・ワトソン比 $DW$ が 2 より十分に大きいとき（4 に近いとき），$\hat{\rho}$ は $-1$ に近い値となるので，誤差項に負の系列相関があると判定される。

しかし，正確な判定には，標本数 $n$ とパラメータ数 $k$ に依存し，付表 5 から，誤差項に系列相関があるかどうかの検定が行われる。ただし，付表 5 中の $k'$ は定数項を除くパラメータ数を表すものとする。

付表 5 中の $dl$ と $du$ を用いて，$DW$ が次の 5 つのどの領域に含まれるかによって，誤差項の系列相関の検定が行われる。

**(1)**　$0 < DW < dl$　$\Longrightarrow$　正の系列相関がある

**(2)**　$dl \leqq DW < du$　$\Longrightarrow$　系列相関の有無を判定できない

**(3)**　$du \leqq DW < 4 - du$　$\Longrightarrow$　系列相関はない

**(4)**　$4 - du \leqq DW < 4 - dl$　$\Longrightarrow$　系列相関の有無を判定できない

**(5)**　$4 - dl \leqq DW < 4$　$\Longrightarrow$　負の系列相関がある

$dl$，$du$ は付表 5 に示されたとおり，標本数 $n$ と定数項を除くパラメータ数 $k'$ に依存する。

**数値例：**　前章の例題 9.1〜9.3 で扱ったものと同じ数値例で，ダービン・ワトソン比 $DW$ を計算する。例題 9.2 では残差は，$(e_1, e_2, e_3, e_4, e_5) = (-0.8, 1.1, -1.0, 1.9, -1.2)$ と計算されたので，ダービン・ワトソン比は，

$$
\begin{aligned}
DW &= \frac{\sum_{t=2}^{n}(e_t - e_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^{n} e_t^2} \\
&= \frac{(1.1-(-0.8))^2 + (-1.0-1.1)^2 + (1.9-(-1.0))^2 + (-1.2-1.9)^2}{(-0.8)^2 + 1.1^2 + (-1.0)^2 + 1.9^2 + (-1.2)^2} \\
&= \frac{26.04}{7.9} = 3.296
\end{aligned}
$$

となる。標本数が $n = 5$ で，少なすぎるため，誤差項に系列相関があるかどうかの判定は正確にはできないが，$DW$ は 4 に近いので負の系列相関があると考えてもよいだろう。

前章の例題 9.1 で用いられたデータから得られた推定結果をまとめると，次のように表記される．

$$
\underset{}{Y_t =} \underset{(0.999)}{1.7} + \underset{(2.144)}{1.1} X_t
$$

$$
R^2 = 0.605, \quad \overline{R}^2 = 0.473, \quad s^2 = 1.623^2, \quad DW = 3.296
$$

ただし，係数の推定値の下の (　) 内は $t$ 値を表すものとする。係数の推定値の下の (　) 内については，$t$ 値でなく，標準誤差を表す場合もある。

**最小 2 乗推定量への影響：**　回帰モデルが式 (10.6) のとき，誤差項の系列相関を無視して，通常の最小 2 乗法を適用した場合，最小 2 乗推定量は不偏であるが有効性はない。標本分散も不偏でなく，係数推定値 $\hat{\beta}_i$ の有意性検定も正しい検定結果が得られない。多くの経済時系列データは，長期的には時間とともに上昇する傾向がある。さらに，時系列データを扱う場合は，正の系列相関になりやすい。このような状況のもとでは，$t_{\hat{\beta}_i} = \hat{\beta}_i / Se(\hat{\beta}_i)$ は過大評価（すなわち，$Se(\hat{\beta}_i)$ は過小評価）されてしまい，帰無仮説 $H_0$： $\beta_i = 0$ を必要以上に棄却しやすくなることが知られている。さらに，$Se(\hat{\beta}_i)$ が過小評価されることにより，$\beta_i$ の信頼区間も小さく推定されてしまう。このように，誤差項の系列相関を考慮に入れずに，最小 2 乗法をそのまま当てはめると，信頼区間，仮説検定ともに誤った推論をしてしまうのである。したがって，系列相関を考慮に入れて，回帰モデルを推定する必要がある。

**系列相関のもとでの回帰式の推定：**　回帰モデルが (10.6) で表されるときの推定問題を考える。$u_t$ を消去すると，

$$
\begin{aligned}
Y_t - \rho Y_{t-1} \; = \; & \beta_1 (X_{1t} - \rho X_{1,t-1}) + \beta_2 (X_{2t} - \rho X_{2,t-1}) + \cdots \\
& + \beta_k (X_{kt} - \rho X_{k,t-1}) + \epsilon_t
\end{aligned}
$$

となり，$Y_t^* = Y_t - \rho Y_{t-1}$，$X_{1t}^* = X_{1t} - \rho X_{1,t-1}$，$X_{2t}^* = X_{2t} - \rho X_{2,t-1}$，$\cdots$，$X_{kt}^* = X_{kt} - \rho X_{k,t-1}$ を新たな変数として，

$$
Y_t^* = \beta_1 X_{1t}^* + \beta_2 X_{2t}^* + \cdots + \beta_k X_{kt}^* + \epsilon_t
$$

に最小 2 乗法を適用する。$\epsilon_1, \epsilon_2, \cdots, \epsilon_n$ は互いに独立とするので，最小 2 乗法の適用が可能となる。

上記のような回帰式の各変数の変換のためには，$\rho$ の値をあらかじめ知っておく必要がある。しかし，$\rho$ も未知パラメータであるので，推定する必要がある。$\rho$ の求め方については，多くの研究がなされているが，本書では比較的簡単な方法を以下に紹介する。

前述のとおり，$DW$ は近似的に $DW \fallingdotseq 2(1-\hat{\rho})$ と表されるので，$DW$ から $\rho$ の推定値 $\hat{\rho}$ を逆算（すなわち，$\hat{\rho} \fallingdotseq 1-0.5DW$）して，$\rho$ の代わりに $\hat{\rho}$ を用いる。したがって，$\rho$ を $\hat{\rho}$ で置きかえて，$Y_t^* = Y_t - \hat{\rho}Y_{t-1}$，$X_{1t}^* = X_{1t} - \hat{\rho}X_{1,t-1}$，$X_{2t}^* = X_{2t} - \hat{\rho}X_{2,t-1}$，$\cdots$，$X_{kt}^* = X_{kt} - \hat{\rho}X_{k,t-1}$ を新たな変数として，

$$Y_t^* = \beta_1 X_{1t}^* + \beta_2 X_{2t}^* + \cdots + \beta_k X_{kt}^* + \epsilon_t \tag{10.7}$$

に最小 2 乗法を適用すればよい。

**数値例：**　表 9.1 のデータを用いる。前章の 9.6 節で得られた結果をまとめると，次のようになる。

$$\begin{array}{llll} Y_t = & -\ 24.910 & +\ \ 0.951 & X_t \\ & (-6.669) & \ \ (68.913) & \end{array} \tag{10.8}$$

$$R^2 = 0.996, \quad \overline{R}^2 = 0.996, \quad s^2 = 2.374^2, \quad DW = 0.659$$

ただし，係数の推定値の下の (　) 内は $t$ 値を表すものとする。

誤差項に系列相関があるかどうかを調べる。$n=19$，$k'=1$ なので，付表 5 から，$dl = 1.18$，$du = 1.40$ となる。$DW = 0.659$ なので，$0 < DW < dl$ になり，検定の結果，誤差項に正の系列相関が認められる。よって，系列相関を除いて再推定する必要がある。$\hat{\rho} \fallingdotseq 1 - 0.5 \times 0.659 = 0.670$ を用いて，データを変換し，$Y_t^*$，$X_t^*$ を作る。変換されたデータ $Y_t^*$，$X_t^*$ を用いて，再度，最小 2 乗法で推定を行う。その結果は次のとおりとなった。

$$\begin{array}{llll} Y_t^* = & -\ 5.294 & +\ \ 0.920 & X_t^*, \\ & (-1.670) & \ \ (27.408) & \end{array} \tag{10.9}$$

$$R^2 = 0.979, \quad \overline{R}^2 = 0.978, \quad s^2 = 1.760^2, \quad DW = 2.013$$

ただし，係数の推定値の下の (　) 内は $t$ 値を表すものとする。

$DW$ も改善され，(10.9) では系列相関がないと判定される。そのため，過大評価されていた $t$ 値も小さくなり，係数に関する適切な推論を行うことができるようになったといえるだろう。ここでの $DW$ は，(10.6) の $u_t$ ではなく，(10.6) や (10.7) の $\epsilon_t$ の系列相関の有無を判定していることに注意せよ。

10.3 節の（注意）で述べたように，$Y_t$ と $Y_t^*$ の数値が異なるので，(10.8) と (10.9) を $R^2$ や $\overline{R}^2$ で比較することは意味がないことに注意せよ。すなわち，(10.8) では $\overline{R}^2 = 0.996$，(10.9) では $\overline{R}^2 = 0.978$ となったが，(10.9) のほうが説明力が劣るということはいえない。

### 10.6.2　不均一分散

(10.1) の $k$ 変数の多重回帰モデルの場合を考える。$u_t$ は互いに独立な同一の分布をもつ撹乱項（最小 2 乗法に必要な仮定）とする。「独立な同一の分布」の意味は「撹乱項 $u_1$, $u_2$, $\cdots$, $u_n$ はそれぞれ独立に平均ゼロ，分散 $\sigma^2$ の分布をする」である。本節では，「 $u_1$, $u_2$, $\cdots$, $u_n$ は，分散 $\sigma^2$ の分布に従う」という誤差項に関する仮定が成り立たない場合，すなわち，$\mathrm{V}(u_t) = \sigma_t^2$ の場合を考察する。このように誤差項の分散が $t$ について異なることを**不均一分散**（heteroscedasticity）と呼ぶ。分散が時点に依存するとき，代表的な特定化としては，分散が他の変数（例えば，$Z_t$）に依存する場合がある。例えば，消費の場合，所得や資産に応じて分散は大きくなると考えるのが自然である。回帰モデルに不均一分散を含めると，$u_t$ の分散が $\sigma_t^2$ になる（分散が $Z_t$ に依存する場合は，例えば，$\sigma_t^2 = \sigma_*^2 Z_t^2$）。不均一分散の回帰モデルに，単純に，最小 2 乗法を適用すれば，回帰係数 $\beta_i$ の最小 2 乗推定量 $\hat{\beta}_i$ は，系列相関の場合と同様に，不偏性はもつが，有効性はないということが知られている。また，分散の推定値も不偏でないため，係数の有意性の検定を適用することはできないという問題をもつ。

このような場合，以下のような修正が必要となる。

$$
\begin{aligned}
\frac{Y_t}{Z_t} &= \beta_1 \frac{X_{1t}}{Z_t} + \beta_2 \frac{X_{2t}}{Z_t} + \cdots + \beta_k \frac{X_{kt}}{Z_t} + \frac{u_t}{Z_t} \\
&= \beta_1 \frac{X_{1t}}{Z_t} + \beta_2 \frac{X_{2t}}{Z_t} + \cdots + \beta_k \frac{X_{kt}}{Z_t} + u_t^*
\end{aligned}
$$

このとき，新たな撹乱項 $u_t^*$ は平均ゼロ，分散 $\sigma_*^2$ の分布となる（すなわち，「同

一の」分布)。$u_t^*$ の平均ゼロ，分散 $\sigma_*^2$ の証明は，定理 4.1 と 4.3 から，次のとおりである。

$$\mathrm{E}[u_t^*] = \mathrm{E}\Big[\frac{u_t}{Z_t}\Big] = \Big(\frac{1}{Z_t}\Big)\mathrm{E}[u_t] = 0$$

$$\mathrm{V}(u_t^*) = \mathrm{V}\Big(\frac{u_t}{Z_t}\Big) = \Big(\frac{1}{Z_t}\Big)^2\mathrm{V}(u_t) = \Big(\frac{1}{Z_t}\Big)^2\sigma_*^2 Z_t^2 = \sigma_*^2$$

したがって，$Y_t^* = Y_t/Z_t$，$X_{it}^* = X_{it}/Z_t$ を新たな変数として，次の回帰式

$$Y_t^* = \beta_1 X_{1t}^* + \beta_2 X_{2t}^* + \cdots + \beta_k X_{kt}^* + u_t^*$$

に最小 2 乗法を適用すれば，前節までの議論をそのまま当てはめることができる。$Z_t$ は回帰式に含まれる変数でもよい。

単回帰 $Y_t = \alpha + \beta X_t + u_t$ の場合を例にとる。ここで，$Z_t = X_t$ とする。すなわち，$u_t$ の平均はゼロ，分散は $\sigma_*^2 X_t^2$ となる。よって，各変数を $X_t$ で割って，

$$\frac{Y_t}{X_t} = \alpha\frac{1}{X_t} + \beta + \frac{u_t}{X_t}$$

を得る。さらに，各変数を $Y_t^* = Y_t/X_t$，$X_{1t}^* = 1/X_t$，$u_t^* = u_t/X_t$ と変換して，

$$Y_t^* = \alpha X_{1t}^* + \beta + u_t^*$$

に最小 2 乗法を適用することになる。この場合，$\beta$ は定数項として推定されるが，もともとの意味は限界係数（すなわち，傾き）と同じなので，推定結果の解釈の際には注意が必要である。

**不均一分散の検定について：**　誤差項 $u_t$ の分散 $\sigma_t^2$ が，変数 $Z_t$ に依存して，$\sigma_t^2 = \sigma_*^2 Z_t^2$ と書き表せるかどうかの検定は，

$$e_t^2 = \gamma Z_t^2 + \epsilon_t$$

を推定し，$\gamma$ の最小 2 乗推定量 $\hat{\gamma}$ の有意性検定を行えばよい（通常の $t$ 検定)。

**数値例：** 9.6 節の消費関数の推定結果を用いて，誤差項の分散が不均一かどうかの検定を行う。誤差項 $u_t$ の分散は所得 $X_t^2$ に依存するという仮説（すなわち，回帰式 $e_t^2 = \gamma X_t^2 + \epsilon_t$ について，帰無仮説 $H_0$： $\gamma = 0$，対立仮説 $H_1$： $\gamma > 0$）を検定する。

$$e_t^2 = \underset{(3.111)}{0.0000624} \;\; X_t^2$$

$$R^2 = 0.00236, \quad \overline{R}^2 = 0.00236, \quad s^2 = 6.673^2,$$

$$DW = 1.389,$$

ただし，係数の推定値の下の (　) 内は $t$ 値を表すものとする。

係数の推定値の $t$ 値は 3.111，自由度 18 の $t$ 分布の 1 パーセント点は $t_{0.001}(18) = 2.552$ なので，有意水準 1 % で帰無仮説 $H_0$ ： $\gamma = 0$ を片側検定で棄却することができる。したがって，誤差項の分散は所得に依存し，$\sigma_t^2 = \sigma_*^2 X_t^2$ と定式化される。

次に，両辺を所得 $X_t$ で割って，不均一分散を考慮に入れて消費関数の推定を行うと，以下のような結果が得られた。

$$\frac{Y_t}{X_t} = \underset{(-7.728)}{-\,27.660} \;\; \frac{1}{X_t} + \underset{(69.574)}{0.961}$$

$$R^2 = 0.778, \quad \overline{R}^2 = 0.765, \quad s^2 = 0.00902^2, \quad DW = 0.678,$$

ただし，係数の推定値の下の (　) 内は $t$ 値を表すものとする。この場合，定数項の 0.961 は限界消費性向を意味する。また，$s^2 = 0.00902^2$ は $\sigma_*^2$ の推定値となる。

## 練習問題

**10.1** 問 9.6 の数値例を使って，自由度修正済み決定係数 $\overline{R}^2$ とダービン・ワトソン比を計算せよ。

**10.2** 『国民経済計算年報』（経済企画庁，平成 12 年度版）から「民間企業設備投資」（10 億円単位，1990 年価格），「国内総支出」（10 億円単位，1990 年

価格）と『経済統計年鑑』（東洋経済新報社，1999 年度版）から「公定歩合」（単位：%，月末値平均）を用いて，投資関数を推定した。推定期間は 1956 年から 1998 年である。$I_t$ は実質民間企業設備投資，$Y_t$ は実質国内総支出，$r_t$ は実質利子率（＝公定歩合－国内総支出デフレータ上昇率）とする。以下の推定式では，(　) 内は $t$ 値とする。

$$I_t = -\underset{(5.693)}{9903.51} + \underset{(31.94)}{0.18777}\,Y_t + \underset{(0.394)}{112.495}\,r_t$$

$$R^2 = 0.962781,\quad \overline{R}^2 = 0.960921,\quad s = 5397.03,$$

$$DW = 0.329666$$

このとき，次の問に答えよ。

**(1)** 投資関数を，$I_t = \alpha_1 + \beta_1 Y_t + \gamma_1 r_t$ と定式化した場合，パラメータ $\beta_1, \gamma_1$ の符号は正となるべきか，それとも負となるべきか？　また，その理由を述べよ。

**(2)** パラメータ $\beta_1, \gamma_1$ は何を意味するかについて，以下の文章を完成させよ。ただし，**(a)**，**(c)**，**(e)**，**(g)** には $I_t$，$Y_t$，$r_t$ のうちの 1 つが入り，**(b)**，**(d)**，**(f)**，**(h)** には円，ドル，%等の単位を表す単語が入るものと考えよ。

- $\boxed{\textbf{(a)}}$ が 1 $\boxed{\textbf{(b)}}$ 増えるとき，$\boxed{\textbf{(c)}}$ が $\beta_1$ $\boxed{\textbf{(d)}}$ 増える。
- $\boxed{\textbf{(e)}}$ が 1 $\boxed{\textbf{(f)}}$ 増えるとき，$\boxed{\textbf{(g)}}$ が $\gamma_1$ $\boxed{\textbf{(h)}}$ 増える。

**(3)** $R^2$，$\overline{R}^2$，$DW$ にはどのような意味があるか。また，上記の推定結果で得られた数字をどのように評価すればよいのか答えよ。

**(4)** 上の推定結果から判断して，実質国内総支出が実質民間企業設備投資にどのような影響（正の影響か負の影響か）を与えているかを統計的に調べよ。同様に，実質利子率が実質民間企業設備投資にどのような影響を与えているかも調べよ。

**(5)** 推定結果から，上式の投資関数の問題点は何かを答えよ。

**10.3**　問 10.2 と同じデータを用いて，$I_t$，$Y_t$ の対数（すなわち，$\log I_t$，$\log Y_t$）をとって，推定を行った。次の結果を得た。

$$\log(I_t) = -\underset{(21.26)}{6.67360} + \underset{(53.99)}{1.37792}\log Y_t - \underset{(2.099)}{0.01265}\ r_t$$

$$R^2 = 0.986497, \quad \overline{R}^2 = 0.985822,$$

$$s = 0.114613, \quad DW = 0.373472$$

このとき，次の問に答えよ。

**(1)** 投資関数を，$\log I_t = \alpha_2 + \beta_2 \log Y_t + \gamma_2 r_t$ と定式化した場合，パラメータ $\beta_2$，$\gamma_2$ は何を意味するかについて，以下の文章を完成させせよ。ただし，**(a)**，**(c)**，**(e)**，**(g)** には $I_t$，$Y_t$，$r_t$ のうちの 1 つが入り，**(b)**，**(d)**，**(f)**，**(h)** には円，ドル，%等の単位を表す単語が入るものと考えよ。

- $\boxed{\textbf{(a)}}$ が 1 $\boxed{\textbf{(b)}}$ 増えるとき，$\boxed{\textbf{(c)}}$ が $\beta_2$ $\boxed{\textbf{(d)}}$ 増える。
- $\boxed{\textbf{(e)}}$ が 1 $\boxed{\textbf{(f)}}$ 増えるとき，$\boxed{\textbf{(g)}}$ が $100 \times \gamma_2$ $\boxed{\textbf{(h)}}$ 増える。

**(2)** 問 10.2 で得た投資関数とを比較して，どちらが現実的と考えられるか。また，その理由も答えよ。

**(3)** 前問，本問の 2 つの投資関数を推定したが，次に行われるべきことは何か。また，その理由も答えよ。

第 11 章

# 時系列分析

経済学が分析対象とするデータは，時間に対応して観察されるものが多い。このようなデータを**時系列データ**（time series data）という。 例えば，国民総生産は四半期ごとに観察されるし,『家計調査』の勤労者家計所得は月次ベースで報告されている。

これに対して，ある時間の 1 時点をとり，そこで観察されるデータの集合を**横断面データ**，あるいは**クロスセクション・データ**（cross-section data）という。1980 年の兵庫県の勤労者家計の所得の集合は横断面データの例である。

時系列データを分析する主要な目的は，そのデータがどのようなメカニズムで生成されたかを明らかにし，その構造に基づいてさまざまな状況での予測を行うことである。

データの生成メカニズムを分析する手法はさまざまある。第 1 に，分析の対象となっている変数と関連しているさまざまな変数間の関係を何らかの経済理論に基づき定式化し，その相互依存関係を推定することにより分析する手法である。例えば，石油危機以降の日本の家計の消費行動を分析する場合には，さまざまな消費者行動の理論に基づき消費（変数）を説明する所得，資産残高，インフレ率といった諸要因を探し出し，消費との関連を回帰分析によって計測することが行われる。

第 2 に，背後の経済理論がまだ確立されていない場合や，その生成メカニズム自体よりも予測に関心がある場合には，明示的な理論を仮定することなく過去の観察値の標本に基づき，それらの動きを忠実に描写する関数を当てはめることが考えられる。例えば，消費者行動についての知識が全くない場合でも，過去の消費系列が時間の 1 次（線形）関数でうまく描写できることが分かれば，将来の予測を行うことは可能である。

この接近方法では，時系列データ $(X_t)$ が以下の 4 つの要素から構成されていると仮定されることが多い。

**(1)** 時間の経過とともに傾向的に変動する部分。**トレンド**（$T_t$，trend）という。

**(2)** ほぼ一定の周期をもって循環する部分。**循環変動**（$C_t$，cycle）という。

**(3)** 毎年同じ時期（季節）に規則的に観察される変動部分。**季節変動**（$S_t$，seasonality）という。

**(4)** **(1)** から **(3)** によって説明されない部分。**不規則変動**（$I_t$，irregularity）という。

われわれは，この接近方法を時系列の**分解アプローチ**と呼ぶ。このアプローチではそれぞれの変動を特定化し，それらを総合することにより原系列の変動の特徴を探り，予測に利用する。

第 3 のアプローチは，その時系列データの生成過程を確率的に描写し，データの生成された確率的構造を明らかにし，その構造に基づいて予測等を行う。このような接近方法を**時系列分析**（time series analysis）という。第 2 の接近方法と同様，生成メカニズムの理論的背景についての知識は必要としない。

以下では，3 つの接近方法のうち後者の 2 つを取り上げて説明を加える。まず時系列の分解アプローチを取り上げる。次節では，季節変動，11.2 節ではトレンド，11.3 節では循環変動の特定化の方法について，それぞれ説明が加えられる。11.4 節以降は，時系列分析について説明を行う。

## 11.1　季節変動とその特定化

季節変動は夏冬のボーナス支給といったように，毎年ある時期にほぼ決まって観察されるものである。したがって，対象となる時系列データを分析する際には，この部分を取り除き，残りの変動部分に着目することが多い。原系列（当初に与えられたデータの系列）から季節変動を取り除いたデータを**季節調整済みデータ**（seasonally adjusted data）という。以下では季節調整済みデータを作成する簡単な方法について説明を加える。

時系列データは 4 つの変動部分から構成されていることを見たが，その構成の仕方から加法型モデルと乗法型モデルに大別される。**加法型モデル**では時系

列データ $(X_t)$ を

$$X_t = T_t + C_t + S_t + I_t \tag{11.1}$$

と表す。**乗法型モデル**では，

$$X_t = T_t \times C_t \times S_t \times I_t \tag{11.2}$$

と表す。モデルを加法型か乗法型か，どちらに定式化するかによって季節変動の特定化は変わってくるが，以下では加法型モデルを例にとって説明を行う。

季節変動が時間とともに徐々に変化していくことを考慮して，季節変動を除去する方法の 1 つに**移動平均法**（moving average method）がある。 移動平均法の基本的な考え方は，1 年分のデータを平均することにより季節変動が除去できるというものである。

例えば，1980 年から 90 年までの月次データを季節調整したいとしよう。この方法では，1980 年 1 月から 12 月まで平均した値は 80 年の中間の値，すなわち 6.5 月の季節調整値を表していると考える。また，1 期ずらした 1980 年 2 月から 81 年 1 月までの平均値はその中間の月である 80 年 7.5 月の季節調整値となる。80 年 6.5 月の季節調整値と 80 年 7.5 月の季節調整値を平均した値は，80 年 7 月の季節調整値になる。このようにして季節調整値を求める方法を**移動平均値の中心化**と呼ぶ。同様の方法を繰り返し適用していくことにより 1990 年 6 月までの季節調整値系列を得ることができる。一般に移動平均値の中心化による $t$ 期の季節調整値を $Y_t$ で表すと，次式のように書ける。

$$\begin{aligned} Y_t &= \underbrace{\frac{1}{2}\Bigl(\underbrace{\frac{1}{12}(X_{t-6} + X_{t-5} + \cdots + X_{t+5})}_{(t-0.5)\text{ 期の季節調整値}} + \underbrace{\frac{1}{12}(X_{t-5} + \cdots + X_{t+6})}_{(t+0.5)\text{ 期の季節調整値}}\Bigr)}_{t\text{ 期の季節調整値}} \\ &= \frac{1}{24}\bigl(X_{x-6} + 2(X_{t-5} + X_{t-4} + \cdots + X_{t+5}) + X_{t+6}\bigr) \end{aligned} \tag{11.3}$$

さて，この移動平均値の中心化法を用いて実際のデータの季節調整値系列を求めてみよう。表 11.1 の第 1 列目には，全国の勤労者家計 1 世帯が 1 カ月間に教養娯楽用耐久財へ支出した平均金額が示されている。教養娯楽用耐久財とは，テレビ，ラジオ，ステレオ，VTR，カメラなどの耐久財を総称したもので

**表 11.1　教養娯楽用耐久財への支出**

(単位：円)

| | 原系列 (1) | 移動平均 (2) | (3) | | 原系列 (1) | 移動平均 (2) | (3) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1985 年 1 月 | 2590 | | | 1987 年 1 月 | 2791 | 3643.3 | −12.7 |
| 2 月 | 2848 | | | 2 月 | 2352 | 3668.0 | −18.2 |
| 3 月 | 4670 | | | 3 月 | 4735 | 3669.9 | −46.5 |
| 4 月 | 3524 | | | 4 月 | 4648 | 3673.7 | −72.9 |
| 5 月 | 2648 | | | 5 月 | 2532 | 3718.5 | −58.3 |
| 6 月 | 2987 | | | 6 月 | 2786 | 3752.3 | −54.6 |
| 7 月 | 5115 | 3310.9 | 198.4 | 7 月 | 4807 | 3776.0 | −61.2 |
| 8 月 | 2237 | 3278.9 | 136.2 | 8 月 | 3052 | 3851.3 | −16.0 |
| 9 月 | 2344 | 3248.0 | 75.2 | 9 月 | 2983 | 3912.0 | 14.5 |
| 10 月 | 1366 | 3209.1 | 6.0 | 10 月 | 2820 | 3879.3 | −78.7 |
| 11 月 | 2254 | 3176.9 | −56.4 | 11 月 | 2789 | 3879.3 | −78.7 |
| 12 月 | 7360 | 3193.5 | −70.0 | 12 月 | 8839 | 4010.7 | 22.5 |
| 1986 年 1 月 | 2165 | 3200.2 | −93.4 | 1988 年 1 月 | 3146 | 4109.0 | 90.7 |
| 2 月 | 2605 | 3196.7 | −127.2 | 2 月 | 3806 | 4127.8 | 79.3 |
| 3 月 | 4273 | 3255.3 | −98.7 | 3 月 | 4738 | 4125.5 | 46.8 |
| 4 月 | 2986 | 3338.7 | −45.5 | 4 月 | 3748 | 4137.9 | 29.0 |
| 5 月 | 2413 | 3376.8 | −37.6 | 5 月 | 3542 | 4160.3 | 21.2 |
| 6 月 | 3621 | 3426.9 | −17.8 | 6 月 | 4930 | 4201.2 | 31.9 |
| 7 月 | 4642 | 3505.8 | 30.9 | 7 月 | 5024 | | |
| 8 月 | 2625 | 3525.5 | 20.4 | 8 月 | 3286 | | |
| 9 月 | 3364 | 3538.3 | 3.1 | 9 月 | 2694 | | |
| 10 月 | 2347 | 3626.8 | 61.4 | 10 月 | 3406 | | |
| 11 月 | 2188 | 3701.0 | 105.4 | 11 月 | 2740 | | |
| 12 月 | 8627 | 3671.2 | 45.4 | 12 月 | 9870 | | |

（注） 教養娯楽用耐久財とはテレビ，ラジオ，ステレオ，VTR，カメラなどの総称。(3) 列の意味については 11.3 節「循環変動とその特定化」を参照のこと。
（出所） 総務庁統計局『家計調査年報』（平成元年版）。

ある。期間は 1985 年 1 月から 1988 年 12 月までの 48 期間である。その動きを図示したものが図 11.1 である。図から明らかなように，支出額は 7 月と 12 月に大きく増加しており，3 月にも小さなピークが観察されている。7 月，12 月はボーナス・シーズンであり，そのために購入額の大きい耐久消費財への支出が増大するのであろう。このように教養娯楽用耐久財への支出は明らかな季節パターンを示している。

移動平均値の中心化法によって教養娯楽用耐久財支出の季節調整値系列を求

**図** 11.1　**教養娯楽用耐久財支出の推移（原系列）**

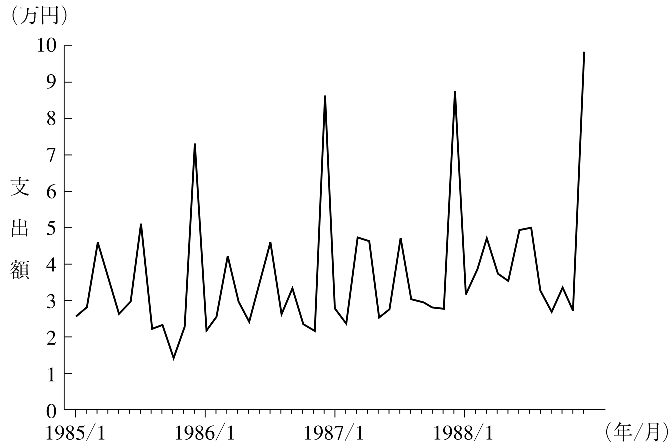
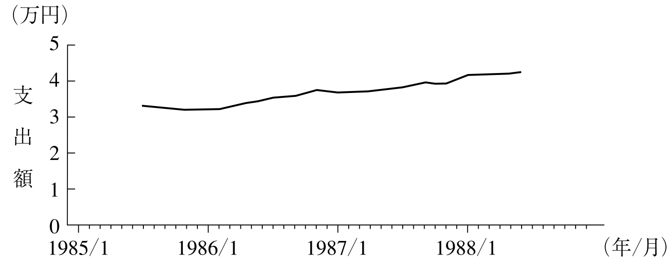



**図** 11.2　**季節調整値の推移**




めてみよう。(11.3) に従って求められた季節調整値系列が，表 11.1 の第 2 列目に示されている。また，そのデータ系列を図示したのが図 11.2 である。得られたデータ系列は 1986 年 2 月まで緩やかに減少した後，小さな変動を伴いながら時間とともに増加していることが分かる。

この移動平均の中心化法による季節調整は簡単で便利であるが，いくつかの欠点がある。第 1 に，対象時系列データの前後 6 カ月の季節調整ができないことである。

第 2 に，季節調整値を得るためには移動平均とり，さらにその平均をとるといった作業を行っており，これが時系列データの季節変動のみならず，不規則変動までもならしてしまい，過度にスムーズな系列ができてしまうという危険

性がある。

現在よく利用されているアメリカのセンサス局で開発された**センサス局法 II** (X11, X12-ARIMA) は，このような点を考慮して開発された季節調整法である。

## 11.2　トレンドとその特定化

時系列データの傾向的な動きを特定化する方法として，トレンド部分を時間の具体的な関数で近似し，その係数を第 9, 10 章で述べた回帰分析によって求めることが行われる。

ここでは代表的な関数形を示し，トレンドがどのようにして定式化されるのか例示しよう。時系列データの傾向的変化の特定化に用いられる最も簡単な関数は 1 次関数である。データ系列のトレンド部分を $T_t$ で表すと，

$$T_t = \alpha + \beta t \tag{11.4}$$

となる。$\alpha$，$\beta$ がともに正の場合のトレンド部分のグラフが図 11.3 **(i)** に示されている。

成長が加速したり減速したりする場合には線形関係によってトレンドを十分に追うことはできない。このような場合には高次の多項式によってトレンドを表す場合が多い。 例えば，2 次関数を用いるとトレンド部分は，

$$T_t = \alpha + \beta t + \gamma t^2 \tag{11.5}$$

のように表される。$\alpha$，$\beta$，$\gamma$ がともに正の場合のトレンド部分のグラフが図 11.3 **(ii)** に示されている。

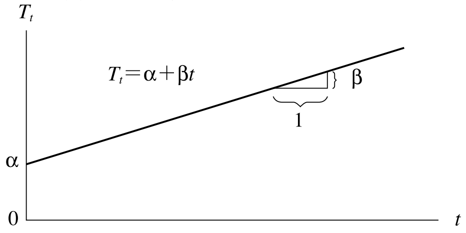
また成長率が一定の場合には，次式のような指数関数によってトレンド部分を描写する（$b$ が成長率を表す)。

$$T_t = Ae^{bt} \tag{11.6}$$

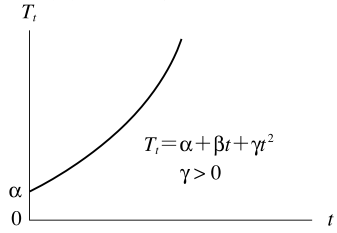
指数関数によるトレンド部分のグラフが図 11.3 **(iii)** に示されている。

**図** 11.3　**トレンドの特定化**

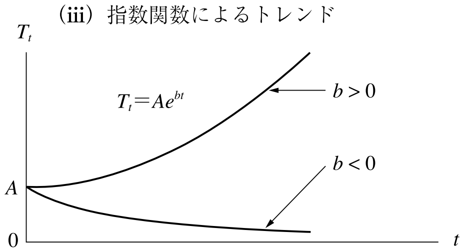
（i） 1 次関数によるトレンド




（ii） 2 次関数によるトレンド




（iii） 指数関数によるトレンド




（注） 成長率は導関数 $(1/T_t)\mathrm{d}T_t/\mathrm{d}t$ で定義されるから，成長率一定（$b$ とおく）とは常微分方程式

$$\frac{1}{T_t}\frac{\mathrm{d}T_t}{\mathrm{d}t} = b$$

の解として得られる方程式である。これを解くと (11.6) を得る。

前節では，教養娯楽用耐久財支出データから季節調整系列が求められたが，そのデータ系列からトレンド部分を計算してみよう。

まず，トレンド部分を (11.4) の 1 次関数で特定化して最小 2 乗法によってその係数値を求めた。その結果が次式で示されている。

$$\underset{}{SEXPD_t =} \underset{(126.0)}{3082.3} + \underset{(26.2)}{30.194}\ TIME, \qquad \overline{R}^2 = 0.9514$$

ただし標本期間は 1985 年 7 月から 88 年 6 月までの 36 期間である。$SEXPD_t$ は，季節調整済みの教養娯楽用耐久財支出，$TIME$ は，1985 年 7 月が 1 で，88 年 6 月が 36 の値を取るトレンド変数である。(　) 内の値は $t$ 値であり，$\overline{R}^2$ は，自由度修正済み決定係数である。$TIME$ 変数の係数は，有意水準 1 %で有意にゼロとは異なり，データ系列にトレンドが存在していることが分かる。

次にトレンド部分を (11.5) の 2 次関数で特定化して最小 2 乗法によって推定を行ってみよう。その結果は，以下のとおりである。

$$SEXPD_t = \underset{(89.8)}{3152.7} + \underset{(4.36)}{19.075}\ TIME + \underset{(2.62)}{0.3005}\ TIME^2,$$

$$\overline{R}^2 = 0.9585$$

**（注意）** 2 次関数（多項式）に関する回帰分析は第 9, 10 章では述べなかったが，(11.5) で $t = X_1$，$t^2 = X_2$ とおけば，10.1 節で述べた重回帰モデルに帰着することが分かる。

トレンド変数の 1 次の項の係数は，有意水準 1 ％ で有意にゼロとは異なっている。 また，2 次の項の係数は，有意水準 5 ％ で有意にゼロと異なっている。1 次式によるトレンドの部分の描写と 2 次式によるトレンド部分の描写を比較すると，2 次式の方が決定係数で見て若干高くなっている。

最後に，指数関数に基づくトレンド部分の推定を行おう。そのためには (11.6) の両辺の対数をとった関係式

$$\log T_t = \log A + bt$$

を推定すればよい。左辺の $\log T_t$ を $Y_t$ という新たな変数と考えれば，推定式は，被説明変数が $Y_t$ であり，$\log A$ を切片，説明変数に時間 $t$ をもつ線形式と考えられ，通常の最小 2 乗法が適用できる（9.2 節参照)。その結果は，以下のとおりである。

$$\log(SEXPD_t) = \underset{(1194.1)}{8.0428} + \underset{(26.09)}{0.0083}\ TIME, \qquad \overline{R}^2 = 0.9510$$

トレンド変数の係数値は有意水準 1 ％ で有意にゼロとは異なり，指数関数によるトレンド部分の描写も良好であることが分かる。トレンド係数の係数値は，$SEXPD_t$ の成長率を表しており，上記の推定結果より，教養娯楽用耐久財支出は，年率 $0.0083 \times 12 \times 100 = 9.96$ ％ で成長増加していることが分かる。

時系列データの分析の中心が循環的変動にある場合には，季節変動とともにトレンド部分も原系列から除去される場合がある。その方法について若干説明を加えよう。第 1 の方法は，上記のようにトレンド部分を時間の関数として特定化し，その係数を回帰分析により推定する方法である。得られた係数推定値を用いてトレンド部分を求め，その部分を原系列から除去すればよい。

第 2 の方法は，原系列の階差をとることによりトレンド部分がないデータ系列へと変換する方法である。 例えば，原系列のトレンド部分が (11.4) のように 1 次関数で与えられているとしよう。(11.4) は 1 期前（$t-1$ 期）にも成立しているから，$t$ に $t-1$ を代入すると

$$T_{t-1} = \alpha + \beta(t-1) \tag{11.7}$$

が成り立つ。(11.4) から (11.7) を差し引くと，1 階の階差は

$$\Delta T_t = T_t - T_{t-1} = \beta \tag{11.8}$$

となり，原系列の階差をとった系列 $(\Delta T_t)$ は，時間 $t$ に依存しなくなる。

原系列のトレンドが (11.5) のような 2 次関数で表されている場合には，1 階の階差をとると，

$$\Delta T_t = \beta + 2\gamma t - \gamma \tag{11.9}$$

となり，まだ時間に依存した部分が残存している。この部分を除去するにはさらにもう一度，階差をとればよい（2 階の階差という）。

$$\Delta^2 T_t = \Delta T_t - \Delta T_{t-1} = 2\gamma \tag{11.10}$$

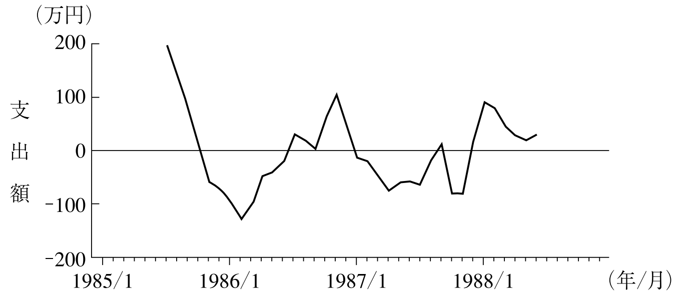
一般に，トレンド部分が $n$ 次多項式で表現されている場合には，$n$ 階の階差をとることにより時間に依存している部分を除去することができる。

トレンドが (11.6) のような指数関数で表されている場合には，その対数値をとれば右辺は $t$ の 1 次関数となるから，その 1 階の階差を求めれば時間に依存した部分を除去することができる。

## 11.3　循環変動とその特定化

経済データにはその変動パターンに周期性が観察されるものが多く見いだされる。例えば，前節では教養娯楽用耐久財のトレンド部分をさまざまな特定化のもとで推定した。その中から，1 次式によってトレンド部分を特定化した計測結果を用いて，季節調整系列からトレンド部分を差し引いた系列を求めてみよ

**図** 11.4　**循環変動値の推移**




う。この系列は，循環変動と不規則変動から構成されていると考えられる。トレンド除去系列を $DEXPD_t$ で表すと $DEXPD_t$ は次式で計算される。

$$DEXPD_t = SEXPD_t - 3082.3 - 30.194 \quad TIME$$

この系列値は，表 11.1 の第 3 列に示されている。それを図示したのが図 11.4 である。図から明らかなように，$DEXPD_t$ 系列は循環的な動きを示している。

時系列データに内蔵している周期性を計測し，それがどのような要因によって引き起こされているのかを探ることにより景気変動のメカニズムを理解しようという試みが数多くなされてきた。

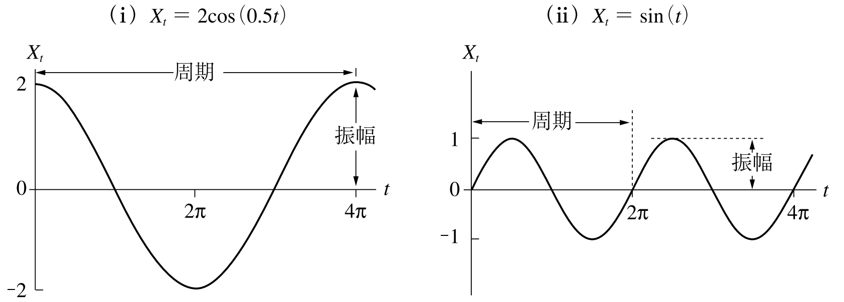
これまでに明らかにされてきた景気循環の代表的なものとして，周期が 50 ～ 60 年の**コンドラチェフ循環**，周期が 9 ～ 10 年の**ジュグラー循環**，周期が 2 ～ 3 年の**キチン循環**がある。 各循環は，それぞれ大きな技術革新の出現，企業の設備投資，在庫循環に対応していると考えられている。

このような循環変動の発見とともにその分析手法も種々開発されてきた。ここでは分析手法の 1 つとして**周期解析法** を簡単に紹介しておこう。周期解析法では循環変動を異なった周期をもつ関数の合成波動として捉えている。周期関数として正弦（サイン）関数，余弦（コサイン）関数で代表される三角関数を考えよう。時系列データ $(X_t)$ を三角関数で表すと次のように書ける。

$$X_t = \theta \cos(\lambda t) \tag{11.11}$$

$$X_t = \theta \sin(\lambda t) \tag{11.12}$$

**図 11.5　循環変動の特定化**




変域が実数の正弦，余弦関数は $-1$ と 1 の間の値しかとらないので，(11.11), (11.12) の $X_t$ の取りうる値域は $-\theta$ と $\theta$ の間である。$\theta$ のことを**振幅**（amplitude）という。また通常の正弦関数と余弦関数の値域は $2\,\pi$ で一巡し，その後も同じパターンが繰り返される。この $2\,\pi$ を**周期**（period）という。(11.11), (11.12) では時間 $t$ の前に $\lambda$ がかかっており，周期は $2\,\pi/\lambda$ となる。 図 11.5 には三角関数の代表的な形状が示されている。

周期解析法は，時系列データの循環変動を異なった振幅と周期をもった三角関数の線形結合として表現し，その三角関数を特徴づける係数パラメータを推定しようとするものである。

## 11.4　時系列分析と定常性

時系列分析では，時系列データが生成された確率的構造を把握するために，その生成過程を確率的に描写することから始まる。

いま観察された時系列データの集合を

$$\{x_t\} = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$$

によって表そう。時系列分析の特徴は，各期の観察値を確率変数の実現値として捉えることにある。次のような確率変数の集合（**確率過程**と呼ぶ）を考えよう。

$$\{X_t\} = \{\cdots, X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots\}$$

第 1 期の観察値 $x_1$ は，第 1 期の確率変数 $X_1$ の実現値と考えられる。 第 2 期から第 $n$ 期についても同様である。また，$\{x_t\}$ のことを**標本**と呼ぶ。

各期の確率変数はそれぞれ分布関数によって特徴づけられており，平均，分散を有している。また異時点間の確率変数については一般に相互に依存しあい，共分散を定義することができる。時系列データが生成された確率的構造を明らかにすることは，これらの確率変数の特性値を推定することにほかならない。

一般に各期の平均，分散，さらに異時点間の共分散は異なった値をとりうるであろう。 しかし，各時点の確率変数の平均，分散を推計するためのデータはその期の実現値 1 つしか利用できない。そこで推定のためには，確率的構造に制約を課す必要が出てくる。その制約として重要なのが**弱定常性**（weak stationary）という性質である。弱定常性は次の 3 つの式によって表される（9.2 節「回帰モデルの諸仮定」も参照）。

$$\mathrm{E}[X_t] = \mu \tag{11.13}$$

$$\mathrm{V}(X_t) = \mathrm{E}[(X_t - \mu)^2] = \phi(0) \tag{11.14}$$

$$\mathrm{Cov}(X_t, X_{t-s}) = \mathrm{E}[(X_t - \mu)(X_{t-s} - \mu)] = \phi(s) \tag{11.15}$$

(11.13)，(11.14) は各期の平均，分散が時間に依存せずに一定であることを示している。(11.15) は**自己共分散**（auto-covariance）といわれる $X_t$ と $X_{t-s}$ の間の共分散であるが，それが 2 時点間の時間的距離 $s$ にのみに依存していることを示している。(11.14) は $s = 0$ の場合であることに注意。これをとくに**自己分散**と呼ぶ。 このように定常性の制約を課すことにより，推定すべきパラメータの数を大幅に減らすことができる。上記の (11.13) $\sim$ (11.15) の推定には，以下の標本平均，標本分散，標本共分散が用いられる。

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} x_t \tag{11.16}$$

$$\hat{\phi}(0) = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}(x_t - \overline{x})^2 \tag{11.17}$$

$$\hat{\phi}(s) = \frac{1}{n-s}\sum_{t=s+1}^{n}(x_t - \overline{x})(x_{t-s} - \overline{x}) \tag{11.18}$$

経済現象を表すデータには定常性を満たさないものも少なくない。例えば，国民総生産は毎年その水準が上昇しており，平均が一定であるという定常性の仮

定は満たされていない。しかし，このようなデータについてもある変換を施すことによって定常性を満たすデータ系列に直すことができる。それは上記の第 11.2 節で説明された階差をとるという操作である。1 階の階差で定常性が得られない場合には，数階階差をとることにより定常性を満たす系列が得られる。

時系列データの背後の確率過程を特定化する際に役立つのが**自己相関**（係数）（auto-correlation），あるいは**コレログラム**（correlogram）という概念である。自己相関は自己共分散 $\phi(s)$ を自己分散 $\phi(0)$ で割った値である（第 3 章で述べた相関係数との類似を想起されたい）。

$$\rho(s) = \frac{\phi(s)}{\phi(0)} \tag{11.19}$$

自己相関は異時点間の確率変数の相関関係を表しており，その値は $-1$ と 1 の間にある。また，自己相関係数の全体をコレログラムという（図 11.6 参照）。

確率過程の構成要素である各期の確率変数が独立に分布している場合には，異時点間の自己相関はすべてゼロとなる。平均がゼロで分散が一定の定常性をもつ確率過程で自己相関がゼロのものを，**ホワイト・ノイズ**（white noise）または**白色雑音**という。

標本について見れば，標本自己相関は次式で計算される。

$$\hat{\rho}(s) = \frac{\hat{\phi}(s)}{\hat{\phi}(0)} \tag{11.20}$$

## 11.5　時系列モデルの特定化

前節では確率過程を特徴づけるものとして，平均，（自己）分散，自己共分散，自己相関について説明を加えた。しかし確率過程を構成する異時点間の確率変数間の関係をさらに明示的に特定化することにより，より深い分析が可能となる。異時点間の確率変数間の関係を明示的に示したモデルが**時系列モデル**といわれるものである。ここでは時系列モデルの代表的なものとして，**自己回帰**（AR）モデルと**移動平均**（MA）モデルについて説明しよう。

### 11.5.1　自己回帰モデル

自己回帰モデルの基本型は AR(1) といわれる次のようなモデルである。

$$X_t = \mu + \theta X_{t-1} + u_t \tag{11.21}$$

ただし，$\mu$, $\theta$ は定数，$u_t$ は平均 0，分散 $\sigma^2$ をもつホワイト・ノイズである。また AR(1) の (　) 内の 1 はモデルの次数と呼ばれる。したがって，(11.21) は 1 次の自己回帰モデルである。

(11.21) から生起される確率過程 $\{X_t\}$ が定常性を満たすには $|\theta| < 1$ でなければならない（その理由は等比数列の収束の条件によっている。具体的には問 11.5 を参照のこと）。この過程の平均は $\mu/(1-\theta)$，自己分散 $\phi(0)$ は $\sigma^2/(1-\theta^2)$，自己共分散 $\phi(s)$ は $\theta^s\phi(0)$，したがって，自己相関は，$\rho(s) = \theta^s$ となることが確かめられる。$|\theta| < 1$ であるから，自己相関は確率変数間の時間的距離が長ければ長いほど小さくなっていく。AR(1) 過程の自己相関（その集合としてのコレログラム）が図 11.6 (i) に示されている。

### 11.5.2　移動平均モデル

移動平均モデルの基本型は，MA(1) といわれる次のようなモデルである。

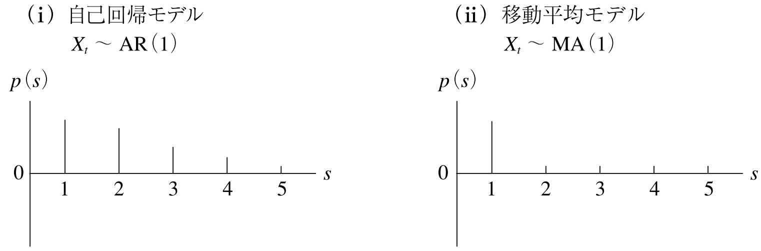
$$X_t = \mu + u_t - \psi u_{t-1} \tag{11.22}$$

確率過程が，ホワイト・ノイズの移動平均によって表現されているところに特徴がある。(11.22) によって描写される $X_t$ の平均は $\mu$ で，分散 $\phi(0)$ は $\sigma^2(1+\psi^2)$，自己共分散 $\phi(s)$ は，$s$ が 1 のときには $-\psi\sigma^2$，それ以外のときには 0 となる。したがって自己相関も $s$ が 1 のときには $-\psi/(1+\psi^2)$，それ以外のときには，0 となる。MA(1) の自己相関が図 11.6 **(ii)** に示されている。ある時点から自己相関が 0 になるのが移動平均モデルの特徴である。

### 11.5.3　より複雑なモデル

より複雑な確率過程を描写するには自己回帰モデルの次数をさらに高くし，$X_t$ が $X_{t-1}$ のみならず $X_{t-2}$，$X_{t-3}$ 等に依存するようにモデルを組み立てたり，移動平均モデルではホワイト・ノイズの移動平均を前期のホワイト・ノイズに限定せずに，さらに過去のホワイト・ノイズまで含めるようにすればよい。

**図** 11.6　**確率過程のコレログラム**




（注）**(ii)** の図では，ある時点以降（図では 2 以降）の自己相関が 0 になっている。

また，自己回帰モデルと移動平均モデルを結合した**自己回帰移動平均**（ARMA）モデルを構築することにより，より少ないパラメータで複雑な確率過程を描写することができる。

## 11.6　時系列モデルの作成手順と予測

前節では種々の時系列モデルのタイプについて説明を加えたが，実際の時系列データがどのようなタイプのモデルによって生起されたと考えるのがいいのか，モデル選択を行う必要がある。この選択のことを**同定**（identification）という。同定は，標本の自己相関パターンから判断して適当と思われるモデルを選択する手続きである。その場合にはできるだけ少ないパラメータ数で時系列データを説明できる時系列モデルを選択することが望ましい。

同定に続くステップは**推定**である。推定の作業が終了すれば，次に推定されたモデルから説明されない残差を計算しその中に系統的な部分が残っているかどうかテストが行われる。これは**診断**（diagnostics）といわれる手続きである。もし残差の中に系統的な部分が残存しているならば，再び同定の手続きに戻り，時系列モデルの特定化をやり直さなければならない。そして，再び推定，診断というステップを踏むことになる。この手続きを繰り返し，最終的に残差がホワイト・ノイズだけであると判明すれば，その時系列モデルを時系列データを生起した確率的構造として選択すればよい。このモデルに基づいて将来予測等の応用分析がなされる。

## 11.7　非定常時系列

非定常時系列に関する議論は，計量経済学特有のものであり，近年目覚ましい発展をとげている。本節では，単位根，見せかけ回帰，共和分の限られたほんの一部分をできるだけ簡単に紹介する。より詳細な議論は，例えば,『計量経済学』（森棟公夫著，東洋経済新報社，1999 年）や『計量経済学』（羽森茂之著，中央経済社，2000 年）等が参考になるであろう。

### 11.7.1　単位根

経済変数で，特に重要な非定常時系列モデルは，**ランダム・ウォーク過程**（random walk process）である。国内総生産（GDP），消費，投資，マネーサプライ等ほとんどの経済変数は，ランダム・ウォーク過程に従う非定常時系列であるといわれている。ある時系列がランダム・ウォーク過程に従っているかどうかの検定を**単位根検定**（unit root test）と呼ぶ。この単位根検定における検定統計量は，本書でこれまで議論してきた $t$ 分布や正規分布には従わないことが分かっている。

ランダム・ウォーク過程とは，$X_1, X_2, \cdots, X_n$ の系列が，

$$X_t = X_{t-1} + u_t \tag{11.23}$$

と表現される。ただし，$u_t$ は，平均ゼロ，分散 $\sigma^2$ の分布に従うものとする。$\Delta X_t = X_t - X_{t-1}$ を 1 **階の階差をとる**という。1 階の階差をとることによって定常過程となるとき，その系列は 1 **次の和分過程**（integrated process of order one）に従っていると呼ばれ，$I(1)$ 過程と表現される（定常過程は $I(0)$ と表される）。$X_t$ が $I(d)$ 過程に従っているとき，$X_t \sim I(d)$ と表記することがある。この記号を使うと，

$$X_t \sim I(1) \iff \Delta X_t \sim I(0)$$

という関係がある。

さて，(11.23) に示された $I(1)$ 過程 $X_t$ が非定常であることを示す。定常性（または，弱定常性）の条件は，(11.13)〜(11.15) に示されるように，**(i)** $X_t$ の

平均は一定，**(ii)** $X_t$ の分散も一定，**(iii)** $X_t$ と $X_{t-s}$ の共分散（すなわち，自己共分散）は時点の差のみに依存する，という性質がある。初期値 $X_0$ を定数（非確率）と仮定し，(11.23) を繰り返し代入することによって，

$$X_t \;=\; X_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_t$$

という式が得られる。これを用いると，$X_t$ の平均と分散は，

$$\mathrm{E}[X_t] = X_0 \qquad \mathrm{V}(X_t) = t\sigma^2$$

となる。また，

$$X_t \;=\; X_{t-s} + u_{t-s+1} + u_{t-s+2} + \cdots + u_t$$

を用いると，$X_t$ と $X_{t-s}$ の共分散は，

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(X_t, X_{t-s}) &= \mathrm{E}[(X_t - X_0)(X_{t-s} - X_0)] \\
&= \mathrm{E}[(X_{t-s} + u_{t-s+1} + u_{t-s+2} + \cdots \\
&\quad + u_t - X_0)(X_{t-s} - X_0)] \\
&= \mathrm{E}[(X_{t-s} - X_0)^2] \\
&\quad + \mathrm{E}[(u_{t-s+1} + u_{t-s+2} + \cdots + u_t)(X_{t-s} - X_0)] \\
&= \mathrm{V}(X_{t-s}) \\
&= (t-s)\sigma^2
\end{aligned}$$

となる。$X_{t-s}$ は，過去の誤差項 $(u_1, u_2, \cdots, u_{t-s})$ とは相関をもつが，将来の誤差項 $(u_{t-s+1}, u_{t-s+2}, \cdots, u_t)$ とは無相関であることに注意せよ。以上から，$\mathrm{V}(X_t)$ は定数でなく時点 $t$ に依存し，$\mathrm{Cov}(X_t, X_{t-s})$ も時点の差 $s$ だけでなく時点 $t$ にも依存することが分かる。$t$ が大きくなると，$\mathrm{V}(X_t)$，$\mathrm{Cov}(X_t, X_{t-s})$ ともに無限大になる。したがって，ランダム・ウォーク過程 $X_t$ は非定常であるといえる。

さらに，$X_t$ と $X_{t-s}$ の相関係数（すなわち，自己相関係数）は，(4.32) を用いると，

$$\begin{aligned}
\rho(s) \;=\; \rho(X_t, X_{t-s}) &= \frac{\mathrm{Cov}(X_t, X_{t-s})}{\sqrt{\mathrm{V}(X_t)}\sqrt{\mathrm{V}(X_{t-s})}} = \frac{(t-s)\sigma^2}{\sqrt{t\sigma^2}\sqrt{(t-s)\sigma^2}} \\
&= \sqrt{\frac{t-s}{t}}
\end{aligned}$$

と計算される。

従来は，時系列モデルの特定化において，図 11.6 のように縦軸に $\rho(s)$，横軸に $s$ をそれぞれとってグラフを描いて，時系列に単位根が含まれているかどうかを判断していた。すなわち，時系列に単位根が含まれている場合，$t$ を一定としたとき，$s$ が大きくなるにつれて，$\rho(s)$ はゆっくりと減衰していくという性質がある。この性質を利用して，従来はグラフを描いて視覚的に単位根があるかどうかを判断していた。しかし，$\rho$ の値が 1 に近い定常過程の場合も，$\rho = 1$ の非定常過程の場合と同様に，自己相関関数が減衰的なものとなることが知られている。したがって，自己相関関数の形状からだけでは定常過程と非定常過程との区別をすることが実際には困難である。それを避けるために統計的な検定を行うことが必要とされるのである。1970 年代後半に単位根の検定が開発され，近年では統計的に定常か非定常かの検定が行われるようになった。

以下に，単位根検定の方法を簡単に説明する。$X_t$ が AR(1) 過程

$$X_t = \theta X_{t-1} + u_t \tag{11.24}$$

に従っているとする。ただし，$u_t$ は，$t = 1, 2, \cdots, n$ についてそれぞれ独立に，平均ゼロ，分散 $\sigma^2$ の分布に従うものとする。もし $|\theta| < 1$ であれば $X_t \sim I(0)$ であるが，もし $\theta = 1$ であれば $X_t$ は単位根をもち，$X_t \sim I(1)$ となる。特に，経済時系列では，単位根があれば $\theta = 1$ となり，そうでなければ $\theta < 1$ となる。そのため，単位根検定では左片側検定が行われる。

実際に，検定するためには，(11.24) を

$$\Delta X_t = \beta X_{t-1} + u_t \tag{11.25}$$

と変形して，帰無仮説 $H_0$： $\beta = 0$，対立仮説 $H_1$： $\beta < 0$ の左片側検定を行うことになる（$\beta = \theta - 1$ という関係がある）。この場合，$\beta$ の最小 2 乗推定量

$$\hat{\beta} = \frac{\sum_{t=1}^{n} X_{t-1}\Delta X_t}{\sum_{t=1}^{n} X_{t-1}^2}$$

は，(9.13) に示される正規分布には従わないことが知られている。したがって，帰無仮説 $H_0$： $\beta = 0$ が正しいとき，検定統計量

$$t_{\hat{\beta}} = \frac{\hat{\beta}}{Se(\hat{\beta})} \tag{11.26}$$

も $t$ 分布には従わず，通常の $t$ 検定を適用することはできない。検定統計量 $t_{\hat{\beta}}$ の分布は，明示的に求めることができず，特殊な関数形をしているが，$t$ 分布よりも左側の裾野が広い分布となっていることが知られている（本書の範囲を超えるのでこれ以上この分布には言及しない）。したがって，検定統計量 $t_{\hat{\beta}}$ を誤って通常の $t$ 分布表（付表 3）を用いて検定すると，対立仮説 $H_1$：$\beta < 0$ を過剰に採択してしまうことになる。言いかえると，実際は $I(1)$ 変数であるにもかかわらず，誤って，$I(0)$ 変数と判定されてしまう可能性が高くなるのである。(11.25) に基づく検定統計量 $t_{\hat{\beta}}$ の分布の下側 1 パーセント点と 5 パーセント点の値は，表 11.2 に示されている（検定統計量 $t_{\hat{\beta}}$ の分布は標本数 $n$ に依存することに注意せよ）。具体的には，$t_{\hat{\beta}}$ の統計値と表 11.2 中の数値とを比較する。もし $t_{\hat{\beta}}$ の統計値が，表 11.2 中の対応する数値より大きければ，帰無仮説 $H_0$：$\beta = 0$ を採択することになる。この場合，$X_t$ は単位根をもつ非定常時系列であると判断する。

**数値例：**　1997 年 1 月 6 日～2000 年 3 月 31 日の東京外国為替相場（終値）の毎日のデータをとり，単位根があるかどうかを検定する。このとき，標本数は 798 である。図 11.7 はその期間の東京外国為替相場（終値）の動きを表す。

図 11.7 に示される東京外国為替相場を $X_t$ とする。(11.25) を最小 2 乗法を用いて推定し，次の結果を得た。

$$\Delta X_t = \underset{(-0.461)}{-\ 0.000149}\ X_{t-1}$$

(　) 内は (11.26) の $t_{\hat{\beta}}$ を表す。表 11.2 から，$n = 798$ の下側 5 パーセント点は $-1.95$ となる。$-0.461 > -1.95$ なので，帰無仮説 $H_0$：$\beta = 0$ を棄却できない。よって，$X_t$ は単位根をもつ，すなわち，$X_t \sim I(1)$ と判定される。

### 11.7.2　見せかけ回帰

経済時系列の場合，全く関係のない変数間で回帰分析を行った結果，決定係数が高く $t$ 値も高いという結果を得る傾向がある。この回帰は**見せかけ回帰**

**表 11.2　単位根検定**

| $\alpha$ \ $n$ | 25 | 50 | 100 | 250 | 500 | $\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.01 | $-2.66$ | $-2.62$ | $-2.60$ | $-2.58$ | $-2.58$ | $-2.58$ |
| 0.05 | $-1.95$ | $-1.95$ | $-1.95$ | $-1.95$ | $-1.95$ | $-1.95$ |

**図 11.7　東京為替相場（終値，1997 年 1 月 6 日〜2000 年 3 月 31 日）**


（spurious regression）と呼ばれ，これは経済時系列変数で回帰分析を行う場合に非常に重要な問題となる。

次の単回帰モデルを考える。

$$Y_t = \alpha + \beta X_t + u_t$$

$Y_t$ と $X_t$ が次のように単位根をもつ非定常時系列であるとする。

$$\begin{aligned} Y_t &= Y_{t-1} + \epsilon_t \\ X_t &= X_{t-1} + \eta_t \end{aligned}$$

ただし，$\epsilon_t$，$\eta_t$ は，すべての $t = 1, 2, \cdots, n$ について，互いに独立であるとする。

以上の設定のもとで，$X_t$ は $Y_t$ に影響を与えない変数であったとしても，次のような結果を得ることが知られている。

**(1)**　回帰係数 $\beta$ に関する $t$ 統計量（$t$ 値）は，観測数が大きければ，大きな値となりやすい。無関係な変数間の回帰なので，$t$ 値は絶対値で小さい値

となるべきである。しかし，逆に大きな $t$ 値を示すことがあり，間違った推論になる傾向がある。

**(2)** 決定係数 $R^2$ は変数間の関係がないのでゼロに近づくべきであるが，見せかけ回帰では 0 と 1 の何らかの間の値をとる。ゼロに近いとは限らず，逆に 1 に近い値をとる可能性も十分にある。

**(3)** $DW$ 比はゼロに近い値となる。すなわち，誤差項 $u_t$ の強い正の系列相関があると判断される。

このように，全く意味のない回帰を，得られた推定結果から，あたかも意味のあるように解釈してしまうことが起こりうるのである。このような状況のもとでは，最小 2 乗推定量 $\hat{\beta}$ は $\beta$ の一致推定量にはならないということも知られている。

見せかけ回帰を避けるためには，誤差項 $u_t$ が定常である必要がある。これは，次節で述べる共和分という概念に密接に関連する。

### 11.7.3　共和分

$Y_t$，$X_t$ ともに単位根をもつ，すなわち，$Y_t \sim I(1)$，$X_t \sim I(1)$ とする。このとき，$Y_t$ と $X_t$ の線形結合が定常，すなわち，$Y_t - \beta X_t \sim I(0)$ であれば，$Y_t$ と $X_t$ とは**共和分**（cointegration）の関係にあるという。

重要な点は，次の回帰

$$Y_t = \beta X_t + u_t$$

を考えた場合，以下のようにまとめられる。

**(i)** $u_t \sim I(1)$ のとき，$\beta$ の最小 2 乗推定量 $\hat{\beta}$ は一致性をもたず，しかも，回帰式の結果を評価すること自体に意味がなくなる。$\longrightarrow$ **見せかけ回帰**

**(ii)** $u_t \sim I(0)$ のとき，$\beta$ の最小 2 乗推定量 $\hat{\beta}$ は一致性をもち，$Y_t$ と $X_t$ との間には安定的な関係がある。$\longrightarrow$ **共和分回帰**

**(ii)** の場合は，$\beta \fallingdotseq 0$ となることに注意せよ。もし $\beta = 0$ であれば，$Y_t = u_t$ となり，$Y_t \sim I(1)$ なので，$u_t \sim I(1)$ となる必要がある。よって，$u_t \sim I(0)$

**表** 11.3　**残差の単位根検定**

| $k'$ | 1 | | 2 | | 3 | | 4 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n$ \ $\alpha$ | 0.01 | 0.05 | 0.01 | 0.05 | 0.01 | 0.05 | 0.01 | 0.05 |
| 50 | $-4.32$ | $-3.67$ | $-4.84$ | $-4.11$ | $-4.94$ | $-4.35$ | $-5.41$ | $-4.76$ |
| 100 | $-4.07$ | $-3.37$ | $-4.45$ | $-3.93$ | $-4.75$ | $-4.22$ | $-5.18$ | $-4.58$ |
| 200 | $-4.00$ | $-3.37$ | $-4.35$ | $-3.78$ | $-4.70$ | $-4.18$ | $-5.02$ | $-4.48$ |

となるためには，$\beta \fallingdotseq 0$ でなければならない。

このように，誤差項 $u_t$ が定常かどうかによって，回帰式の意味が大きく異なることになる。したがって，回帰式に意味があるかどうかを調べるために，共和分の検定を行う必要がある。さまざまな検定方法が提案されているが，ここでは，最も簡単な方法を紹介する（本書で解説する検定は，**エングル・グレンジャー検定**と呼ばれる）。

定数項を含めて，次の回帰式

$$Y_t = \alpha + \beta X_t + u_t$$

を考える。共和分分析を行う前に，まず最初に，行わなければならないことは，11.7.1 節で示した単位根検定である。すなわち，まず，$Y_t$，$X_t$ ともに，$Y_t \sim I(1)$，$X_t \sim I(1)$ であることを検定によって確認する。次に，最小 2 乗法によって $\alpha$，$\beta$ を推定し，残差 $e_t = Y_t - \hat{\alpha} - \hat{\beta} X_t$ を求める。最後に，

$$\Delta e_t = \gamma e_{t-1} + v_t \tag{11.27}$$

から，帰無仮説 $H_0$： $\gamma = 0$，対立仮説 $H_1$： $\gamma < 0$ の単位根検定を行う。このとき，検定統計量

$$t_{\hat{\gamma}} = \frac{\hat{\gamma}}{Se(\hat{\gamma})}$$

の分布は，表 11.2 に示された分布表とも付表 3 の $t$ 分布表とも異なり，この場合は表 11.3 を用いる。表 11.3 では，標本数 ($n$) と説明変数の個数 ($k' = k-1$) に依存して，検定統計量 $t_{\hat{\gamma}}$ の分布の下側 1 パーセント点と 5 パーセント点が示されている。$t_{\hat{\gamma}}$ の統計値と表 11.3 中の対応する数値とを比較して，残差 $e_t$ の単位根検定が行われる。分布表に表 11.3 を用いることを除いて，11.7.1 節で行っ

た単位根検定をそのまま当てはめればよい。すなわち，帰無仮説 $H_0$： $\gamma = 0$ が棄却されれば，$u_t \sim I(0)$ と判定され，回帰式の分析（$\hat{\beta}$，$R^2$，$DW$ 比等）を行うことができる。逆に，帰無仮説 $H_0$： $\gamma = 0$ を棄却できなければ，$u_t \sim I(1)$ と判定され，これ以上の回帰式の分析には全く意味がなくなる。この場合は，$X_t$ とは別の $I(1)$ 変数を回帰式に含めなかったために，このような見せかけ回帰が生じたと考えられる。

**数値例：**　為替レート $(Y_t)$，金利 $(X_{1t})$，株価 $(X_{2t})$ の間に，共和分関係があるかどうかを調べる。また，それぞれのデータは図 11.7 〜 図 11.9 に示された毎日のデータを利用する（標本数は 798 である）。

まず初めに，$Y_t$, $X_{1t}$, $X_{2t}$ のそれぞれに，単位根があるかどうかを調べる。

$Y_t$ については，11.7.1 節で単位根検定を行い，その結果，$Y_t \sim I(1)$ が確認された。

$X_{1t}$ については，

$$\Delta X_{1t} = \underset{(-1.113)}{-\ 0.001256}\ X_{1,t-1}$$

となった。ただし，(　) 内は (11.26) の $t_{\hat{\beta}}$ を表す。表 11.2 から，$n = 798$ の下側 5 パーセント点は $-1.95$ となる。$-1.113 > -1.95$ なので，$X_{1t}$ は単位根をもつ，すなわち，$X_{1t} \sim I(1)$ と判定される。

$X_{2t}$ については，

$$\Delta X_{2t} = \underset{(-0.074)}{-\ 0.0000403}\ X_{2,t-1}$$

となった。$-0.074 > -1.95$ なので，$X_{2t}$ も単位根をもち，$X_{2t} \sim I(1)$ と判定される。以上のように，$Y_t$，$X_{1t}$，$X_{2t}$ はすべて単位根をもつことが分かった。

次に，$Y_t = \alpha + \beta_1 X_{1t} + \beta_2 X_{2t} + u_t$ の回帰を考える。最小 2 乗法によって，

$$Y_t = \underset{(52.6)}{161.1} - \underset{(-3.152)}{3.424}\ X_{1t} - \underset{(-8.386)}{0.002016}\ X_{2t}$$

$$R^2 = 0.235, \quad \overline{R}^2 = 0.234, \quad s = 9.07, \quad DW = 0.234$$

という推定結果を得た。

**図 11.8　利付国債・10 年物（年率，1997 年 1 月 6 日〜2000 年 3 月 31 日）**

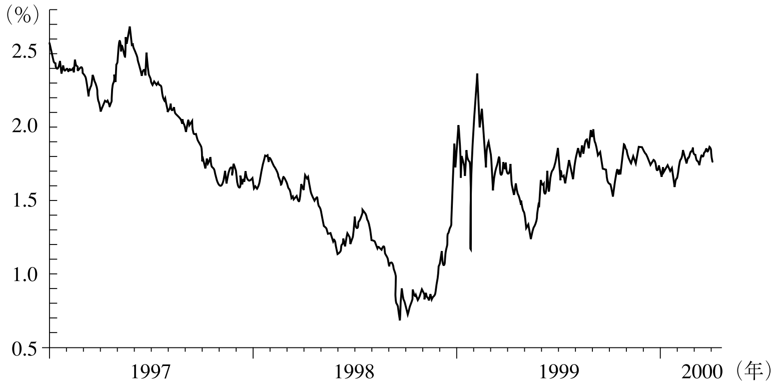



**図 11.9　東証株価・日経 225 種平均（終値，1997 年 1 月 6 日〜2000 年 3 月 31 日）**


この回帰式が意味をもつために，$u_t$ に単位根があるかどうかを調べる。しかし，$u_t$ は誤差項であり未知なので，実際には残差 $(e_t = Y_t - \hat{\alpha} - \hat{\beta}_1 X_{1t} - \hat{\beta}_2 X_{2t})$ に単位根があるかどうかを検定する。すなわち，(11.27) において，帰無仮説 $H_0$：$\gamma = 0$，対立仮説 $H_1$：$\gamma < 0$ を検定することになる。そして，残差に単位根検定を行った結果，

$$\Delta e_t = \underset{(-1.771)}{-\ 0.00830}\ e_{t-1}$$

が得られた。表 11.3 から，$n = 798$，$k' = 2$ に注意すると，下側 5 パーセント点は $-3.78$ となる。$-1.771 > -3.78$ なので，$H_0$：$\gamma = 0$ を棄却できず，

$u_t \sim I(1)$ であるという結果が得られた。

以上をまとめると，$Y_t \sim I(1)$，$X_{1t} \sim I(1)$，$X_{2t} \sim I(1)$，$u_t \sim I(1)$ となるので，回帰式 $Y_t = \alpha + \beta_1 X_{1t} + \beta_2 X_{2t} + u_t$ は見せかけ回帰となり，共和分の関係にないことが明らかとなった。いいかえると，推定結果では $t$ 値が絶対値で大きく，一見，金利（$X_{1t}$）や株価（$X_{2t}$）が為替レート（$Y_t$）に有意な影響を与えているように見えるが，実際のところはこのような事実があるかどうかを判断することはできないという結論になるのである。

## 練習問題

**11.1**　次に示されるような状況のもとで消費の将来予測を行いたい。どのようなデータ生成メカニズムの特定化を行って予測をするのがよいか，説明せよ。

**(1)**　過去の消費のデータ系列のみ利用可能。

**(2)**　過去の消費と所得のデータ系列が利用可能。

**(3)**　将来の消費の予測とともに減税の効果も分析したい。

**11.2**　表 11.4 に与えられているデータは 1986 年から 88 年までの毎月の 1 世帯当り平均チョコレート消費額である。 このデータ系列のグラフを描き，季節変動のパターンを調べよ。 次に移動平均の中心化法を用いて季節調整済み系列を作成せよ。

**表** 11.4　**チョコレートへの支出**

（単位：円）

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1986 年 1 月 | 226 | 1987 年 1 月 | 237 | 1988 年 1 月 | 243 |
| 2 月 | 524 | 2 月 | 614 | 2 月 | 659 |
| 3 月 | 226 | 3 月 | 241 | 3 月 | 256 |
| 4 月 | 157 | 4 月 | 169 | 4 月 | 177 |
| 5 月 | 133 | 5 月 | 137 | 5 月 | 138 |
| 6 月 | 101 | 6 月 | 106 | 6 月 | 108 |
| 7 月 | 87 | 7 月 | 98 | 7 月 | 97 |
| 8 月 | 73 | 8 月 | 95 | 8 月 | 87 |
| 9 月 | 154 | 9 月 | 172 | 9 月 | 167 |
| 10 月 | 233 | 10 月 | 253 | 10 月 | 243 |
| 11 月 | 242 | 11 月 | 247 | 11 月 | 244 |
| 12 月 | 372 | 12 月 | 392 | 12 月 | 388 |

（出所）総務庁統計局『家計調査』（平成元年版）。

**11.3** 問 11.2 で計算された季節調整済み系列に 1 次関数のトレンドを当てはめ，最小 2 乗法を用いて傾向変動の部分を求めよ。

**11.4** 表 11.5 に与えられているデータは 1965 年から 88 年までの日本の実質国民総生産のデータである。このデータ系列に指数関数によるトレンドを当てはめ，最小 2 乗法を用いて傾向変動の部分を求めよ。そして傾向変動の部分を原系列から差し引くことにより残りのデータ系列の変動を分析せよ。循環変動は見られるか。

**表 11.5　実質国民総生産推移**

（単位：10 億円）

| 年 | 実質国民総生産 | 年 | 実質国民総生産 |
|---|---|---|---|
| 1965 | 87991.6 | 1977 | 207737.9 |
| 1966 | 97379.6 | 1978 | 218521.5 |
| 1967 | 108193.6 | 1979 | 230073.7 |
| 1968 | 122071.9 | 1980 | 239914.5 |
| 1969 | 137331.6 | 1981 | 248725.9 |
| 1970 | 152112.7 | 1982 | 256395.2 |
| 1971 | 158766.8 | 1983 | 264703.7 |
| 1972 | 172317.7 | 1984 | 278140.0 |
| 1973 | 185922.9 | 1985 | 291806.9 |
| 1974 | 183285.2 | 1986 | 299023.9 |
| 1975 | 188189.2 | 1987 | 312903.2 |
| 1976 | 197214.8 | 1988 | 330886.9 |

（出所）　経済企画庁『国民経済計算年報』（平成元年版）。

**11.5** 時系列データ $X_t$ は，次で示される確率過程に従って変動している。

$$X_t = 0.7X_{t-1} + u_t$$

$u_t$ は，平均 0，分散が 1 のホワイト・ノイズ。 $X_{t-1}$ についても同様の式が成立し，それを上式の右辺に代入すれば，$X_t$ は，$u_t$，$u_{t-1}$，$X_{t-2}$ で表される。 この過程を続けていくことにより $X_t$ の平均，分散，自己共分散，自己相関を計算せよ。

**11.6** 時系列データ $X_t$ は，次で示される確率過程に従って変動している。

$$X_t = 2 + u_t + 0.8u_{t-1} - 0.3u_{t-2}$$

$u_t$ は，平均 0，分散が 1 のホワイト・ノイズとする。$X_t$ の平均，分散，自己共分散，自己相関を計算せよ。

# 練習問題解答

## 第 1 章解答　（問題は 12 ～ 14 ページ）

**1.1**　**(1)** 表 1 を見よ。**(2)** 図 1 を見よ。

**1.2**　**(1)** 表 2 を見よ。**(2)** 図 2 を見よ。

**1.3**　**(1)** 表 3 を見よ。**(2)** 図 3 を見よ。問題 1.2 の度数分布表との比較すると，7.995 以上のデータが減り，−0.005 以下のデータが極端に増えている。問題 1.2 はバブル以前のデータを扱っているのに対し，ここでは主にバブル以降のデータを含んでいる。そのため，バブル以降，東証株価指数のマイナスの変化率が増えていることが分かる。

**1.4**　**(1)** 表 4 を見よ。**(2)** 図 4 を見よ。

**表 1**

| 階級値 | 階級境界値 | 度数 | 相対度数 | 累積度数 | 累積相対度数 |
|---|---|---|---|---|---|
| 44.5 | 39.5 ～ 49.5 | 2 | 0.10 | 2 | 0.10 |
| 54.5 | 49.5 ～ 59.5 | 5 | 0.25 | 7 | 0.35 |
| 64.5 | 59.5 ～ 69.5 | 8 | 0.40 | 15 | 0.75 |
| 74.5 | 69.5 ～ 79.5 | 3 | 0.15 | 18 | 0.90 |
| 84.5 | 79.5 ～ 89.5 | 2 | 0.10 | 20 | 1.00 |
| 合　計 | | 20 | 1.00 | | |

**表 2**

| 階級値 | 階級境界値 | 度数 | 相対度数 | 累積度数 | 累積相対度数 |
|---|---|---|---|---|---|
| −6.005 | −8.005 ～ −4.005 | 2 | 0.071 | 2 | 0.071 |
| −2.005 | −4.005 ～ −0.005 | 3 | 0.107 | 5 | 0.178 |
| 1.995 | −0.005 ～ 3.995 | 8 | 0.286 | 13 | 0.464 |
| 5.995 | 3.995 ～ 7.995 | 7 | 0.250 | 20 | 0.714 |
| 9.995 | 7.995 ～ 11.995 | 3 | 0.107 | 23 | 0.821 |
| 13.995 | 11.995 ～ 15.995 | 2 | 0.071 | 25 | 0.892 |
| 17.995 | 15.995 ～ 19.995 | 2 | 0.071 | 27 | 0.963 |
| 21.995 | 19.995 ～ 23.995 | 1 | 0.036 | 28 | 0.999 |
| 合　計 | | 28 | 0.999 | | |

**図1**

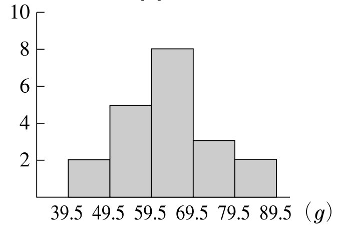



**図2**

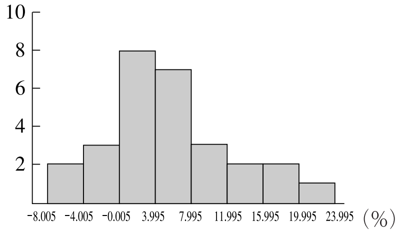



**図3**

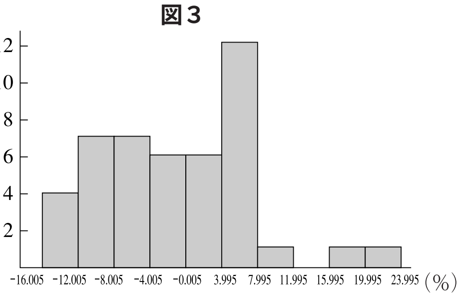



**図4**

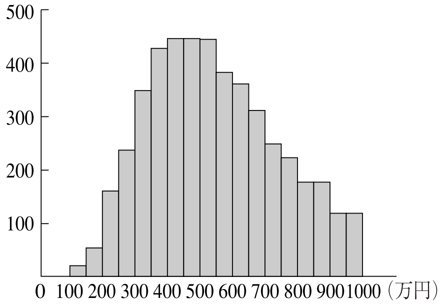



**表3**

| 階級値 | 階級境界値 | 度数 | 相対度数 | 累積度数 | 累積相対度数 |
|---|---|---|---|---|---|
| −14.005 | −16.005 ～ −12.005 | 4 | 0.089 | 4 | 0.089 |
| −10.005 | −12.005 ～ −8.005 | 7 | 0.156 | 11 | 0.244 |
| −6.005 | −8.005 ～ −4.005 | 7 | 0.156 | 18 | 0.400 |
| −2.005 | −4.005 ～ −0.005 | 6 | 0.133 | 24 | 0.533 |
| 1.995 | −0.005 ～ 3.995 | 6 | 0.133 | 30 | 0.667 |
| 5.995 | 3.995 ～ 7.995 | 12 | 0.267 | 42 | 0.933 |
| 9.995 | 7.995 ～ 11.995 | 1 | 0.022 | 43 | 0.956 |
| 13.995 | 11.995 ～ 15.995 | 0 | 0.000 | 43 | 0.956 |
| 17.995 | 15.995 ～ 19.995 | 1 | 0.022 | 44 | 0.978 |
| 21.995 | 19.995 ～ 23.995 | 1 | 0.022 | 45 | 1.000 |
| 合　計 | | 45 | 1.000 | | |

**1.5**　**(1)** 100, **(2)** 300, **(3)** 500, **(4)** 700, **(5)** 900, **(6)** 0.0161, **(7)** 0.2498, **(8)** 0.3683, **(9)** 0.2417, **(10)** 0.1241, **(11)** 75, **(12)** 1237, **(13)** 2950, **(14)** 4074, **(15)** 4651, **(16)** 0.0161, **(17)** 0.2659, **(18)** 0.6342, **(19)** 0.8759, **(20)** 1.0000, **(21)** 4651, **(22)** 1.0000

**1.6**　**(1)**

**表 4**

| 階級境界値 | 度数 (世帯数) | 相対度数 | 累積度数 | 累積相対度数 |
|---|---|---|---|---|
| ～ 100 | 2 | 0.0004 | 2 | 0.0004 |
| 100～ 150 | 19 | 0.0041 | 21 | 0.0045 |
| 150～ 200 | 54 | 0.0116 | 75 | 0.0161 |
| 200～ 250 | 158 | 0.0340 | 233 | 0.0501 |
| 250～ 300 | 233 | 0.0501 | 466 | 0.1002 |
| 300～ 350 | 345 | 0.0742 | 811 | 0.1744 |
| 350～ 400 | 426 | 0.0916 | 1237 | 0.2660 |
| 400～ 450 | 445 | 0.0957 | 1682 | 0.3617 |
| 450～ 500 | 445 | 0.0957 | 2127 | 0.4574 |
| 500～ 550 | 444 | 0.0955 | 2571 | 0.5529 |
| 550～ 600 | 379 | 0.0815 | 2950 | 0.6344 |
| 600～ 650 | 357 | 0.0768 | 3307 | 0.7112 |
| 650～ 700 | 306 | 0.0658 | 3613 | 0.7770 |
| 700～ 750 | 244 | 0.0525 | 3857 | 0.8295 |
| 750～ 800 | 217 | 0.0467 | 4074 | 0.8762 |
| 800～ 900 | 345 | 0.0742 | 4419 | 0.9504 |
| 900～ 1000 | 232 | 0.0499 | 4651 | 1.0003 |
| 合　計 | 4651 | 1.0003 | | |

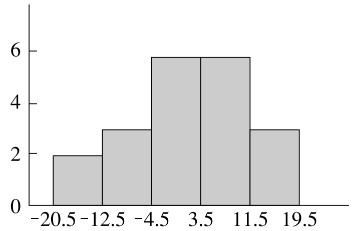
| 階級境界値 | 階級値 | 度数 | 相対度数 | 累積度数 | 累積相対度数 |
|---|---|---|---|---|---|
| −20.5 ～ −12.5 | −16.5 | 2 | 0.10 | 2 | 0.10 |
| −12.5 ～ −4.5 | −8.5 | 3 | 0.15 | 5 | 0.25 |
| −4.5 ～ 3.5 | −0.5 | 6 | 0.30 | 11 | 0.55 |
| 3.5 ～ 11.5 | 7.5 | 6 | 0.30 | 17 | 0.85 |
| 11.5 ～ 19.5 | 15.5 | 3 | 0.15 | 20 | 1.00 |
| | 合　計 | 20 | 1.00 | | |

**(2)**

## 第 2 章解答　（問題は 24 ～ 25 ページ）

**2.1**　**(1)**　E 市 326 万円，F 市 644 万円。**(2)**　範囲：E 市 330，F 市 470。分散：E 市 12384，F 市 19884。標準偏差：E 市 111.283，F 市 141.011。**(3)**　E 市の 700 万円の標準化変量の値は 3.361，F 市の 1000 万円のそれは 2.525。E 市の 700 万円の所得の世帯の方がより上位の所得階層にいる。**(4)**　E 市と F 市の変動係数は，それぞれ 0.341, 0.219，変動係数で比較すると E 市の方がばらつきがある。

**図 5**




**2.2**　実質国民総生産の対前年度比は，86/85 : 1.025; 87/86 : 1.046; 88/87 : 1.057。対前年度比の算術平均は 1.0427，幾何平均は 1.0426。わずかに算術平均の方が大きい。

**2.3**　平均：$\overline{z} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} z_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})/s = \frac{1}{ns}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i - n\overline{x}\right) = 0$,

分散：$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(z_i - \overline{z})^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} z_i^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2/s^2$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2/s^2 = s^2/s^2 = 1,$$ 標準偏差：1

**2.4**　各国の通貨は，それぞれの通貨単位ではかられているから，所得の分布の散らばり具合を変動係数で比較すればよい。

**2.5**　(2.2) と (2.12) から計算する。平均 542.281，分散 38717.277，標準偏差 196.767

**2.6**　**(1)** $\overline{x} = \sum_{i=1}^{k} m_i(f_i/n) = 100 \times 0.0161 + 300 \times 0.2498 + 500 \times 0.3683 + 700 \times 0.2417 + 900 \times 0.1241 = 541.58$，**(2)** $s^2 = \sum_{i=1}^{k} m_i^2(f_i/n) - \overline{x}^2 = 100^2 \times 0.0161 + 300^2 \times 0.2498 + 500^2 \times 0.3683 + 700^2 \times 0.2417 + 900^2 \times 0.1241 - 541.58^2 = 40363.10$，**(3)** 500，**(4)** $s = \sqrt{40363.10} = 200.906$

**2.7**　**(1)** $\overline{x} = (47+61+77+74+60+43)/6 = 60$，**(2)** $s^2 = (47^2+61^2+77^2+74^2+60^2+43^2)/6 - 60^2 = 197.3$，**(3)** $(61+60)/2 = 60.5$，**(4)** $s = \sqrt{197.3} = 14.0$

**2.8**　**(1)** $(1+2+3)/3 = 2$，**(2)** $(3+4+2)/3 = 3$，**(3)** $(1^2+2^2+3^2)/3 - 2^2 = 2/3$，**(4)** $(3^2+4^2+2^2)/3 - 3^2 = 2/3$，**(5)** $(1 \times 3 + 2 \times 4 + 3 \times 2)/3 - 2 \times 3 = -1/3$，**(6)** $\frac{-1/3}{\sqrt{2/3}\sqrt{2/3}} = -0.5$，**(7)** 負

**2.9**

$\overline{x} = 125/5 = 25$，$s^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 = \frac{34}{5} = 6.8$，$s = 2.608$，中央値は 26 （参考：$s^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \overline{x}^2 = 3159/5 - 25^2 = 6.8$）

**2.10**

$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i f_i = \frac{30}{20} = 1.5$，$s^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 f_i = \frac{1776}{20} = 88.8$

| | $x_i$ | $x_i - \overline{x}$ | $(x_i - \overline{x})^2$ | $x_i^2$ |
|---|---|---|---|---|
| | 28 | 3 | 9 | 784 |
| | 23 | $-2$ | 4 | 529 |
| | 26 | 1 | 1 | 676 |
| | 27 | 2 | 4 | 729 |
| | 21 | $-4$ | 16 | 441 |
| 合計 | 125 | 0 | 34 | 3159 |

| 階級境界値 | $m_i$ | $f_i$ | $m_i f_i$ | $m_i - \overline{x}$ | $(m_i - \overline{x})^2$ | $(m_i - \overline{x})^2 f_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $-20.5 \sim -12.5$ | $-16.5$ | 2 | $-33.0$ | $-18$ | 324 | 648 |
| $-12.5 \sim -4.5$ | $-8.5$ | 3 | $-25.5$ | $-10$ | 100 | 300 |
| $-4.5 \sim 3.5$ | $-0.5$ | 6 | $-3.0$ | $-2$ | 4 | 24 |
| $3.5 \sim 11.5$ | 7.5 | 6 | 45.0 | 6 | 36 | 216 |
| $11.5 \sim 19.5$ | 15.5 | 3 | 46.5 | 14 | 196 | 588 |
| | 合計 | 20 | 30.0 | | | 1776 |

| | $x_i$ | $y_i$ | $x_i - \overline{x}$ | $y_i - \overline{y}$ | $(x_i - \overline{x})^2$ | $(y_i - \overline{y})^2$ | $(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $-2$ | 4 | $-2$ | 2 | 4 | 4 | $-4$ |
| | $-1$ | 1 | $-1$ | $-1$ | 1 | 1 | 1 |
| | 0 | 0 | 0 | $-2$ | 0 | 4 | 0 |
| | 1 | 1 | 1 | $-1$ | 1 | 1 | $-1$ |
| | 2 | 4 | 2 | 2 | 4 | 4 | 4 |
| 合計 | 0 | 10 | 0 | 0 | 10 | 14 | 0 |

**2.11**

$\overline{x} = 0$, $\overline{y} = 2$, $s_x^2 = 10/5 = 2$, $s_y^2 = 14/5 = 2.8$, $s_{xy} = 0$ から，
$r = s_{xy}/(s_x s_y) = 0/(2 \times 2.8) = 0$

## 第 3 章解答　（問題は 39 ∼ 41 ページ）

**3.1**　$A = \{$ 男子が生まれる確率 $\}$，$A^c = \{$ 女子が生まれる確率 $\}$ とすると $\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(A^c) = 1/2$。よって，男子が生まれる確率は $\mathrm{P}(A) = 1/2$，一姫二太郎となる確率は $\mathrm{P}(A_1^c \cap A_2) = \mathrm{P}(A_1^c)\mathrm{P}(A_2) = 1/4$。ただし，添え字の 1，2 は 1 人目の子供，2 人目の子供を表すものとする。

**3.2**　$N = n(A) + n(A^c)$ の両辺を $N$ で割れば (3.9) が得られる。また，$n(A) \leqq n(B)$ の両辺を $N$ で割れば (3.10) が得られる。

**3.3** $A_1=${20 代 }，$A_2=${ 30 代 }，$A_3=${40 代 }，$B_1=${ 余暇そのものを楽しむ }，$B_2=${ 家族の絆を深める }，$B_3=${ 心身の疲労回復 }，$B_4=${ 友人との人間関係の充実 } とする。このとき，$\mathrm{P}(A_1)=0.3$，$\mathrm{P}(A_2)=0.5$，$\mathrm{P}(A_3)=0.2$ となる。

**(1)** $\mathrm{P}(B_2\cap A_2)=\mathrm{P}(B_2|A_2)\mathrm{P}(A_2)=0.35\times 0.5=0.175$，**(2)** $B_1$ と $B_3$ は排反であることに注意すると，$\mathrm{P}(A_3\cap(B_1\cup B_3))=\mathrm{P}(B_1\cup B_3|A_3)\mathrm{P}(A_3)=(\mathrm{P}(B_1|A_3)+\mathrm{P}(B_3|A_3))\mathrm{P}(A_3)=0.54\times 0.2=0.108$，**(3)** $\mathrm{P}((A_1\cap B_4)\cup(A_2\cap B_3))=\mathrm{P}(B_4\cap A_1)+\mathrm{P}(B_3\cap A_2)=0.066+0.115=0.181$，**(4)** $B_1$ を所与としたときの $A_1$ の確率が求める確率であり，$\mathrm{P}(A_1|B_1)=\mathrm{P}(A_1\cap B_1)/\mathrm{P}(B_1)$ となる。ここで，分子は $\mathrm{P}(A_1\cap B_1)=\mathrm{P}(B_1|A_1)\mathrm{P}(A_1)=0.123$ となる。$A_1$，$A_2$，$A_3$ は互いに排反なので，分母は $\mathrm{P}(B_1)=\mathrm{P}((B_1\cap A_1)\cup(B_1\cap A_2)\cup(B_1\cap A_3))=\mathrm{P}(B_1\cap A_1)+\mathrm{P}(B_1\cap A_2)+\mathrm{P}(B_1\cap A_3)$ となる。$\mathrm{P}(B_1\cap A_1)$ と同様にして，$\mathrm{P}(B_1\cap A_2)=0.165$，$\mathrm{P}(B_1\cap A_3)=0.054$ となるので，$\mathrm{P}(A_1|B_1)=0.123/(0.123+0.165+0.054)=0.360$

**3.4** **(1)** $A\cup B=\{1,2,3,4,8\}$，**(2)** $A\cap B=\{2,3\}$，**(3)** $A-B=\{1,4\}$，**(4)** $A\cap A^c=\phi$

**3.5** **(1)** $A=\{2,4,6\}$ なので $\mathrm{P}(A)=1/2$，**(2)** $B=\{3,6\}$ なので $\mathrm{P}(B)=1/3$，**(3)** $A\cup B=\{2,3,4,6\}$ なので $\mathrm{P}(A\cup B)=2/3$，**(4)** $A\cap B=\{6\}$ なので $\mathrm{P}(A\cap B)=1/6$

**3.6** **(1)** $\mathrm{P}(E)=300/(300+200)=0.6$，**(2)** $\mathrm{P}(J)=200/(300+200)=0.4$，**(3)** $\mathrm{P}(M|E)=30/100=0.3$，**(4)** $\mathrm{P}(M|J)=20/100=0.2$，**(5)** $\mathrm{P}((E\cup J)\cap M)=\mathrm{P}(M)=(0.3\times 300+0.2\times 200)/500=0.26$，**(6)** $\mathrm{P}((E\cup J)\cap M^c)=1-\mathrm{P}((E\cup J)\cap M)=0.74$，**(7)** $\mathrm{P}((E\cap J)\cup M)=\mathrm{P}(M)=0.26$，**(8)** $\mathrm{P}((E\cap J)\cup M^c)=1-\mathrm{P}((E\cap J)\cup M)=0.74$，**(9)** $\mathrm{P}(E|M)=0.692$，**(10)** $\mathrm{P}(J|M)=0.308$

## 第 4 章解答　（問題は 61 ～ 64 ページ）

**4.1**　$X$ のとる値は $X = 2,\ 3,\ \cdots,\ 12$ で確率はそれぞれ $1/36,\ 2/36,\ 3/36,\ 4/36,\ 5/36,\ 6/36,\ 5/36,\ 4/36,\ 3/36,\ 2/36,\ 1/36$ (合計 $= 1$)

**4.2**　定理 4.3 の証明：$\mathrm{E}[aX+b] = a\mathrm{E}[X]+b$ を用いて，$\mathrm{V}(aX+b) = \mathrm{E}[(aX+b-\mathrm{E}[aX+b])^2] = \mathrm{E}[(a(X-\mathrm{E}[X]))^2] = \mathrm{E}[a^2(X-\mathrm{E}[X])^2] = a^2\mathrm{E}[(X-\mathrm{E}[X])^2] = a^2\mathrm{V}(X)$。定理 4.4 の証明：$Z = (X-\mu)/\sigma$ より，$\mathrm{E}[Z] = \mathrm{E}[(X-\mu)/\sigma] = (\mathrm{E}[X]-\mu)/\sigma = 0, \mathrm{V}(Z) = \mathrm{E}[(Z-\mathrm{E}[Z])^2] = \mathrm{E}[Z^2] = \mathrm{E}[((X-\mu)/\sigma)^2] = \mathrm{E}[(X-\mu)^2]/\sigma^2 = \sigma^2/\sigma^2 = 1$

**4.3**　**(1)**　$X = 1,\ 2,\ 3,\ 4$ についてそれぞれの確率 $\mathrm{P}(X = i)$　$(i = 1,\ 2,\ 3,\ 4)$ は，0.373，0.463，0.150，0.014 である（合計 $= 1$）。**(2)**　夫の小遣いを $Y$ とすると $Y = 30000-5000(X-1)$。よって，$\mathrm{E}[Y] = \mathrm{E}[35000-5000X] = 35000-5000\mathrm{E}[X] = 25975$

**4.4**　$\mathrm{E}[X] = 7,\ \mathrm{V}(X) = 35/6,\ \mathrm{E}[Y] = 3\mathrm{E}[X]+5 = 26,\ \mathrm{V}(Y) = 3^2\mathrm{V}(X) = 52.5$

**4.5**　表 5 を見よ。

**表 5**

| | | 統計学 A | 統計学 B | 統計学 C | 統計学 F | 計 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 経済史 | A | 0.05 | 0.06 | 0.07 | 0.12 | 0.30 |
| | B | 0.02 | 0.10 | 0.14 | 0.14 | 0.40 |
| | C | 0.02 | 0.01 | 0.05 | 0.12 | 0.20 |
| | F | 0.01 | 0.03 | 0.04 | 0.02 | 0.10 |
| 計 | | 0.10 | 0.20 | 0.30 | 0.40 | 1 |

**4.6**　**(1)** $f(0) = 1/8 = 0.125$，**(2)** $f(1) = 3/8 = 0.375$，**(3)** $f(2) = 3/8 = 0.375$，**(4)** $f(3) = 1/8 = 0.125$，**(5)** $f(4) = 0$，**(6)** $F(-1) = 0$，**(7)** $F(1.9) = f(0)+f(1) = 0.5$，**(8)** $F(2) = f(0)+f(1)+f(2) = 0.875$，**(9)** $F(5) = f(0)+f(1)+f(2)+f(3) = 1$

**4.7**　**(1)** $\mathrm{P}(X = 2) = \displaystyle\int_2^2 f(x)\mathrm{d}x = 0$

**(2)** $\mathrm{P}(2 < X < 5) = \mathrm{P}(X < 5) - \mathrm{P}(X < 2) = F(5) - F(2)$

**4.8**　**(1)** $\mathrm{E}[X] = 3\times 0.2+5\times 0.8 = 4.6$，**(2)** $\mathrm{V}(X) = (3^2\times 0.2+5^2\times 0.8)-4.6^2 = 0.64$，**(3)** $\sqrt{\mathrm{V}(X)} = \sqrt{0.64} = 0.8$，**(4)** $\mathrm{E}[Y] = 0.5\mathrm{E}[X]+3 = 0.5\times 4.6+3 = 5.3$，**(5)** $\mathrm{V}(Y) = 0.5^2\mathrm{V}[X] = 0.16$，**(6)** $\sqrt{\mathrm{V}(Y)} = \sqrt{0.16} = 0.4$

**4.9** **(1)** $1-(0.2+0.1+0.4)=0.3$, **(2)** 2, **(3)** 4, **(4)** $0.2+0.3=0.5$, **(5)** $0.1+0.4=0.5$, **(6)** 0, **(7)** 1, **(8)** $0.2+0.1=0.3$, **(9)** $0.3+0.4=0.7$

**4.10** **(1)** $1-(0.2+0.2+0.5)=0.1$, **(2)** $\mathrm{E}[X]=2\times(0.2+0.2)+4\times(0.1+0.5)=3.2$, $\mathrm{E}[Y]=0\times(0.2+0.1)+1\times(0.2+0.5)=0.7$, $\mathrm{Cov}(X,Y)=\mathrm{E}[XY]-\mathrm{E}[X]\mathrm{E}[Y]=2\times0\times0.2+2\times1\times0.2+4\times0\times0.1+4\times1\times0.5-3.2\times0.7=2.4-2.24=0.16$, **(3)** $\mathrm{V}(X)=2^2\times(0.2+0.2)+4^2\times(0.1+0.5)-3.2^2=0.96$, $\mathrm{V}(Y)=0^2\times(0.2+0.1)+1^2\times(0.2+0.5)-0.7^2=0.21$, $\rho(X,Y)=\dfrac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathrm{V}(X)}\sqrt{\mathrm{V}(Y)}}=\dfrac{0.16}{\sqrt{0.96}\sqrt{0.21}}=0.356$, **(4)** $\mathrm{P}(Y=0|X=4)=0.1/(0.1+0.5)=1/6$, **(5)** $\mathrm{P}(Y=1|X=4)=0.5/(0.1+0.5)=5/6$, **(6)** $\mathrm{E}[X+Y]=\mathrm{E}[X]+\mathrm{E}[Y]=3.2+0.7=3.9$, **(7)** $\mathrm{V}(X+Y)=\mathrm{V}(X)+2\mathrm{Cov}(X,Y)+\mathrm{X}(Y)=0.96+2\times0.16+0.21=1.49$

**4.11** **(1)** $\mathrm{E}[X+Y]=\mathrm{E}[X]+\mathrm{E}[Y]=3+2=5$, **(2)** $\rho(X,Y)=\dfrac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathrm{V}(X)}\sqrt{\mathrm{V}(Y)}}$ なので $0.5=\dfrac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{4}\sqrt{1}}$ から $\mathrm{Cov}(X,Y)=1$, **(3)** $\mathrm{Cov}(X,Y)=\mathrm{E}[XY]-\mathrm{E}[X]\mathrm{E}[Y]$ から $\mathrm{E}[XY]=10+2\times4=18$, **(4)** $\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}[X^2]-(\mathrm{E}[X])^2=11-3^2=2$, **(5)** $\mathrm{Cov}(X,Y)=\mathrm{E}[XY]-\mathrm{E}[X]\mathrm{E}[Y]=\mathrm{E}[X]\mathrm{E}[Y]-\mathrm{E}[X]\mathrm{E}[Y]=0$, **(6)** $\mathrm{Cov}(X,Y)=\mathrm{E}[XY]-\mathrm{E}[X]\mathrm{E}[Y]=20-7\times8=-36$, **(7)** $\mathrm{V}(X+Y)=\mathrm{V}(X)+\mathrm{V}(Y)=8$

**4.12** **(1)** $\mathrm{E}[\overline{X}]=\mathrm{E}[X_1+\cdots+X_5]/5=(\mathrm{E}[X_1]+\cdots+\mathrm{E}[X_5])/5=(3+\cdots+3)/5=3$, **(2)** $\mathrm{V}(\overline{X})=\mathrm{V}(X_1+\cdots+X_5)/5^2=(\mathrm{V}(X_1)+\cdots+\mathrm{V}(X_5))/5^2=(5+\cdots+5)/5^2=1$

**4.13** $\mathrm{E}[X]=0\times0.4+2\times0.1+5\times0.2+9\times0.3=3.9$, $\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}[X^2]-(\mathrm{E}[X])^2=0^2\times0.04+2^2\times0.1+5^2\times0.2+9^2\times0.3-3.9^2=14.49$

**4.14** $\mathrm{E}[X]=0\times p+1\times2p^2+2\times3p+3\times3p^2=11p^2+6p$, $\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}[X^2]-(\mathrm{E}[X])^2=0^2\times p+1^2\times2p^2+2^2\times3p+3^2\times3p^2-(11p^2+6p)^2=(29p^2+12p)-(11p^2+6p)^2$。確率の和は 1 であるので，$p+2p^2+3p+3p^2=1$ から，$5p^2+4p-1=(5p-1)(p+1)=0$。よって，$p=1/5$ または $p=-1$。$0\leqq p\leqq1$ から $p=1/5=0.2$。これを，$\mathrm{E}[X]$ と $\mathrm{V}(X)$ に代入すると，$\mathrm{E}[X]=11\times0.2^2+6\times0.2=1.64$, $\mathrm{V}(X)=(29\times0.2^2+12\times0.2)-1.64^2=0.8704$

**4.15** **(1)** $\displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=1$ から，$\displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 a(1-x)\mathrm{d}x=a\left[x-x^2/2\right]_0^1=a(1-1/2)=a/2=1$。よって，$a=2$, **(2)** $\mathrm{E}[X]=\displaystyle\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x=2\int_0^1(x-$

$x^2)\mathrm{d}x = 2\left[x^2/2 - x^3/3\right]_0^1 = 2(1/2 - 1/3) = 1/3$, $\mathrm{E}[X^2] = \int_0^1 x^2 f(x)\mathrm{d}x = 2\int_0^1 (x^2 - x^3)\mathrm{d}x = 2\left[x^3/3 - x^4/4\right]_0^1 = 2(1/3 - 1/4) = 1/6$ から $\mathrm{V}(X) = \mathrm{E}[X^2] - (\mathrm{E}[X])^2 = 1/6 - (1/3)^2 = 1/18$, **(3)** $F(t) = \mathrm{P}(X \leqq t) = \int_0^t f(x)\mathrm{d}x = \int_0^t 2(1 - x)\mathrm{d}x = 2[x - x^2/2]_0^t = 2t - t^2$, **(4)** 中央値を $m$ とすると，$\mathrm{P}(X \leqq m) = \mathrm{P}(X > m) = 1/2$ から，$\mathrm{P}(X \leqq m) = 2m - m^2 = 1/2$。この方程式を解くと，$m = (2 \pm \sqrt{4-2})/2 = (2 \pm \sqrt{2})/2 = 1 \pm \sqrt{2}/2$ を得る。$0 \leqq m \leqq 1$ から $m = 1 - \sqrt{2}/2 \fallingdotseq 0.293$

**4.16** **(1)** $\mathrm{P}(X = 3) = {}_4\mathrm{C}_3 0.7^3 0.3^1 = 0.4116$, **(2)** $\mathrm{P}(2 \leqq X \leqq 3) = \mathrm{P}(X = 2) + \mathrm{P}(X = 3) = {}_4\mathrm{C}_2 0.7^2 0.3^2 + {}_4\mathrm{C}_3 0.7^3 0.3^1 = 0.2646 + 0.4116 = 0.6762$, **(3)** $\mathrm{P}(X \leqq 3) = 1 - \mathrm{P}(X = 4) = 1 - {}_4\mathrm{C}_4 0.7^4 0.3^0 = 0.7599$

**4.17** **(1)** $0.1 + 0.2 + a + 0.3 + 0.1 + 0.2 = a + 0.9 = 1$ から，$a = 0.1$,
**(2)**

| $X \backslash Y$ | 1 | 2 | 3 | $\mathrm{P}(X = x)$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.1 | 0.2 | 0.1 | 0.4 |
| 2 | 0.3 | 0.1 | 0.2 | 0.6 |
| $\mathrm{P}(Y = y)$ | 0.4 | 0.3 | 0.3 | 1.0 |

例えば，$\mathrm{P}(X = 1, Y = 1) = 0.1$ であるが $\mathrm{P}(X = 1)\mathrm{P}(Y = 1) = 0.16$ であるので独立ではない。

**(3)** $\mathrm{E}[X] = \sum_{x=1}^{2} x\mathrm{P}(X = x) = 1 \times 0.4 + 2 \times 0.6 = 1.6$, $\mathrm{E}[X^2] = \sum_{x=1}^{2} x^2\mathrm{P}(X = x) = 1^2 \times 0.4 + 2^2 \times 0.6 = 2.8$, $\mathrm{V}(X) = \mathrm{E}[X^2] - (\mathrm{E}[X])^2 = 2.8 - 1.6^2 = 0.24$,
**(4)**

| $Y$ | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| $\mathrm{P}(Y \mid X = 1)$ | 0.25 | 0.5 | 0.25 |

$\mathrm{E}[Y|X = 1] = 1 \times 0.25 + 2 \times 0.5 + 3 \times 0.25 = 2$, $\mathrm{E}[Y^2|X = 1] = 1^2 \times 0.25 + 2^2 \times 0.5 + 3^2 \times 0.25 = 4.5$, $\mathrm{V}(Y|X = 1) = \mathrm{E}[Y^2|X = 1] - (\mathrm{E}[Y|X = 1])^2 = 4.5 - 2^2 = 0.5$,

**(5)**

| $X$ | $Y$ | $\mathrm{P}(X=x, Y=y)$ | $Z=2X+Y$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 0.1 | 3 |
| 1 | 2 | 0.2 | 4 |
| 1 | 3 | 0.1 | 5 |
| 2 | 1 | 0.3 | 5 |
| 2 | 2 | 0.1 | 6 |
| 2 | 3 | 0.2 | 7 |

から，$Z$ の確率分布は次のようになる。

| $Z$ | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|
| $\mathrm{P}(Z=z)$ | 0.1 | 0.2 | 0.4 | 0.1 | 0.2 |

$\mathrm{E}[Z] = 3\times0.1+4\times0.2+5\times0.4+6\times0.1+7\times0.2 = 5.1$，$\mathrm{E}[Z^2] = 3^2\times0.1+4^2\times0.2+5^2\times0.4+6^2\times0.1+7^2\times0.2 = 27.5$，$\mathrm{V}(Z) = \mathrm{E}[Z^2]-(\mathrm{E}[Z])^2 = 27.5-5.1^2 = 1.49$

## 第 5 章解答　(問題は 72 ～ 73 ページ)

**5.1**　**(1)** 0.0582，**(2)** 0.9099，**(3)** 0.5895，**(4)** 0.2437，**(5)** 0.3980

**5.2**　$X \sim \mathrm{N}(2,9)$ から $Z=(X-2)/3 \sim \mathrm{N}(0,1)$ となることに注意して，**(1)** 0.1151，**(2)** 0.9962，**(3)** 0.4452，**(4)** 0.3159，**(5)** 0.2579

**5.3**　$X \sim \mathrm{N}(10,4^2)$ から $Z=(X-10)/4 \sim \mathrm{N}(0,1)$。よって，$\mathrm{P}(X>12) = \mathrm{P}(Z>0.5) = 0.3085$ となり，求める学生数は $0.3085 \times 1200$（人）$= 370.2$（人）。四捨五入して 370 人。

**5.4**　$X \sim \mathrm{N}(70,12^2)$ から $Z=(X-70)/12 \sim \mathrm{N}(0,1)$。最低得点を $x_0$ とすると，$\mathrm{P}(X<x_0) = \mathrm{P}(Z<(x_0-70)/12) = 0.33$ を満たす $x_0$ を求めればよい。付表 1 より，$\mathrm{P}(Z<-0.44) = 0.33$ であるので，$(x_0-70)/12 = -0.44$ を解くと $x_0 = 64.72$ となる。四捨五入して 65 点。

**5.5**　体重を $X$ で表すと，題意から $X \sim \mathrm{N}(4400,469^2)$。10 パーセンタイル値を $x_1$，90 パーセンタイル値を $x_2$ で表すと $\mathrm{P}(X \leqq x_1) = 0.1$，$\mathrm{P}(X \leqq x_2) = 0.9$ を満たす $x_1$ と $x_2$ を求めればよい。$Z = (X-4400)/469 \sim \mathrm{N}(0,1)$ とすると，$\mathrm{P}(Z \leqq (x_1-4400)/469) = \mathrm{P}(Z \leqq -1.28) = 0.1$，$\mathrm{P}(Z \leqq (x_2-4400)/469) =$

$\mathrm{P}(Z \leqq -1.28) = 0.9$ を解いて，$x_1 = 3800g$，$x_2 = 5000g$ となる。同様にして，身長の 10 パーセンタイル値は $52cm$，90 パーセンタイル値は $57cm$

**5.6**　**(1)** $\mathrm{P}(Z > 0) = 0.5$，**(2)** $\mathrm{P}(Z < -2.22) = \mathrm{P}(Z > 2.22) = 0.0132$，**(3)** $\mathrm{P}(Z = 1.0) = 0$，**(4)** $\mathrm{P}(-0.3 < Z < 0.5) = 1 - \mathrm{P}(Z > 0.5) - \mathrm{P}(Z < -0.3) = 1 - \mathrm{P}(Z > 0.5) - \mathrm{P}(Z > 0.3) = 1 - 0.3085 - 0.3821 = 0.3094$

**5.7**　**(1)** $\mathrm{P}(X > 2) = \mathrm{P}((X+2)/4 > 1) = \mathrm{P}(Z > 1) = 0.1587$，**(2)** $\mathrm{P}(X < -2) = \mathrm{P}((X+2)/4 > 0) = \mathrm{P}(Z > 0) = 0.5$，**(3)** $\mathrm{P}(-3 < X < 1) = \mathrm{P}(-0.25 < (X+2)/4 < 0.75) = \mathrm{P}(-0.25 < Z < 0.75) = 1 - \mathrm{P}(Z > 0.75) - \mathrm{P}(Z < -0.25) = 1 - \mathrm{P}(Z > 0.75) - \mathrm{P}(Z > 0.25) = 1 - 0.2266 - 0.4013 = 0.3721$，**(4)** $\mathrm{P}(|X| < 0.4) = \mathrm{P}(-0.4 < X < 0.4) = \mathrm{P}(0.4 < (X+2)/4 < 0.6) = \mathrm{P}(0.4 < Z < 0.6) = \mathrm{P}(Z > 0.4) - \mathrm{P}(Z > 0.6) = 0.3446 - 0.2743 = 0.0703$

**5.8**　**(1)** $\mathrm{P}(|X| < x) = \mathrm{P}(-x < X < x) = \mathrm{P}((-x-3)/5 < (X-3)/5 < (x-3)/5) = \mathrm{P}((-x-3)/5 < Z < (x-3)/5) = 1 - \mathrm{P}(Z > (x-3)/5) - \mathrm{P}(Z < (-x-3)/5) = 1 - \mathrm{P}(Z > (x-3)/5) - \mathrm{P}(Z > (x+3)/5)$

| $x$ | $(x-3)/5$ | $\mathrm{P}(Z > (x-3)/5)$ | $(x+3)/5$ | $\mathrm{P}(Z > (x+3)/5)$ | $1 - \mathrm{P}(Z > (x-3)/5)$ $- \mathrm{P}(Z > (x+3)/5)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 9.4 | 1.28 | 0.1003 | 2.48 | 0.0066 | 0.8931 |
| 9.5 | 1.30 | 0.0968 | 2.50 | 0.0062 | 0.8970 |
| 9.6 | 1.32 | 0.0934 | 2.52 | 0.0059 | 0.9007 |
| 9.7 | 1.34 | 0.0901 | 2.54 | 0.0055 | 0.9044 |

$x = 9.6$ のときが最も 0.9 に近い。**(2)** $\mathrm{P}(X < x) = \mathrm{P}((X-3)/5 < (x-3)/5) = \mathrm{P}(Z < (x-3)/5) = \mathrm{P}(Z < -1.96) = 0.025$ なので $(x-3)/5 = -1.96$ により $x = -6.8$

**5.9**　$X \sim \mathrm{N}(5, 2^2)$，　$Z = (X-5)/2 \sim \mathrm{N}(0,1)$，**(1)**　$\mathrm{P}(X \geqq 4) = \mathrm{P}((X-5)/2 \geqq (4-5)/2) = \mathrm{P}(Z \geqq -0.5) = 0.6915$，**(2)**　$\mathrm{P}(X \leqq 5) = \mathrm{P}((X-5)/2 \leqq (5-5)/2) = \mathrm{P}(Z \leqq 0) = 0.5$，**(3)**　$\mathrm{P}(X \leqq 3) = \mathrm{P}((X-5)/2 \leqq (3-5)/2) = \mathrm{P}(Z \leqq -1) = 0.1587$，**(4)**　$\mathrm{P}(3.5 \leqq X \leqq 4.5) = \mathrm{P}((3.5-5)/2 \leqq (X-5)/2 \leqq (4.5-5)/2) = \mathrm{P}(-0.75 \leqq Z \leqq -0.25) = 0.4013 - 0.2266 = 0.1747$，**(5)**　$\mathrm{P}(|X-4| > 0.5) = \mathrm{P}(X-4 > 0.5,\ X-4 < -0.5) = \mathrm{P}(X > 4.5,\ X < 3.5) = \mathrm{P}(X > 4.5) + \mathrm{P}(X < 3.5) = \mathrm{P}(Z > (4.5-5)/2) + \mathrm{P}(Z < (3.5-5)/2) = \mathrm{P}(Z > -0.25) + \mathrm{P}(Z < -0.75) = 1 - 0.1747 = 0.8253$

**5.10**　**(1)**　$X \sim \mathrm{N}(68, 8^2)$ から，$\mathrm{P}(X < 60) = \mathrm{P}((X-68)/8 < (60-68)/8) = \mathrm{P}(Z < -1) = 0.1587$ となり，約 15.9 % が不合格となる。**(2)**　$\mathrm{P}(X \geqq 78) =$

$\mathrm{P}((X-68)/8 \geqq (78-68)/8) = \mathrm{P}(Z \geqq 1.25) = 0.1057$ から，上位約 10.6% 以内にいるといえる。**(3)** $\mathrm{P}(X \geqq x_0) = 0.05$，$\mathrm{P}((X-68)/8) \geqq (x_0-68)/8) = 0.05$ となる。標準正規分布表から，上側確率が 0.05 になる点を求めると，$z_{0.05} = 1.645$ であるので，方程式 $(x_0-68)/8 = 1.645$ を解くと，$x_0 = 81.16$ となるので，上位 5% 以内に入るには，82 点が必要である。

## 第 6 章解答　（問題は 90 ～ 92 ページ）

**6.1**　適切とはいえない。奨学金をもらうには，父親の所得に上限があるのが普通であるから，奨学金をもらっている学生の父親の所得に基づく標本平均は，母平均を過小推定する可能性がある。

**6.2**　母平均 7，母分散 26，標本平均の平均は (6.4) から 7，標本平均の分散は (6.7) から 26/9。また，$((4-3)/(4-1))(26/3) = 26/9$ となり (6.7) を満たす。

**6.3**　**(1)** 標本平均を $\overline{X}$ をすると $\overline{X} \sim \mathrm{N}(480, 320^2/64)$。標準化の公式から $Z = (\overline{X}-480)/(320/\sqrt{64}) \sim \mathrm{N}(0,1)$。よって，$\mathrm{P}(450 \leqq \overline{X} \leqq 500) = \mathrm{P}(-0.75 \leqq Z \leqq 0.5) = 0.4649$，**(2)** $\mathrm{P}(\overline{X} \geqq 520) = \mathrm{P}(Z \geqq (520-480)/(320/\sqrt{n})) \leqq 0.05$ となるような $n$ を求めればよい。標準正規分布表から $\mathrm{P}(Z \geqq 1.645) = 0.05$ であるので $(520-480)/(320/\sqrt{n}) \geqq 1.645$ を $n$ について解くと $n \geqq 173.1856$。必要な標本の大きさは $n = 174$

**6.4**　標本標準偏差を $S$ とすると，$\mathrm{P}(S \geqq 400) \leqq 0.05$ となるような $n$ を求めればよい。$(n-1)S^2/320^2$ が自由度 $n-1$ のカイ 2 乗分布に従うので，$\mathrm{P}((n-1)S^2/320^2 \geqq (n-1)400^2/320^2) \leqq 0.05$ を満たす $n$ が求める標本数である。解析的には解けないので，$n$ に関して逐次代入を行う。$n = 21$ のとき，$20 \times 400^2/320^2 = 31.25$ であり，カイ 2 乗分布表から $\mathrm{P}(20S^2/320^2 \geqq \chi^2_{0.05}(20)) = 0.05$ を満たす $\chi^2_{0.05}(20)$ は 31.41 であるので $\mathrm{P}(20S^2/320 \geqq 31.25) > \mathrm{P}(20S^2/320 \geqq 31.41) = 0.05$。同様にして $n = 22$ のとき $\mathrm{P}(21S^2/320 \geqq 32.81) < 0.05$。よって必要な標本の大きさは $n = 22$

**6.5**　$\mathrm{P}(S_1^2/S_2^2 \geqq 2.5) \leqq 0.05$ となるような第 2 の標本の大きさ $(n)$ を求めればよい。$S_1^2/S_2^2$ は自由度 $(8, n-1)$ の $F$ 分布に従うので，問題 6.4 と同様に $n$ を逐次代入すると，$n-1 = 18$ のとき $\mathrm{P}(S_1^2/S_2^2 \geqq 2.5) > 0.05$，$n-1 = 19$ のとき $\mathrm{P}(S_1^2/S_2^2 \geqq 2.5) < 0.05$ となる。よって，必要な標本の大きさは $n = 20$

**6.6**　**(1)** $x = 15.09$，**(2)** $x = 2.70$，**(3)** $\mathrm{P}(x < X < 28.85) = \mathrm{P}(X > x) - \mathrm{P}(X > 28.85) = \mathrm{P}(X > x) - 0.025 = 0.925$ なので $x = 7.96$

**6.7** (**1**) 中心極限定理 $(\overline{X}-\mathrm{E}[\overline{X}])/\sqrt{\mathrm{V}(\overline{X})}=(\overline{X}-1)/\sqrt{2/2500}\ \longrightarrow\ \mathrm{N}(0,1)$ なので $\mathrm{N}(0,1)$，(**2**) $\mathrm{P}(\overline{X}<x)=\mathrm{P}((\overline{X}-1)/\sqrt{(2/2500)}<(x-1)/\sqrt{(2/2500)})=\mathrm{P}(Z<-1.96)=0.025$ なので $(x-1)/\sqrt{(2/2500)}=-1.96$ により $x=0.94456$，(**3**) $\mathrm{P}(0.98<\overline{X}<1.05)=\mathrm{P}((0.98-1)/\sqrt{(2/2500)}<(\overline{X}-1)/\sqrt{(2/2500)}<(1.05-1)/\sqrt{(2/2500)})=\mathrm{P}(-0.71<Z<1.77)=1-\mathrm{P}(Z>0.71)-\mathrm{P}(Z>1.77)=1-0.2389-0.0384=0.7227$

**6.8** (**1**) $\mathrm{E}[\overline{X}]=\mathrm{E}\left[\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right]=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{E}[X_i]=\dfrac{1}{9}\sum_{i=1}^{9}3=3$，(**2**) $\mathrm{V}(\overline{X})=\mathrm{V}\left(\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\left(\dfrac{1}{n}\right)^2\sum_{i=1}^{n}\mathrm{V}(X_i)=\left(\dfrac{1}{9}\right)^2\sum_{i=1}^{9}25=\dfrac{25}{9}$，(**3**) $\mathrm{P}(\overline{X}<0)=\mathrm{P}((\overline{X}-3)/\sqrt{25/9}<-3/\sqrt{25/9})=\mathrm{P}(Z<-1.8)=\mathrm{P}(Z>1.8)=0.0359$，(**4**) $\mathrm{P}(\overline{X}>x)=\mathrm{P}((\overline{X}-3)/\sqrt{25/9}>(x-3)/\sqrt{25/9})$, $\mathrm{P}(Z>1.282)=0.1$ なので $(x-3)/\sqrt{25/9}=1.282$ から $x=5.137$

**6.9** (**1**) $x=3.365$，(**2**) $x=-2.262$，(**3**) $x=-2.120$，(**4**) $x=-2.015$，(**5**) $\mathrm{P}(0.0<X)=0.5$，(**6**) $\mathrm{P}(-1.35<X)=0.9$

**6.10** (**1**) $\mathrm{N}(\mu,\sigma^2)$，(**2**) $\mathrm{N}(\mu,\sigma^2/n)$，(**3**) $\mathrm{N}(0,1/n)$，(**4**) $\chi^2(n)$，(**5**) $\chi^2(n-1)$，(**6**) $\mathrm{N}(0,1)$，(**7**) $t(n-1)$，(**8**) $\chi^2(1)$

**6.11** $X_i\sim\mathrm{N}(35,10^2)$ から，$\overline{X}\sim\mathrm{N}(35,\ (10/\sqrt{25})^2)=\mathrm{N}(35,2^2)$。(**1**) $\mathrm{P}(\overline{X}\geqq 34.6)=\mathrm{P}((\overline{X}-35)/2\geqq(34.6-35)/2)=\mathrm{P}(Z\geqq-0.2)=1-0.4207=0.5793$，(**2**) $\mathrm{P}(\overline{X}\leqq 34.2)=\mathrm{P}((\overline{X}-35)/2\leqq(34.2-35)/2)=\mathrm{P}(Z\leqq-0.4)=0.3446$，(**3**) $\mathrm{P}(34\leqq\overline{X}\leqq 35.5)=\mathrm{P}((34-35)/2\leqq(\overline{X}-35)/2\leqq(35.5-35)/2)=\mathrm{P}(-0.5\leqq Z\leqq 0.25)=1-(0.3085+0.4013)=0.2902$

**6.12** $X\sim\mathrm{N}(\mu,7.2^2)$，$n=81$ から，$\overline{X}\sim\mathrm{N}(\mu,\ (7.2/\sqrt{81})^2)=\mathrm{N}(\mu,0.8^2)$ となり，$\mathrm{P}(|\overline{X}-\mu|>1)=\mathrm{P}(\overline{X}-\mu>1,\overline{X}-\mu<-1)=\mathrm{P}(\overline{X}-\mu>1)+\mathrm{P}(\overline{X}-\mu<-1)=\mathrm{P}((\overline{X}-\mu)/0.8>1/0.8)+\mathrm{P}((\overline{X}-\mu)/0.8<-1/0.8)=\mathrm{P}(Z>1.25)+\mathrm{P}(Z<-1.25)=2\times 0.1057=0.2114$

**6.13** (**1**) $X\sim\mathrm{N}(\mu,4.2^2)$，$n=36$ から，$\overline{X}\sim\mathrm{N}(\mu,\ (4.2/\sqrt{36})^2=\mathrm{N}(\mu,0.7^2)$ となり，$\mathrm{P}(|(\overline{X}-\mu)/0.7|<1.96)=0.95$，$\mathrm{P}(|\overline{X}-\mu|<1.96\times 0.7)=\mathrm{P}(|\overline{X}-\mu|<1.372)=0.95$ となり，確率 0.95 で最大誤差は 1.372 分である（誤差が 1.372 分以上になる確率は 0.05）。(**2**) $\mathrm{P}(|\overline{X}-\mu|<1)=0.05$ となる $n$ を求める。$\mathrm{P}(|\overline{X}-\mu|/(\sigma/\sqrt{n})<1.96)=0.05$，$\mathrm{P}(|\overline{X}-\mu|<1.96\sigma/\sqrt{n})=0.95$ から，$1.96(\sigma/\sqrt{n})=1$ と置いて，方程式を解くと，$\sqrt{n}=1.96\sigma$ となり，$\sigma=4.2$ を代入すると，$n=(1.96\times 4.2)^2=67.77$。したがって，68 個の標本が必要である。

## 第 7 章解答　（問題は 108 ∼ 112 ページ）

**7.1**　信頼係数 0.9 と 0.95 の信頼区間は，(7.213, 9.187)，(7.024, 9.376)

**7.2**　信頼係数 0.9 と 0.95 の信頼区間は，それぞれ，(8.634, 12.366)，(8.213, 12.787)

**7.3**　信頼係数 0.9 と 0.95 の信頼区間は，それぞれ，(597.687, 610.313)，(596.478, 611.522)

**7.4**　標本平均と標本標準偏差は，それぞれ，$\overline{x}=4.2$，$s=1.032$。信頼係数 0.9 と 0.95 の信頼区間は，それぞれ，(3.690,4.710)，(3.576,4.824)

**7.5**　信頼係数 0.9 と 0.95 の信頼区間は，それぞれ，(1.565,6.732)，(1.405,8.071)

**7.6**　信頼係数 0.9 と 0.95 の信頼区間は，それぞれ，(0.608,2.445)，(0.548,2.902)

**7.7**　信頼係数 0.9 と 0.95 の信頼区間は，それぞれ，(0.593,0.747)，(0.578,0.762)

**7.8**　**(1)**　$L=\lambda^{-n}\exp(-\sum_{i=1}^{n}\dfrac{x_i}{\lambda})$，**(2)**　$L$ の対数をとり $\lambda$ で微分してゼロとおくと $-\dfrac{n}{\lambda}+\sum_{i=1}^{n}\dfrac{x_i}{\lambda}^2=0$。これを $\lambda$ について解くと $\hat{\lambda}=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i=\overline{x}$

**7.9**　**(1)** $\mathrm{E}[\overline{X}]=\mathrm{E}[(1/3)X_1+(1/3)X_2+(1/3)X_3]=(1/3)\mathrm{E}[X_1]+(1/3)\mathrm{E}[X_2]+(1/3)\mathrm{E}[X_3]=\mu$，**(2)** $\mathrm{E}[\widetilde{X}]=\mathrm{E}[(1/6)X_1+(1/2)X_2+(1/3)X_3]=(1/6)\mathrm{E}[X_1]+(1/2)\mathrm{E}[X_2]+(1/3)\mathrm{E}[X_3]=\mu$，**(3)** $\mathrm{E}[\hat{X}]=\mathrm{E}[(1/2)X_1+(1/4)X_2+(1/5)X_3]=(1/2)\mathrm{E}[X_1]+(1/4)\mathrm{E}[X_2]+(1/5)\mathrm{E}[X_3]=(19/20)\mu$，**(4)** $\mathrm{V}(\overline{X})=\mathrm{V}((1/3)X_1+(1/3)X_2+(1/3)X_3)=(1/3)^2\mathrm{V}(X_1)+(1/3)^2\mathrm{V}(X_2)+(1/3)^2\mathrm{V}(X_3)=(1/3)\sigma^2$，**(5)** $\mathrm{V}(\widetilde{X})=\mathrm{V}((1/6)X_1+(1/2)X_2+(1/3)X_3)=(1/6)^2\mathrm{V}(X_1)+(1/2)^2\mathrm{V}(X_2)+(1/3)^2\mathrm{V}(X_3)=(7/18)\sigma^2$

**7.10**　**(1)** $\mathrm{E}[\overline{X}]=\mu$ なので ○，**(2)** $\mathrm{E}[\widetilde{X}]=\mu$ なので ○，**(3)** $\mathrm{E}[\hat{X}]\fallingdotseq\mu$ なので ×，**(4)** $\mathrm{V}(\overline{X})<\mathrm{V}(\widetilde{X})$ なので ×，**(5)** $\sum_{i=1}^{3}\omega=1$ を満たす $\sum_{i=1}^{3}\omega_iX_i$ は $\mu$ の不偏推定量となるので ○，**(6)** 不偏推定量の中で最も小さな分散となる推定量が有効推定量なので ○

**7.11**　**(1)** $\mathrm{E}[S^2]=\sigma^2$ なので $\mathrm{E}[S^{*2}]=((n-1)/n)\sigma^2\fallingdotseq\sigma^2$ により ×，**(2)** $\mathrm{E}[S^2]=\sigma^2$ なので ○

**7.12**　**(1)** $\overline{X}\sim\mathrm{N}(\mu,\,3^2/25)$ なので $(\overline{X}-\mu)/\sqrt{3^2/25}\sim\mathrm{N}(0,\,1)$，**(2)** $\mathrm{P}(|\overline{X}-\mu|/\sqrt{3^2/25}<z_{0.005})=0.99$ なので $(\overline{x}-z_{0.005}\sqrt{3^2/25},\overline{x}+z_{0.005}\sqrt{3^2/25})=(8.05-2.576\sqrt{3^2/25},\,8.05+2.576\sqrt{3^2/25})=(6.504,9.596)$

**7.13**　**(1)** $\overline{X}\sim\mathrm{N}(\mu,\,\sigma^2/12)$ なので $(\overline{X}-\mu)/\sqrt{\sigma^2/12}\sim\mathrm{N}(0,1)$ により $(\overline{X}-\mu)/\sqrt{S^2/12}\sim t(11)$，**(2)** $\mathrm{P}(|\overline{X}-\mu|/\sqrt{S^2/12}<t_{0.05}(11))=0.90$ なので $(\overline{x}-$

$t_{0.05}(11)\sqrt{s^2/12}, \overline{x}+t_{0.05}(11)\sqrt{s^2/12}) = (12.6-1.796\sqrt{9/12}, 12.6+1.796\sqrt{9/12})$
$= (11.045, 14.155)$

**7.14**　**(1)** $\overline{X} \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2/400)$ なので $(\overline{X}-\mu)/\sqrt{\sigma^2/400} \sim \mathrm{N}(0,1)$ により $(\overline{X}-\mu)/\sqrt{S^2/400} \sim t(399) \fallingdotseq \mathrm{N}(0,1)$，**(2)** $\mathrm{P}(|\overline{X}-\mu|/\sqrt{S^2/400} < z_{0.025}) = 0.95$ なので $(\overline{x}-z_{0.025}\sqrt{s^2/400}, \overline{x}+z_{0.025}\sqrt{s^2/400}) = (2.56-1.960\sqrt{4^2/400}, 2.56+1.960\sqrt{4^2/400}) = (2.168, 2.952)$

**7.15**　**(1)** $(n-1)S^2/\sigma^2 \sim \chi^2(15)$，**(2)** $\mathrm{P}(\chi^2_{0.95}(15) < (n-1)S^2/\sigma^2 < \chi^2_{0.05}(15))$ $= \mathrm{P}(7.26 < 15 \times S^2/\sigma^2 < 25.00) = 0.90$ なので，$(15 \times s^2/25.00,\ 15 \times s^2/7.26)$ $= (15 \times 1.44/25.00,\ 15 \times 1.44/7.26) = (0.864,\ 2.975)$

**7.16**　**(1)** $\overline{X} \sim \mathrm{N}(\mu,\ \sigma^2/4)$ なので，$(\overline{X}-\mu)/\sqrt{\sigma^2/4} \sim \mathrm{N}(0,1)$ により，$(\overline{X}-\mu)/\sqrt{S^2/4} \sim t(3)$，**(2)** $\mathrm{P}(|\overline{X}-\mu|/\sqrt{S^2/4} < t_{0.05}(3)) = 0.90$ なので，$(\overline{x}-t_{0.05}(3)\sqrt{s^2/4}, \overline{x}+t_{0.05}(3)\sqrt{s^2/4})$，$\overline{x} = (3.9+1.1+0.1+0.5)/4 = 1.4$，$s^2 = (1/3)(3.9^2+1.1^2+0.1^2+0.5^2-4\times 1.4^2) = 2.947$ により，$(1.4-2.353\sqrt{2.947/4}, 1.4+2.353\sqrt{2.947/4}) = (-0.62, 3.42)$

**7.17**　**(1)** $(\hat{p}-p)/\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})/n} \sim \mathrm{N}(0,1)$，**(2)** $\mathrm{P}(|\hat{p}-p|/\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})/n} < z_{0.025}) = 0.95$ なので，$(\hat{p}-z_{0.025}\ \sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})/n}, \hat{p}+z_{0.025}\ \sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})/n}) = (0.345-1.960\sqrt{0.345(1-0.345)/536}, 0.345+1.960\sqrt{0.345(1-0.345)/536})$ により，信頼区間の上限は 0.385，**(3)** 信頼区間の下限は 0.305

**7.18**　**(1)** $\mathrm{E}[Y] = \mathrm{E}[aX_1+bX_2] = a\mathrm{E}[X_1]+b\mathrm{E}[X_2] = a\mu+b\mu = (a+b)\mu$ を得る。よって，$Y$ が不偏推定量である条件は，$a+b=1$ である。**(2)** $\mathrm{V}(Y) = \mathrm{E}[(aX_1+(1-a)X_2-\mu)^2] = \mathrm{E}[(a(X_1-\mu)+(1-a)(X_2-\mu))^2] = a^2\mathrm{E}[(X_1-\mu)^2]+(1-a)^2\mathrm{E}[(X_2-\mu)^2] = \sigma^2(a^2+(1-a)^2)$ を得る。分散を最小にする $a$ を求めるために，分散を $a$ で微分すると，$\mathrm{dV}(Y)/\mathrm{d}a = \sigma^2(2a-2(1-a)) = \sigma^2(4a-2)$ となる。$\mathrm{dV}(Y)/\mathrm{d}a = 0$ を解くと，$a = b = 1/2$ を得る。

**7.19**　$\overline{x} \pm z_{\alpha/2}\ \sigma/\sqrt{n}$，$\overline{x} = 61.2$，$\sigma = 5$，$n = 49$，

90%：$61.2 \pm 1.645 \times 5/\sqrt{49}$ なので，$(60.025,\ 62.375)$

95%：$61.2 \pm 1.96 \times 5/\sqrt{49}$ なので，$(59.8,\ 62.6)$

**7.20**　$((n-1)s^2/\chi^2_{\alpha/2}(n-1), (n-1)s^2/\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1))$，$n = 15$，$s^2 = 3.6$，

90%：$(14 \times 3.6/23.69,\ 14 \times 3.6/6.57) = (2.128,\ 7.670)$，

95%：$(14 \times 3.6/26.12,\ 14 \times 3.6/5.63) = (1.930,\ 8.954)$

**7.21**　$\overline{x} \pm t_{\alpha/2}(15)s/\sqrt{n}$，$\overline{x} = 10.2$，$s^2 = 8.4$　$(s = 2.898)$，$n = 16$，

90%：$10.2 \pm 1.753 \times 2.898/\sqrt{16}$ なので，$(8.930,\ 11.470)$

95%：$10.2 \pm 2.131 \times 2.898/\sqrt{16}$ なので，$(8.656, 11.744)$

**7.22** $\hat{p} \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\hat{p}\hat{q}/n}$，$\hat{p} = 45/300 = 0.15$，$n = 300$，
90% ： $0.15 \pm 1.645 \times \sqrt{0.15 \times 0.85/300}$ なので，(0.116, 0.184)
95% ： $0.15 \pm 1.960 \times \sqrt{0.15 \times 0.85/300}$ なので，(0.110, 0.190)

## 第 8 章解答 （問題は 138 ～ 143 ページ）

**8.1** $H_0 : \mu = 120$，$H_1 : \mu > 120$ とする。$\alpha = 0.01$ では，$\overline{x} = 135 < 143$ だから $H_0$ を採択。$\alpha = 0.05$ では，$\overline{x} < 136$ だから $H_0$ を採択。$\alpha = 0.1$ では，$\overline{x} > 132$ だから $H_0$ を棄却。

**8.2** $\beta = \mathrm{P}(\overline{X} < 136|H_1) = \mathrm{P}((\overline{X} - \mu_1)/(\sigma/\sqrt{n}) < (136 - 140)/(20/2)) = \mathrm{P}(Z_n < -0.4) \fallingdotseq 0.34$。$\alpha = 0.01$ のときは，$\beta = \mathrm{P}(Z_n < (143 - 140)/(20/2)) = \mathrm{P}(Z_n < 0.3) \fallingdotseq 0.62$。したがって，$\beta$ はより大きくなる。

**8.3** **(1)** **(i)** $|t| = 5.67$ であるから，$\mu = 740$ は棄却される。**(ii)** $|t| = 1.67$ であるから，$\mu = 630$ は採択されうる。**(iii)** $|t| = 2.33$ であるから，$\mu = 690$ は棄却される。**(2)** 採択されうる範囲は，$623 < \mu < 687$ である。

**8.4** 東京都の平均床面積を $\mu$ とし，$H_0 : \mu \geqq 80.9$，$H_1 : \mu < 80.9$ とおいて，$H_0$ を検定する。5% の有意水準では，$\overline{x} = 62.5 < 80.9 - 1.65(18/10) = 77.9$。よって，$H_0$ を棄却。1% の有意水準でも $H_0$ が棄却されることを確かめよ。

**8.5** **(1)** 日本の年平均成長率を $\mu_J$，アメリカの年平均成長率を $\mu_U$ とする。$H_0 : \mu_J = \mu_U$，$H_1 : \mu_J \fallingdotseq \mu_U$ を検定する。データから，$n_1 = n_2 = 34$，$\overline{x}_J = 6.89$，$\overline{x}_U = 3.07$，$s_J^2 = 12.47$，$s_U^2 = 5.35$ となる。1% の有意水準では，$|\overline{x}_J - \overline{x}_U| = 3.82 > z_{0.005}\sqrt{(12.47/34) + (5.35/34)} = 2.58 \times 0.724 = 1.87$。よって，$H_0$ を棄却。

（注） 5% の有意水準の場合でも，$H_0$ が棄却されることを示せ。$H_0$ が 1% の有意水準で棄却されるのならば，5% の有意水準でも必ず棄却されるが，その理由を考えよ。

**(2)** $H_0 : \mu_J \leqq \mu_U$，$H_1 : \mu_J > \mu_U$ 1% の有意水準では，$\overline{x}_J - \overline{x}_U = 3.82 > 2.33 \times 0.724 = 1.69$，よって $H_0$ を棄却。

**8.6** 下水道総人口普及率を $p$ とし，仮説を $H_0 : p = 0.40$(または，$p \leqq 0.40$)，$H_1 : p > 0.40$ と立てる。$\hat{p} = 4800/10000 = 0.48$ を $z$ に代入して，$z = (0.48 - 0.40)/\sqrt{0.4 \times 0.6/10000} \fallingdotseq 16.33$。$z_{0.01} = 2.33$ だから，明らかに $z = 16.33 > z_{0.01}$ が成立する。1% の有意水準で，改善していると評定される。

**8.7**　**(1)** ○，**(2)** ×，**(3)** ×，**(4)** ○

**8.8**　**(1)** $H_0$： $\mu = 90$，**(2)** $(\overline{x} - \mu_0)/\sqrt{\sigma^2/n} = (101 - 90)/\sqrt{10^2/4} = 2.2$，**(3)** (3)，**(4)** $2.2 > z_{0.025} = 1.960$ なので棄却，**(5)** $2.2 < z_{0.005} = 2.576$ なので採択される。

**8.9**　**(1)** $H_0 : p = 0.5$，$H_1 : p < 0.5$，**(2)** $(0.41 - 0.5)/\sqrt{0.5(1-0.5)/100} = -1.8$，**(3)** $\mathrm{N}(0,1)$，**(4)** $-1.8 < -z_{0.05} = -1.645$ なので ○

**8.10**　**(1)** $H_0 : \mu = 4.5$，$H_1 : \mu < 4.5$，**(2)** $(1.4 - 4.5)/\sqrt{8.84/12} = -3.61$，**(3)** $t(3)$，**(4)** $-3.61 > -t_{0.01}(3) = -4.541$ なので ×

**8.11**　**(1)** $H_0 : \mu = 3.5$，$H_1 : \mu \fallingdotseq 3.5$，**(2)** $(2.9 - 3.5)/\sqrt{2^2/25} = -1.5$，**(3)** $\mathrm{N}(0,1)$，**(4)** $-1.5 > -z_{0.025} = -1.96$ なので ○

**8.12**　**(1)** $|7.1 - 2.6|/\sqrt{10/3 + 10/4} = 1.86$，**(2)** $\mathrm{N}(0,1)$，**(3)** $1.86 > z_{0.10} = 1.282$ なので ○

**8.13**　**(1)** $|642 - 637|/\sqrt{361/289 + 961/225} = 2.13$，**(2)** $\mathrm{N}(0,1)$，**(3)** $2.13 < z_{0.005} = 2.576$ なので ×

**8.14**　**(1)** $z = (\overline{x} - \mu_0)/(\sigma/\sqrt{n})$，$\overline{x} = 20$，$n = 36$ なので，$z = (20-18)/(7/\sqrt{36}) = 1.714 > 1.645 = z_{0.05}$。よって，$H_0$ は棄却される。**(2)** $z = 1.714 < 2.326\ (= z_{0.01})$ から，$H_0$ は採択される。**(3)** 母集団分布 $\mathrm{N}(\mu,\ \sigma^2)$ での有意水準 $\alpha$ の検定の棄却域は $\mathrm{P}((\overline{X} - \mu_0)/(\sigma/\sqrt{n}) > z_\alpha) = \mathrm{P}(\overline{X} > \mu_0 + z_\alpha\sigma/\sqrt{n}) = \alpha$ から，$\overline{X} > \mu_0 + z_\alpha\sigma/\sqrt{n}$ を得る。$\mu_0 = 18$，$\sigma = 7$，$n = 36$，$z_{0.05} = 1.645$，$z_{0.01} = 2.326$ を代入すると，有意水準 0.05 および 0.01 の検定の棄却域は，

　0.05： $\overline{X} > 18 + 1.645 \times 7/\sqrt{36} = 19.92$

　0.01： $\overline{X} > 18 + 2.326 \times 7/\sqrt{36} = 20.71$

検定力は，帰無仮説が正しくない（対立仮説が正しい）ときに，帰無仮説を棄却する確率であるので，対立仮説のもとで，$\overline{X}$ が棄却域に入る確率を求めればよい。有意水準が 0.05 のときの検定力は $\mathrm{P}(\overline{X} > 19.92) = \mathrm{P}((\overline{X}-22)/(7/\sqrt{36}) > (19.92-22)/(7/\sqrt{36})) = \mathrm{P}(Z > -1.78) = 0.9625$ となる。また，有意水準が 0.01 のときの検定力は $\mathrm{P}(\overline{X} > 20.71) = \mathrm{P}((\overline{X}-22)/(7/\sqrt{36}) > (20.71-22)/(7/\sqrt{36})) = \mathrm{P}(Z > -1.11) = 0.8665$

**8.15**　**(1)** $\overline{x} = 87$，$s = 7$，$n = 12$，$\overline{x} \pm t_{\alpha/2}s/\sqrt{n} = 87 \pm 2.201 \times 7/\sqrt{12}$ から，(82.552，91.448)。**(2)** $H_0 : \mu = 83$，$H_1 : \mu > 83$，$t = (\overline{x} - 87)/(7/\sqrt{12}) = (87 - 83)/(7/\sqrt{12}) = 1.979 > 1.796 = t_{0.05}(11)$。よって，$H_0$ は棄却され，寿命は延びたといえる。

**8.16**　$H_0 : \mu_1 = \mu_2$，$H_1 : \mu_1 \fallingdotseq \mu_2$ について，$Z = (\overline{X}_1 - \overline{X}_2)/\sqrt{S_1^2/n_1 + S_2^2/n_2} \sim \mathrm{N}(0,1)$ となる。$\overline{x}_1 = 33$，$s_1^2 = 10$，$n_1 = 160$，$\overline{x}_2 = 33.6$，$s_2^2 = 12$，$n_2 = 180$，$\alpha =$

0.05, $z=(33-33.6)/\sqrt{10/160+12/180}=-0.6/0.359=-1.671>-1.96=-z_{0.025}$ なので，$H_0$ は採択される。

**8.17** $H_0: p=1/6\ (=0.167)$, $H_1: p>1/6$ について，$\hat{p}=54/240=0.225$, $\alpha=0.01$, $z=(\hat{p}-0.167)/\sqrt{0.167\times 0.833/240}=(0.225-0.167)/0.0241=2.407>2.326=z_{0.01}$ なので，$H_0$ は棄却され，6 の目は出やすいといえる。

**8.18** $H_0: p=0.7$, $H_1: p<0.7$ について，$\hat{p}=2070/3000=0.69$, $\alpha=0.05$, $z=(\hat{p}-0.7)/\sqrt{0.7\times 0.3/3000}=(0.69-0.7)/0.00834=-1.199>-1.645=-z_{0.05}$ なので，$H_0$ は採択され，70% より少ないとはいえない。

**8.19** $H_0: \mu=60$, $H_1: \mu\neq 60$ について，$\overline{x}=(59+56+62+61+57)/5=295/5=59$, $s^2=((59-59)^2+(56-59)^2+(62-59)^2+(61-59)^2+(57-59)^2)/5=(0+9+9+4+4)/4=26/4=6.5$, $s=2.55$, $\alpha=0.05$, $z=(\overline{x}-\mu_0)/(s/\sqrt{n})=(59-60)/(2.55/\sqrt{5})=-1/1.14=-0.87>-2.776=-t_{0.025}(4)$ なので，$H_0$ は採択され，裁断機が正常でないとはいえない。

## 第 9 章解答　（問題は 166 ~ 169 ページ）

**9.1** $r=\sum_{t=1}^{n}(X_t-\overline{X})(Y_t-\overline{Y})\Big/\sqrt{\sum_{t=1}^{n}(X_t-\overline{X})^2\sum_{t=1}^{n}(Y_t-\overline{Y})^2}=\left(\sum_{t=1}^{n}(X_t-\overline{X})(Y_t-\overline{Y})\Big/\sum_{t=1}^{n}(X_t-\overline{X})^2\right)\times\sqrt{\sum_{t=1}^{n}(X_t-\overline{X})^2\Big/\sum_{t=1}^{n}(Y_t-\overline{Y})^2}=\hat{\beta}\sqrt{\sum_{t=1}^{n}(X_t-\overline{X})^2\Big/\sum_{t=1}^{n}(Y_t-\overline{Y})^2}$

（注） (2.16) より $r=s_{xy}/(s_x s_y)$ で，(9.9) は $\hat{\beta}=s_{xy}/s_x^2$ だから，$r=\hat{\beta}(s_x/s_y)$ となると考えてもよい。

**9.2** $\sum_{t=1}^{n}(Y_t-\overline{Y})^2=\sum_{t=1}^{n}((Y_t-\hat{Y}_t)+(\hat{Y}_t-\overline{Y}))^2=\sum_{t=1}^{n}e_t^2+2\sum_{t=1}^{n}e_t(\hat{Y}_t-\overline{Y})+\sum_{t=1}^{n}(\hat{Y}_t-\overline{Y})^2$。ここで，$\hat{Y}_t-\overline{Y}=(\hat{\alpha}-\alpha)+\hat{\beta}X_t-\beta\overline{X}-\overline{u}$ から，$\sum_{t=1}^{n}e_t(\hat{Y}_t-\overline{Y})=(\hat{\alpha}-\alpha)\sum_{t=1}^{n}e_t+\hat{\beta}\sum_{t=1}^{n}e_tX_t-\beta\overline{X}\sum_{t=1}^{n}e_t-\overline{u}\sum_{t=1}^{n}e_t=0$。よって，$\sum_{t=1}^{n}(\hat{Y}_t-\overline{Y})^2=\sum_{t=1}^{n}e_t^2+\sum_{t=1}^{n}(\hat{Y}_t-\overline{Y})^2$

**9.3** **(1)** $\hat{\alpha}=0.5$, $\hat{\beta}=0.9$, **(2)** $s^2=0.486$, **(3)** $Se(\hat{\alpha})=0.506$, $Se(\hat{\beta})=0.090$, **(4)** $\hat{\alpha}$ と $\hat{\beta}$ の $t$ 値は，それぞれ，0.988, 10.0, よって，$H_0: \alpha=0$ は有意水準 5%

で採択，$H_0 : \beta = 0$ は有意水準 1% で棄却。**(5)** $R^2 = 0.935$

**9.4** $H_0 : \beta = 1$ を検定するための検定統計量は $(\hat{\beta} - 1)/Se(\hat{\beta})$ であり，これは自由度 $n-2$ の $t$ 分布に従う。$\hat{\beta} = 0.8$ であり $\hat{\beta}$ の $t$ 値は $\hat{\beta}/Se(\hat{\beta}) = 2.5$ であるので，$Se(\hat{\beta}) = 0.32$ よって，$(\hat{\beta}-1)/Se(\hat{\beta}) = -0.625$ となるので，$H_0 : \beta = 1$ は有意水準 5% で採択される。

**9.5** **(1)** $\hat{\alpha} = 8.451$，$\hat{\beta} = -1.046$，**(2)** $s^2 = 0.00223$，**(3)** $Se(\hat{\alpha}) = 0.541$，$Se(\hat{\beta}) = 0.098$，**(4)** $\hat{\alpha}$ と $\hat{\beta}$ の $t$ 値は，それぞれ，15.63，−10.71。$H_0 : \alpha = 0$ および $H_0 : \beta = 0$ はともに有意水準 1 % で棄却，**(5)** $R^2 = 0.920$

（注）$\beta$ の最小 2 乗推定量が −1.046（原油輸入の GNP 弾力性が −1.046）であるので，GNP が 1% 上昇すると原油輸入量は約 1 % 減ることになる。この結果は，1973 年の石油ショック以降の省エネルギー技術および節エネルギーの効果のため，GNP が上昇しても原油輸入はむしろ減少したと解釈される。

**9.6**

| $t$ | $Y_t$ | $X_t$ | $X_t^2$ | $X_tY_t$ | $Y_t^2$ | $\hat{Y}_t$ | $e_t$ | $e_t^2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 4 | 3 | 9 | 12 | 16 | 4 | 0 | 0 |
| 2 | 1 | −1 | 1 | −1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 3 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | −1 | 1 |
| 4 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | −1 | 1 |
| 5 | 4 | 2 | 4 | 8 | 16 | 3 | 1 | 1 |
| 合計 | 10 | 5 | 15 | 20 | 34 | | 0 | 4 |

なので，$\overline{X} = 1$，$\overline{Y} = 2$ が得られる。

**(1)** $\hat{\beta} = \dfrac{\sum_{t=1}^{n} X_tY_t - n\overline{XY}}{\sum_{t=1}^{n} X_t^2 - n\overline{X}^2} = \dfrac{20 - 5 \times 1 \times 2}{15 - 5 \times 1 \times 1} = 1$，$\hat{\alpha} = \overline{Y} - \hat{\beta}\overline{X} = 2 - 1 \times 1 = 1$，

**(2)** $R^2 = 1 - \dfrac{\sum_{t=1}^{n} e_t^2}{\sum_{t=1}^{n} Y_t^2 - n\overline{Y}^2} = 1 - \dfrac{4}{34 - 5 \times 2^2} = \dfrac{5}{7} = 0.714$，**(3)** $s^2 = \dfrac{1}{n-2}\sum_{t=1}^{n} e_t^2 = \dfrac{4}{5-2} = \dfrac{4}{3}$，**(4)** $Se(\hat{\beta}) = \sqrt{\dfrac{s^2}{\sum_{t=1}^{n} X_t^2 - n\overline{X}^2}} = \sqrt{\dfrac{4/3}{15 - 5 \times 1^2}} = \sqrt{\dfrac{2}{15}} = 0.365$，

$Se(\hat{\alpha}) = \sqrt{s^2\left(\dfrac{1}{n} + \dfrac{\overline{X}^2}{\sum_{t=1}^{n} X_t - n\overline{X}^2}\right)} = \sqrt{\dfrac{4}{3}\left(\dfrac{1}{5} + \dfrac{1^2}{15 - 5 \times 1^2}\right)} = \sqrt{\dfrac{2}{5}} = 0.632$，

**(5)** $t_{0.025}(5-2) = 3.182$ なので，$\alpha$ については $(\hat{\alpha} - t_{0.025}(n-2) \times Se(\hat{\alpha})$，$\hat{\alpha} +$

$t_{0.025}(n-2)\times Se(\hat{\alpha}))=(1-3.182\times\sqrt{2/5},\ 1+3.182\times\sqrt{2/5})=(-1.01, 3.01)$, $\beta$ については $(\hat{\beta}-t_{0.025}(n-2)\times Se(\hat{\beta}),\ \hat{\beta}+t_{0.025}(n-2)\times Se(\hat{\beta}))=(1-3.182\times\sqrt{2/15},\ 1+3.182\times\sqrt{2/15})=(-0.16, 2.16)$，**(6)** $n=5$，$s^2=4/3$，$\chi_{0.005}(5-2)=12.84$，$\chi_{0.995}(5-2)=0.0717$ なので，$((n-2)s^2/\chi_{0.005}(n-2),\ (n-2)s^2/\chi_{0.995}(n-2))=(4/12.84,\ 4/0.0717)=(0.312, 55.79)$，**(7)** 有意水準 10% で帰無仮説 $H_0$： $\beta=0$，対立仮説 $H_1$： $\beta\fallingdotseq 0$ を検定する。$t_{\hat{\beta}}=\hat{\beta}/Se(\hat{\beta})=1/\sqrt{2/15}=2.739>t_{0.05}(5-2)=2.353$ なので，有意水準 10% で帰無仮説 $H_0$： $\beta=0$ を棄却する。

## 第 10 章解答　（問題は 192 ～ 194 ページ）

**10.1** $\overline{R}^2=1-\dfrac{\sum_{t=1}^{n}e_t^2/(n-k)}{(\sum_{t=1}^{n}Y_t^2-n\overline{Y}^2)/(n-1)}=1-\dfrac{4/(5-2)}{(34-5\times 2^2)/(5-1)}=\dfrac{13}{21}=0.619$

$$DW=\frac{\sum_{t=2}^{n}(e_t-e_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^{n}e_t^2}=\frac{(0-1)^2+(1-(-1))^2+((-1)-(-1))^2+((-1)-1)^2}{4}$$
$=9/4=2.25$

**10.2** **(1)** 理論的には，$\beta_1$ は正，$\gamma_1$ は負となるはずである。その理由は，設備投資は需要見込みと金利要因の関数と考えられる。需要見込みが増えると企業はものを作るため投資を増やす。ここでは需要見込みを国内総支出と考えている。金利が低いと銀行からお金を借りやすくなるため投資は増える。したがって，$\beta_1>0$，$\gamma_1<0$ となるはずである。

**(2)** ● $\boxed{\textbf{(a)}\ Y_t}$ が 1 $\boxed{\textbf{(b)}\ 円}$ 増えるとき，$\boxed{\textbf{(c)}\ I_t}$ が $\beta_1$ $\boxed{\textbf{(d)}\ 円}$ 増える。

● $\boxed{\textbf{(e)}\ r_t}$ が 1 $\boxed{\textbf{(f)}\ \%}$ 増えるとき，$\boxed{\textbf{(g)}\ I_t}$ が $\gamma_1$ $\boxed{\textbf{(h)}\ 円}$ 増える。

**(3)** $R^2$，$\overline{R}^2$ は推定式の当てはまりを示す尺度で，0 と 1 との間の値をとり，1 に近ければ当てはまりはよく，0 に近ければ当てはまりは悪いということになる。ここでは，0.963，0.961 と 1 に近く，推定式の当てはまりはいいといえる。$DW$ は誤差項の系列相関があるかないかを示し，0 と 4 の間の値をとり，0 に近いと正の系列相関，4 に近いと負の系列相関，2 前後のとき系列相関なしと判定される。ここでは，$DW=0.330$ で検定を行うと，$n=43$，$k'=k-1=2$ のとき $dl$ は 1.39 と 1.43 との間の数値となり，$0.330<dl$ なので，明らかに正の系列相関があると判定される。

**(4)** $H_0:\beta_1=0$，$H_1:\beta_1\neq 0$ の検定によると，$t$ 値は 31.94 で，両側検定のときの自由度 40 の $t$ 分布の 5 % 点は 2.021 より大きいので，$H_0$ を棄却できる。よって，国内総支出が増えると投資が増えるということがいえる（正の影響）。また，$H_0:\gamma_1=0$，$H_1:\gamma_1\neq 0$ の検定によると，$t$ 値は 0.394 で，両側検定のときの自由度 40 の $t$ 分布の 5 % 点は 2.021 より大きいので，$H_0$ を棄却できない。よって，利子率が増えると投資が増えるか減るか判定できない（正か負か判断できない）。

**(5)** $r_t$ の係数推定値がプラスで理論どおりではない。$DW$ が 0.330 と低く，誤差項に正の系列相関があると判定される。

**10.3** **(1)** • $\boxed{\textbf{(a)}\ Y_t}$ が 1 $\boxed{\textbf{(b)}\ \%}$ 増えるとき，$\boxed{\textbf{(c)}\ I_t}$ が $\beta_2$ $\boxed{\textbf{(d)}\ \%}$ 増える。

• $\boxed{\textbf{(e)}\ r_t}$ が 1 $\boxed{\textbf{(f)}\ \%}$ 増えるとき，$\boxed{\textbf{(g)}\ I_t}$ が $100\times\gamma_2$ $\boxed{\textbf{(h)}\ \%}$ 増える。

**(2)** 本問の定式化が前問のものより現実的である。それぞれの係数の符号条件が理論通りになっていて正しく，仮説検定によって，$\beta_2\neq 0$，$100\times\gamma_2\neq 0$ が判定される。したがって，$\beta_2>0$，$\gamma_2<0$ が統計的にも得られる。

**(3)** $DW$ が 0.373 と低いので，誤差項に系列相関を考慮に入れて推定しなおすべきである。

## 第 11 章解答　（問題は 219 ～ 220 ページ）

**11.1** **(1)**　時系列分析を用い，消費系列が生成された確率過程を特定化し，推定し，それに基づき予測を行う。**(2)**　消費と所得のデータ系列から消費関数を推定し，それに基づき予測を行う。**(3)**　消費関数の特定化において，所得変数を可処分所得としてとらえ，税を明示的に考慮する。そして，その消費関数を推定すれば，予測とともに減税の効果も分析できる。

**11.2** 2 月（バレンタイン・デー）に上昇し夏季に落ちこみ，再び 12 月（クリスマス）に上昇するという季節パターンが見られる。(11.3) に基づいて計算された季節調整済み系列は表 6 に示されている。

**11.3** 1986 年 7 月を 1 とし，88 年 6 月を 24 とする傾向変数 ($TIME$) を作り，季節調整済み平均チョコレート消費額 ($CHOCO$) に回帰させた結果は次のとおり。

$$CHOCO = \underset{(182.80)}{216.23} + \underset{(11.89)}{0.9845}\ TIME, \qquad \overline{R}^2 = 0.8593$$

**表 6**　　　　（単位：円）

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1986 年 | | 1987 年 1 | 222.5 | 1988 年 1 | 236.5 |
| | | 2 | 223.9 | 2 | 236.1 |
| | | 3 | 225.6 | 3 | 235.5 |
| | | 4 | 227.2 | 4 | 234.9 |
| | | 5 | 228.2 | 5 | 234.4 |
| | | 6 | 229.3 | 6 | 234.1 |
| 7 | 211.1 | 7 | 230.3 | | |
| 8 | 215.3 | 8 | 232.5 | | |
| 9 | 219.7 | 9 | 235.0 | | |
| 10 | 220.8 | 10 | 235.9 | | |
| 11 | 221.5 | 11 | 236.3 | | |
| 12 | 221.9 | 12 | 236.4 | | |

(　) 内は $t$ 値，$\overline{R}^2$ は自由度修正済み決定係数。正のトレンドが観察される（1 年間に約 10.8 円支出が増える)。

**11.4** 指数関数によるトレンドを当てはめた結果は次のとおり。

$$\log(GNP) = \underset{(333.83)}{11.533} + \underset{(21.38)}{0.051692} \quad TIME, \qquad \overline{R}^2 = 0.9520$$

ただし，$GNP$ : 実質国民総生産，$TIME$ : 1965 年を 1 として 88 年を 24 とする傾向変数，(　) 内は $t$ 値，$\overline{R}^2$ は自由度修正済み決定係数。

原系列から傾向変動部分を差し引いた系列 ($RES$) は

$$RES = GNP - \exp(11.533 + 0.051692 \quad TIME)$$

により求められる。その結果は，表 7 に与えられている。 強い循環変動が観察される。

**表 7**　　　　（単位：10 億円）

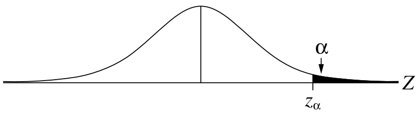
| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1965 | −19448.8 | 1971 | 12257.5 | 1977 | 7953.1 | 1983 | −7729.3 |
| 1966 | −15760.7 | 1972 | 18035.9 | 1978 | 8137.9 | 1984 | −8745.9 |
| 1967 | −10949.0 | 1973 | 23456.3 | 1979 | 8528.9 | 1985 | −10298.7 |
| 1968 | −3391.3 | 1974 | 12199.5 | 1980 | 6616.5 | 1986 | −19108.8 |
| 1969 | 5212.4 | 1975 | 8027.2 | 1981 | 3051.1 | 1987 | −22106.9 |
| 1970 | 12984.4 | 1976 | 7494.9 | 1982 | −2313.0 | 1988 | −21896.0 |

**11.5** $X_t = 0.7X_{t-1} + u_t = 0.7(0.7X_{t-2} + u_{t-1}) + u_t = 0.7^2X_{t-2} + u_t + 0.7u_{t-1}$ となる。以下同様の方法で $X_{t-2}$，$X_{t-3}$，$\cdots$ を逐次消去していくと $X_t = u_t +$

$0.7u_{t-1} + 0.7^2 u_{t-2} + 0.7^3 u_{t-3} + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty} 0.7^i u_{t-i}$。したがって，平均：$\mathrm{E}[X_t] = \sum_{i=0}^{\infty} 0.7^i \mathrm{E}[u_{t-i}] = 0$,（自己）分散：$\phi(0) = \mathrm{E}[(X_t - 0)^2] = \mathrm{E}[X_t^2] = (1 + 0.7^2 + 0.7^4 + 0.7^6 + \cdots) \cdot 1 = 1/(1 - 0.7^2)$，自己共分散：$\phi(s) = \mathrm{Cov}(X_t, X_{t-s}) = \mathrm{E}[X_t X_{t-s}] = (0.7^s + 0.7^{s+2} + 0.7^{s+4} + \cdots) \cdot 1 = 0.7^s(1 + 0.7^2 + 0.7^4 \cdots) \cdot 1 = 0.7^s/(1 - 0.7^2)$，自己相関：$\rho(s) = \phi(s)/\phi(0) = 0.7^s$

**11.6** 平均：$\mathrm{E}[X_t] = 2$,（自己）分散：$\phi(0) = \mathrm{E}[(X_t - 2)^2] = \mathrm{E}[(u_t + 0.8u_{t-1} - 0.3u_{t-2})^2] = (1 + 0.8^2 + 0.3^2) \times 1 = 1.73$，自己共分散：$\phi(1) = \mathrm{Cov}(X_t, X_{t-1}) = \mathrm{E}[(X_t - 2)(X_{t-1} - 2)] = \mathrm{E}[(u_t + 0.8u_{t-1} - 0.3u_{t-2})(u_{t-1} + 0.8u_{t-2} - 0.3u_{t-3})] = 0.8 - 0.3 \cdot 0.8 = 0.8 \cdot 0.7 = 0.56$，$\phi(2) = \mathrm{Cov}(X_t, X_{t-2}) = \mathrm{E}[(X_t - 2)(X_{t-2} - 2)] = \mathrm{E}[(u_t + 0.8u_{t-1} - 0.3u_{t-2})(u_{t-2} + 0.8u_{t-3} - 0.3u_{t-4})] = -0.3$，$s \geqq 3$ については $\phi(s) = 0$，自己相関：$\rho(1) = 0.56/1.73 = 0.3237$，$\rho(2) = -0.3/1.73 = -0.1734$，$s \geqq 3$ については $\rho(s) = 0$

# 付表 1　正規分布表： N(0, 1)

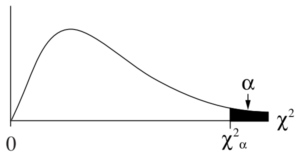



$$\alpha = \mathrm{P}(Z > z_\alpha) = \int_{z_\alpha}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right) dx$$

| $z_\alpha$ | .00 | .01 | .02 | .03 | .04 | .05 | .06 | .07 | .08 | .09 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.0 | .5000 | .4960 | .4920 | .4880 | .4841 | .4801 | .4761 | .4721 | .4681 | .4641 |
| 0.1 | .4602 | .4562 | .4522 | .4483 | .4443 | .4404 | .4364 | .4325 | .4286 | .4247 |
| 0.2 | .4207 | .4168 | .4129 | .4091 | .4052 | .4013 | .3974 | .3936 | .3897 | .3859 |
| 0.3 | .3821 | .3783 | .3745 | .3707 | .3669 | .3632 | .3594 | .3557 | .3520 | .3483 |
| 0.4 | .3446 | .3409 | .3372 | .3336 | .3300 | .3264 | .3228 | .3192 | .3156 | .3121 |
| 0.5 | .3085 | .3050 | .3015 | .2981 | .2946 | .2912 | .2877 | .2843 | .2810 | .2776 |
| 0.6 | .2743 | .2709 | .2676 | .2644 | .2611 | .2579 | .2546 | .2514 | .2483 | .2451 |
| 0.7 | .2420 | .2389 | .2358 | .2327 | .2297 | .2266 | .2236 | .2207 | .2177 | .2148 |
| 0.8 | .2119 | .2090 | .2061 | .2033 | .2005 | .1977 | .1949 | .1922 | .1894 | .1867 |
| 0.9 | .1841 | .1814 | .1788 | .1762 | .1736 | .1711 | .1685 | .1660 | .1635 | .1611 |
| 1.0 | .1587 | .1563 | .1539 | .1515 | .1492 | .1469 | .1446 | .1423 | .1401 | .1379 |
| 1.1 | .1357 | .1335 | .1314 | .1292 | .1271 | .1251 | .1230 | .1210 | .1190 | .1170 |
| 1.2 | .1151 | .1131 | .1112 | .1094 | .1075 | .1057 | .1038 | .1020 | .1003 | .0985 |
| 1.3 | .0968 | .0951 | .0934 | .0918 | .0901 | .0885 | .0869 | .0853 | .0838 | .0823 |
| 1.4 | .0808 | .0793 | .0778 | .0764 | .0749 | .0735 | .0721 | .0708 | .0694 | .0681 |
| 1.5 | .0668 | .0655 | .0643 | .0630 | .0618 | .0606 | .0594 | .0582 | .0571 | .0559 |
| 1.6 | .0548 | .0537 | .0526 | .0516 | .0505 | .0495 | .0485 | .0475 | .0465 | .0455 |
| 1.7 | .0446 | .0436 | .0427 | .0418 | .0409 | .0401 | .0392 | .0384 | .0375 | .0367 |
| 1.8 | .0359 | .0351 | .0344 | .0336 | .0329 | .0322 | .0314 | .0307 | .0301 | .0294 |
| 1.9 | .0287 | .0281 | .0274 | .0268 | .0262 | .0256 | .0250 | .0244 | .0239 | .0233 |
| 2.0 | .0228 | .0222 | .0217 | .0212 | .0207 | .0202 | .0197 | .0192 | .0188 | .0183 |
| 2.1 | .0179 | .0174 | .0170 | .0166 | .0162 | .0158 | .0154 | .0150 | .0146 | .0143 |
| 2.2 | .0139 | .0136 | .0132 | .0129 | .0125 | .0122 | .0119 | .0116 | .0113 | .0110 |
| 2.3 | .0107 | .0104 | .0102 | .0099 | .0096 | .0094 | .0091 | .0089 | .0087 | .0084 |
| 2.4 | .0082 | .0080 | .0078 | .0075 | .0073 | .0071 | .0069 | .0068 | .0066 | .0064 |
| 2.5 | .0062 | .0060 | .0059 | .0057 | .0055 | .0054 | .0052 | .0051 | .0049 | .0048 |
| 2.6 | .0047 | .0045 | .0044 | .0043 | .0041 | .0040 | .0039 | .0038 | .0037 | .0036 |
| 2.7 | .0035 | .0034 | .0033 | .0032 | .0031 | .0030 | .0029 | .0028 | .0027 | .0026 |
| 2.8 | .0026 | .0025 | .0024 | .0023 | .0023 | .0022 | .0021 | .0021 | .0020 | .0019 |
| 2.9 | .0019 | .0018 | .0018 | .0017 | .0016 | .0016 | .0015 | .0015 | .0014 | .0014 |
| 3.0 | .0013 | .0013 | .0013 | .0012 | .0012 | .0011 | .0011 | .0011 | .0010 | .0010 |
| 3.1 | .0010 | .0009 | .0009 | .0009 | .0008 | .0008 | .0008 | .0008 | .0007 | .0007 |
| 3.2 | .0007 | .0007 | .0006 | .0006 | .0006 | .0006 | .0006 | .0005 | .0005 | .0005 |
| 3.3 | .0005 | .0005 | .0005 | .0004 | .0004 | .0004 | .0004 | .0004 | .0004 | .0003 |
| 3.4 | .0003 | .0003 | .0003 | .0003 | .0003 | .0003 | .0003 | .0003 | .0003 | .0002 |

| $\alpha$ | .10 | .05 | .025 | .010 | .005 | .001 | .0005 | .0001 | .00001 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $z_\alpha$ | 1.2816 | 1.6449 | 1.9600 | 2.3263 | 2.5758 | 3.0902 | 3.2905 | 3.7190 | 4.2649 |

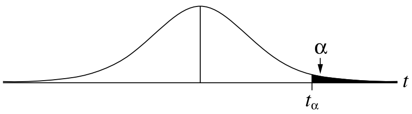
## **付表 2**　カイ 2 乗分布表：$\chi^2(m)$




$$\alpha = P(\chi^2 > \chi^2_\alpha) = \int_{\chi^2_\alpha}^{\infty} f(\chi^2)\,d\chi^2$$

| $m$ (自由度) \ $\alpha$ | .995 | .99 | .975 | .95 | .90 | .10 | .05 | .025 | .010 | .005 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | .0000393 | .000157 | .000982 | .00393 | .0158 | 2.71 | 3.84 | 5.02 | 6.63 | 7.88 |
| 2 | .0100 | .0201 | .0506 | .103 | .211 | 4.61 | 5.99 | 7.38 | 9.21 | 10.60 |
| 3 | .0717 | .115 | .216 | .352 | .584 | 6.25 | 7.81 | 9.35 | 11.34 | 12.84 |
| 4 | .207 | .297 | .484 | .711 | 1.06 | 7.78 | 9.49 | 11.14 | 13.28 | 14.86 |
| 5 | .412 | .554 | .831 | 1.15 | 1.61 | 9.24 | 11.07 | 12.83 | 15.09 | 16.75 |
| 6 | .676 | .872 | 1.24 | 1.64 | 2.20 | 10.64 | 12.59 | 14.45 | 16.81 | 18.55 |
| 7 | .989 | 1.24 | 1.69 | 2.17 | 2.83 | 12.02 | 14.07 | 16.01 | 18.48 | 20.28 |
| 8 | 1.34 | 1.65 | 2.18 | 2.73 | 3.49 | 13.36 | 15.51 | 17.53 | 20.09 | 21.95 |
| 9 | 1.73 | 2.09 | 2.70 | 3.33 | 4.17 | 14.68 | 16.92 | 19.02 | 21.67 | 23.59 |
| 10 | 2.16 | 2.56 | 3.25 | 3.94 | 4.87 | 15.99 | 18.31 | 20.48 | 23.21 | 25.19 |
| 11 | 2.60 | 3.05 | 3.82 | 4.57 | 5.58 | 17.28 | 19.68 | 21.92 | 24.73 | 26.76 |
| 12 | 3.07 | 3.57 | 4.40 | 5.23 | 6.30 | 18.55 | 21.03 | 23.34 | 26.22 | 28.30 |
| 13 | 3.57 | 4.11 | 5.01 | 5.89 | 7.04 | 19.81 | 22.36 | 24.74 | 27.69 | 29.82 |
| 14 | 4.07 | 4.66 | 5.63 | 6.57 | 7.79 | 21.06 | 23.68 | 26.12 | 29.14 | 31.32 |
| 15 | 4.60 | 5.23 | 6.26 | 7.26 | 8.55 | 22.31 | 25.00 | 27.49 | 30.58 | 32.80 |
| 16 | 5.14 | 5.81 | 6.91 | 7.96 | 9.31 | 23.54 | 26.30 | 28.85 | 32.00 | 34.27 |
| 17 | 5.70 | 6.41 | 7.56 | 8.67 | 10.09 | 24.77 | 27.59 | 30.19 | 33.41 | 35.72 |
| 18 | 6.26 | 7.01 | 8.23 | 9.39 | 10.86 | 25.99 | 28.87 | 31.53 | 34.81 | 37.16 |
| 19 | 6.84 | 7.63 | 8.91 | 10.12 | 11.65 | 27.20 | 30.14 | 32.85 | 36.19 | 38.58 |
| 20 | 7.43 | 8.26 | 9.59 | 10.85 | 12.44 | 28.41 | 31.41 | 34.17 | 37.57 | 40.00 |
| 21 | 8.03 | 8.90 | 10.28 | 11.59 | 13.24 | 29.62 | 32.67 | 35.48 | 38.93 | 41.40 |
| 22 | 8.64 | 9.54 | 10.98 | 12.34 | 14.04 | 30.81 | 33.92 | 36.78 | 40.29 | 42.80 |
| 23 | 9.26 | 10.20 | 11.69 | 13.09 | 14.85 | 32.01 | 35.17 | 38.08 | 41.64 | 44.18 |
| 24 | 9.89 | 10.86 | 12.40 | 13.85 | 15.66 | 33.20 | 36.42 | 39.36 | 42.98 | 45.56 |
| 25 | 10.52 | 11.52 | 13.12 | 14.61 | 16.47 | 34.38 | 37.65 | 40.65 | 44.31 | 46.93 |
| 26 | 11.16 | 12.20 | 13.84 | 15.38 | 17.29 | 35.56 | 38.89 | 41.92 | 45.64 | 48.29 |
| 27 | 11.81 | 12.88 | 14.57 | 16.15 | 18.11 | 36.74 | 40.11 | 43.19 | 46.96 | 49.65 |
| 28 | 12.46 | 13.56 | 15.31 | 16.93 | 18.94 | 37.92 | 41.34 | 44.46 | 48.28 | 50.99 |
| 29 | 13.12 | 14.26 | 16.05 | 17.71 | 19.77 | 39.09 | 42.56 | 45.72 | 49.59 | 52.34 |
| 30 | 13.79 | 14.95 | 16.79 | 18.49 | 20.60 | 40.26 | 43.77 | 46.98 | 50.89 | 53.67 |
| 40 | 20.71 | 22.16 | 24.43 | 26.51 | 29.05 | 51.81 | 55.76 | 59.34 | 63.69 | 66.77 |
| 50 | 27.99 | 29.71 | 32.36 | 34.76 | 37.69 | 63.17 | 67.50 | 71.42 | 76.15 | 79.49 |
| 60 | 35.53 | 37.48 | 40.48 | 43.19 | 46.46 | 74.40 | 79.08 | 83.30 | 88.38 | 91.95 |
| 70 | 43.28 | 45.44 | 48.76 | 51.74 | 55.33 | 85.53 | 90.53 | 95.02 | 100.43 | 104.21 |
| 80 | 51.17 | 53.54 | 57.15 | 60.39 | 64.28 | 96.58 | 101.88 | 106.63 | 112.33 | 116.32 |
| 90 | 59.20 | 61.75 | 65.65 | 69.13 | 73.29 | 107.57 | 113.15 | 118.14 | 124.12 | 128.30 |
| 100 | 67.33 | 70.06 | 74.22 | 77.93 | 82.36 | 118.50 | 124.34 | 129.56 | 135.81 | 140.17 |

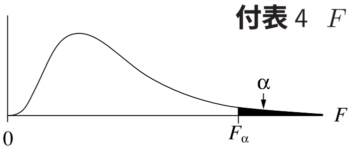
## **付表** 3　$t$ 分布表： $t(m)$




$$\alpha = \mathrm{P}(t > t_\alpha) = \int_{t_\alpha}^{\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$$

| $m$（自由度） ＼ $\alpha$ | .10 | .05 | .025 | .010 | .005 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 3.0777 | 6.3138 | 12.7062 | 31.8205 | 63.6567 |
| 2 | 1.8856 | 2.9200 | 4.3027 | 6.9646 | 9.9248 |
| 3 | 1.6377 | 2.3534 | 3.1824 | 4.5407 | 5.8409 |
| 4 | 1.5332 | 2.1318 | 2.7764 | 3.7469 | 4.6041 |
| 5 | 1.4759 | 2.0150 | 2.5706 | 3.3649 | 4.0321 |
| 6 | 1.4398 | 1.9432 | 2.4469 | 3.1427 | 3.7074 |
| 7 | 1.4149 | 1.8946 | 2.3646 | 2.9980 | 3.4995 |
| 8 | 1.3968 | 1.8595 | 2.3060 | 2.8965 | 3.3554 |
| 9 | 1.3830 | 1.8331 | 2.2622 | 2.8214 | 3.2498 |
| 10 | 1.3722 | 1.8125 | 2.2281 | 2.7638 | 3.1693 |
| 11 | 1.3634 | 1.7959 | 2.2010 | 2.7181 | 3.1058 |
| 12 | 1.3562 | 1.7823 | 2.1788 | 2.6810 | 3.0545 |
| 13 | 1.3502 | 1.7709 | 2.1604 | 2.6503 | 3.0123 |
| 14 | 1.3450 | 1.7613 | 2.1448 | 2.6245 | 2.9768 |
| 15 | 1.3406 | 1.7531 | 2.1314 | 2.6025 | 2.9467 |
| 16 | 1.3368 | 1.7459 | 2.1199 | 2.5835 | 2.9208 |
| 17 | 1.3334 | 1.7396 | 2.1098 | 2.5669 | 2.8982 |
| 18 | 1.3304 | 1.7341 | 2.1009 | 2.5524 | 2.8784 |
| 19 | 1.3277 | 1.7291 | 2.0930 | 2.5395 | 2.8609 |
| 20 | 1.3253 | 1.7247 | 2.0860 | 2.5280 | 2.8453 |
| 21 | 1.3232 | 1.7207 | 2.0796 | 2.5176 | 2.8314 |
| 22 | 1.3212 | 1.7171 | 2.0739 | 2.5083 | 2.8187 |
| 23 | 1.3195 | 1.7139 | 2.0687 | 2.4999 | 2.8073 |
| 24 | 1.3178 | 1.7109 | 2.0639 | 2.4922 | 2.7969 |
| 25 | 1.3163 | 1.7081 | 2.0595 | 2.4851 | 2.7874 |
| 26 | 1.3150 | 1.7056 | 2.0555 | 2.4786 | 2.7787 |
| 27 | 1.3137 | 1.7033 | 2.0518 | 2.4727 | 2.7707 |
| 28 | 1.3125 | 1.7011 | 2.0484 | 2.4671 | 2.7633 |
| 29 | 1.3114 | 1.6991 | 2.0452 | 2.4620 | 2.7564 |
| 30 | 1.3104 | 1.6973 | 2.0423 | 2.4573 | 2.7500 |
| 40 | 1.3031 | 1.6839 | 2.0211 | 2.4233 | 2.7045 |
| 50 | 1.2987 | 1.6759 | 2.0086 | 2.4033 | 2.6778 |
| 60 | 1.2958 | 1.6706 | 2.0003 | 2.3901 | 2.6603 |
| 120 | 1.2886 | 1.6577 | 1.9799 | 2.3578 | 2.6174 |
| $\infty$ | 1.2816 | 1.6449 | 1.9600 | 2.3263 | 2.5758 |

## **付表** 4　$F$ 分布表：$F(m_1, m_2)$




$$\alpha = \mathrm{P}(F > F_\alpha) = \int_{F_\alpha}^{\infty} f(F)\,\mathrm{d}F$$

$m_1$＝分子の自由度
$m_2$＝分母の自由度

| $m_2$ ＼ $m_1$ | $\alpha$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 15 | 20 | 30 | 40 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | .050 | 161 | 200 | 216 | 225 | 230 | 234 | 237 | 239 | 241 | 242 | 246 | 248 | 250 | 251 |
| | .025 | 648 | 800 | 864 | 900 | 922 | 937 | 948 | 957 | 963 | 969 | 985 | 993 | 1001 | 1006 |
| | .010 | 4052 | 5000 | 5403 | 5625 | 5764 | 5859 | 5928 | 5981 | 6022 | 6056 | 6157 | 6209 | 6261 | 6287 |
| | .005 | 16211 | 20000 | 21615 | 22500 | 23056 | 23437 | 23715 | 23925 | 24091 | 24224 | 24630 | 24836 | 25044 | 25148 |
| 2 | .050 | 18.5 | 19.0 | 19.2 | 19.2 | 19.3 | 19.3 | 19.4 | 19.4 | 19.4 | 19.4 | 19.4 | 19.4 | 19.5 | 19.5 |
| | .025 | 38.5 | 39.0 | 39.2 | 39.2 | 39.3 | 39.3 | 39.4 | 39.4 | 39.4 | 39.4 | 39.4 | 39.4 | 39.5 | 39.5 |
| | .010 | 98.5 | 99.0 | 99.2 | 99.2 | 99.3 | 99.3 | 99.4 | 99.4 | 99.4 | 99.4 | 99.4 | 99.4 | 99.5 | 99.5 |
| | .005 | 199 | 199 | 199 | 199 | 199 | 199 | 199 | 199 | 199 | 199 | 199 | 199 | 199 | 199 |
| 3 | .050 | 10.1 | 9.55 | 9.28 | 9.12 | 9.01 | 8.94 | 8.89 | 8.85 | 8.81 | 8.79 | 8.70 | 8.66 | 8.62 | 8.59 |
| | .025 | 17.4 | 16.0 | 15.4 | 15.1 | 14.9 | 14.7 | 14.6 | 14.5 | 14.5 | 14.4 | 14.3 | 14.2 | 14.1 | 14.0 |
| | .010 | 34.1 | 30.8 | 29.5 | 28.7 | 28.2 | 27.9 | 27.7 | 27.5 | 27.3 | 27.2 | 26.9 | 26.7 | 26.5 | 26.4 |
| | .005 | 55.6 | 49.8 | 47.5 | 46.2 | 45.4 | 44.8 | 44.4 | 44.1 | 43.9 | 43.7 | 43.1 | 42.8 | 42.5 | 42.3 |
| 4 | .050 | 7.71 | 6.94 | 6.59 | 6.39 | 6.26 | 6.16 | 6.09 | 6.04 | 6.00 | 5.96 | 5.86 | 5.80 | 5.75 | 5.72 |
| | .025 | 12.2 | 10.6 | 9.98 | 9.60 | 9.36 | 9.20 | 9.07 | 8.98 | 8.90 | 8.84 | 8.66 | 8.56 | 8.46 | 8.41 |
| | .010 | 21.2 | 18.0 | 16.7 | 16.0 | 15.5 | 15.2 | 15.0 | 14.8 | 14.7 | 14.5 | 14.2 | 14.0 | 13.8 | 13.7 |
| | .005 | 31.3 | 26.3 | 24.3 | 23.2 | 22.5 | 22.0 | 21.6 | 21.4 | 21.1 | 21.0 | 20.4 | 20.2 | 19.9 | 19.8 |
| 5 | .050 | 6.61 | 5.79 | 5.41 | 5.19 | 5.05 | 4.95 | 4.88 | 4.82 | 4.77 | 4.74 | 4.62 | 4.56 | 4.50 | 4.46 |
| | .025 | 10.0 | 8.43 | 7.76 | 7.39 | 7.15 | 6.98 | 6.85 | 6.76 | 6.68 | 6.62 | 6.43 | 6.33 | 6.23 | 6.18 |
| | .010 | 16.3 | 13.3 | 12.1 | 11.4 | 11.0 | 10.7 | 10.5 | 10.3 | 10.2 | 10.1 | 9.72 | 9.55 | 9.38 | 9.29 |
| | .005 | 22.8 | 18.3 | 16.5 | 15.6 | 14.9 | 14.5 | 14.2 | 14.0 | 13.8 | 13.6 | 13.1 | 12.9 | 12.7 | 12.5 |
| 6 | .050 | 5.99 | 5.14 | 4.76 | 4.53 | 4.39 | 4.28 | 4.21 | 4.15 | 4.10 | 4.06 | 3.94 | 3.87 | 3.81 | 3.77 |
| | .025 | 8.81 | 7.26 | 6.60 | 6.23 | 5.99 | 5.82 | 5.70 | 5.60 | 5.52 | 5.46 | 5.27 | 5.17 | 5.07 | 5.01 |
| | .010 | 13.7 | 10.9 | 9.78 | 9.15 | 8.75 | 8.47 | 8.26 | 8.10 | 7.98 | 7.87 | 7.56 | 7.40 | 7.23 | 7.14 |
| | .005 | 18.6 | 14.5 | 12.9 | 12.0 | 11.5 | 11.1 | 10.8 | 10.6 | 10.4 | 10.3 | 9.81 | 9.59 | 9.36 | 9.24 |
| 7 | .050 | 5.59 | 4.74 | 4.35 | 4.12 | 3.97 | 3.87 | 3.79 | 3.73 | 3.68 | 3.64 | 3.51 | 3.44 | 3.38 | 3.34 |
| | .025 | 8.07 | 6.54 | 5.89 | 5.52 | 5.29 | 5.12 | 4.99 | 4.90 | 4.82 | 4.76 | 4.57 | 4.47 | 4.36 | 4.31 |
| | .010 | 12.2 | 9.55 | 8.45 | 7.85 | 7.46 | 7.19 | 6.99 | 6.84 | 6.72 | 6.62 | 6.31 | 6.16 | 5.99 | 5.91 |
| | .005 | 16.2 | 12.4 | 10.9 | 10.1 | 9.52 | 9.16 | 8.89 | 8.68 | 8.51 | 8.38 | 7.97 | 7.75 | 7.53 | 7.42 |
| 8 | .050 | 5.32 | 4.46 | 4.07 | 3.84 | 3.69 | 3.58 | 3.50 | 3.44 | 3.39 | 3.35 | 3.22 | 3.15 | 3.08 | 3.04 |
| | .025 | 7.57 | 6.06 | 5.42 | 5.05 | 4.82 | 4.65 | 4.53 | 4.43 | 4.36 | 4.30 | 4.10 | 4.00 | 3.89 | 3.84 |
| | .010 | 11.3 | 8.65 | 7.59 | 7.01 | 6.63 | 6.37 | 6.18 | 6.03 | 5.91 | 5.81 | 5.52 | 5.36 | 5.20 | 5.12 |
| | .005 | 14.7 | 11.0 | 9.60 | 8.81 | 8.30 | 7.95 | 7.69 | 7.50 | 7.34 | 7.21 | 6.81 | 6.61 | 6.40 | 6.29 |
| 9 | .050 | 5.12 | 4.26 | 3.86 | 3.63 | 3.48 | 3.37 | 3.29 | 3.23 | 3.18 | 3.14 | 3.01 | 2.94 | 2.86 | 2.83 |
| | .025 | 7.21 | 5.71 | 5.08 | 4.72 | 4.48 | 4.32 | 4.20 | 4.10 | 4.03 | 3.96 | 3.77 | 3.67 | 3.56 | 3.51 |
| | .010 | 10.6 | 8.02 | 6.99 | 6.42 | 6.06 | 5.80 | 5.61 | 5.47 | 5.35 | 5.26 | 4.96 | 4.81 | 4.65 | 4.57 |
| | .005 | 13.6 | 10.1 | 8.72 | 7.96 | 7.47 | 7.13 | 6.88 | 6.69 | 6.54 | 6.42 | 6.03 | 5.83 | 5.62 | 5.52 |
| 10 | .050 | 4.96 | 4.10 | 3.71 | 3.48 | 3.33 | 3.22 | 3.14 | 3.07 | 3.02 | 2.98 | 2.85 | 2.77 | 2.70 | 2.66 |
| | .025 | 6.94 | 5.46 | 4.83 | 4.47 | 4.24 | 4.07 | 3.95 | 3.85 | 3.78 | 3.72 | 3.52 | 3.42 | 3.31 | 3.26 |
| | .010 | 10.0 | 7.56 | 6.55 | 5.99 | 5.64 | 5.39 | 5.20 | 5.06 | 4.94 | 4.85 | 4.56 | 4.41 | 4.25 | 4.17 |
| | .005 | 12.8 | 9.43 | 8.08 | 7.34 | 6.87 | 6.54 | 6.30 | 6.12 | 5.97 | 5.85 | 5.47 | 5.27 | 5.07 | 4.97 |
| 11 | .050 | 4.84 | 3.98 | 3.59 | 3.36 | 3.20 | 3.09 | 3.01 | 2.95 | 2.90 | 2.85 | 2.72 | 2.65 | 2.57 | 2.53 |
| | .025 | 6.72 | 5.26 | 4.63 | 4.28 | 4.04 | 3.88 | 3.76 | 3.66 | 3.59 | 3.53 | 3.33 | 3.23 | 3.12 | 3.06 |
| | .010 | 9.65 | 7.21 | 6.22 | 5.67 | 5.32 | 5.07 | 4.89 | 4.74 | 4.63 | 4.54 | 4.25 | 4.10 | 3.94 | 3.86 |
| | .005 | 12.2 | 8.91 | 7.60 | 6.88 | 6.42 | 6.10 | 5.86 | 5.68 | 5.54 | 5.42 | 5.05 | 4.86 | 4.65 | 4.55 |
| 12 | .050 | 4.75 | 3.89 | 3.49 | 3.26 | 3.11 | 3.00 | 2.91 | 2.85 | 2.80 | 2.75 | 2.62 | 2.54 | 2.47 | 2.43 |
| | .025 | 6.55 | 5.10 | 4.47 | 4.12 | 3.89 | 3.73 | 3.61 | 3.51 | 3.44 | 3.37 | 3.18 | 3.07 | 2.96 | 2.91 |
| | .010 | 9.33 | 6.93 | 5.95 | 5.41 | 5.06 | 4.82 | 4.64 | 4.50 | 4.39 | 4.30 | 4.01 | 3.86 | 3.70 | 3.62 |
| | .005 | 11.8 | 8.51 | 7.23 | 6.52 | 6.07 | 5.76 | 5.52 | 5.35 | 5.20 | 5.09 | 4.72 | 4.53 | 4.33 | 4.23 |
| 13 | .050 | 4.67 | 3.81 | 3.41 | 3.18 | 3.03 | 2.92 | 2.83 | 2.77 | 2.71 | 2.67 | 2.53 | 2.46 | 2.38 | 2.34 |
| | .025 | 6.41 | 4.97 | 4.35 | 4.00 | 3.77 | 3.60 | 3.48 | 3.39 | 3.31 | 3.25 | 3.05 | 2.95 | 2.84 | 2.78 |
| | .010 | 9.07 | 6.70 | 5.74 | 5.21 | 4.86 | 4.62 | 4.44 | 4.30 | 4.19 | 4.10 | 3.82 | 3.66 | 3.51 | 3.43 |
| | .005 | 11.4 | 8.19 | 6.93 | 6.23 | 5.79 | 5.48 | 5.25 | 5.08 | 4.94 | 4.82 | 4.46 | 4.27 | 4.07 | 3.97 |

| $m_2$ \ $m_1$ | $\alpha$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 15 | 20 | 30 | 40 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 14 | .050 | 4.60 | 3.74 | 3.34 | 3.11 | 2.96 | 2.85 | 2.76 | 2.70 | 2.65 | 2.60 | 2.46 | 2.39 | 2.31 | 2.27 |
| | .025 | 6.30 | 4.86 | 4.24 | 3.89 | 3.66 | 3.50 | 3.38 | 3.29 | 3.21 | 3.15 | 2.95 | 2.84 | 2.73 | 2.67 |
| | .010 | 8.86 | 6.51 | 5.56 | 5.04 | 4.70 | 4.46 | 4.28 | 4.14 | 4.03 | 3.94 | 3.66 | 3.51 | 3.35 | 3.27 |
| | .005 | 11.1 | 7.92 | 6.68 | 6.00 | 5.56 | 5.26 | 5.03 | 4.86 | 4.72 | 4.60 | 4.25 | 4.06 | 3.86 | 3.76 |
| 15 | .050 | 4.54 | 3.68 | 3.29 | 3.06 | 2.90 | 2.79 | 2.71 | 2.64 | 2.59 | 2.54 | 2.40 | 2.33 | 2.25 | 2.20 |
| | .025 | 6.20 | 4.77 | 4.15 | 3.80 | 3.58 | 3.41 | 3.29 | 3.20 | 3.12 | 3.06 | 2.86 | 2.76 | 2.64 | 2.59 |
| | .010 | 8.68 | 6.36 | 5.42 | 4.89 | 4.56 | 4.32 | 4.14 | 4.00 | 3.89 | 3.80 | 3.52 | 3.37 | 3.21 | 3.13 |
| | .005 | 10.8 | 7.70 | 6.48 | 5.80 | 5.37 | 5.07 | 4.85 | 4.67 | 4.54 | 4.42 | 4.07 | 3.88 | 3.69 | 3.59 |
| 16 | .050 | 4.49 | 3.63 | 3.24 | 3.01 | 2.85 | 2.74 | 2.66 | 2.59 | 2.54 | 2.49 | 2.35 | 2.28 | 2.19 | 2.15 |
| | .025 | 6.12 | 4.69 | 4.08 | 3.73 | 3.50 | 3.34 | 3.22 | 3.12 | 3.05 | 2.99 | 2.79 | 2.68 | 2.57 | 2.51 |
| | .010 | 8.53 | 6.23 | 5.29 | 4.77 | 4.44 | 4.20 | 4.03 | 3.89 | 3.78 | 3.69 | 3.41 | 3.26 | 3.10 | 3.02 |
| | .005 | 10.6 | 7.51 | 6.30 | 5.64 | 5.21 | 4.91 | 4.69 | 4.52 | 4.38 | 4.27 | 3.92 | 3.73 | 3.54 | 3.44 |
| 17 | .050 | 4.45 | 3.59 | 3.20 | 2.96 | 2.81 | 2.70 | 2.61 | 2.55 | 2.49 | 2.45 | 2.31 | 2.23 | 2.15 | 2.10 |
| | .025 | 6.04 | 4.62 | 4.01 | 3.66 | 3.44 | 3.28 | 3.16 | 3.06 | 2.98 | 2.92 | 2.72 | 2.62 | 2.50 | 2.44 |
| | .010 | 8.40 | 6.11 | 5.19 | 4.67 | 4.34 | 4.10 | 3.93 | 3.79 | 3.68 | 3.59 | 3.31 | 3.16 | 3.00 | 2.92 |
| | .005 | 10.4 | 7.35 | 6.16 | 5.50 | 5.07 | 4.78 | 4.56 | 4.39 | 4.25 | 4.14 | 3.79 | 3.61 | 3.41 | 3.31 |
| 18 | .050 | 4.41 | 3.55 | 3.16 | 2.93 | 2.77 | 2.66 | 2.58 | 2.51 | 2.46 | 2.41 | 2.27 | 2.19 | 2.11 | 2.06 |
| | .025 | 5.98 | 4.56 | 3.95 | 3.61 | 3.38 | 3.22 | 3.10 | 3.01 | 2.93 | 2.87 | 2.67 | 2.56 | 2.44 | 2.38 |
| | .010 | 8.29 | 6.01 | 5.09 | 4.58 | 4.25 | 4.01 | 3.84 | 3.71 | 3.60 | 3.51 | 3.23 | 3.08 | 2.92 | 2.84 |
| | .005 | 10.2 | 7.21 | 6.03 | 5.37 | 4.96 | 4.66 | 4.44 | 4.28 | 4.14 | 4.03 | 3.68 | 3.50 | 3.30 | 3.20 |
| 19 | .050 | 4.38 | 3.52 | 3.13 | 2.90 | 2.74 | 2.63 | 2.54 | 2.48 | 2.42 | 2.38 | 2.23 | 2.16 | 2.07 | 2.03 |
| | .025 | 5.92 | 4.51 | 3.90 | 3.56 | 3.33 | 3.17 | 3.05 | 2.96 | 2.88 | 2.82 | 2.62 | 2.51 | 2.39 | 2.33 |
| | .010 | 8.18 | 5.93 | 5.01 | 4.50 | 4.17 | 3.94 | 3.77 | 3.63 | 3.52 | 3.43 | 3.15 | 3.00 | 2.84 | 2.76 |
| | .005 | 10.1 | 7.09 | 5.92 | 5.27 | 4.85 | 4.56 | 4.34 | 4.18 | 4.04 | 3.93 | 3.59 | 3.40 | 3.21 | 3.11 |
| 20 | .050 | 4.35 | 3.49 | 3.10 | 2.87 | 2.71 | 2.60 | 2.51 | 2.45 | 2.39 | 2.35 | 2.20 | 2.12 | 2.04 | 1.99 |
| | .025 | 5.87 | 4.46 | 3.86 | 3.51 | 3.29 | 3.13 | 3.01 | 2.91 | 2.84 | 2.77 | 2.57 | 2.46 | 2.35 | 2.29 |
| | .010 | 8.10 | 5.85 | 4.94 | 4.43 | 4.10 | 3.87 | 3.70 | 3.56 | 3.46 | 3.37 | 3.09 | 2.94 | 2.78 | 2.69 |
| | .005 | 9.94 | 6.99 | 5.82 | 5.17 | 4.76 | 4.47 | 4.26 | 4.09 | 3.96 | 3.85 | 3.50 | 3.32 | 3.12 | 3.02 |
| 25 | .050 | 4.24 | 3.39 | 2.99 | 2.76 | 2.60 | 2.49 | 2.40 | 2.34 | 2.28 | 2.24 | 2.09 | 2.01 | 1.92 | 1.87 |
| | .025 | 5.69 | 4.29 | 3.69 | 3.35 | 3.13 | 2.97 | 2.85 | 2.75 | 2.68 | 2.61 | 2.41 | 2.30 | 2.18 | 2.12 |
| | .010 | 7.77 | 5.57 | 4.68 | 4.18 | 3.86 | 3.63 | 3.46 | 3.32 | 3.22 | 3.13 | 2.85 | 2.70 | 2.54 | 2.45 |
| | .005 | 9.48 | 6.60 | 5.46 | 4.84 | 4.43 | 4.15 | 3.94 | 3.78 | 3.64 | 3.54 | 3.20 | 3.01 | 2.82 | 2.72 |
| 30 | .050 | 4.17 | 3.32 | 2.92 | 2.69 | 2.53 | 2.42 | 2.33 | 2.27 | 2.21 | 2.16 | 2.01 | 1.93 | 1.84 | 1.79 |
| | .025 | 5.57 | 4.18 | 3.59 | 3.25 | 3.03 | 2.87 | 2.75 | 2.65 | 2.57 | 2.51 | 2.31 | 2.20 | 2.07 | 2.01 |
| | .010 | 7.56 | 5.39 | 4.51 | 4.02 | 3.70 | 3.47 | 3.30 | 3.17 | 3.07 | 2.98 | 2.70 | 2.55 | 2.39 | 2.30 |
| | .005 | 9.18 | 6.35 | 5.24 | 4.62 | 4.23 | 3.95 | 3.74 | 3.58 | 3.45 | 3.34 | 3.01 | 2.82 | 2.63 | 2.52 |
| 40 | .050 | 4.08 | 3.23 | 2.84 | 2.61 | 2.45 | 2.34 | 2.25 | 2.18 | 2.12 | 2.08 | 1.92 | 1.84 | 1.74 | 1.69 |
| | .025 | 5.42 | 4.05 | 3.46 | 3.13 | 2.90 | 2.74 | 2.62 | 2.53 | 2.45 | 2.39 | 2.18 | 2.07 | 1.94 | 1.88 |
| | .010 | 7.31 | 5.18 | 4.31 | 3.83 | 3.51 | 3.29 | 3.12 | 2.99 | 2.89 | 2.80 | 2.52 | 2.37 | 2.20 | 2.11 |
| | .005 | 8.83 | 6.07 | 4.98 | 4.37 | 3.99 | 3.71 | 3.51 | 3.35 | 3.22 | 3.12 | 2.78 | 2.60 | 2.40 | 2.30 |
| 60 | .050 | 4.00 | 3.15 | 2.76 | 2.53 | 2.37 | 2.25 | 2.17 | 2.10 | 2.04 | 1.99 | 1.84 | 1.75 | 1.65 | 1.59 |
| | .025 | 5.29 | 3.93 | 3.34 | 3.01 | 2.79 | 2.63 | 2.51 | 2.41 | 2.33 | 2.27 | 2.06 | 1.94 | 1.82 | 1.74 |
| | .010 | 7.08 | 4.98 | 4.13 | 3.65 | 3.34 | 3.12 | 2.95 | 2.82 | 2.72 | 2.63 | 2.35 | 2.20 | 2.03 | 1.94 |
| | .005 | 8.49 | 5.80 | 4.73 | 4.14 | 3.76 | 3.49 | 3.29 | 3.13 | 3.01 | 2.90 | 2.57 | 2.39 | 2.19 | 2.08 |
| 80 | .050 | 3.96 | 3.11 | 2.72 | 2.49 | 2.33 | 2.21 | 2.13 | 2.06 | 2.00 | 1.95 | 1.79 | 1.70 | 1.60 | 1.54 |
| | .025 | 5.22 | 3.86 | 3.28 | 2.95 | 2.73 | 2.57 | 2.45 | 2.35 | 2.28 | 2.21 | 2.00 | 1.88 | 1.75 | 1.68 |
| | .010 | 6.96 | 4.88 | 4.04 | 3.56 | 3.26 | 3.04 | 2.87 | 2.74 | 2.64 | 2.55 | 2.27 | 2.12 | 1.94 | 1.85 |
| | .005 | 8.33 | 5.67 | 4.61 | 4.03 | 3.65 | 3.39 | 3.19 | 3.03 | 2.91 | 2.80 | 2.47 | 2.29 | 2.08 | 1.97 |
| $\infty$ | .050 | 3.84 | 3.00 | 2.60 | 2.37 | 2.21 | 2.10 | 2.01 | 1.94 | 1.88 | 1.83 | 1.67 | 1.57 | 1.46 | 1.39 |
| | .025 | 5.02 | 3.69 | 3.12 | 2.79 | 2.57 | 2.41 | 2.29 | 2.19 | 2.11 | 2.05 | 1.83 | 1.71 | 1.57 | 1.48 |
| | .010 | 6.63 | 4.61 | 3.78 | 3.32 | 3.02 | 2.80 | 2.64 | 2.51 | 2.41 | 2.32 | 2.04 | 1.88 | 1.70 | 1.59 |
| | .005 | 7.88 | 5.30 | 4.28 | 3.72 | 3.35 | 3.09 | 2.90 | 2.74 | 2.62 | 2.52 | 2.19 | 2.00 | 1.79 | 1.67 |

# 付表 5　ダービン・ワトソン統計量の 5 % 点の上限と下限

| | $k'=1$ | | $k'=2$ | | $k'=3$ | | $k'=4$ | | $k'=5$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n$ | $dl$ | $du$ | $dl$ | $du$ | $dl$ | $du$ | $dl$ | $du$ | $dl$ | $du$ |
| 15 | 1.08 | 1.36 | 0.95 | 1.54 | 0.82 | 1.75 | 0.69 | 1.97 | 0.56 | 2.21 |
| 16 | 1.10 | 1.37 | 0.98 | 1.54 | 0.86 | 1.73 | 0.74 | 1.93 | 0.62 | 2.15 |
| 17 | 1.13 | 1.38 | 1.02 | 1.54 | 0.90 | 1.71 | 0.78 | 1.90 | 0.67 | 2.10 |
| 18 | 1.16 | 1.39 | 1.05 | 1.53 | 0.93 | 1.69 | 0.82 | 1.87 | 0.71 | 2.06 |
| 19 | 1.18 | 1.40 | 1.08 | 1.53 | 0.97 | 1.68 | 0.86 | 1.85 | 0.75 | 2.02 |
| 20 | 1.20 | 1.41 | 1.10 | 1.54 | 1.00 | 1.68 | 0.90 | 1.83 | 0.79 | 1.99 |
| 21 | 1.22 | 1.42 | 1.13 | 1.54 | 1.03 | 1.67 | 0.93 | 1.81 | 0.83 | 1.96 |
| 22 | 1.24 | 1.43 | 1.15 | 1.54 | 1.05 | 1.66 | 0.96 | 1.80 | 0.86 | 1.94 |
| 23 | 1.26 | 1.44 | 1.17 | 1.54 | 1.08 | 1.66 | 0.99 | 1.79 | 0.90 | 1.92 |
| 24 | 1.27 | 1.45 | 1.19 | 1.55 | 1.10 | 1.66 | 1.01 | 1.78 | 0.93 | 1.90 |
| 25 | 1.29 | 1.45 | 1.21 | 1.55 | 1.12 | 1.66 | 1.04 | 1.77 | 0.95 | 1.89 |
| 26 | 1.30 | 1.46 | 1.22 | 1.55 | 1.14 | 1.65 | 1.06 | 1.76 | 0.98 | 1.88 |
| 27 | 1.32 | 1.47 | 1.24 | 1.56 | 1.16 | 1.65 | 1.08 | 1.76 | 1.01 | 1.86 |
| 28 | 1.33 | 1.48 | 1.26 | 1.56 | 1.18 | 1.65 | 1.10 | 1.75 | 1.03 | 1.85 |
| 29 | 1.34 | 1.48 | 1.27 | 1.56 | 1.20 | 1.65 | 1.12 | 1.74 | 1.05 | 1.84 |
| 30 | 1.35 | 1.49 | 1.28 | 1.57 | 1.21 | 1.65 | 1.14 | 1.74 | 1.07 | 1.83 |
| 31 | 1.36 | 1.50 | 1.30 | 1.57 | 1.23 | 1.65 | 1.16 | 1.74 | 1.09 | 1.83 |
| 32 | 1.37 | 1.50 | 1.31 | 1.57 | 1.24 | 1.65 | 1.18 | 1.73 | 1.11 | 1.82 |
| 33 | 1.38 | 1.51 | 1.32 | 1.58 | 1.26 | 1.65 | 1.19 | 1.73 | 1.13 | 1.81 |
| 34 | 1.39 | 1.51 | 1.33 | 1.58 | 1.27 | 1.65 | 1.21 | 1.73 | 1.15 | 1.81 |
| 35 | 1.40 | 1.52 | 1.34 | 1.58 | 1.28 | 1.65 | 1.22 | 1.73 | 1.16 | 1.80 |
| 36 | 1.41 | 1.52 | 1.35 | 1.59 | 1.29 | 1.65 | 1.24 | 1.73 | 1.18 | 1.80 |
| 37 | 1.42 | 1.53 | 1.36 | 1.59 | 1.31 | 1.66 | 1.25 | 1.72 | 1.19 | 1.80 |
| 38 | 1.43 | 1.54 | 1.37 | 1.59 | 1.32 | 1.66 | 1.26 | 1.72 | 1.21 | 1.79 |
| 39 | 1.43 | 1.54 | 1.38 | 1.60 | 1.33 | 1.66 | 1.27 | 1.72 | 1.22 | 1.79 |
| 40 | 1.44 | 1.54 | 1.39 | 1.60 | 1.34 | 1.66 | 1.29 | 1.72 | 1.23 | 1.79 |
| 45 | 1.48 | 1.57 | 1.43 | 1.62 | 1.38 | 1.67 | 1.34 | 1.72 | 1.29 | 1.78 |
| 50 | 1.50 | 1.59 | 1.46 | 1.63 | 1.42 | 1.67 | 1.38 | 1.72 | 1.34 | 1.77 |
| 55 | 1.53 | 1.60 | 1.49 | 1.64 | 1.45 | 1.68 | 1.41 | 1.72 | 1.38 | 1.77 |
| 60 | 1.55 | 1.62 | 1.51 | 1.65 | 1.48 | 1.69 | 1.44 | 1.73 | 1.41 | 1.77 |
| 65 | 1.57 | 1.63 | 1.54 | 1.66 | 1.50 | 1.70 | 1.47 | 1.73 | 1.44 | 1.77 |
| 70 | 1.58 | 1.64 | 1.55 | 1.67 | 1.52 | 1.70 | 1.49 | 1.74 | 1.46 | 1.77 |
| 75 | 1.60 | 1.65 | 1.57 | 1.68 | 1.54 | 1.71 | 1.51 | 1.74 | 1.49 | 1.77 |
| 80 | 1.61 | 1.66 | 1.59 | 1.69 | 1.56 | 1.72 | 1.53 | 1.74 | 1.51 | 1.77 |
| 90 | 1.63 | 1.68 | 1.61 | 1.70 | 1.59 | 1.73 | 1.57 | 1.75 | 1.54 | 1.78 |
| 100 | 1.65 | 1.69 | 1.63 | 1.72 | 1.61 | 1.74 | 1.59 | 1.76 | 1.57 | 1.78 |

# 索引