コラッツの予想が正しいことの証明

一関阿嵐

コラッツの予想とはローサー・コラッツの
「任意の自然数nを用意して『偶数なら2で割る。奇数なら3で掛け1を足す』
この作業を繰り返す有限回で1に達する。」という予想である
僕はこの予想に反する自然数が存在すると作業中には無限に大きい数が現れるので
この予想は正しいということを証明した。

非常に大きい数まで計算されているこの予想は
正しいのではないかと言う直感からこの問題を解くことを決意した。

証明（２）すべてのX_nが$(10\cdot4^{r-1}-1)/3 \pmod{4^r}$か
$(4^r-1)/3 \pmod{2\cdot4^r}$（rは自然数）と合同である証明

$m_n=1$のとき$3X_n+1\equiv2 \pmod 4$

$X_n\equiv3 \pmod 4$

$m_n=2$のとき$3X_n+1\equiv4 \pmod 8$

$X_n\equiv1 \pmod 8$

$m_n=k$のとき$X_n\equiv p \pmod q$として

$3X_n+1\equiv3p+1 \pmod{3q}$とすると

$m_n=k+2$のとき$3X_n+1\equiv12p+4 \pmod{12q}$

$X_n\equiv4p+1 \pmod{4q}$

$m_n\equiv1 \pmod 2$のとき$m_n=2r+1$（rは自然数）

$r=1$のときの$X_n\equiv p_r \pmod{q_r}$として

$$\begin{cases} p_0=3 \\ p_{r+1}=4p_r+1 \end{cases}$$

$$p_r=(10\cdot4^{r-1}-1)/3$$

$$\begin{cases} q_0=4 \\ q_{r+1}=4q_r \end{cases}$$

$q_r=4^r$

同様に$m_n\equiv0 \pmod 2$のとき$m_n=2r$（rは自然数）

$r=1$のときの$X_n\equiv p_r \pmod{q_r}$として

$p_r=(4^r-1)/3$

$q_r=2\cdot4^r$

だからX_nは$(10\cdot4^{r-1}-1)/3 \pmod{4^r}$か
$(4^r-1)/3 \pmod{2\cdot4^r}$（rは自然数）と合同。

証明（２）すべてのX_nが$(10\cdot 4^{r-1}-1)/3 \pmod{4^r}$か
$(4^r-1)/3 \pmod{2\cdot 4^r}$（rは自然数）と合同である証明

$m_n=1$のとき$3X_n+1\equiv 2 \pmod 4$

$X_n\equiv 3 \pmod 4$

$m_n=2$のとき$3X_n+1\equiv 4 \pmod 8$

$X_n\equiv 1 \pmod 8$

$m_n=k$のとき$X_n\equiv p \pmod q$として

$3X_n+1\equiv 3p+1 \pmod{3q}$とすると

$m_n=k+2$のとき$3X_n+1\equiv 12p+4 \pmod{12q}$

$X_n\equiv 4p+1 \pmod{4q}$

$m_n\equiv 1 \pmod 2$のとき$m_n=2r+1$（rは自然数）

$r=1$のときの$X_n\equiv p_r \pmod{q_r}$として

$$\begin{cases} p_0=3 \\ p_{r+1}=4p_r+1 \end{cases}$$

$$p_r=(10\cdot 4^{r-1}-1)/3$$

$$\begin{cases} q_0=4 \\ q_{r+1}=4q_r \end{cases}$$

$$q_r=4^r$$

同様に$m_n\equiv 0 \pmod 2$のとき$m_n=2r$（rは自然数）

$r=1$のときの$X_n\equiv p_r \pmod{q_r}$として

$p_r=(4^r-1)/3$

$q_r=2\cdot 4^r$

だからX_nは$(10\cdot 4^{r-1}-1)/3 \pmod{4^r}$か

$(4^r-1)/3 \pmod{2\cdot 4^r}$（rは自然数）と合同。

証明（２）おわり

互除関数の定義

$f(u,v,w,x)=(y,z)$（yはuとwの最小公倍数、

zは$z\equiv v \pmod u$ $z\equiv x$ (mod wを満たすy未満の数）

を互除関数とする。

互除関数$f(a,b,a',b')=(A,B)$において

$an+b=a'n'+b'=AN+B$とする

$a(rb)+b=B$を満たすように$n=(ra)N+(rb)$として

このとき$(rb)=0$を満たすと$b=B$, $a(ra)=A$

$m_n\equiv 1 \pmod 2$のとき$X_n\equiv(5\cdot 2^{m_n}-1)/3 \pmod{2^{m_n+1}}$だから

$X_n=2^{m_n+1}j_n+(5\cdot 2^{m_n}-1)/3$を満たす自然数$j_n$ガ存在するのでここに定義する。

また$a'_n=2^{m_n+1}$、$b'_n=(10\cdot 2^{m_n-1}-1)/3$とすれば、

$X_n=a'_nj'_n+b'_n$と表すことができる。

同様に$m_n\equiv 0 \pmod 2$のときは$a'_n=2^{m_n+1}$、$b'_n=(2^{m_n}-1)/3$

$X_n=a'_nj'_n+b'_n$を満たすj'_nを定義。

$m_{n-1}\equiv 1 \pmod 2$のとき$X_n\equiv 5 \pmod 6$

だから$a=6$、$b=5$、$X_n=a_nj_n+b_n$を満たすj_nを定義。

同様に$m_{n-1}\equiv 0 \pmod 2$のときは$X_n\equiv 1 \pmod 6$

だから$a=6$、$b=1$、$X_n=a_nj_n+b_n$を満たすj_nを定義。

$(ea)_1=a_1$、$(eb)_1=b_1$

互除関数$f((ea)_n,(eb)_n,a'_n,b'_n)=(A_n,B_n)$

$X_n=(ea)_n(ej)_n+(eb)_n=a'_nj'_n+b'_n=A_n(ej)_{n+1}+B_n$

$B_n=(ea)_n(reb)_n+(eb)_n$を満たすように$(ej)_n=(rea)_n(ej)_{n+1}+(reb)_n$とすれば、

$X_1=(ea)_1((rea)_1((rea)_2((rea)_3(\cdots+(reb)_4)+(reb)_3)+(reb)_2)(reb)_1)+(eb)_1$

だから$X_0=((ea)_1m_0((rea)_1((rea)_2(\cdots+(reb)_3)+(reb)_2)(reb)_1)+(eb)_1)-1)/3$

ただX_0は有限の値で、$m_0(ea)_1$は0でなく、

$(rea)_n$についてはA_nは3の倍数（だから$(ea)_n=6$だから）で

$(ea)_1$は3の倍数で無いから$(rea)_n$は3以上。

だから$(reb)_t=(reb)_{t+1}=(reb)_{t+2}=\cdots=0$を満たすtが存在する。

$X_t=X_0'$として

$3X_n'+1\equiv 2^{m_n'-1}$ (mod $2^{m_n'}$)を満たすm_n'をここに定義する。

$X_{n+1}'=(3X_n'+1)/2^{m_n'}$とする。

$m_n'\equiv 1$(mod 2)のとき$a'_n'=2^{m_n+1}$、$b'_n'=(10\cdot 2^{m_n-1}-1)/3$で

$X_n'=a'_n'j'_n'+b'_n'$

$m_n'\equiv 0$(mod 2)のときは$a'_n'=2^{m_n'+1}$、$b'_n'=(2^{m_n'}-1)/3$で

$X_n=a'_n'j'_n'+b'_n'$

$m_{n-1}'\equiv 1$(mod 2)のとき$a_n'=6$、$b_n'=5$

$X_n'=a_n'j_n'+b_n'$

$m_{n-1}'\equiv 0$(mod 2)のときは$a_n'=6$、$b_n'=1$

$X_n=a_n'j_n'+b_n'$

$(ea)_1'=a_1'$、$(eb)_1'=b_1'$

互除関数$f((ea)_n',(eb)_n',a'_n',b'_n')=(A_n',B_n')$

$X_n'=(ea)_n'(ej)_n'+(eb)_n'=a'_n'j'_n'+b'_n'=A_n'(ej)_{n+1}'+B_n'$

$B_n'=(ea)_n'(reb)_n'+(eb)_n'$を満たすように$(ej)_n'=(rea)_n'(ej)_{n+1}'+(reb)_n'$とする。

$X_0'\equiv 5$(mod 6)のときX_tの定義より$b'_0'=5$

だから$X_1'\equiv 1$(mod 6)

$X_0'\equiv 1$(mod 6)のときX_tの定義より$b'_0'=1$

だから$X_1'\equiv 1$(mod 6)

$X_1'=6((rea)_1'(ej)_2')+1=6((rea)_1'(rea)_2'(ej)_3')+1$

$=6((rea)_1'(rea)_2'(rea)_3'(ej)_4')+1\cdots$

X_1'は有限であるから$(ej)_n'>0$にはなりえない。

ならば$(ej)_n'=0$であるから$X_1'=1$となりコラッツの作業中に1にならないという

仮定と矛盾するだからコラッツの予想が正しくないと言う仮定は間違い。

証明（０）おわり

コラッツの予想は正しかった。

謝辞

ユーグリットさん
角谷静夫さん
ローターコラッツさん