計算数理：演習問題７章

宮崎弘安

平成 21 年 7 月 12 日

計算数理演習の７章の解答です。間違いがありましたら教えてください。

7-1

$T > 0, u_0$ を固定する. $h = \frac{T}{N}, h_n = nh$ とし, $E(T)$ の N に関する上界を一つ決定する.

[方針]
$E(T) = \max_{0 \le t_n \le T} |e_n|$ だから、$|e_n|$ をおさえたい. 講義でやった [7 章定理 2.1] を適用するため、方程式が定理の条件をみたすことを確認する.

[準備]
表記を定理とあわせるため,

$$f(t,s) = f(s) = \tan^{-1}(s) \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$$

とする.

(i)　f の連続性

$f(t,s)$ は $D = \{(t,s)\ ;\ |t| < T,\ |s| < M\}$ で連続.
ただし $M > 0$ は任意である. 以後、必要に応じて M を大きく取り直す.

(ii)　f のリプシッツ性

Taylor の定理より,$\forall(t,s), \forall(t,r) \in D$ に対し

$$\begin{aligned} f(t,s) - f(t,r) &= f(s) - f(r) \\ &= f'(q)(s-r) \\ &= \frac{1}{1+q^2}(s-r) \end{aligned}$$

をみたす s と r の間の点 q が存在する.

$$\frac{1}{1+q^2} \le 1$$

なので,

$$|f(t,s) - f(t,r)| \le |s-r|$$

となりリプシッツ性が成り立つ.

(iii)　一段法の F についてのリプシッツ性

Euler 法においては $F = f$ なので (ii) より OK. 定理の表記では $L = 1$ である.

(iv)　$\{U_n\}$ は $|U_n - u_0| \leq M$ をみたすこと.

$\{U_n\}$ は有限集合なので, 必要なら M を大きく取り直せばよい.

(準備はここまで)

$K := \max_{(t,s)\in D} |f(t,s)| \leq \frac{\pi}{2}$ なので, 必要なら M を更に大きく取り直して $T \leq \frac{M}{K}$ とできる. このとき, 常微分方程式の解の存在定理より, 方程式は $[-T, T]$ 上で (特に $[0, T]$ 上で)C^1級の解をもつ.

さらに上の (iii),(iv) から定理 2.1 が使えて,

$$
\begin{aligned}
|e_n| &\leq \frac{e^{Lt_n} - 1}{L}\tau \\
&= (e^{t_n} - 1)\tau. \quad (\because L = 1 \text{ であった})
\end{aligned}
$$

τ を評価する.

$u' = \tan^{-1}(u)$ で, $\tan^{-1}$ と u は C^1級だから, u' も C^1級.したがって u は C^2級である.

$f(u) = \tan^{-1}(u)$ と $u' = f(u)$ に注意すれば,

$$
\begin{aligned}
|u''| &= |f'(u) \cdot u'| = |f'| \cdot |f(u)| \\
&= \left| \frac{1}{1+u^2} \right| \cdot |\tan^{-1}(u)| \\
&\leq 1 \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}
$$

Taylor の定理より, 各 n に対して $\eta_n \in (t_n, t_{n+1})$ が存在して,

$$
\begin{aligned}
u(t_{n+1}) &= u(t_n) + (t_{n+1} - t_n) \cdot u'(t_n) + (t_{n+1} - t_n)^2 \cdot u''(\eta_n) \\
&= u(t_n) + hu'(t_n) + h^2 u''(\eta_n). \quad (\because t_{n+1} - t_n = h)
\end{aligned}
$$

ゆえに局所離散化誤差は,

$$
\begin{aligned}
\tau_n &= \frac{u(t_{n+1}) - u(t_n)}{h} - f(t_n, u(t_n)) \\
&= \frac{u(t_{n+1}) - u(t_n)}{h} - u'(t_n) \\
&= (u'(t_n) + hu''(\eta_n)) - u'(t_n) \quad (\text{ここで上式を用いた}) \\
&= hu''(\eta_n)
\end{aligned}
$$

$$
\therefore\ \tau = \max_{0 \leq t_n < T} |\tau_n| = \max_{0 \leq t_n < T} h|u''(\eta_n)| \leq h \cdot \frac{\pi}{2}
$$

$$
\begin{aligned}
\therefore\ |e_n| &\leq (e^{t_n} - 1)\tau \leq (e^T - 1) \cdot \left(h \cdot \frac{\pi}{2} \right) \\
&= \frac{(e^T - 1)h\pi}{2} \quad \forall n = 1, \ldots, N.
\end{aligned}
$$

$$\therefore\ E(T) = \max_{0 \leq t_n \leq T} |e_n| \leq \frac{(e^T - 1)h\pi}{2}.$$

$E(T) \leq \varepsilon$ を保証するためには

$$\frac{(e^T - 1)h\pi}{2} \leq \varepsilon \Longleftrightarrow h \leq \frac{2\varepsilon}{(e^T - 1)\pi}$$

をみたすように h をとればよい.

$\square$

7-2

問題の連立一階常微分方程式に対する Runge-Kutta 法は次のようになる．

$$
\begin{aligned}
U_{n+1} &= U_n + \frac{h}{6}\left(k_1^{(1)} + 2k_2^{(1)} + 2k_3^{(1)} + k_4^{(1)}\right) \\
V_{n+1} &= V_n + \frac{h}{6}\left(k_1^{(2)} + 2k_2^{(2)} + 2k_3^{(2)} + k_4^{(2)}\right)
\end{aligned}
$$

ただし，

$$
\begin{aligned}
k_1^{(1)} &= f\left(t_n, U_n, V_n\right) \\
k_1^{(2)} &= g\left(t_n, U_n, V_n\right) \\
k_2^{(1)} &= f\left(t_n + \frac{1}{2}h, U_n + \frac{1}{2}hk_1^{(1)}, V_n + \frac{1}{2}hk_1^{(2)}\right) \\
k_2^{(2)} &= g\left(t_n + \frac{1}{2}h, U_n + \frac{1}{2}hk_1^{(1)}, V_n + \frac{1}{2}hk_1^{(2)}\right) \\
k_3^{(1)} &= f\left(t_n + \frac{1}{2}h, U_n + \frac{1}{2}hk_2^{(1)}, V_n + \frac{1}{2}hk_2^{(2)}\right) \\
k_3^{(2)} &= g\left(t_n + \frac{1}{2}h, U_n + \frac{1}{2}hk_2^{(1)}, V_n + \frac{1}{2}hk_2^{(2)}\right) \\
k_4^{(1)} &= f\left(t_n + h, U_n + hk_3^{(1)}, V_n + hk_3^{(2)}\right) \\
k_4^{(2)} &= g\left(t_n + h, U_n + hk_3^{(1)}, V_n + hk_3^{(2)}\right)
\end{aligned}
$$

□