シュワルツ超関数としての信号処理理論

秋田大（北海道大）

平成 26 年 9 月 12 日

信号処理と数学に悩まされた日々

信号処理は理学というよりかは工学の分野である．文献 [1] には，

> **信号処理** (signal processing) とは，音，画像，電磁波，心電図波形，地震波などのさまざまな信号を対象として，人間にとって有用な信号に変換したり，意味のある情報を抽出するために，信号を加工・処理することをいう．

と書かれており，信号処理が自然現象ではなく人間の何かの目的が故に存在するものであることをうかがわせる．数学は信号処理の分野ではまさに道具として使われているのである．

しかし，信号処理における数学はよくよく見ると怪しい印象を受けてしまう部分もある．私が気になったのは「フーリエ変換」の種類の多さである．実数全体で定義された周期的でない関数に対する，周波数ドメインへの変換が普通のフーリエ変換である．実数全体で定義された周期関数に対してはフーリエ級数展開が用いられる．そして離散時間信号に対しては，周期的でない信号については離散時間フーリエ変換が，周期的な信号については離散フーリエ変換が用いられる．このように，時間ドメインから周波数ドメインへの変換としてのフーリエ変換には実は 4 種類存在するのである．いずれも計算方法は異なり，変換の結果得られる周波数の関数も実数全体で定義されたり離散的な周波数に対して値を持つものであったりで，さらには周期性を持つかどうかも 4 つの変換それぞれで異なる．確かにそれぞれ三角関数の基底による表現になっているとはいえ，それぞれの関連について説明がなければフーリエ変換の結果と離散フーリエ変換の結果をどう対応つけていいかすらもよくわからなくなる．何より私はこの信号の種類に応じて個別に対応するという姿勢を全くもって美しくないと感じたのである．できることなら全ての信号をひとまとめにして一つの定義のフーリエ変換で信号処理を説明してほしい．そう思って私は信号処理の文献を漁った．まず見つかったのは文献 [1] である．この文献には 4 つのフーリエ変換の関係が見事に説明されており，私はある程度信号処理について理解を深めることができた．ただ，やはりフーリエ変換が 4 つあるのは気にくわない．

その時自分なりに考えたのが，少し考えれば誰でも行き当たるであろうが，離散時間信号を δ 関数によって実数上に帰着する発想である．例えば，離散時間信号 $f[n](n \in \mathbb{Z})$ を標本化周期 T の信号として取り扱う際には，

$$f(t) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} f[i]\delta(t - iT) \tag{0.1}$$

として実数上で定義された $f(t)(t \in \mathbb{R})$ を用いるのである．発想としては至極簡単であるが，δ 関数は想像以上に難しい存在であった．ポール・ディラックが 1929 年に考案したという δ 関数は次の条件を満たす関数であると定義される：

$$\delta(x) = 0 \quad (x \neq 0) \tag{0.2}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)dx = 1 \tag{0.3}$$

だがこの 2 条件は相反するものであり，式 0.2 を考慮すると式 0.3 の積分はリーマンの意味でもルベーグ測度による積分でも 0 となってしまう．δ 関数の正当化は，1950 年にローラン・シュワルツが考案した超関数によって初めて行われたのである．

δ 関数によって信号をひとまとめにしようという発想でいくからには超関数を学ばなくてはならない．超関数についての文献を調べ，ついでにルベーグ積分についても学習した．様々に文献を当たる中で非常に参考になったのが，新井仁之 [2][3]，カムラー [4]，リチャーズ―ヨン [5] である．特に，カムラーによるフーリエ解析の本 [4] は，緩増加超関数として信号を扱えば，離散的であっても周期的であっても同じフーリエ変換でよいというまさに追い求めていた内容だった．ただ，文献 [4] にはフィルタ処理など信号「処理」の部分については触れられていなかったので，私自身で考えることとなった．信号の定義ができたのだからあと少しだろうと思ったが，これがまたまた曲者であった．というのも超関数は通常の関数とは違い，積や畳み込みが一般的には定義されないのである．これはかなり不自由な話であり，シュワルツ超関数よりも広い概念である佐藤の超関数を調べてみたりとかなりの時間を食ってしまった．リチャーズとヨンによる超関数の教科書 [5] には，超関数同士の積と畳み込みの定義が詳細に説明されており，この文書でもその定義を採用しようかと思ったが，あまりに複雑であるため超関数同士の積，畳み込みの定義は簡単なよく知られているものを採用した．

この文書は，基本的には文献 [4]，[2]，[3] による緩増加超関数とフーリエ変換の理論をベースに，緩増加超関数としての信号を扱った場合のこれまでの 4 つのフーリエ変換との対応，および信号のフィルタ処理について私が考察したものである．基本的には証明は参考文献に任せるので，気になる方は参照して頂きたい．たまに書いてある証明は，探しても見当たらなかったために私が証明したものである．誤りがあった場合は大目に見てほしい．信号処理の数学について私と同じ疑問を抱いた人が，この文章を参考にして何らかの理解につながってくれれば幸いである．

目次

第 1 章　背景知識の紹介

本題に入る前に背景として存在する知識や概念を紹介しておく，あくまで紹介であり，深い解説はしないので読み飛ばしても構わない．

1.1　いくつかの集合論の概念

集合論の入門書としては，素晴らしい文献 [6] があるので，詳細にはその本を参照すればよい．ただ，具体的にどんな概念が自分に必要なのかという目的意識もなく，漠然と集合論の本を読むのでは，いくら名著であってもよほどの数学狂でない限り苦しみを憶えるであろう[1]．そこで，第 2 章以降の理解に役に立ちそうないくつかの集合論における概念を紹介する．

1.1.1　距離による開集合

開集合は簡単に言うと淵を含まない集合であり，少し難しく言うとどの元もその集合に含まれる近傍を持つような集合である．もっとややこしく開集合を定義すると位相が顔を出す．まずは位相が顔を出さないような簡単な開集合の定義を説明する．

開集合を定義するには位相を持ち出さなくとも距離の概念が定まっていればよい．具体的には，集合 X において，2 変数実数値関数 $d : X \times X \to \mathbb{R}$ が存在して，次の公理を満たすとする：

1. 非負性
$$\forall x, y \in X \quad d(x, y) \geq 0 \tag{1.1}$$
2. 同一性
$$\forall x, y \in X \quad d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y \tag{1.2}$$
3. 対称性
$$\forall x, y \in X \quad d(x, y) = d(y, x) \tag{1.3}$$
4. 三角不等式
$$\forall x, y, z \in X \quad d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z) \tag{1.4}$$

この時，d は集合 X 上の**距離**といい，対 (X, d) を**距離空間**という．もっとも身近な距離は $\mathbb{R}^n$ 上の**ユークリッド距離** $d_E(\mathbf{x}, \mathbf{y})$：

$$d_E(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2} \tag{1.5}$$

である．一方，同じ $\mathbb{R}^n$ 上で，次の関数 $d_\infty(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ も距離となる：

$$d_\infty(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i| \tag{1.6}$$

[1] これは集合論に限らず種々の専門書に言えることだろう

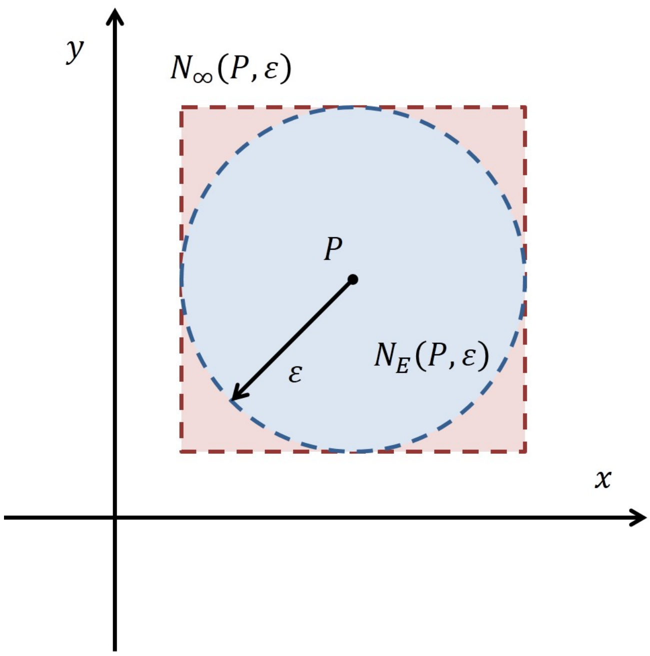

図 1.1: ε 近傍

距離が定まると，近傍を定義できる．距離空間 (X,d) において，$P \in X$ の ε **近傍** $N(P,\varepsilon)$ とは，

$$N(P,\varepsilon) = \{Q \in X | d(P,Q) < \varepsilon\} \tag{1.7}$$

のことを言う．この定義では $d(P,Q) < \varepsilon$ となっていることから境界が含まれない．ユークリッド距離による ε 近傍は境界を含まない半径 ε の n 次元球となる．図 1.1 に d_E および d_∞ による $P \in \mathbb{R}^2$ の ε 近傍 $N_E(P,\varepsilon)$，$N_\infty(P,\varepsilon)$ を示す．

次に，近傍を用いて内点，触点，境界点を定義する．集合 A において，$P \in A$ が

$$\exists\varepsilon > 0 \quad N(P,\varepsilon) \subset A \tag{1.8}$$

を満たすとき，P は A の**内点**であるという．また，

$$\forall\varepsilon > 0 \quad N(P,\varepsilon) \cap A \neq \emptyset \tag{1.9}$$

となるとき，P は A の**触点**であるという．触点の条件は内点の条件よりも緩いので，P が内点であれば P は触点である．触点であるが内点でない点を**境界点**という．すなわち，境界点では次が成り立つ：

$$\forall\varepsilon > 0 \quad N(P,\varepsilon) \cap A \neq \emptyset \wedge N(P,\varepsilon) \cap A^c \neq \emptyset \tag{1.10}$$

感覚としては，内点 P の隣の点は全て A に含まれるので，内点は A の内部の点になり，境界点では隣の点で A ではない点があるので A の境界の点となり，触点は内点と境界点の両方を指す，ということである．図 1.2 の例では，A を境界を含む集合としており，x_i は内点，x_b は境界点となっている．x_i，x_b どちらも触点となる．

集合 A の全てのの内点の集合を A の**内部**といい，A° で表す．同様に，A の全ての触点の集合を A の**閉包**といい，$\overline{A}$ で表す．また，A の全ての境界点の集合を A の**境界**といい，∂A で表す．**開集**

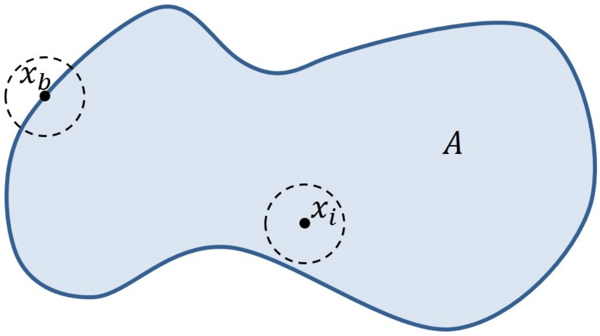

図 1.2: 内点と境界点

合とは，内点のみからなる集合をいう．つまり，A が開集合であるとは

$$A = A^{\circ} \tag{1.11}$$

ということである．同様に，

$$A = \overline{A} \tag{1.12}$$

が成り立つとき，A を**閉集合**であるという．開集合の補集合は閉集合になり，境界は閉集合になることが知られている．

開集合は次の性質を持っている：

$$\emptyset, \mathbb{R}^n \text{は開集合} \tag{1.13}$$

$$A, B \text{ は開集合} \Rightarrow A \cap B \text{ は開集合} \tag{1.14}$$

$$\{F_\lambda\} \text{ は開集合族} \Rightarrow \bigcup_{\lambda} F_\lambda \text{は開集合} \tag{1.15}$$

式 (1.15) はつまり，開集合は無限個の和集合では開集合のままであるが，無限個の積集合では開集合とは限らなくなるということである．無限個の開集合の積集合が開集合とならない例としては，

$$\bigcap_{\varepsilon > 0} N(P, \varepsilon) \tag{1.16}$$

などがある．同様に，閉集合については次が成り立つ：

$$\emptyset, \mathbb{R}^n \text{は閉集合} \tag{1.17}$$

$$A, B \text{ は閉集合} \Rightarrow A \cup B \text{ は閉集合} \tag{1.18}$$

$$\{F_\lambda\} \text{ は閉集合族} \Rightarrow \bigcap_{\lambda} F_\lambda \text{は閉集合} \tag{1.19}$$

1.1.2 位相

1.1.1 ではまず距離を定義し，距離から定まる近傍によって開集合が定義された．そして，式 (1.13)~(1.15) の性質が得られた．では，距離が定義できない空間ではどのように開集合を定めればよいか．この問題に対して，そもそも式 (1.13)~(1.15) を満たす集合族の要素を開集合と呼ぼう

という発想が位相である．つまり，ある集合 X において，次の性質を持つような適当な集合族 τ を選べたとする：

$$\emptyset, X \in \tau \tag{1.20}$$

$$\forall A, B \in \tau \;\; A \cap B \in \tau \tag{1.21}$$

$$(\forall \lambda \in \Lambda \;\; F_\lambda \in \tau) \Rightarrow \bigcup_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda \in \tau \tag{1.22}$$

ただし，ここで Λ は添え字集合とする．この時，τ を X の**位相**[2]といい，2 つ組 (X, τ) を**位相空間**という．位相空間 (X, τ) においては，開集合は τ の元と定義される．開集合の定義には実は距離は必要なかったのである．位相は開集合すべての集合と考えられるので，1.1.1 での位相は $\{X' | X' = X'^{\circ}\}$ となる．

位相空間の部分集合にはコンパクトであるかどうかという性質が定義される．正確には，位相空間 (X, τ) の部分集合 $A \in X$ に対して，

$$\forall \{F_\lambda\} \subset \tau \left[A \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda \Rightarrow \exists \Xi \subset \Lambda \left(\mathrm{card}(\Xi) < \infty \wedge A \subset \bigcup_{\lambda \in \Xi} F_\lambda \right) \right] \tag{1.23}$$

が成り立つとき，A は**コンパクト**であるという．ただし，式 (1.23) において $\mathrm{card}(\Xi)$ とは，集合 Ξ の**濃度**である．式 (1.23) は日本語でいうと，A を覆う開集合族 $\{F_\lambda\}$ があれば，$\{F_\lambda\}$ がたとえ無限個の要素からなっているとしても有限個の開集合を選んで A を覆うことができるということである．なお，一般にある集合を覆う集合族のことを，その集合の**被覆**であるといい，特に開集合による被覆を**開被覆**という．

コンパクトの概念は集合を開被覆として開集合に分解するときに役に立つ．集合の分解の仕方はいろいろあれど，コンパクトな集合ならば実質有限個の開集合だけを考えればよくなるからである．逆に，コンパクトでない集合を考えるため，式 (1.23) の否定をとると，

$$\exists \{F_\lambda\} \subset \tau \left[A \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda \wedge \forall \Xi \subset \Lambda \left(\mathrm{card}(\Xi) < \infty \Rightarrow A \not\subset \bigcup_{\lambda \in \Xi} F_\lambda \right) \right] \tag{1.24}$$

となる．この式を解釈すると，コンパクトではない集合とは有限個を選んで被覆することができないような厄介な被覆の仕方が存在する集合ということになる．

コンパクトは最初はかなりとっつきにくい概念であるが，実はユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ においては有界閉集合であることと同値である [6]．

1.1.3 連続性

大学初年度の解析学では，関数の連続性を $\varepsilon - \delta$ 論法によって次のように定義する：

$$\begin{aligned} & \text{関数 } f(x) \text{ が } x = a \text{ で連続} \\ \Leftrightarrow \;\; & \lim_{x \to a} f(x) = f(a) \\ \Leftrightarrow \;\; & \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \;\; [d_E(x, a) < \delta \Rightarrow d_E(f(x), f(a)) < \varepsilon] \end{aligned} \tag{1.25}$$

しかし，$\varepsilon - \delta$ 論法を用いるこの定義だと距離空間における写像でしか通用しない．より一般的に，2 つの位相空間 $(X, \tau), (X', \tau')$ に対する**連続写像**を定義するには，

$$\begin{aligned} & f : X \to X' \text{が連続写像} \\ \Leftrightarrow \;\; & \forall O' \in \tau' \quad f^{-1}(O') \in \tau \end{aligned} \tag{1.26}$$

[2]波の位相とは全く別物．この位相は topology，波の位相は phase．

とする．距離空間は位相空間の特殊な場合であり，式 (1.26) の定義から式 (1.25) は定理として導くことができる [6].

1.2 関数解析のための空間

いわゆる関数解析学という分野はその名の通り関数の性質について論じる分野であるが，その際，関数のノルムや内積が定義されていれば，ベクトルと同じような発想で考えることができて便利である．そういう訳でノルムや内積が定義された関数空間についての理論が頻繁に展開され，ノルムが定義された空間にはバナッハ空間，内積が定義された空間にはヒルベルト空間と名前がついているのである．

スカラー体 $\mathbb{K}$（$=\mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$）上の線型空間 X にノルム，あるいは内積が定義される場合について，以下もう少し詳細に述べる．$\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ が次の条件 (1.27)∼(1.29) を満たすとき，$\|\cdot\|$ を X の**ノルム**といい，$(X, \|\cdot\|)$ を**ノルム空間**という：

$$\forall x \in X \quad \|x\| \geq 0 \wedge \|x\| = 0 \Rightarrow x = 0 \tag{1.27}$$

$$\forall x, y \in X \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \tag{1.28}$$

$$\forall x \in X, \alpha \in \mathbb{K} \quad \|\alpha x\| = |\alpha| \|x\| \tag{1.29}$$

また，$\langle\cdot,\cdot\rangle : X \times X \to \mathbb{K}$ が次の条件 (1.30)∼(1.33) を満たすとき，$\langle\cdot,\cdot\rangle$ を X の**内積**といい，$(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ を**内積空間**または**前ヒルベルト空間**という：

$$\forall x \in X \quad \langle x, x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0 \tag{1.30}$$

$$\forall x, y \in X, \alpha \in \mathbb{K} \quad \langle \alpha x, y\rangle = \alpha \langle x, y\rangle \tag{1.31}$$

$$\forall x, y, z \in X \quad \langle x + y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle \tag{1.32}$$

$$\forall x, y \in X \quad \langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle} \tag{1.33}$$

内積空間 $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ について，

$$\|x\|_N = \sqrt{\langle x, x\rangle} \tag{1.34}$$

とすると $\|x\|_N$ はノルムの公理 (1.27)∼(1.29) を満たすので，$(X, \|\cdot\|_N)$ はノルム空間となる．よって内積空間はノルム空間の一つとみなすことができる．

定義を見ると分かるように，実はノルムや内積を定義するだけでバナッハ空間やヒルベルト空間となるわけではない．上の条件に加えて点列の収束に関する条件が必要なのである．

点列の収束は距離空間において定義される．距離空間 (X, d) における点列 $\{a_n\}(n \in \mathbb{N})$ が $a \in X$ に**収束**するとは，次の式が成り立つことである：

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \quad n > N \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon \tag{1.35}$$

このとき，点列 $\{a_n\}$ が a に収束することを

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a$$

と表す．収束の定義において注意することは，収束先がもとの距離空間の元でなくてはならないということである．なので，点列 $\{1/n\}$ は $(\mathbb{R}, d_E)$ においては 0 に収束するが，$((0, 1), d_E)$ におい

ては収束先 0 が開区間 $(0,1)$ に含まれていないので収束しない．この例で分かるように，収束と呼びたい点列があってもその収束先が距離空間の元として含まれていないがために収束しないことになってしまうことがある．完備とは大雑把にいうと,「収束するといいたい点列」の収束する先が保証されていることをいうのであるが,「収束するといいたい点列」とは

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists N \quad n, m > N \Rightarrow |a_n - a_m| < \varepsilon \tag{1.36}$$

となる点列 $\{a_n\}$ のことで，**コーシー列**という．距離空間の任意のコーシー列が収束する時，その距離空間は**完備**であると定義するのである．有理数は完備ではないので $\sqrt{2}$ にいくらでも近い数を用意できても $\sqrt{2}$ そのものを指すことはできない．有理数を完備化した実数を普段使うように完備な空間を用いるのである．

ノルム空間 $(X, \|\cdot\|)$ は

$$d_N(x,y) = \|x - y\| \quad (x, y \in X) \tag{1.37}$$

によって距離空間 (X, d_N) となる．内積空間も式 (1.34) によってノルム空間となるので同様に距離空間とすることができる．こうして距離が定まったうえで，完備なノルム空間を**バナッハ空間**, 完備な内積空間を**ヒルベルト空間**というのである．

1.3 リーマン積分とルベーグ積分

大学初年度の解析学で学習する積分はリーマン積分と呼ばれる積分である．実はリーマン積分では積分と極限の順序交換に必要な条件が厳しく，特に積分順序の入れ替えや積分と極限の順序交換が頻繁に行われるフーリエ解析の数学では不便な状況が発生する．一方，ルベーグ積分における積分と極限操作の順序交換の条件はより緩く，またリーマン積分では積分不可能な関数もルベーグ積分ならば積分できうる．ルベーグ積分の発見によって超関数やフーリエ変換などの関数解析学が大いに発展したのである．本節ではルベーグ積分を紹介することを目的とするが，積分と極限の順序交換を黙認すればフーリエ解析の教科書で実際にルベーグ積分の知識が必要不可欠となることはないだろう．

1.3.1 リーマン積分

閉区間 $[a,b]$ で定義された関数 $f(x)$ があり，図 1.3 のように x 軸，$x = a$，$x = b$，$y = f(x)$ で囲まれた面積 S を考える．**リーマン積分**ではこの図形を縦に細かく切り，各短冊の面積を足して全体の面積とする．式で表現すると，まず区間 $[a,b]$ が

$$a = x_0 < x_1 < \cdots x_{n-1} < x_n = b \tag{1.38}$$

によって

$$\begin{aligned} [a,b] &= [x_0, x_1] \cup [x_1, x_2] \cup \cdots \cup [x_{n-1}, x_n] \\ &= I_1 \cup I_2 \cup \cdots \cup I_n \end{aligned} \tag{1.39}$$

というように分割されているとする．この分割によってできた短冊を長方形とみなし，i 番目の区間 I_i に対して $\xi_i \in I_i$ を適当にとってきて，短冊の面積の和

$$\begin{aligned} s &= f(\xi_1)(x_1 - x_0) + f(\xi_2)(x_2 - x_1) + \cdots f(\xi_n)(x_n - x_{n-1}) \\ &= f(\xi_1)m(I_1) + f(\xi_2)m(I_2) + \cdots + f(\xi_n)m(I_n) \end{aligned} \tag{1.40}$$

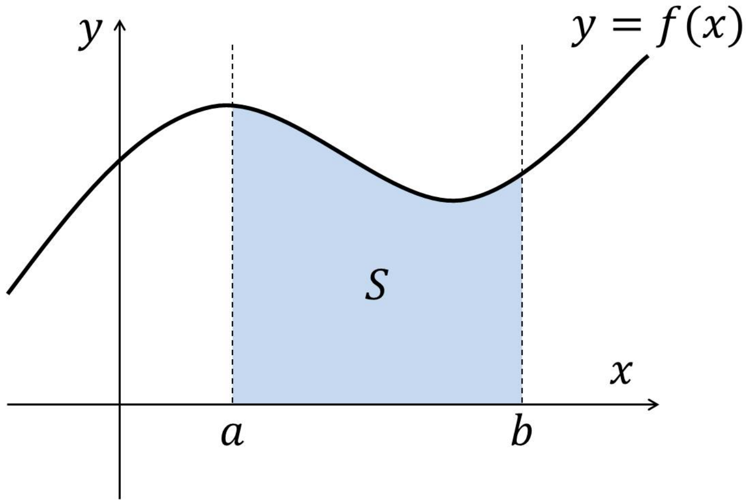

図 1.3: 面積を求める図形

を作る．ただし，$m(I_i)$ は区間 I_i の幅 $x_i - x_{i-1}$ を表す．分割を限りなく細かくしていったとき，つまり分割における最大の区間幅

$$\rho = \max_i m(I_i) \tag{1.41}$$

を 0 に近づける時の s の極限を S とし，

$$S = \int_a^b f(x)dx = \lim_{\rho \to 0} s \tag{1.42}$$

と書く．

リーマン積分の基本的な定義は以上であるが，リーマン積分で問題になるのは極限操作との順序である．例えば関数列 $\{f_n\}$ に対して

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx \quad と \quad \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx$$

は同じになるかという問題や，

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy \right) dx \quad と \quad \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx \right) dy$$

は同じになるかという問題である．これらが等しいならば積分が簡単に計算できたりするのであるが，リーマン積分においては，これらの順序交換で**一様収束**が必要となる [7].

定理 1 (リーマン積分と極限の順序交換) 閉区間 $[a,b]$ 上の連続関数列 $\{f_n(x)\}$ が $f(x)$ に $[a,b]$ 上一様収束するならば，関数列 $\{\int_a^x f_n(t)dt\}$ は $\int_a^x f(t)dt$ に $[a,b]$ 上一様収束する：

$$\int_a^x \left(\lim_{n\to\infty} f_n(t) \right) dt = \lim_{n\to\infty} \int_a^x f(t)dt \tag{1.43}$$

定理 2 (リーマン積分の順序交換) 半開領域（または閉領域）

$$D = \{(x,\alpha) | a \le x \le b, c \le \alpha < d\}$$

上の連続関数 $f(x,\alpha)$ に対し，広義積分

$$\int_a^b f(x,\alpha)dx$$

がパラメータ α に関して閉区間 $[c,d]$ 上一様収束するとする．このとき，

$$\int_c^d d\alpha \int_a^b f(x,\alpha)dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x,\alpha)d\alpha. \tag{1.44}$$

ここで登場した一様収束という条件であるが，さまざまな関数を扱ううえでは不便である．後に説明するルベーグ積分では，これらの交換がより緩い条件である**各点収束**でよくなる [8]．積分の値自体はほぼすべての場合でリーマン積分と変わらないので，暗黙のうちにルベーグの意味での積分が前提とされている数学書も多い．

ちなみに，リーマン積分と微分についてはその連続性の過程だけでよい．

定理 3 (リーマン積分と微分の順序交換) $f(x,\alpha)$ が半開領域（または閉領域）

$$D = \{(x,\alpha)|a \le x \le b, c < \alpha < d\ (\text{または}\ c \le \alpha < d)\ \}$$

上の連続関数で，$\partial f/\partial\alpha$ が存在し，これも D 上連続関数とする，このとき，α の関数

$$\int_a^b f(x,\alpha)dx \quad (c < \alpha < d\ \text{または}\ c \le \alpha \le d)$$

は微分可能で次が成り立つ：

$$\frac{d}{d\alpha}\int_a^b f(x,\alpha)dx = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial\alpha}(x,\alpha)dx. \tag{1.45}$$

1.3.2 ルベーグ積分

積分はたいてい図 1.3 のように曲線で囲まれた図形に適用するものであるが，ここで図 1.4 のような階段型の関数 $g(x)$ のリーマン積分を考えてみる．分割をちょうど $t_1,...,t_5$ で途切れるようにすると，

$$S = y_1m([a,t_1]) + y_3m([t_1,t_2]) + y_1m([t_2,t_3]) + y_2m([t_3,t_4]) + y_3m([t_5,b]) \tag{1.46}$$

となる．式 (1.46) を少し変形すると，

$$S = y_1\left(m([a,t_1]) + m([t_2,t_3]) + m([t_4,t_5])\right) + y_2m([t_3,t_4]) + y_3\left(m([t_1,t_2]) + m([t_5,b])\right) \tag{1.47}$$

が得られる．式 (1.46) は「関数値 × 区間幅」の和になっている一方，式 (1.47) は「関数値 × その関数値をとる区間の長さ」となっている．これまで m は「区間から長さを与える」関数であったが,「集合から長さを与える」関数としてみなし，さらに

$$g^{-1}(y) = \{x|g(x) = y\} \tag{1.48}$$

と定義すると，

$$\begin{aligned} S &= y_1m([a,t_1]\cup[t_2,t_3]\cup[t_4,t_5]) + y_2m([t_3,t_4]) + y_3m([t_1,t_2]\cup[t_5,b]) \\ &= y_1m(g^{-1}(y_1)\cap[a,b]) + y_2m(g^{-1}(y_2)\cap[a,b]) + y_3m(g^{-1}(y_3)\cap[a,b]) \end{aligned} \tag{1.49}$$

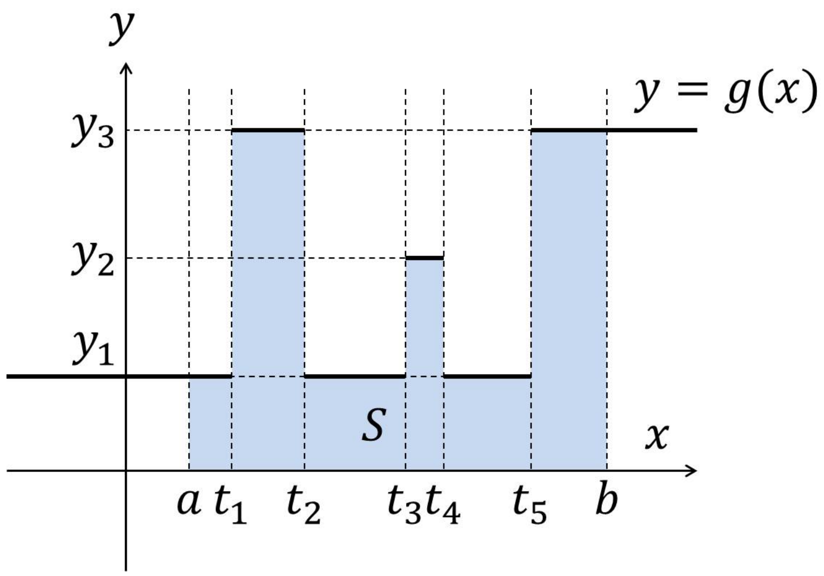

図 1.4: 階段型関数

となる．

リーマン積分ではまず x 軸を分割したが，式 (1.49) が示唆しているのは y 軸の分割である．つまり，階段型でない関数 $f(x)$ の区間 $[a,b]$ における積分について，まず y 軸を

$$\min_{[a,b]} f(x) = y_0 < y_1 < \cdots < y_{n-1} < y_n = \max_{[a,b]} f(x) \tag{1.50}$$

というように分割する．そして各区間 $[y_{i-1}, y_i)$ から適当に ζ_i を選び，

$$s_L = \zeta_1 m(\{x|y_0 \leq f(x) < y_1\}) + \zeta_2 m(\{x|y_1 \leq f(x) < y_2\}) + \cdots + \zeta_n m(\{x|y_{n-1} \leq f(x) < y_n\}) \tag{1.51}$$

という和をつくる．あとは y 軸の分割をどんどん細かくしていき，その時の s_L の極限値 S_L を積分値とするのである．このような積分を**ルベーグ積分**という．積分がリーマン (R) の意味であるかルベーグ (L) の意味であるかを示すため，

$$\text{(R)} \int_a^b f(x)dx \quad \text{(L)} \int_a^b f(x)dx$$

という記号が用いられることがある．

ここまでの途中で m を「集合から長さを与える」関数としたが，この関数こそがルベーグ積分で重要であり，**測度**という名前がついている．ルベーグは巧みに測度を定義しルベーグ積分を完成させた．興味深い結果が次である．

定理 4 A が可付番集合ならば $m(A) = 0$．[3]

この定理により $m(\mathbb{Q}) = 0$ であり，その結果として次が導かれる．

定理 5 (ディリクレ関数の積分) f を**ディリクレ関数**

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases} \tag{1.52}$$

[3] この説明としては文献 [8] のものが私はおすすめである．

とする．この時，$f(x)$ はリーマン積分可能ではないが，ルベーグ積分可能であり，任意の $a < b$ について

$$(\mathrm{L})\int_a^b f(x)dx = 0. \tag{1.53}$$

測度が 0 の集合を**零集合**というが，ディリクレ関数のように 0 でない値を持つ集合が零集合であるとき，ルベーグ積分的にはその関数は 0 と同じである．つまり，ルベーグ積分では零集合の差は無視して考えられ，ある命題が零集合を除いて成り立つとき，**ほとんどいたるところ**成り立つという言い回しが用いられる．例えば，関数 $f(x)$ と $g(x)$ が零集合を除いて等しい場合には「f と g はほとんどいたるところ等しい」といい，数式では almost everywhere の略である a.e. を用いて

$$f(x) = g(x) \quad \text{a.e.} \tag{1.54}$$

などと書かれる．また，零集合を除いた集合の要素を指すため，**ほとんどすべての**という言い回しも用いられ,「ほとんどすべての x について」などという．数式では，almost all の略である a.a. が使われる．

ルベーグ積分が得た顕著な成果が，次の極限と積分の順序交換のための定理である [9].

定理 6 (ルベーグの項別積分定理) $\{f_n\}$ は A で可測な関数，s は A で積分可能な正値関数で，A の各点 x で

$$\forall n \quad |f_n(x)| \leq s(x) \tag{1.55}$$

かつ，A で $f_n \to f\ (n \to \infty)$ ならば

$$\lim_n \int_A f_n(x)dx = \int_A f(x)dx = \int_A \lim_n f_n(x)dx. \tag{1.56}$$

積分順序の交換については，次のようになる [9].

定理 7 (フビニの定理) f が $\mathbf{X} \times \mathbf{Y}$ でルベーグ積分可能ならば，ほとんどすべての x に対し

$$g(x) = (\mathrm{L})\int_{\mathbf{Y}} f(x, y)dy \tag{1.57}$$

が存在し，g は $\mathbf{X}$ で積分可能で

$$\iint_{\mathbf{X}\times\mathbf{Y}} f(x, y)dy = \int_{\mathbf{X}} g(x)dx. \tag{1.58}$$

1.3.3　原始関数の存在と積分可能性

積分というと微分の逆演算であるという印象が強い．実際，関数 $f(x)$ の定積分を計算する際には微分して $f(x)$ になる関数 $F(x)$ を見つけ,

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \tag{1.59}$$

として計算することがほとんどであろう．この $F(x)$ のように，関数 $f(x)$ に対して

$$F'(x) = f(x) \tag{1.60}$$

を満たす関数 $F(x)$ を**原始関数**という．しかし，実は関数によっては原始関数が存在しない場合がある．例えば，次のような関数 $\omega(x)$ を考える．

$$\omega(x) = \begin{cases} 1 & x = 0 \\ 0 & x \neq 0 \end{cases} \tag{1.61}$$

この関数は原始関数を持たない[4]が，$x = 0$ を含まない区間は勿論，$x = 0$ を含む区間でリーマン積分もルベーグ積分も可能である．

$$(\mathrm{R}) \int_{-1}^{1} \omega(x) dx = (\mathrm{L}) \int_{-1}^{1} \omega(x) dx = 0 \tag{1.62}$$

また原始関数が存在しても積分できない場合もある．このように，原始関数が存在することと積分可能であることとは分けて考えなくてはならず，しかもその事情はリーマン積分とルベーグ積分とで異なっているのである．

$f(x)$ を区間 $[a, b]$ でリーマン積分可能な関数であるとする．この時，$a < c < b$ を満たす任意の c について $f(x)$ は $[a, c]$ でもリーマン積分可能であり，

$$\Psi(x) = \int_{a}^{x} f(\xi) d\xi \tag{1.63}$$

が定義できる．$f(x)$ に対して $\Psi(x)$ を**リーマン不定積分**という．以下原始関数とリーマン積分についての定理をいくつか挙げる [9]．

定理 8 リーマン不定積分 $\Psi(x)$ は $[a, b]$ で連続な関数であり，$f(x)$ が $x = c$ で連続ならば

$$\Psi'(c) = f(c) \tag{1.64}$$

である．

定理 9 $f(x)$ が $[a, b]$ でリーマン積分可能で，そのリーマン不定積分 $\Psi(x)$ が微分可能であっても，$f(x)$ が原始関数を持たない場合がある．

定理 10 有界な関数 $f(x)$ が原始関数を持っていても，$f(x)$ がリーマン積分可能でない場合がある．

定理 11 $f(x)$ がリーマン積分可能でしかも原始関数 $F(x)$ を持っているならば，$f(x)$ のリーマン不定積分 $\Psi(x)$ は

$$\Psi(x) = F(x) - F(a) \tag{1.65}$$

である．

整理すると，

- 原始関数を持たず，リーマン積分できない関数が存在する（例：ディリクレ関数）．
- 原始関数を持つが，リーマン積分できない関数が存在する（定理 10）．
- 原始関数を持たないが，リーマン積分可能であり，しかしながらリーマン不定積分が微分できない点を持つ関数が存在する [9]．

[4] このように，不連続点を設けるだけで容易に原始関数を持たせないことができる．

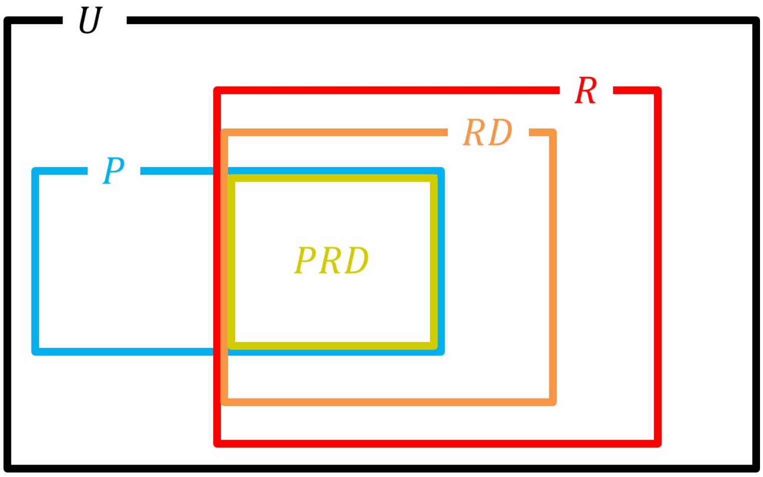

図 1.5: 原始関数の存在とリーマン積分可能性．U：すべての関数，P：原始関数を持つ関数，R：リーマン積分可能な関数，RD：リーマン不定積分が微分可能な関数，PRD：リーマン不定積分の微分が原始関数と等しい関数

- 原始関数を持たないが，リーマン積分可能でしかもリーマン不定積分が微分可能である関数が存在する（式 (1.61) の $\omega(x)$）．
- 原始関数を持ち，かつリーマン積分可能であるならば，リーマン不定積分は微分可能であって原始関数に等しい（定理 11）．

となる．ベン図で書くと図 1.5 のようになる．

原始関数の存在と積分可能性の関係は，ルベーグ積分では「ほとんどいたるところ」という文言付きで幾分単純になる [9]：

定理 12 f が $[a, b]$ でルベーグ積分可能ならば，f のルベーグ不定積分

$$F(x) = (\mathrm{L}) \int_a^x f(\xi) d\xi \tag{1.66}$$

は，$[a, b]$ でほとんどいたるところ微分可能であり，

$$F'(x) = f(x) \quad \text{a.e.} \tag{1.67}$$

定理 12 の F のように，微分がほとんどいたるところ f に等しい関数を f の**殆原始関数**と呼ぶことにする[5]．定理 12 はルベーグ積分可能であれば殆原始関数が存在するというように解釈できる．一方，殆原始関数が存在するとしても，ルベーグ積分可能であるとは限らない [9]．以上の関係をベン図で表すと図 1.6 のようになる．

[5]私の造語．調べても特に名前が見つからなかったので．

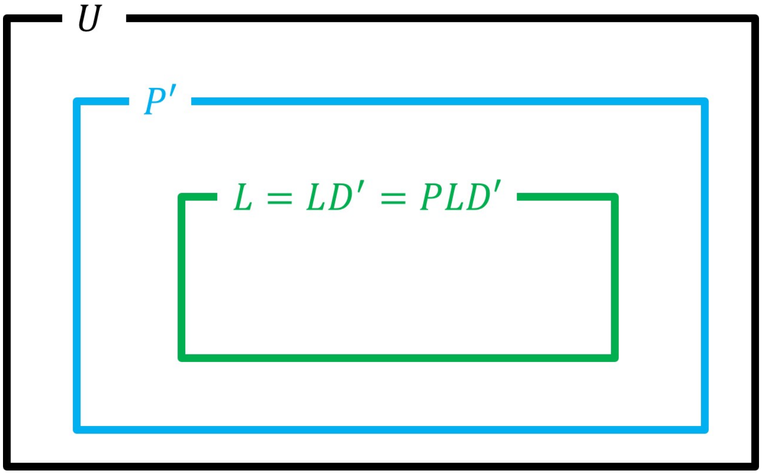

図 1.6: 殆原始関数の存在とルベーグ積分可能性．U：すべての関数，P'：殆原始関数を持つ関数，L：ルベーグ積分可能な関数，LD'：ルベーグ不定積分がほとんどいたるところ微分可能な関数，PLD'：リーマン不定積分の微分が原始関数とほとんどいたるところ等しい関数

1.4 多重指数

多変数関数の微分積分においてはまともに書くとどうしても記号が煩雑にならざるを得ない．そこで，多くの文献では多重指数という記法が用いられる．

$\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, ...\}$ とし，$\mathbb{Z}_+^d$ の元を**多重指数**，あるいは**マルチインデックス**と呼ぶ．$\mathbb{Z}_+^d \ni \alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_d), \beta = (\beta_1, ..., \beta_d)$ に対して，

$$\alpha + \beta = (\alpha_1 + \beta_1, ..., \alpha_d + \beta_d) \tag{1.68}$$

$$\alpha - \beta = (\alpha_1 - \beta_1, ..., \alpha_d - \beta_d) \tag{1.69}$$

と表すことにする．また，

$$|\alpha| = \sum_{k=1}^{d} \alpha_k \tag{1.70}$$

$$\alpha! = \prod_{k=1}^{d} \alpha_k! \tag{1.71}$$

と表す．d 変数関数 $f(\mathbf{x}) = f(x_1, ..., x_d)$ の偏微分は

$$\partial^\alpha f = \frac{\partial^{\alpha_1 + \cdots + \alpha_d}}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_d^{\alpha_d}} f \tag{1.72}$$

とする．ただし，$\alpha_j = 0$ の場合は x_j に関しては微分をしないことを意味するものとする．

第2章　分類信号処理理論（従来の信号処理理論）

まずは従来の信号処理の理論を概観する．ここでいう従来の信号処理理論とは，信号のドメイン，すなわち信号を関数とみなした時の定義域が実数であるか整数であるかと，信号が周期的であるかどうかによって $2 \times 2 = 4$ 種類の理論に分ける信号処理理論のことである．便宜上，従来の信号処理理論に**分類信号処理理論**と名前を付けておく．

2.1　信号の分類

分類信号処理理論における**信号**とは，実数または整数を定義域として持つ複素数値関数である．信号の定義域は**時間**あるいは**時刻**と呼び，$\mathbb{T}$ で表す．時間が実数の場合は特に**連続時間信号**[1]といい，時間が整数である場合は**離散時間信号**とよぶ．信号 f が離散時間信号であることを強調する際には，時刻 $t \in \mathbb{Z}$ について $f(t)$ という記法以外に $f[t]$ という表現を用いる．

次に，周期性による信号の分類を行う．

$$\exists T_0 \ \ T_0 = \min\{T \in \mathbb{T} | T > 0 \wedge f(t-T) = f(t)\} \tag{2.1}$$

である時，その信号を**有限周期信号**といい，T_0 を基本周期と呼ぶ．有限周期信号でない信号を**無限周期信号**と呼ぶ．信号が，連続かどうか，有限周期かどうかに応じて表 2.1 のような略称を設ける．

2.2　フーリエ級数展開

信号処理の教科書はたいていフーリエ級数から始まる．**フーリエ級数展開**は，基本周期 T_0 の CTFP 信号を**基本角周波数** $\omega_0 = 2\pi/T_0$ の倍数の周波数成分に分解することである．ざっとその流れを示すと，

1. 信号（つまり関数）に内積を定義して信号をヒルベルト空間とする．
2. 正規直交基底を用意する．普通関数空間は無限次元となるので基底も無限に必要になる．

表 2.1: 信号の分類と略称

	連続時間 Continuous Time : CT	離散時間 Discrete Time : DT
無限周期 Infinite Period : IP	連続時間無限周期信号 CTIP	離散時間無限周期信号 DTIP
有限周期 Finite Period : FP	連続時間有限周期信号 CTFP	離散時間有限周期信号 DTFP

[1]「連続」時間信号という名前ではあるが，関数として連続であるとは限定しない．

3. 任意の信号を基底で分解する．

となる．フーリエ級数展開は線型代数を関数空間に適用した結果なのである．

ヒルベルト空間をなす関数空間としては，L^2 **関数**：

$$L^2[a,b] = \left\{ f \,\middle|\, \int_a^b |f(t)|^2 dt < \infty \right\} \quad (a, b \in \mathbb{R}, a < b) \tag{2.2}$$

が重要である．L^2 関数は内積

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(t) g(t) dt \quad (f, g \in L^2[a,b]) \tag{2.3}$$

によってヒルベルト空間となる．L^2 関数 f の持つ

$$\|f\| = \sqrt{\int_a^b |f(t)|^2 dt} < \infty \tag{2.4}$$

という性質は**二乗可積分**と呼ばれる．一般的に関数 f がある $1 \leq p < \infty$ について

$$\sqrt[p]{\int_a^b |f(t)|^p dt} < \infty \tag{2.5}$$

である時，p **乗可積分**と呼ばれ，p 乗可積分な関数の集合を $L^p[a,b]$ **関数**とよぶ．単に L^p と書いた場合には $L^p(-\infty, \infty)$ を表すこととする．L^p 空間の完備性については次の定理が存在する [2]：

定理 13 $1 \leq p < \infty$ とし，E を $\mathbb{R}^d$ のルベーグ可測な部分集合とする．$f_n \in L^p(E) (n \in \mathbb{N})$ が

$$\lim_{n,m \to \infty} \|f_n - f_m\| = \sqrt[p]{\int_E |f_n(\mathbf{x}) - f_m(\mathbf{x})|^p d\mathbf{x}} < \infty \tag{2.6}$$

ならば，ある $f \in L^p(E)$ で

$$\lim_{n \to \infty} \|f - f_n\| = 0 \tag{2.7}$$

を満たすものが存在する．

なお，次の定理に注意するべきである：

定理 14 任意の $1 \leq p < q < \infty$ について，$L^p(\mathbb{R})$ と $L^q(\mathbb{R})$ の間には包含関係はない．つまり

$$\exists f \in L^p \quad f \notin L^q \tag{2.8}$$

$$\exists g \in L^q \quad g \notin L^p \tag{2.9}$$

証明

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha} \tag{2.10}$$

が $\alpha \leq 1$ で発散し，$\alpha > 1$ で収束すること[2]を用いると，

$$f(x) = \begin{cases} k & \left(k \leq x < k + \frac{1}{k^{q+1}}, k \in \mathbb{N}\right) \\ 0 & \text{else} \end{cases} \tag{2.11}$$

[2] p-級数で検索

が $f \in L^p, f \notin L^q$ であることがわかる．同様に，

$$g(x) = \begin{cases} k^{-\frac{1}{p}} & (k \leq x < k+1, k \in \mathbb{N}) \\ 0 & \text{else} \end{cases} \tag{2.12}$$

は $g \notin L^p, g \in L^q$ である．

Q.E.D

入門的な信号処理の教科書では，$L^2[-T/2, T/2]$ として信号を扱っているものが多い[3]ので，以下基本周期 T_0 の CTFP 信号を $L^2[-T_0/2, T_0/2]$ 空間のものとして扱う．

次にヒルベルト空間の正規直交基底について考える．基底云々についての基礎的な事項は線型代数の教科書 [10]，[11]，[12] などを読んでもらえばよい．たいていの教科書では有限次元の線形空間を扱うのに対し，関数空間は基本的に無限次元の線型空間であるという違いはあるものの，基本的な理論はほぼ同じである．細かいことを言うと，無限次元線型空間における基底の存在はツォルンの補題によって証明される [12] ので，選択公理を認めるかどうかという問題 [13] が発生するのであるが，ここまで首を突っ込みたい人はほぼいないであろう．肝心の $L^2[-T_0/2, T_0/2]$ における正規直交基底であるが，$\{1/\sqrt{T_0} \cdot e^{2\pi nit/T_0}\}(n \in \mathbb{Z})$ でいいだろう（適当）．

最後に，$f \in L^2[-T_0/2, T_0/2]$ を基底で分解するのであるが，これはいわゆる射影である．すなわち，無限次元ベクトル空間 X の正規直交基底が $\{\mathbf{a}_n\}(n \in \mathbb{N})$ である時，X 自身への射影行列，すなわち単位行列 E は，$A = (\mathbf{a}_1, ...)$ によって

$$E = AA^T \tag{2.13}$$

と表せる [10] [4]．これを利用して X の任意の元 $\mathbf{x}$ は

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= E\mathbf{x} = AA^T\mathbf{x} \\ &= (\mathbf{a}_1, ...) \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1^T \\ \vdots \end{pmatrix} \mathbf{x} \\ &= (\mathbf{a}_1, ...) \begin{pmatrix} (\mathbf{a}_1, \mathbf{x}) \\ \vdots \end{pmatrix} \\ &= (\mathbf{a}_1, \mathbf{x})\mathbf{a}_1 + \cdots \end{aligned} \tag{2.14}$$

というように正規直交基底の線型結合として表せる[5]．ヒルベルト空間で言うと次の定理になる [15]：

定理 15 (フーリエ展開) ヒルベルト空間 $(X, \langle\cdot\rangle)$ の正規直交基底を $\{e_n\}(n \in \mathbb{N})$ とするとき，

$$\forall x \in X \quad x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_n \tag{2.15}$$

正規直交基底 $\{1/\sqrt{T_0} \cdot e^{2\pi nit/T_0}\}(n \in \mathbb{Z})$ によって $f \in L^2[-T_0/2, T_0/2]$ をフーリエ展開すると，

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\langle f, \frac{1}{\sqrt{T_0}} e^{\frac{2\pi nit}{T_0}} \right\rangle \frac{1}{\sqrt{T_0}} e^{\frac{2\pi nit}{T_0}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T_0} \left\langle f, e^{\frac{2\pi nit}{T_0}} \right\rangle e^{\frac{2\pi nit}{T_0}} \tag{2.16}$$

[3]そもそもどのような関数を対象としているかを明記していないこともある

[4]実は文献 [10] には「∼ と書けることが容易に分かります」と書いてあるだけで特に説明はない．

[5]無限次元線形空間を扱う文献ではほぼすべて行列を用いずに話を展開しており，このように無限次元行列を書いているのを見たことはほとんどない．文献 [14] におけるハイゼンベルクのマトリックス力学の部分で見られただけである．実はこのような行列の書き方は厳密には厄介な問題をはらんでいるのかもしれない．

となる．ここで，$\omega_0 = 2\pi/T_0$ として

$$\mathcal{F}^c[f][n] = \left\langle f, e^{in\omega_0 t}\right\rangle \tag{2.17}$$

とすると，

$$f(t) = \frac{\omega_0}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathcal{F}^c[f][n]e^{in\omega_0 t} \tag{2.18}$$

と変形できる．$\mathcal{F}^c[f][n]$ のことを**フーリエ級数**といい，フーリエ級数による式 (2.18) の展開を**フーリエ級数展開**という．

2.3 フーリエ変換とスペクトル

CTIP 信号にフーリエ級数展開を拡張するため，式 (2.18) において $T_0 \to \infty$，すなわち $\omega_0 \to 0$ の極限をとることを考える．式 (2.18) を

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathcal{F}^c[f][n]e^{in\omega_0 t}\cdot\omega_0 \tag{2.19}$$

と書くと，この総和の部分はリーマン和とみなせ，

$$\mathcal{F}[f](\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt \tag{2.20}$$

とすると，式 (2.19) において $\omega_0 \to 0$ の極限では

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}[f](\omega)e^{i\omega t}d\omega \tag{2.21}$$

となる．式 (2.20) の $\mathcal{F}[f](\omega)$ こそが信号 $f(t) \in L^2(\mathbb{R})$ の**フーリエ変換**である．

なお，本によっては，角周波数 ω ではなく周波数 $\xi = \omega/2\pi$ を用いて

$$\mathcal{F}[f](\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-2\pi i\xi t}dt \tag{2.22}$$

と定義する場合もあるが，本書では角周波数 ω をメインに説明する．ただし，周波数と言っても本質的に問題ない場合では角周波数の代わりに周波数を用いて説明することもある．なお，フーリエ変換したスペクトルから元の信号を合成する式 (2.21) は，

$$\mathcal{F}^{-1}[F](t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega t}d\omega \tag{2.23}$$

という記法を用いて

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[f]](t) \tag{2.24}$$

と書ける．$\mathcal{F}^{-1}$ のことを**逆フーリエ変換**という．

フーリエ級数では，離散的な角周波数ごとの成分が得られ，フーリエ変換では連続した角周波数ごとの成分が得られる．この，角周波数 ω の複素数値関数 $F(\omega)$ を**スペクトル**という．信号の場合と同様に，スペクトルでもその定義域が $\mathbb{Z}$ や $\mathbb{R}$ であったり，周期性を持つ場合がある．そこで，スペクトルについても同様に表 2.2 のようなスペクトルの分類と略称を設ける[6]．

[6] スペクトルの分類名では角周波数ではなく周波数という単語を用いた．

表 2.2: スペクトルの分類と略称

	連続周波数 Continuous Frequency : CF	離散周波数 Discrete Frequency : DF
無限周期 Infinite Period : IP	連続周波数 無限周期スペクトル CFIP	離散周波数 無限周期スペクトル DFIP
有限周期 Finite Period : FP	連続周波数 有限周期スペクトル CFFP	離散周波数 有限周期スペクトル DFFP

さて，表 2.1 のうち，CTIP 信号と CTFP 信号についてはそのフーリエ変換が定義された．残るは離散時間信号である．まずは基本周期 $N_0 \in \mathbb{N}$ の DTFP 信号 $f[n]$ について考える．このとき $f[n]$ は $f[0], ..., f[N_0 - 1]$ の値によって決まってしまうので，DTFP 信号の空間は有限次元ベクトル空間 $\mathbb{R}^{N_0}$ となる．$\mathbb{R}^{N_0}$ において，

$$E_k[n] = \frac{1}{\sqrt{N_0}} \exp \frac{2\pi ikn}{N_0} \tag{2.25}$$

を考えると，$E_0[n], ...E_{T_0-1}[n]$ は $\mathbb{R}^{N_0}$ の正規直交基底となる．フーリエ級数展開を導いた時と同様に，$\omega_0 = 2\pi/N_0$ として

$$\mathcal{F}^D[f][n] = \sum_{t=0}^{N_0-1} f[t]e^{-\frac{2\pi int}{N_0}} = \sum_{t=0}^{T_0-1} f[t]e^{-in\omega_0 t} \tag{2.26}$$

とすると，$f[n]$ は

$$f[n] = \frac{\omega_0}{2\pi} \sum_{t=0}^{N_0-1} \mathcal{F}[f][t]e^{in\omega_0 t} \tag{2.27}$$

と表せる．$\mathcal{F}^D$ のことを**離散フーリエ変換**とよび，

$$\mathcal{F}^{-D}[F][n] = \frac{\omega_0}{2\pi} \sum_{t=0}^{N_0-1} F[t]e^{in\omega_0 t} \tag{2.28}$$

を**逆離散フーリエ変換**とよぶ．フーリエ級数展開からフーリエ変換へと拡張したのと同様に，DTIP 信号 $f[n]$ に対しては**離散時間フーリエ変換**

$$\mathcal{F}^d[f](\omega) = \sum_{t=-\infty}^{\infty} f[t]e^{-i\omega t} \tag{2.29}$$

が定義され，**逆離散時間フーリエ変換** $\mathcal{F}^{-d}$ は

$$\mathcal{F}^{-d}[F][n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(t)e^{in\omega} d\omega \tag{2.30}$$

となる．

信号をスペクトルに対応させる以上 4 つのフーリエ変換は，表 2.1 の信号分類と表 2.2 のスペクトル分類を表 2.3 のように対応させる．この対応を図式で表したのが**フーリエ―ポワソン立方体**（図 2.1）である．ただし，

$$f(t) = \sin t + \sin\left(\sqrt{2}t\right) \tag{2.31}$$

表 2.3: 信号とスペクトルの対応

信号	フーリエ変換の名前 $\longrightarrow$	スペクトル
CTIP($L^2(\mathbb{R})$)	フーリエ変換：FT	CFIP
CTFP($L^2[-T_0/2, T_0/2]$)	フーリエ級数：FS	DFIP
DTIP	離散時間フーリエ変換：DTFT	CFFP
DTFP	離散フーリエ変換：DFT	DFFP

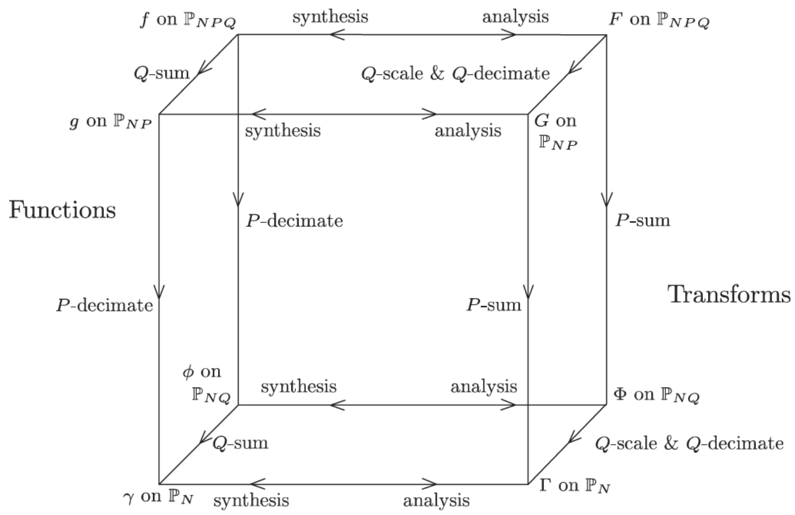

図 2.1: フーリエーポワソン立方体 [4]．詳細は [4] あるいは [3] を参照.

のように，周期信号の和であるがそれ自身は周期的でない信号（**概周期信号**）は CTIP 信号であるが，スペクトルにすると DFIP スペクトルになる[7]というような例外もある.

[7]概周期信号はそもそも L^2 ではなく，フーリエ変換はシュワルツ超関数としての意味になる.

第3章　超関数

分類信号処理理論では L^2 でない関数のフーリエ変換は定義されなかった．よって，簡単そうな定数関数ですらフーリエ変換のためには何かしらの言い訳をつけて形式的にするしかなかった．また，信号処理の教科書においてしばしば登場する**ディラックの δ 関数**：

$$\delta(x) = 0 \quad (x \neq 0) \tag{3.1}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1 \tag{3.2}$$

はそもそも関数として扱えない．さらに，離散的か連続的か，周期的か非周期的かによって信号を分類してそれぞれにフーリエ変換を用意するので，異なる分類の信号から得られるこれまた異なる分類のスペクトルがどういう意味を持つのか統一的に理解しにくい．

これらの問題は超関数を導入することで解決される．本章では超関数の理論を解説し，超関数を用いた具体的な信号処理の理論は第 4 章で述べる．

3.1　導入

まずはなんらかの方法によって δ 関数が正当化されているとしよう．式 (3.1) より，0 を定義域に含む任意の関数 f について

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) f(x) dx = f(0) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = f(0) \tag{3.3}$$

となる．そこで，そもそも δ 関数を関数空間 Ψ から複素数への写像と考え，

$$\delta : \Psi \ni f \to f(0) \tag{3.4}$$

と定義するのである．体 K 上のベクトル空間 V から K への線型写像を**線型汎関数**と呼ぶが，式 (3.4) はまさに関数空間にとっての線型汎関数となる．

式 (3.4) によって関数を拡張できる可能性が見えてきたが，関数の拡張であれば関数同様微分ができると便利である．$F : f \to F[f]$ を δ 関数のような関数の線型汎関数とし，F の微分 F' を次のように部分積分によって形式的に考える：

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} F'(x) f(x) dx &= [F(x)f(x)]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} F(x) f'(x) dx \\ &= [F(x)f(x)]_{-\infty}^{\infty} - F[f'] \end{aligned} \tag{3.5}$$

ここで，$[F(x)f(x)]_{-\infty}^{\infty}$ が 0 となってくれれば F の微分が結局 f の微分ということになってすっきりする．そこで，関数 f の空間の方を制限する．関数 f に対して $\{x | f(x) \neq 0\}$ の閉包を**台**といい $\mathrm{supp} f$ と表すが，$\mathrm{supp} f$ が有界な（コンパクトな）関数空間の元を考えるのである．そうすることにより，

$$F'[f] = -F[f'] \tag{3.6}$$

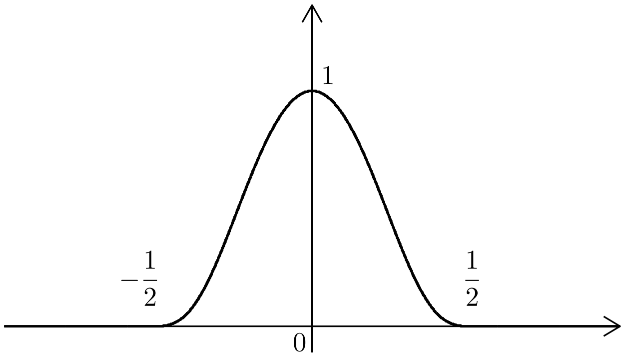

図 3.1: 試料関数 $\theta(x)$

とすることができる．さらに，$f \in C^\infty$ ならば式 (3.6) においていくらでも微分できることが保証される．この，台がコンパクトな C^∞ 級関数のことを**試料関数**，あるいは**テスト関数**と呼び，試料関数の空間を $\mathcal{D}$ で表す．$\mathcal{D}$ と L^p の関係としては，次の定理が成り立つ [8]：

定理 16 $\mathcal{D}$ は $L^p(-\infty,\infty)(1 \leq p < \infty)$ において稠密である．

$\mathcal{D}$ の線型汎関数 $F : \mathcal{D} \to \mathbb{C}$ のうち，連続性：

$$\varphi_n \to \varphi \in \mathcal{D}(n \to \infty) \Rightarrow F[\varphi_n] \to F[\varphi](n \to \infty) \tag{3.7}$$

を持つものを**シュワルツ超関数**といい，シュワルツ超関数全体を $\mathcal{D}'$ で表す．また，$\varphi \in \mathcal{D}$ が $F \in \mathcal{D}'$ によって写される値を以後 $\langle F, \varphi \rangle$ と表す．ただし，式 (3.7) における試料関数の収束の定義の仕方，つまり $\mathcal{D}$ の位相の入れ方にはいろいろやり方があるようで，もっとも単純なのは単に関数列 $\{\varphi_n\}$ の一様収束による定義である．なお，式 (3.6) で定義される微分された超関数のことを**導超関数**と呼ぶ.

シュワルツ超関数 F に対しても台が定義され，しかも重要な役割を果たす．まず，$F \in \mathcal{D}'$ が開集合 U で $\mathbf{0}$ であるとは,

$$\forall \varphi \in \mathcal{D} \quad \mathrm{supp}\varphi \subset U \Rightarrow \langle F, \varphi \rangle = 0 \tag{3.8}$$

であることをいう．超関数の台 $\mathrm{supp}F$ はざっくりいうと F が 0 とならない集合のことであり，式で表すと

$$\mathrm{supp}F = \mathbb{R} \setminus \{F \text{ が } 0 \text{ となる最大開集合 }\} \tag{3.9}$$

となる.

ところで，台がコンパクトな C^∞ 級関数を試料関数としたわけであるが，後のためにも一例を示しておく．まず，$h(x)$ を

$$h(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases} \tag{3.10}$$

として,

$$\theta(x) = e^4 h\left(\frac{1}{2} + x\right) h\left(\frac{1}{2} - x\right) \tag{3.11}$$

とする．$\theta(x)$ のグラフは図 3.1 のようになり,

$$\mathrm{supp}\theta = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \tag{3.12}$$

となるので，台がコンパクトな C^∞ 級関数となる [4].

3.2 超関数のフーリエ変換

$F \in \mathcal{D}'$ の微分を部分積分を利用して

$$\langle F', \varphi \rangle = -\langle F, \varphi' \rangle \tag{3.13}$$

と定義したが，F のフーリエ変換についても同様に形式的に定義することを考える．関数 $f \in L^p$ に対しては，

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}[f](x)\varphi(x)dx \\ = & \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-ixt}dt \right) \varphi(x)dx \\ = & \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \left(\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)e^{-ixt}dx \right) dt \\ = & \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\mathcal{F}[\varphi](t)dt \end{aligned} \tag{3.14}$$

となることから類推するには，

$$\langle \mathcal{F}[F], \varphi \rangle = \langle F, \mathcal{F}[\varphi] \rangle \tag{3.15}$$

と定義するのがよさそうである．この定義で通すためには $\forall \varphi \in \mathcal{D}\ \mathcal{F}[\varphi] \in \mathcal{D}$ とならなくてはならないが，実際にはそうはならない．フーリエ変換による像が変わらない関数空間については，次の定理が存在する [2]：

定理 17 $\mathbb{R}$ 上の関数 $f \in C^\infty$ のうち，

$$\forall N \in \mathbb{Z}_+ \sum_{\alpha,k\in\mathbb{Z}_+,\alpha+k\leq N} \sup_{x\in\mathbb{R}} (1+|x|^2)^{\frac{k}{2}} \left| f^{(\alpha)}(x) \right| < \infty \tag{3.16}$$

である関数の集合を $\mathcal{S}$ とする．このとき，

$$\forall f \in \mathcal{S} \quad \mathcal{F}[f] \in \mathcal{S} \tag{3.17}$$

定理 17 における関数 $f \in \mathcal{S}$ を**急減少関数**と呼び，急減少関数の連続な線型汎関数を**緩増加超関数**と呼ぶ．緩増加超関数の集合は $\mathcal{S}'$ で表す．緩増加超関数の台はシュワルツ超関数の定義において，$\mathcal{D}$ および $\mathcal{D}'$ をそれぞれ $\mathcal{S}$，$\mathcal{S}'$ に読み替えたものとする．ただし，急減少関数の列 $\{\varphi_n\}$ の収束 $\varphi_n \to \varphi$ は，

$$\forall N \in \mathbb{Z}_+ \lim_{n\to\infty} \sum_{\alpha,k\in\mathbb{Z}_+,\alpha+k\leq N} \sup_{x\in\mathbb{R}} (1+|x|^2)^{\frac{k}{2}} \left| \varphi_n^{(\alpha)}(x) - \varphi^{(\alpha)}(x) \right| = 0 \tag{3.18}$$

によって定義する．

$\mathcal{D}$ と $\mathcal{S}$ の間には

$$\mathcal{D} \subset \mathcal{S} \tag{3.19}$$

という関係があり[1]，$\mathcal{S}$ の元の中にはコンパクトな台を持たない関数も含まれる．$\mathcal{D}$ を定義する際には，式 (3.5) において $[F(x)f(x)]_{-\infty}^{\infty}$ が必ず 0 となるように台がコンパクトな関数に制限したのであるが，$f \in \mathcal{S}$ について $f(x) \to 0 (x \to \pm\infty)$ であり，実は次の定理が成り立つ [2]：

[1]従って定理 16 より $\mathcal{S}$ も L^p で稠密である．

定理 18 $F \in \mathcal{S}'$ について，その微分 F' を

$$\langle F', \varphi \rangle = -\langle F, \varphi' \rangle \quad (\varphi \in \mathcal{S}) \tag{3.20}$$

と定義すると，$F' \in \mathcal{S}'$.

よって超関数を微分するという目的であれば関数空間を $\mathcal{S}$ にとってもよいのであるが，式 (3.19) とは対照的に，

$$\mathcal{S}' \subset \mathcal{D}' \tag{3.21}$$

が成り立つ．試料関数の方が超関数の受け皿は大きいのである．

以後主に緩増加超関数を扱うため，緩増加超関数を単に超関数と言うことがある．

3.3 緩増加超関数の例

緩増加超関数やその微分，フーリエ変換について重要な例をいくつか示す．以下 $\varphi \in \mathcal{S}$ とする．また，関数 f に対して

$$\langle F_f, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x)dx \tag{3.22}$$

とする．

1. **L^p 関数**

   $f \in L^p(1 \leq p < \infty)$ に対して $F_f \in \mathcal{S}'$ であり，f と F_f は同一視できる．このように，$F_f \in \mathcal{S}'$ の場合 $\langle F_f, \varphi \rangle$ を $\langle f, \varphi \rangle$ とも書く．f を超関数としてフーリエ変換すると

   $$\begin{aligned} \langle f, \varphi \rangle &= \langle \mathcal{F}[F_f], \varphi \rangle = \langle F_f, \mathcal{F}[\varphi] \rangle \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) e^{-ixt} dt dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ixt} dx \varphi(t) dt \\ &= \left\langle F_{\mathcal{F}[f]}, \varphi \right\rangle = \langle \mathcal{F}[f], \varphi \rangle \end{aligned} \tag{3.23}$$

   となって式 (2.20) と一致する．超関数の計算は，基本的にはこのように超関数の引数が φ になるように変形することによって行う．

2. **緩増加関数**

   $f \in C^0$ について

   $$\exists C > 0, N \in \mathbb{Z}_+ \quad \forall x \quad |f(x)| \leq C(1 + |x|)^N \tag{3.24}$$

   が満たされるとき，f を**緩増加連続関数**と呼ぶ．特に，$f \in C^\infty$ で

   $$\forall \alpha \in \mathbb{Z}_+ \quad \exists N \in \mathbb{Z}_+, C_\alpha > 0 \quad \forall x \quad |f^{(\alpha)}(x)| \leq C_\alpha(1 + |x|)^N \tag{3.25}$$

   満たすものは**緩増加関数**という．緩増加関数の集合を $\mathcal{O}_M$ で表す．f が緩増加連続関数であるとき，L^p 関数と同様に $F_f \in \mathcal{S}'$ となる [2]．定数関数 $f(x) = C$ や多項式 $\mathcal{P}(x)$，e^{iax} などは緩増加関数である．

   L^p 関数と併せて考えればかなりの関数が緩増加超関数としてみなせる．

3. δ **関数**

$$\langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0) \tag{3.26}$$

とすると $\delta \in \mathcal{S}'$ である．δ のフーリエ変換は

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{F}[\delta], \varphi \rangle &= \langle \delta, \mathcal{F}[\varphi] \rangle = \mathcal{F}[\varphi](0) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) dx \\ &= \langle 1, \varphi \rangle \end{aligned} \tag{3.27}$$

となる．逆に 1 のフーリエ変換は

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{F}[1], \varphi \rangle &= \langle 1, \mathcal{F}[\varphi] \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}[\varphi](x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}[\varphi](x) \cdot e^{-i \cdot 0 \cdot x} dx = 2\pi \mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[\varphi]](0) = 2\pi \varphi(0) \\ &= \langle 2\pi\delta, \varphi \rangle \end{aligned} \tag{3.28}$$

となる．

4. **超関数と関数の積**

f が緩増加関数であるならば，$\forall \varphi \in \mathcal{S}$ について $fF \in \mathcal{S}$ である [2]．そこで，$f \in \mathcal{O}_M$，$F \in \mathcal{S}'$ に対して，

$$\langle fF, \varphi \rangle = \langle F, f\varphi \rangle \tag{3.29}$$

として f と F の積 fF を定義することができる．便宜上 Ff は fF のことであるとしておく．重要な例として，緩増加関数 f と δ の積を考えると

$$\langle f\delta, \varphi \rangle = \langle \delta, f\varphi \rangle = f(0)\varphi(0) = \langle f(0)\delta, \varphi \rangle \tag{3.30}$$

が成り立つ．実は次の定理が示されている [16]：

定理 19 式 (3.29) によって緩増加超関数との積を定義できる無限回可微分関数の空間は $\mathcal{O}_M$ である．

5. **超関数の多項式による除算**

特異点を持つ関数を超関数とみなすには少々工夫がいる．例えば $1/x$ を超関数として

$$\left\langle \frac{1}{x}, \varphi \right\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x} dx \tag{3.31}$$

と定義すると，右辺は必ずしも値を持つとは言えないので，このまま超関数として定義することはできない．しかし，右辺の積分は

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{|x|>\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx \tag{3.32}$$

とすると値を持つことが保障される [2]．式 (3.32) は**コーシーの主値**と呼ばれ，

$$\text{p.v.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x} dx \tag{3.33}$$

などと書く．よって超関数 $1/x$ の定義は

$$\left\langle \frac{1}{x}, \varphi \right\rangle = \text{p.v.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x} dx \tag{3.34}$$

とすればよく，この定義ならば $1/x \in \mathcal{S}'$ である [2]．$1/x^n$ $(n \in \mathbb{N})$ については，微分の定義を利用して

$$\frac{1}{x^{n+1}} = -\frac{1}{n}\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^n}\right) \tag{3.35}$$

とすればよい．この時，

$$\forall n > 0 \quad x \cdot \frac{1}{x^{n+1}} = \frac{1}{x^n} \tag{3.36}$$

がちゃんと成立する [5].

さらに一般的には，多項式による緩増加超関数の除法ができる [17]：

定理 20 任意の多項式 $P(x) \neq 0$ および $T \in \mathcal{S}'$ に対して，

$$T = P(x)S \tag{3.37}$$

となる $S \in \mathcal{S}'$ が存在する．

例えば $P(x) = x, T = 1$ とすると $S = 1/x$ は $T = P(x)S$ を満たす．また，多項式以外のより広い関数についてもこの定理が成り立つようである [16]．ただしこの除法は一意ではなく，特異点におけるデルタ関数やその導超関数の自由度がある [16]．$P(x) = x, T = 1$ について言うと，$S = 1/x + \delta$ や $S = 1/x + 100\delta'$ も $T = P(x)S$ を満たす.

6. **微分のフーリエ変換**

$F \in \mathcal{S}'$ に対して，

$$\mathcal{F}\left[\frac{d^n}{dx^n}F\right] = (ix)^n \mathcal{F}[F] \tag{3.38}$$

が成り立つ [2]．$x^n \in \mathcal{O}_M$ であるのでこの積は正当化される．

7. **ヘヴィサイド関数**

$$H(x) = \begin{cases} 1 & (x > 0) \\ 0 & (x \leq 0) \end{cases} \tag{3.39}$$

は**ヘヴィサイド関数**と呼ばれる関数であり，$F_H \in \mathcal{S}'$ である．ヘヴィサイド関数を超関数の意味で微分すると，

$$\begin{aligned} \langle H', \varphi \rangle &= -\langle H, \varphi' \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} H(x)\varphi'(x)dx \\ &= -\int_0^{\infty} \varphi'(x)dx = \varphi(0) \\ &= \langle \delta, \varphi \rangle \end{aligned} \tag{3.40}$$

となる．微分のフーリエ変換の式 (3.38) と合わせて考えると，$\mathcal{F}[H] = 1/(ix)$ とでもなりそうであるが，実際には

$$\mathcal{F}[H] = \pi\delta + \frac{1}{ix} \tag{3.41}$$

となる [2]．確認のため，δ のフーリエ変換を H' のフーリエ変換として計算すると，

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{F}[H'], \varphi \rangle &= \langle ix\mathcal{F}[H], \varphi \rangle = \left\langle i\pi x\delta + ix \cdot \frac{1}{ix}, \varphi \right\rangle \\ &= \langle 1, \varphi \rangle = \langle \mathcal{F}[\delta], \varphi \rangle \end{aligned} \tag{3.42}$$

となって一致する．超関数の除法の自由度に注意するべき例である．

8. **緩増加超関数の平行移動，反転，拡大**

関数 $f(x)$ に対して**平行移動** τ_h，**反転** $\cdot^\vee$，**拡大** μ_a を

$$\tau_h f(x) = f(x-h) \tag{3.43}$$

$$f^\vee(x) = f(-x) \tag{3.44}$$

$$\mu_a f(x) = f(ax) \tag{3.45}$$

とそれぞれ定義する．ただし，拡大 μ_a において a は正の数であるとする．平行移動 τ_h は**シフト作用素**とも言う．$F \in \mathcal{S}'$ に対する平行移動，反転，拡大はそれぞれ

$$\langle \tau_h F, \varphi \rangle = \langle F, \tau_{-h}\varphi \rangle \tag{3.46}$$

$$\langle F^\vee, \varphi \rangle = \langle F, \varphi^\vee \rangle \tag{3.47}$$

$$\langle \mu_a F, \varphi \rangle = \left\langle F, \frac{1}{a}\mu_{\frac{1}{a}}\varphi \right\rangle \tag{3.48}$$

とする．もちろん，$\tau_h F, F^\vee, \mu_a F \in \mathcal{S}'$ である．反転を用いると，フーリエ逆変換 $\mathcal{F}^{-1}$ は

$$\mathcal{F}^{-1} = \frac{1}{2\pi}(\mathcal{F})^\vee \tag{3.49}$$

と書ける．

平行移動，反転，拡大した緩増加超関数のフーリエ変換は

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{F}[\tau_h F], \varphi \rangle &= \langle F, \tau_{-h}\mathcal{F}[\varphi] \rangle = \left\langle F, \tau_{-h}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)e^{-ixt}dx \right\rangle \\ &= \left\langle F, \int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)e^{-ix(t+h)}dx \right\rangle = \left\langle F, \int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)e^{-ixh}\cdot e^{-ixt}dx \right\rangle \\ &= \left\langle F, \mathcal{F}[\phi(x)e^{-ixh}] \right\rangle = \left\langle e^{-ixh}\mathcal{F}[F], \varphi \right\rangle \end{aligned} \tag{3.50}$$

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{F}[F^\vee], \varphi \rangle &= \langle F, \mathcal{F}[\varphi]^\vee \rangle = \left\langle F, \int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)e^{ixt}dx \right\rangle = \left\langle F, \int_{-\infty}^{\infty}\varphi^\vee(x)e^{-ixt}dx \right\rangle \\ &= \langle F, \mathcal{F}[\varphi^\vee] \rangle = \langle \mathcal{F}[F]^\vee, \varphi \rangle \end{aligned} \tag{3.51}$$

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{F}[\mu_a F], \varphi \rangle &= \left\langle F, \frac{1}{a}\mu_{\frac{1}{a}}\mathcal{F}[\varphi] \right\rangle = \left\langle F, \frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)e^{-ix\cdot\frac{t}{a}}dx \right\rangle \\ &= \left\langle F, \int_{-\infty}^{\infty}\varphi(ax)e^{-ixt}dx \right\rangle = \langle \mathcal{F}[F], \mu_a\varphi \rangle = \left\langle \frac{1}{a}\mu_{\frac{1}{a}}\mathcal{F}[F], \varphi \right\rangle \end{aligned} \tag{3.52}$$

となる．

9. **ディラックの櫛**

$T_0 > 0$ として，

$$Ш_{T_0} = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\tau_{kT_0}\delta \tag{3.53}$$

を**ディラックの櫛**という．やはり $Ш_{T_0} \in \mathcal{S}'$ であり，そのフーリエ変換は

$$\mathcal{F}[Ш_{T_0}] = \frac{2\pi}{T_0}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\tau_{2\pi k/T_0}\delta = \omega_0 Ш_{\omega_0} \tag{3.54}$$

となる [2]．ただし，$\omega_0 = 2\pi/T_0$ である．また，

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}e^{-ikT_0 t} = \frac{2\pi}{T_0}Ш_{\frac{2\pi}{T_0}} \tag{3.55}$$

が成り立つ [2]．

3.4 超関数の畳み込み

関数 f, g の**畳み込み**，あるいは**合成積** $f * g$ は

$$f * g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(x-t)dt \tag{3.56}$$

で定義される．畳み込みはなかなか厄介な演算であり，好き勝手な関数を選ぶと容易に畳み込みが定義できなくなる（たとえば $f(x) = x$ と $g(x) = 1$ など）．それでも畳み込みが信号処理で必要な理由は,

$$\mathcal{F}[f * g] = \mathcal{F}[f]\mathcal{F}[g] \tag{3.57}$$

という性質があるからである．ただし超関数同士には，3.3 節の 4. で述べたように，積ですら制約がある．そのため式 (3.57) の右辺の積が定義できるかどうかも注意しなくてはならない.

他の演算と同様関数の畳み込みから超関数での畳み込みの定義を類推するため，関数 f, g の畳み込みが超関数であるとして式変形してみる．

$$\begin{aligned} \langle f * g, \varphi \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} f * g(x)\varphi(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x-y)dy\varphi(x)dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\int_{-\infty}^{\infty} g(x-y)\varphi(x)dxdy = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g^{\vee} * \varphi(y)dy \\ &= \langle f, g^{\vee} * \varphi \rangle \end{aligned} \tag{3.58}$$

この結果より，$g^{\vee} \in \mathcal{S}'$ と $\varphi \in \mathcal{S}$ の畳み込みが急減少関数になれば，それに $f \in \mathcal{S}'$ を作用させることにより f と g の畳み込みを定義できそうである．そこでまず，$F \in \mathcal{S}'$ と $\varphi \in \mathcal{S}$ の畳み込みを式 (3.58) の 2 行目からの類推で

$$F *_s \varphi(x) = \langle F, \tau_x \varphi^{\vee} \rangle \tag{3.59}$$

と定義する．$\mathcal{S}'$ と $\mathcal{S}'$ の畳み込みではないため記号を $*_s$ とした．$\mathcal{S}' *_s \mathcal{S} = \mathcal{S}$ となればよいのだが，残念ながらそうではない [2]：

定理 21

$$\forall F \in \mathcal{S}', \varphi \in \mathcal{S} \quad F *_s \varphi \in \mathcal{O}_M. \tag{3.60}$$

しかしながら，任意の $\varphi \in \mathcal{S}$ に対して $F *_s \varphi \in \mathcal{S}$ となる緩増加超関数 F は存在する．この F を急減少超関数といい，急減少超関数の集合を $\mathcal{O}'_C$ で表す．つまり，$S \in \mathcal{S}'$ と $T \in \mathcal{O}'_C$ については

$$\langle S * T, \varphi \rangle = \langle S, T^{\vee} *_s \varphi \rangle = \langle S(y), \langle T(x), \tau_{-y}\varphi(x) \rangle \rangle \tag{3.61}$$

と定義する．例えば δ や急減少関数 $\mathcal{S}$ は急減少超関数でもある [2]．特に，δ については

$$\delta *_s \varphi(x) = \langle \delta, \tau_x \varphi \rangle = \varphi(x) \tag{3.62}$$

であるので，任意の緩増加超関数 S に対して $S * \delta = S$ である．式 (3.61) の定義により，次が成り立つ [18]：

定理 22

$$\forall S \in \mathcal{S}', T \in \mathcal{O}'_C \quad \mathcal{F}[S * T] = \mathcal{F}[S]\mathcal{F}[T] \tag{3.63}$$

である．右辺の積は

$$\mathcal{F}[\mathcal{O}'_C] = \mathcal{O}_M \tag{3.64}$$

であるため正当化される．同様に，

$$\forall S \in \mathcal{S}', T \in \mathcal{O}_M \quad \mathcal{F}[ST] = \frac{1}{2\pi}\mathcal{F}[S] * \mathcal{F}[T] \tag{3.65}$$

であり，右辺の畳み込みは

$$\mathcal{F}[\mathcal{O}_M] = \mathcal{O}'_C \tag{3.66}$$

であるため正当化される．

式 (3.61) でようやく一部の超関数同士の畳み込みが定義できたが，実はこのままではヘヴィサイド関数同士の畳み込み $H(x) * H(x) = x$ すら定義外になってしまう．ここで式 (3.61) による畳み込みの定義における超関数の範囲を拡張することの難しさを考える．定理 19 で $\langle fF, \varphi \rangle = \langle F, f\varphi \rangle$ として積を定義できる無限回可微分関数の空間は $\mathcal{O}_M$ であると述べた．これは $f\varphi \in \mathcal{S}$ の条件でもあると考えると，実質 $\langle F, f\varphi \rangle$ で積を定義できる関数の空間である．そして $\langle F, f\varphi \rangle$ で積を定義した場合，式 (3.57) が成り立つような畳み込みがあるとすれば，

$$S * T = \mathcal{F}^{-1}\left[\mathcal{F}[S]\mathcal{F}[T]\right] \tag{3.67}$$

によって畳み込みが決定されるがこれは式 (3.61) による定義に他ならず，どちらかは急減少超関数でなくてはならないという制約が積の定義に付随して現れる．よって，畳み込みの定義域を広げるためには，積の定義を $\langle F, f\varphi \rangle$ から変更し，超関数同士にも適用できるように拡張することが考えられる．積の定義として $\langle F, f\varphi \rangle$ は関数からの類推としてごく自然であったが，一般的な畳み込みを得るには積の定義から考え直さなくてはならない．逆に言うと畳み込みを拡張すると積の定義か式 (3.61) のフーリエ変換の関係のどちらかが変わっていることになるのである．

式 (3.61) の拡張は様々な文献 ([18], [19], [5], ...) に登場する[2]が，中でもリチャーズとヨンが示した定義 [5] は重要である．リチャーズ－ヨンの積と畳み込みの定義はヘヴィサイド関数同士の畳み込みも計算できる他，式 (3.57) のフーリエ変換の関係式も成り立つ．さらにリチャーズ－ヨンの定義でよい所は超関数の場合分けをすることなく一般的に定義しているところであるが，かなり複雑であり，計算にも手間がかかる．以下はリチャーズとヨンの定義に従って緩増加関数 g と δ の畳み込みを計算した時のメモである：

$$\begin{aligned}
\langle g * \delta, \varphi \rangle &= \left\langle \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} g\left(\frac{u-v}{2}\right)\delta\left(\frac{u+v}{2}\right) dv, \varphi \right\rangle_u \\
&= \left\langle \frac{1}{2}\mathcal{F}\left[g\left(\frac{u-v}{2}\right)\delta\left(\frac{u+v}{2}\right)\right]_v (0), \varphi \right\rangle_u
\end{aligned} \tag{3.68}$$

$$\begin{aligned}
\left\langle \mathcal{F}\left[g\left(\frac{u-v}{2}\right)\delta\left(\frac{u+v}{2}\right)\right]_v, \varphi \right\rangle_v &= \left\langle \delta\left(\frac{u+v}{2}\right), g\left(\frac{u-v}{2}\right)\mathcal{F}[\varphi] \right\rangle_v \\
&= \left\langle \delta\left(\frac{v}{2}\right), \tau_u\left(g\left(\frac{u-v}{2}\right)\mathcal{F}[\varphi]\right) \right\rangle_v \\
&= \left\langle \mu_{\frac{1}{2}}\delta, g\left(u - \frac{v}{2}\right)\mathcal{F}[\varphi](v-u) \right\rangle_v \\
&= \langle \delta, 2g(u-v)\mathcal{F}[\varphi](2v-u) \rangle_v \\
&= 2g(u)\mathcal{F}[\varphi](-u) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) 2g(u) e^{ixu} dx
\end{aligned} \tag{3.69}$$

[2]式 (3.61) をテンソル積で書き表した $\langle S * T, \varphi \rangle = \langle S \otimes T, \varphi(x+y) \rangle$ は実質同じである．

0 の近傍にコンパクトな台を持つ試料関数 φ について，連続関数として $f(x) = 2g(u)e^{ixu}$ を選ぶことにより，

$$\begin{aligned}\left\langle \mathcal{F}\left[g\left(\frac{u-v}{2}\right)\delta\left(\frac{u+v}{2}\right)\right]_v, \varphi\right\rangle_v &= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)2g(u)e^{ixu}dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)f(x)dx. \end{aligned} \tag{3.70}$$

$$\mathcal{F}\left[g\left(\frac{u-v}{2}\right)\delta\left(\frac{u+v}{2}\right)\right]_v(0) = f(0) = 2g(u). \tag{3.71}$$

式 (3.68) および (3.71) より，

$$\langle g * \delta, \varphi\rangle = \langle g, \varphi\rangle. \tag{3.72}$$

3.5 配列から誘導された超関数

本節では，数列 $f[n] (n \in \mathbb{Z})$ から誘導された超関数

$$Ш_f = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f[k]\tau_k\delta \tag{3.73}$$

について考察する．数列の線型汎関数についての理論は新井仁之の文献 [3] で深く記述されており，$Ш_f$ が緩増加超関数となるための条件が文献 [3] で示されたいくつかの定理から導ける．以後，新井仁之に倣って数列を**配列**とも言う．

まずは，急減少配列の定義をする．配列 $\varphi[n]$ が

$$\forall k \in \mathbb{Z}_+ \quad \sup_{n\in\mathbb{Z}}(1+n^2)^{\frac{k}{2}}|\varphi[n]| \tag{3.74}$$

を満たすとき，$\varphi[n]$ を**急減少配列**と呼び，急減少配列の集合を $\mathfrak{S}$ で表す．急減少配列の連続な線型汎関数は**緩増加超配列**といい，その集合を $\mathfrak{S}'$ と書く．緩増加超配列 $F : \mathfrak{S} \to \mathbb{C}$ が急減少配列 $\varphi \in \mathfrak{S}$ を写す値を $\prec F, \varphi \succ$ で表す．

次に，配列 f が

$$\exists N \in \mathbb{N}, C > 0 \quad \forall n \in \mathbb{Z} \quad |f[n]| \leq C(1+n^2)^{\frac{N}{2}} \tag{3.75}$$

を満たすとき，f を**緩増加配列**と呼ぶ．緩増加配列について以下の重要な定理が成り立つ [3].

定理 23 緩増加配列 f について，

$$\prec F_f, \varphi \succ = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f[n]\varphi[n] \tag{3.76}$$

によって写像 F_f を定義すると，$F_f \in \mathfrak{S}'$.

定理 24 F が緩増加超配列であることと，ある緩増加配列 f が存在して $F = F_f$ となることは同値である．

定理 25 f, g が緩増加配列であり，$F_f = F_g$ ならば $f = g$.

これらの定理より，緩増加超配列と緩増加配列は同一視できることになる．よって f が緩増加配列であることを $f \in \mathfrak{S}'$ と表す．

最後に，緩増加超関数と緩増加超配列との関連が次のように示される：

定理 26

$$f \in \mathfrak{S}' \Leftrightarrow Ш_f \in \mathcal{S}' \tag{3.77}$$

証明 (i) $f \in \mathfrak{S}' \Rightarrow Ш_f \in \mathcal{S}'$

$$\langle\ Ш_f, \varphi\rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f[n]\varphi(n) \tag{3.78}$$

となる．$\varphi \in \mathcal{S}$ なので，

$$\forall N \in \mathbb{Z}_+ \sum_{\alpha,k\in\mathbb{Z}_+,\alpha+k\leq N} \sup_{x\in\mathbb{R}}(1+|x|^2)^{\frac{k}{2}}\left|\varphi^{(\alpha)}(x)\right| < \infty \tag{3.79}$$

であるが，総和の各項は正であるので必然的に各項は有限でもある．特に，$\alpha = 0$ とすると

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}(1+|x|^2)^{\frac{k}{2}}|\varphi(x)| < \infty \tag{3.80}$$

である．ここで，配列 $\varphi[n] = \varphi(n)(n \in \mathbb{Z})$ として考えると，

$$\sup_{n\in\mathbb{Z}}(1+|n|^2)^{\frac{k}{2}}|\varphi[n]| < \infty \tag{3.81}$$

となるので $\varphi[n]$ は急減少配列とみなせる．よって

$$\langle\ Ш_f, \varphi\rangle = \prec f, \varphi \succ \tag{3.82}$$

となり，$Ш_f$ は $\mathcal{S}$ の線型汎関数となる．

また，急減少関数列 $\varphi_n \to 0(n \to \infty)$ を考えると，$\{\varphi_n\}$ は急減少配列の列[3]$\{\varphi_n[k]\}$ としても 0 に収束する．よって，

$$\langle\ Ш_f, \varphi_n\rangle = \prec f, \varphi_n \succ \to 0 \quad (n \to \infty) \tag{3.83}$$

となるので $Ш_f$ は連続性も持つ．以上より，$Ш_f \in \mathcal{S}'$

(ii) $Ш_f \in \mathcal{S}' \Rightarrow f \in \mathfrak{S}'$

急減少配列 $\varphi[n]$ に対して，

$$\varphi(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \varphi[k]\theta(x-k) \tag{3.84}$$

を考える．ただし，$\theta(x)$ は式 (3.11) で定義したものである．$\varphi(x)$ が急減少関数であるならば，

$$\prec f, \varphi \succ = \langle\ Ш_f, \varphi\rangle \tag{3.85}$$

となって f が線型汎関数として値を持つことが保証される．よって $\varphi(x)$ が急減少関数であるための条件

$$\forall N \in \mathbb{Z}_+ \sum_{\alpha,k\in\mathbb{Z}_+,\alpha+k\leq N} \sup_{x\in\mathbb{R}}(1+|x|^2)^{\frac{k}{2}}\left|\varphi^{(\alpha)}(x)\right| < \infty \tag{3.86}$$

をまずは示す．

[3] 変なの．なんか言い方ないんかな．

任意の $\alpha, k \in \mathbb{Z}_+$ について，

$$\begin{aligned}\sup_{x\in\mathbb{R}}(1+x^2)^{\frac{k}{2}}\left|\varphi^{(\alpha)}(x)\right| &= \sup_{x\in\mathbb{R}}(1+x^2)^{\frac{k}{2}}\left|\sum_{j=-\infty}^{\infty}\varphi[j]\theta^{(\alpha)}(x-j)\right| \\ &\leq \sum_{j=-\infty}^{\infty}|\varphi[j]|\sup_{x\in\mathbb{R}}(1+x^2)^{\frac{k}{2}}\left|\theta^{(\alpha)}(x-j)\right|\end{aligned} \tag{3.87}$$

となる．ここで，

$$M_\alpha = \max_{x\in\mathbb{R}}\theta^{(\alpha)}(x) \tag{3.88}$$

とおくと，

$$\begin{aligned}\sup_{x\in\mathbb{R}}(1+x^2)^{\frac{k}{2}}\left|\theta^{(\alpha)}(x-j)\right| &\leq M_\alpha \sup_{j-1/2\leq x<j+1/2}(1+x^2)^{\frac{k}{2}} \\ &\leq M_\alpha(1+(|j|+1)^2)^{\frac{k}{2}}\end{aligned} \tag{3.89}$$

と評価できる．よって，

$$C_{\alpha,k}[j] = \sup_{x\in\mathbb{R}}(1+x^2)^{\frac{k}{2}}\left|\theta^{(\alpha)}(x-j)\right| \tag{3.90}$$

は緩増加配列である．$|\varphi[j]|$ は急減少配列なので，式 (3.87) の続きとして，

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty}|\varphi[j]|\sup_{x\in\mathbb{R}}(1+x^2)^{\frac{k}{2}}\left|\theta^{(\alpha)}(x-j)\right| = \prec C_{\alpha,k}, |\varphi| \succ \tag{3.91}$$

が成り立ち，式 (3.87) が有限であると評価される．つまり，式 (3.86) の総和は有限な項の有限和であるために有限であると判定でき，$\varphi(x)$ が急減少関数であることが示される．

連続性についても，(i) 同様急減少配列の列 $\varphi_n[k] \to 0 (n \to \infty)$ を考えると，それを関数とみなした急減少関数列も $\varphi_n(x) \to 0 (n \to \infty)$ となるので，

$$\prec f, \varphi_n \succ = \langle Ш_f, \varphi_n \rangle \to 0 \quad (n \to \infty) \tag{3.92}$$

となる．以上より，$f \in \mathfrak{S}'$．

Q.E.D

第4章　シュワルツ信号処理理論

いよいよ，シュワルツ超関数を信号として定義した理論を述べる．従来の分類信号処理理論と区別するため，この理論を**シュワルツ信号処理理論**と名付ける．

4.1　信号の再定義

シュワルツ信号処理理論において**信号**とは，緩増加超関数のことである．分類信号処理理論における連続時間信号 $f(t)$ は，シュワルツ信号処理理論における F_f に対応する．また，離散時間信号 $f[t]$ は，**標本化周期**としてある正の実数 T_s が選ばれたとき，

$$\Delta[f, T_s] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f[k]\tau_{kT_s}\delta \tag{4.1}$$

が緩増加超関数となるならば，シュワルツ信号処理理論における $\Delta[f, T_s]$ と対応する．ただしこの場合には対応の仕方に T_s を選択する分だけの自由度がある．定理 26 に示したように，$\Delta[f, T_s]$ が緩増加超関数となるためには $f[t]$ が緩増加配列であることが必要十分条件になる．よって，シュワルツ信号処理理論においては離散時間信号として緩増加配列のみを扱う．

信号を分類することなく一つの概念である緩増加超関数として定義したことにより，表 2.3 において 4 種類あったフーリエ変換を緩増加超関数のフーリエ変換としてまとめることができる．$f \in L^2(-\infty, \infty)$ については，式 (3.23) に示したように超関数としてのフーリエ変換と CTIP 信号としてのフーリエ変換が一致する．次に，基本周期 T_0 の CTFP 信号 $f \in L^2[-T_0/2, T_0/2]$ については，フーリエ級数展開 (2.18) を利用して

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{F}[f], \varphi \rangle &= \left\langle \mathcal{F}\left[\frac{\omega_0}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathcal{F}^c[f][n]e^{in\omega_0 t}\right], \varphi \right\rangle \\
&= \left\langle \frac{\omega_0}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathcal{F}^c[f][n]\cdot 2\pi\tau_{n\omega_0}\delta, \varphi \right\rangle \\
&= \langle \omega_0\Delta\left[\mathcal{F}^c[f], \omega_0\right], \varphi \rangle
\end{aligned} \tag{4.2}$$

となり，基本角周波数 ω_0 の離散スペクトルが得られる．

FT，FSE 同様に，DTFT，DFT についてもシュワルツ信号処理理論でのフーリエ変換で賄える．まず，DTIP 信号 $f[n]$ が緩増加配列であるとする．この時，

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{F}\left[\Delta[f, T_s]\right], \varphi \rangle &= \left\langle \mathcal{F}\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} f[k]\tau_{kT_s}\delta\right], \varphi \right\rangle \\
&= \left\langle \sum_{k=-\infty}^{\infty} f[k]\mathcal{F}\left[\tau_{kT_s}\delta\right], \varphi \right\rangle \\
&= \left\langle \sum_{k=-\infty}^{\infty} f[k]e^{-ikT_s x}, \varphi \right\rangle \\
&= \left\langle \mathcal{F}^d[f], \varphi \right\rangle
\end{aligned} \tag{4.3}$$

となって DTFT が得られる．基本周期 N を持つ DTFP 信号 $f[n]$ は，

$$
\begin{aligned}
\langle \mathcal{F}\left[\Delta[f,T_s]\right],\varphi\rangle &= \left\langle \mathcal{F}\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} f[k]\tau_{kT_s}\delta\right],\varphi\right\rangle \\
&= \left\langle \mathcal{F}\left[\sum_{k=0}^{N-1}\left(f[k]\tau_{kT_s}\sum_{l=-\infty}^{\infty}\tau_{lNT_s}\delta\right)\right],\varphi\right\rangle \\
&= \left\langle \mathcal{F}\left[\sum_{k=0}^{N-1} f[k]\tau_{kT_s}\text{Ш}_{NT_s}\right],\varphi\right\rangle \\
&= \left\langle \sum_{k=0}^{N-1} f[k]\mathcal{F}\left[\tau_{kT_s}\text{Ш}_{NT_s}\right],\varphi\right\rangle \\
&= \left\langle \sum_{k=0}^{N-1} f[k]e^{-kT_s x}\cdot\frac{2\pi}{NT_s}\text{Ш}_{\frac{2\pi}{NT_s}},\varphi\right\rangle \\
&= \left\langle \sum_{k=0}^{N-1}\left(f[k]e^{-kT_s x}\cdot\frac{2\pi}{NT_s}\sum_{l=-\infty}^{\infty}\tau_{\frac{2\pi l}{NT_s}}\delta\right),\varphi\right\rangle \\
&= \left\langle \sum_{l=-\infty}^{\infty}\frac{2\pi}{NT_s}\left(\sum_{k=0}^{N-1} f[k]e^{-ikT_s x}\right)\tau_{\frac{2\pi l}{NT_s}}\delta,\varphi\right\rangle \\
&= \left\langle \sum_{l=-\infty}^{\infty}\frac{2\pi}{NT_s}\left(\sum_{k=0}^{N-1} f[k]e^{-ikT_s\cdot\frac{2\pi l}{NT_s}}\right)\tau_{\frac{2\pi l}{NT_s}}\delta,\varphi\right\rangle \\
&= \left\langle \sum_{l=-\infty}^{\infty}\frac{2\pi}{NT_s}\left(\sum_{k=0}^{N-1} f[k]e^{-\frac{2\pi ikl}{N}}\right)\tau_{\frac{2\pi l}{NT_s}}\delta,\varphi\right\rangle \\
&= \left\langle \frac{2\pi}{NT_s}\Delta\left[\mathcal{F}^D[f],\frac{2\pi}{NT_s}\right],\varphi\right\rangle
\end{aligned}
\tag{4.4}
$$

となる．

このように，従来の信号処理の教科書でばらばらであったフーリエ変換を一つの定義にまとめることはできるが，畳み込みについては統一的な定義ができていない．教科書の定義では，次のようにやはり信号の分類ごとに別の畳み込みが用意されている．

1. CTIP

$$f *_{\mathrm{CTIP}} g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(x-t)dt \tag{4.5}$$

$$\mathcal{F}[f *_{\mathrm{CTIP}} g] = \mathcal{F}[f]\mathcal{F}[g] \tag{4.6}$$

2. CTFP

$$f *_{\mathrm{CTFP}} g(x) = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)g(x-t)dt \tag{4.7}$$

$$\mathcal{F}^c[f *_{\mathrm{CTFP}} g] = \mathcal{F}^c[f]\mathcal{F}^c[g] \tag{4.8}$$

3. DTIP

$$f *_{\mathrm{DTIP}} g[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f[k]g[n-k]dt \tag{4.9}$$

$$\mathcal{F}^d[f *_{\mathrm{DTIP}} g] = \mathcal{F}^d[f]\mathcal{F}^d[g] \tag{4.10}$$

4. DTFP

$$f *_{\mathrm{DTFP}} g[n] \quad = \quad = \sum_{k=0}^{N_0-1} f[n]g[n-k]dt \tag{4.11}$$

$$\mathcal{F}^D[f *_{\mathrm{DTFP}} g] \quad = \quad \mathcal{F}^D[f]\mathcal{F}^D[g] \tag{4.12}$$

これらの畳み込みを一つにまとめるには，単純に畳み込みの定義だけでなく積の定義も考え直さなくてはならない．というのは式 (4.8) および式 (4.12) の右辺はデルタ関数の積を含んでおり，何らかの方法でこれを解決しなくてはならない．一応概周期の超関数については，畳み込みのフーリエ係数が積になっているような畳み込みの定義が文献 [16] に紹介されているが，広く超関数に拡張できるような定義とは言えない．

4.2 信号の抽出，標本化，周期化の影響

計算機が普及した現在では，実験で計測した信号はパソコンにデータとして保存され，様々な処理が施される．ただし，ここで問題になるのがパソコンが扱えるデータは時間的に連続な系列ではなく，離散時間の信号であるということである．そこで，CTIP 信号計測の過程では，適当な標本化周波数で標本化することになる．さらに，無限に計測を続けるわけにはいかないので，信号のある区間（標本化周期の自然数倍）だけを抽出することになる．つまり，実際に計算機で処理する信号は離散時間信号の有限数列となる．この有限数列から元の信号の周波数スペクトルを推測することが一つの信号処理の目的となる．

計測によって得られた信号 $f[n]$ は $n = 0, ..., T_s$ でしか定義されていないので，計測時間外の部分をどうするかという問題が出現する．一つの方法が計測時間外の信号を 0 とする方法であり，もう一つの方法が計測した信号を繰り返す方法（**周期化**）である．計測時間外の信号を 0 とした信号を**時間制限信号**と呼ぶことにし，以下元の信号のスペクトルをどれだけ再現できるかという観点で時間制限信号と周期化について考察する．

4.2.1 単純周期化の場合

まずは連続時間信号で考える．元の CTIP 信号を緩増加超関数とみなせる関数 $f(t)$ とし，区間 $[-T_0/2, T_0/2]$ で時間制限した信号を $f_w(t)$，同じ区間 $[-T_0/2, T_0/2]$ で周期化した信号を $f_r(t)$ とする．$f_w(t)$，$f_r(t)$ は**矩形窓**

$$w_T(t) = \begin{cases} 1 & |t| \leq \frac{T}{2} \\ 0 & |t| > \frac{T}{2} \end{cases} \tag{4.13}$$

を利用して

$$f_w(t) = f(t)w_{T_0}(t) \tag{4.14}$$

$$f_r(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_w(t-kT_0) \tag{4.15}$$

と表せる．矩形窓のフーリエ変換は

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[w_{T_0}](\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} w_{T_0}(x)e^{-ix\omega}dx = \int_{-T_0/2}^{T_0/2} e^{-ix\omega}dx \\ &= \frac{2\sin\left(\frac{T_0\omega}{2}\right)}{\omega} = T_0 \cdot \frac{\sin\left(\pi \cdot \frac{T_0}{2\pi}\omega\right)}{\pi \cdot \frac{T_0}{2\pi}\omega} \\ &= T_0 \mathrm{sinc}\left(\frac{T_0}{2\pi}\omega\right) \end{aligned} \tag{4.16}$$

となる．ここで，sinc は **sinc 関数**

$$\mathrm{sinc}(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x} \tag{4.17}$$

である．

f_w のフーリエ変換は,

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{F}[f_w], \varphi\rangle &= \langle \mathcal{F}[w_{T_0} f], \varphi\rangle \\ &= \left\langle \frac{1}{2\pi}\mathcal{F}[w_{T_0}] * \mathcal{F}[f], \varphi \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{T_0}{2\pi}\mathrm{sinc}\left(\frac{T_0}{2\pi}x\right) * \mathcal{F}[f], \varphi \right\rangle \end{aligned} \tag{4.18}$$

となる．ただし，畳み込みは関数の意味での畳み込みである．後述するように $\mathcal{F}[f_w] \in \mathcal{O}_M$ であることからこの畳み込みの存在は保証されている．sinc 関数は図 4.1 のような形であり，sinc 関数との畳み込みということを考えると，$\mathcal{F}[f_w]$ は大方 $\mathcal{F}[f]$ ではあるが，他の周波数成分が混ざってしまっている．sinc 関数を原点でより尖らせれば，すなわち計測時間を長くし，窓関数の T_0 をより大きくすればこの余分な混ざりこみを少なくすることができ，$\mathcal{F}[f_w]$ を $\mathcal{F}[f]$ に近づけることができる．というのも実は,

$$\lim_{T_0\to\infty} \left\langle \frac{T_0}{2\pi}\mathrm{sinc}\left(\frac{T_0}{2\pi}x\right), \varphi \right\rangle = \langle \delta, \varphi\rangle \tag{4.19}$$

が成り立つのである [20, ディラックのデルタ関数].

なお，$\mathcal{F}[f_w]$ は緩増加関数となる．というのも，f_w は矩形窓との積によりその台が有限区間に制限されるが，コンパクトな台を持つ緩増加超関数について次の定理が成り立つのである [2].

定理 27 $F \in \mathcal{S}'$ の台がコンパクトである時，$\mathcal{F}[F]$ は緩増加関数となる．

つまり，CTIP 信号は矩形窓によって抽出した段階ですでに，そのスペクトルは超関数ではなく関数になっていることになる．また，$\mathcal{F}[f_w]$ が緩増加関数となることで，任意の緩増加超関数との積が許される．

f_r については,

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[f_r] &= \mathcal{F}\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} f_w(t-kT_0)\right] = \sum_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}[\tau_{kT_0} f_w] \\ &= \sum_{-\infty}^{\infty} e^{-ikT_0 t}\mathcal{F}[f_w] = \mathcal{F}[f_w]\sum_{-\infty}^{\infty} e^{-ikT_0 t} \\ &= \mathcal{F}[f_w]\frac{2\pi}{T_0}\mathrm{III}_{\frac{2\pi}{T_0}} \end{aligned} \tag{4.20}$$

となる．すなわち,

$$\mathcal{F}[f_r] = \frac{2\pi}{T_0}\Delta\left[\mathcal{F}[f_w]\left(\frac{2n\pi}{T_0}\right), \frac{2\pi}{T_0}\right] \tag{4.21}$$

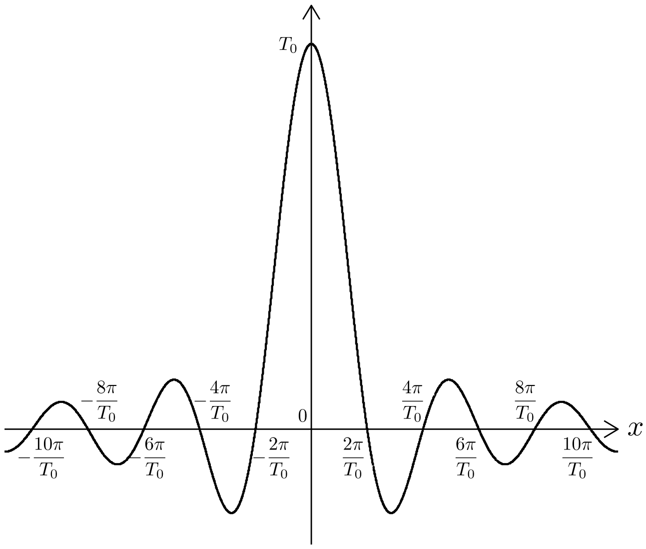

図 4.1: $T_0\mathrm{sinc}\left(\frac{T_0}{2\pi}x\right)$

となるので，離散的なスペクトルにおいて $\mathcal{F}[f_r]$ が持つ値は $\mathcal{F}[f_w]$ と定数倍を除いて変わらなくなる．

次に $f_w[t]$，$f_r[t]$ を N 点で標本化することを考える．すなわち時刻 $\{-T_0/2, -T_0/2+T/N, -T_0/2+2T/N, ..., -T_0/2+(N-1)T_0/N\}$ での値をもって離散時間信号とする．$f_w[t]$，$f_r[t]$ を標本化した信号をそれぞれ $f_{ws}[t]$，$f_{rs}[t]$ とすると，

$$f_{ws}[t] = f_w\left(\frac{T_0}{N}t\right) \tag{4.22}$$

$$f_{rs}[t] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_{ws}[t-kN] \tag{4.23}$$

となる．また，標本化はいわばディラックの櫛との積と考えられるので，緩増加超関数として

$$f_{ws} = f_w \text{Ш}_{\frac{T_0}{N}} \tag{4.24}$$

$$f_{rs} = f_r \text{Ш}_{\frac{T_0}{N}} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \tau_{kT_0} f_{ws} \tag{4.25}$$

とも表せる．

f_{ws} のフーリエ変換は

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[f_{ws}] &= \mathcal{F}\left[f_w \text{Ш}_{\frac{T_0}{N}}\right] = \frac{1}{2\pi}\mathcal{F}[f_w] * \mathcal{F}\left[\text{Ш}_{\frac{T_0}{N}}\right] \\ &= \frac{1}{2\pi}\mathcal{F}[f_w] * \left(\frac{2\pi N}{T_0}\text{Ш}_{\frac{2\pi N}{T_0}}\right) = \frac{N}{T_0}\sum_{-\infty}^{\infty}\mathcal{F}[f_w] * \left(\tau_{\frac{2\pi kN}{T_0}}\delta\right) \\ &= \frac{N}{T_0}\sum_{-\infty}^{\infty}\tau_{\frac{2\pi kN}{T_0}}\mathcal{F}[f_w] \end{aligned} \tag{4.26}$$

となり，$\mathcal{F}[f_w]$ が緩増加関数であることから $\mathcal{F}[f_{ws}]$ も緩増加関数となる．また，

$$\mathrm{supp}\mathcal{F}[f_w] \subset \left(-\frac{\pi N}{T_0}, \frac{\pi N}{T_0}\right) \tag{4.27}$$

であれば，$\mathcal{F}[f_{ws}]$ は各区間 $[(2k-1)\pi N/T_0, (2k+1)\pi N/T_0]$ $k \in \mathbb{N}$ で $\mathcal{F}[f_w]$ と定数場合を除いて同じになり，$\mathcal{F}[f_{ws}]$ から標本化前の $\mathcal{F}[f_w]$ を推測することができる．逆に，式 (4.27) が成り立たない場合は式 (4.26) の和の各項の台が重なってしまうので，$\mathcal{F}[f_{ws}]$ にはシフトされた $\mathcal{F}[f_w]$ が混じることになる．このことを**折り返し雑音**，あるいは**エイリアシング**という．厳密に式 (4.27) を成り立たせることは難しいが，$(-\pi N/T_0, \pi N/T_0)$ の外で $\mathcal{F}[f_w]$ が十分小さいならば $\mathcal{F}[f_{ws}]$ で近似できると考えられる．

f_{rs} については f_r と同様に

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[f_{rs}] &= \mathcal{F}\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} \tau_{kT_0} f_{ws}\right] = \mathcal{F}[f_{ws}] \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-ikT_0} \\ &= \frac{2\pi}{T_0}\mathcal{F}[f_{ws}]\, \text{Ш}_{\frac{2\pi}{T_0}} \end{aligned} \tag{4.28}$$

で表される離散スペクトルとなり $\mathcal{F}[f_{ws}]$ とは定数倍の違いとなる．

以上で出現した近似や関係をまとめると，

- **窓関数**
  T_0 が十分大きいとき，
  $$\mathcal{F}[f_w] \approx \mathcal{F}[f] \tag{4.29}$$
- **標本化**
  $(-\pi N/T_0, \pi N/T_0)$ の外で $\mathcal{F}[f_w]$ が十分小さいとき
  $$\mathcal{F}[f_{ws}] \approx \frac{N}{T_0}\mathcal{F}[f_w] \tag{4.30}$$

ここでさらに，式 (4.28) を考慮すると，

$$\langle \mathcal{F}[f], \varphi \rangle \approx \frac{T_0^2}{2\pi N} \langle \mathcal{F}[f_{rs}], \varphi \rangle \tag{4.31}$$

という近似ができるただし，この式における $\varphi(x)$ の台は，n を $-N/2 \le n < N/2$ を満たす整数として，点 $x = n$ の十分小さな近傍に含まれているとする[1]．

こうして元の信号のスペクトルを標本化，周期化した信号のスペクトルで近似することができる[2]．ここで注意するべくは，標本化における条件である．この条件はつまり折り返し雑音防止のための条件であり，標本化の際にはローパスフィルタを用いて $\mathcal{F}[f]$ を制限するのが常套手段となっている．ただ，実際に標本化されるのは窓関数のかかった f_w であり，フィルタによって $\mathcal{F}[f]$ はスペクトルの制限を受けても $\mathcal{F}[f_w]$ は式 (4.18) において図 4.2 のように sinc 関数とのたたみ込みの影響が入ってしまう．$\mathcal{F}[f_{rs}]$ による $\mathcal{F}[f]$ の近似には窓関数の存在が避けられないのである．

ただの時間制限信号のスペクトル $\mathcal{F}[f_{ws}]$ で $\mathcal{F}[f]$ を近似することもできるが，$\mathcal{F}[f_{rs}]$ を高速に計算する手法である **FFT** が発明されたこと，そしてスペクトルの周波数も計算機で扱う以上 DFFP の方が都合がよい (?) という理由から $\mathcal{F}[f_{rs}]$ による近似が行われているのではないかと私は考えている．

[1] またこんな遠回しな言い方をしているのは超関数のある点における値というのが定義できないからである．
[2] ただし，実際にはさらに標本化に伴う誤差が発生する．

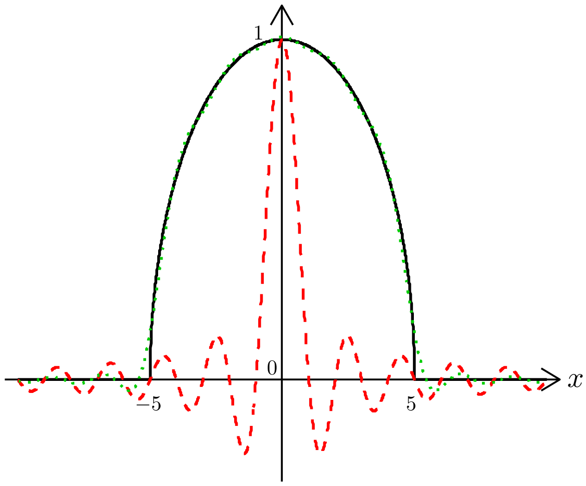

図 4.2: 窓関数の影響：黒実線のスペクトル $F(\omega)=\sqrt{1-(\omega/5)^2}$ と赤破線の $\mathrm{sinc}(\omega)=\sin(\pi\omega)/\pi\omega$ のたたみ込み $F_w(\omega)=\mathrm{sinc}*F(\omega)$ を緑点線でプロットした．$F(\omega)$ が完全に $|\omega|\le 5$ で制限されていても，$F_w(\omega)$ は $|\omega|\le 5$ からはみ出す部分が若干できてしまう．

4.2.2　対称周期化の場合

4.2.1 では計測時間外の部分の信号を補完する方法として，計測時間外を 0 とした時間制限信号として扱う方法，および信号を周期化する方法を検討したが，周期化をする際には $f(-T_0/2)=f(T_0/2)$ でない限り $f(t)$ が連続であっても周期化によって不連続点が生じてしまう．この不連続を嫌って，時間制限信号 $f_w(t)$ を反転させてつなげた信号を繰り返すという手法がとられることがある．以下この手法を**対称周期化**と呼び，その影響を考察する．

$f(t)$ や T_0 などの記号は 4.2.1 と同じとする．時間制限信号を反転させてつないだ偶関数を

$$\begin{aligned} f_m(t) &= f_w\left(t-\frac{T_0}{2}\right)+f_w\left(-t-\frac{T_0}{2}\right) \\ &= \tau_{\frac{T_0}{2}}f_w+\tau_{-\frac{T_0}{2}}f_w^{\vee} \end{aligned} \tag{4.32}$$

とする．f_m を周期 $2T_0$ で周期化した信号が f_w を対称周期化した信号となる．f_m の台はコンパクトなので，そのフーリエ変換は次のような緩増加関数となる．

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f_m] &= \mathcal{F}[\tau_{\frac{T_0}{2}}f_w]+\mathcal{F}[\tau_{-\frac{T_0}{2}}f_w^{\vee}] = e^{-\frac{iT_0\omega}{2}}\mathcal{F}[f_w]+e^{\frac{iT_0\omega}{2}}\mathcal{F}[f_w]^{\vee} \\ &= e^{-\frac{iT_0\omega}{2}}\mathcal{F}[f_w]+\left(e^{-\frac{iT_0\omega}{2}}\mathcal{F}[f_w]\right)^{\vee} = 2\mathrm{Re}\left(e^{-\frac{iT_0\omega}{2}}\mathcal{F}[f_w]\right) \end{aligned} \tag{4.33}$$

次に，f_m を周期 $2T_0$ で周期化した信号を

$$f_{mr}=\sum_{k=-\infty}^{\infty}f_m(t-2kT_0) \tag{4.34}$$

とする．f_{mr} のフーリエ変換は，f_{wr} のフーリエ変換を導いたのと同様に，

$$\mathcal{F}[f_{mr}] = \frac{\pi}{T_0}\Delta\left[\mathcal{F}[f_m]\left(\frac{n\pi}{T_0}\right), \frac{\pi}{T_0}\right] \tag{4.35}$$

となる．離散スペクトル $\mathcal{F}[f_{mr}]$ が実際数列としてとる値は $\{\pi/T_0 \cdot \mathcal{F}[f_m](n\pi/T_0)\}$ であるが，これを計算すると，

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{T_0}\mathcal{F}[f_m]\left(\frac{n\pi}{T_0}\right) &= \frac{2\pi}{T_0}\mathrm{Re}\left(e^{-\frac{n\pi i}{2}}\mathcal{F}[f_w]\left(\frac{n\pi}{T_0}\right)\right) = \frac{2\pi}{T_0}\mathrm{Re}\left((-i)^n\mathcal{F}[f_w]\left(\frac{n\pi}{T_0}\right)\right) \\ &= \begin{cases}(-1)^{\frac{n}{2}} \cdot \frac{2\pi}{T_0}\mathrm{Re}\mathcal{F}[f_w]\left(\frac{n\pi}{T_0}\right) & n \text{ is even} \\ (-1)^{\frac{n+1}{2}} \cdot \frac{2\pi}{T_0}\mathrm{Im}\mathcal{F}[f_w]\left(\frac{n\pi}{T_0}\right) & n \text{ is odd}\end{cases}\end{aligned} \tag{4.36}$$

となる．

4.3 フィルタ処理

フィルタ処理という言葉の定義には未だ定まったものがないようであるが，包括的には,「信号を入力とし，信号を出力するシステムによって，信号を加工すること」と言えるだろう．一般的には,「信号を入出力とする線型時不変システムによって，信号の特定の周波数成分を 0 にすること」となるだろう．よって，シュワルツ信号処理理論としては，ある写像 $A : \mathcal{S}' \to \mathcal{S}'$ によって信号を変化させることに相当する．本節では，緩増加超関数から緩増加超関数への写像を**システム**，あるいは**フィルタ**と呼び，シュワルツ信号処理理論におけるフィルタ処理を考察する．

まず，システム A が**線型時不変システム**であるとは，次の 2 つの性質を持つことを言う：

1. 線型性

$$\forall x, y \in \mathcal{S}', \lambda, \mu \in \mathbb{C} \quad A(\lambda x + \mu y) = \lambda Ax + \mu Ay \tag{4.37}$$

2. 時不変性

$$\forall x \in \mathcal{S}', h \in \mathbb{R} \quad A(\tau_h x) = \tau_h Ax \tag{4.38}$$

線型時不変システム A においては δ を入力した時の出力 $A\delta$，すなわち**インパルス応答**が重要であり，どの教科書にも任意の入力に対してシステムの出力が入力とインパルス応答の畳み込みで得られることが記されている．このことは緩増加超関数として信号を扱う場合，超関数同士の畳み込みとして式 (3.61) を採用すると，次の定理で言及される．

定理 28 線型時不変システム $A : \mathcal{S}' \to \mathcal{S}'$ が,

$$A\delta \in \mathcal{O}'_C \tag{4.39}$$

を満たすならば,

$$\forall x \in \mathcal{S}' \quad Ax = A\delta * x \tag{4.40}$$

である．特に，**伝達関数** $G = \mathcal{F}[A\delta] \in \mathcal{O}_M$ が存在して

$$\forall x \in \mathcal{S}' \quad \mathcal{F}[A\delta] = G\mathcal{F}[x] \tag{4.41}$$

証明 $A : \mathcal{S}' \to \mathcal{S}'$ が線型写像であることより，双対写像 $A' : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ が存在して

$$\forall x \in \mathcal{S}', \varphi \in \mathcal{S} \quad \langle Ax, \varphi \rangle = \langle x, A'\varphi \rangle \tag{4.42}$$

となること [12] を利用すると，任意の $x \in \mathcal{S}', \varphi \in \mathcal{S}$ に対して

$$\begin{aligned}
\langle Ax, \varphi \rangle &= \langle x, A'\varphi \rangle = \langle x * \delta, A'\varphi \rangle = \langle x, \delta^\vee *_s (A'\varphi) \rangle \\
&= \langle x, \langle \delta^\vee, \tau_t (A'\varphi)^\vee \rangle \rangle = \langle x, \langle \delta, \tau_{-t} A'\varphi \rangle \rangle = \langle x, \langle A\tau_t \delta, \varphi \rangle \rangle \\
&= \langle x, \langle \tau_t A\delta, \varphi \rangle \rangle = \langle x, \langle (A\delta)^\vee, \tau_t \varphi^\vee \rangle \rangle = \langle x, (A\delta)^\vee *_s \varphi \rangle \\
&= \langle A\delta * x, \varphi \rangle
\end{aligned} \tag{4.43}$$

Q.E.D

この定理ではインパルス応答が急減少超関数になるという条件がついている．それゆえインパルス応答が無限遠で 0 に収束しなくてはならない．これはもちろん畳み込みの定義上の都合であり，畳み込みの定義次第ではより条件を緩くできるものと思われる．また，この制約はすなわち定義域を緩増加超関数全体にしているからでもあり，条件を外してにシステムの定義域を狭めるという方法も考えられる．実際，文献 [21] では $L^1 \to \mathcal{S}'$ の線型時不変システムについて，また文献 [3] では $\mathfrak{s} \to \mathfrak{s}'$ について考察されている．ただ，私はこのように定義域を狭めるとシステムを連結することが保証されなくなるのであまり好きではない．

線型時不変システムの一種として，微分作用素 d/dt により $x \in \mathcal{S}'$ が

$$y + a_1 \frac{d}{dt} y + \cdots + a_n \frac{d^n}{dt^n} y = b_0 x + b_1 \frac{d}{dt} x + \cdots + b_m \frac{d^m}{dt^m} x \tag{4.44}$$

を満たす y として出力されるシステム A を考える[3]．A が線形性，時不変性を持つことは容易に確認できる．このようなシステムは，電気回路で実現することができ，係数 $\{a_k\}, \{b_k\}$ をうまく設定することでローパスフィルタやハイパスフィルタ，バンドパスフィルタなど様々なフィルタを作ることができる．$X = \mathcal{F}[x]$，$Y = \mathcal{F}[y]$ として，式 (4.44) をフーリエ変換すると，形式上次の関係が導かれる．

$$\begin{aligned}
\left(1 + \sum_{k=1}^{n} a_k (i\omega)^k \right) Y &= \sum_{k=0}^{m} b_k (i\omega)^k X \\
Y &= \frac{\sum_{k=0}^{m} b_k (i\omega)^k}{1 + \sum_{k=1}^{n} a_k (i\omega)^k} X
\end{aligned} \tag{4.45}$$

このシステムのように，伝達関数が有理関数で表されるシステムを**アナログフィルタ**と呼ぶことにする．ただし，式 (4.45) においては有理関数と緩増加超関数の積が定義されなくてはならない．コーシーの主値的なことをすればよいのか？

回路上の電気信号に対してならば，アナログフィルタをリアクタンスやキャパシタンスを用いて作成できるが，4.2 節で取り上げたようなパソコン上のデータとなってしまった DTFP 信号に対しては微分ができない．そこで実際には，シフト作用素 τ_h によってアナログフィルタを近似したシステムをプログラムとして作り，そのシステムで DTFP 信号を処理をするのが一般的である．信号処理ではこのシフト作用素 τ_h によるフィルタを**デジタルフィルタ**と呼ぶ．

標本化周期 T_s のデジタル信号 x を処理するデジタルフィルタは一般的に，

$$y + a_1 \tau_{T_s} y + \cdots + a_n \tau_{nT_s} y = b_0 x + b_1 \tau_{T_s} x + \cdots + b_m \tau_{mT_s} x \tag{4.46}$$

[3] 実は，そもそも y が緩増加超関数である保証があるのかという問題があって，しかも係数の取りようによってはおそらくそうならないのであるが，それはまた気が向いたら考えることにしよう．

を満たす y を出力するシステムである．デジタルフィルタのうち，$a_1 = \cdots = a_n = 0$ であるものを **FIR フィルタ**といい，そうでないものを **IIR フィルタ**という．$X = \mathcal{F}[x]$，$Y = \mathcal{F}[y]$ として，式 (4.46) をフーリエ変換すると，

$$\begin{aligned}\left(1 + \sum_{k=1}^{n} a_k e^{-ikT_s\omega}\right) Y &= \sum_{k=0}^{m} b_k e^{-ikT_s\omega} X \\ Y &= \frac{\sum_{k=0}^{m} b_k e^{-ikT_s\omega}}{1 + \sum_{k=1}^{n} a_k e^{-ikT_s\omega}} X \end{aligned} \tag{4.47}$$

となる．伝達関数

$$G(\omega) = \frac{\sum_{k=0}^{m} b_k e^{-ikT_s\omega}}{1 + \sum_{k=1}^{n} a_k e^{-ikT_s\omega}} \tag{4.48}$$

は周期 $2\pi/T_s$ を持つことに注意である．

実は，N 点周期の DTFP 信号に対しては，$N-1$ 個のシフト作用素を用意することで完全に理想的なフィルタを作ることができる．というのも，N 点周期の DTFP 信号のスペクトルはやはり N 点周期の DFFP スペクトルとなるので，$G(\omega)$ を設計する際にはその N 点での値だけが意味を持つ．さらに，このデジタルフィルタには係数の分だけ自由度があるので，少なくともシフト作用素が $N-1$ 個あれば望みの伝達関数を持つデジタルフィルタを作ることができる．

例えば，$-N/2 \le k < N/2$ を満たす整数 k について

$$G\left(\frac{2\pi k}{NT_s}\right) = \begin{cases} 1 & (|k| < \gamma) \\ 0 & (|k| \ge \gamma) \end{cases} \tag{4.49}$$

を伝達関数として持つ $N-1$ 次の FIR フィルタを次のように作成することができる．まず，$N-1$ 次の FIR フィルタの場合には，伝達関数は

$$G(\omega) = \sum_{j=0}^{N-1} b_j e^{-ijT_s\omega} \tag{4.50}$$

となる．$-N/2 \le k < N/2$ に対しては，

$$G\left(\frac{2\pi k}{NT_s}\right) = \sum_{j=0}^{N-1} b_j e^{-\frac{2\pi ijk}{N}} \tag{4.51}$$

と表せる．ここで，離散フーリエ変換 $\mathcal{F}^D$ の定義式 (2.27) を思い出すと，$G[k] = G(2\pi k/NT_s)$，$b[k] = b_k$ として

$$G = \mathcal{F}^D[b] \tag{4.52}$$

となっている．よって，FIR フィルタの係数 $b[k]$ が逆離散フーリエ変換により

$$b = \mathcal{F}^{-D}[G] \tag{4.53}$$

というように得られる．このように逆離散フーリエ変換によって FIR フィルタの係数を得る方法を**周波数サンプリング法**という [22].

以上に示したように，N 点の信号に対しては $N-1$ 次のフィルタを用意すれば理想的な特性が得られる．しかし信号のサイズほど高い次数のフィルタを作成することは，処理時間的にもコスト的にも現実的でない場合が多い．そのため実際にはより少ない次数で設計したフィルタを用いることになる．

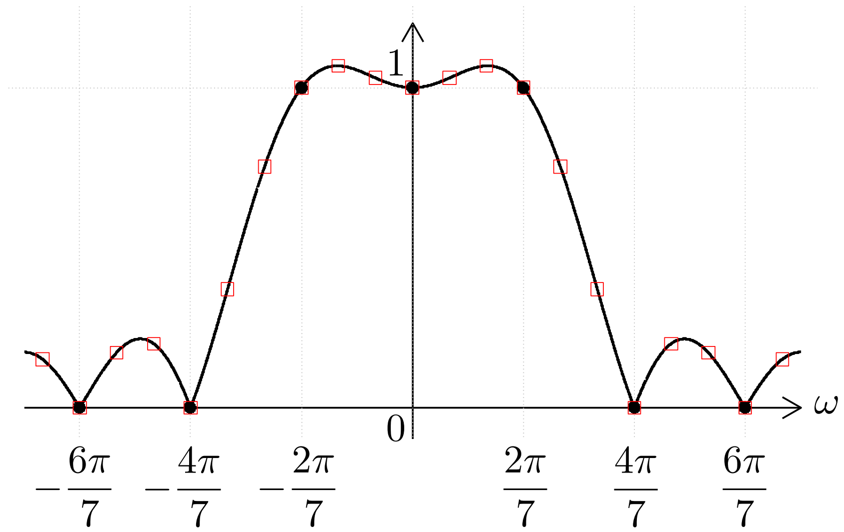

図 4.3: 6 次 FIR フィルタの伝達関数の絶対値：$T_s = 1, N = 7, \gamma = 2$ として式 (4.53) のフィルタ係数を計算し，FIR フィルタを作成した．黒丸点は 7 点の信号に適用した場合の伝達関数の絶対値であり，1 か 0 になっている．一方，赤四角点は 21 点の信号に適用した場合の伝達関数の絶対値であり，1,0 以外の値もとり得る．

低次のフィルタで信号を処理するという状況を，$N < N'$ 点の信号を式 (4.53) を係数とする FIR フィルタで処理する例で考えてみる．伝達関数 $H(\omega)$ が意味を持つ点は今度は k' を $-N'/2 \leq k' < N'/2$ を満たす整数として，

$$\omega = \frac{2\pi k'}{N'T_s} = \frac{2\pi}{NT_s} \cdot \frac{N}{N'} k' \tag{4.54}$$

となる．つまり，少ない次数で設計したフィルタを用いると，理想的な値（0 や 1）を持つ点の中間の点での伝達関数の値がスペクトルに作用されることとなる（図 4.3）．結局，連続的な関数として伝達関数が理想的な遮断特性を持つようにするのがデジタルフィルタ設計における一般的な方針となる．

一般的な信号処理の教科書の理論へは，ここまでで大体接続されたであろうから，フィルタ処理についての他の話題については他の教科書を参照すれば十分であろう．

4.4 残された疑問

- 信号が急減少関数の双対空間として定義されるのであれば，信号の双対空間としての急減少関数はどんな意味を持つと解釈できるか？
- 線型時不変システムの安定性の議論はシュワルツ信号理論としてはどうなるか？そもそも，どのような条件で線型時不変システムは緩増加超関数から緩増加超関数への写像となるか？
- 「美しくない」といって代わりに作った理論は果たして美しいものとなったか？

参考文献とか

[1] 飯国洋二, “基礎から学ぶ信号処理”, 培風館 (2004).
フーリエ級数展開，フーリエ変換，離散時間フーリエ変換，離散フーリエ変換の関係性がよくわかる本．また，エイリアシングの説明もわかりやすく，フィルタ設計手法についても詳しく書かれている．なぜか初版第 1 刷と初版第 3 刷とで値段が違う．

[2] 新井仁之, “新・フーリエ解析と関数解析学”, 培風館 (2010).
フーリエ解析から超関数，線型作用素まで幅広い内容を扱っている．信号処理での詳しい数学理論を知りたい場合に有用かと思われる．

[3] 新井仁之, “フーリエ解析学”, 講座数学の考え方 17, 朝倉書店 (2003).
[2] と同じ著者であるが，こちらは主に離散時間信号のフーリエ解析に焦点を置いている．和書では珍しくフーリエ–ポワソン立方体に言及しており，連続時間と離散時間，いくつかのフーリエ変換，非周期信号と周期信号の関係性について説明されている．

[4] D. W. Kammler, “A First Course in Fourier Analysis”, Cambridge University Press, 2nd ed. (2008).
フーリエ解析について初歩から一般化関数を取り入れた理論まで幅広く記述している． フーリエ–ポワソン立方体の概念はこの人が考えたんかな？

[5] H. Youn and I. Richards, “The Theory of Distributions”, Cambridge University Press (1995).
超関数の積，畳み込みについて深く解説されている．

[6] 松坂和夫, “集合・位相入門”, 岩波書店 (1968).
名著と名高い集合論の入門書． 様々な数学書で必要となる集合の事柄のほぼすべてが解説されており，あると便利な本． もっと早くこの本を持ちたかった．あくまで素朴集合論で書かれた入門書であるので，より厳密な公理的集合論を求める場合は [33] がいいだろう．

[7] 難波誠, “微分積分学”, 裳華房 (1996).
私が大学に入学した時の微分積分学の教科書． ちゃんと $\varepsilon - \delta$ から始まり 微分積分と極限の順序交換まで解説しているなかなか万能な本．まさに大学数学というような本で，私はとりあえず「スバラシク実力がつく」らしい本に逃げた．だが結局大学数学はわかったようなわからなかったようなという印象で，しぶしぶこの本を一から全部読んだのが私が大学数学に足を踏み入れた瞬間であった．一冊この手の大学数学の本を読み終えることができれば他の数学書にも挑戦する意思が芽生えてくる．そんな大学数学への第一歩としては大変おすすめ．

[8] 篠崎寿夫, 松浦武信, “現代工学のためのルベーグ積分と関数空間入門”, 現代工学社 (1995).
対話形式の数学書．タイトルの割に本の後半ではあまりルベーグ積分は明確には顔を出さない．フーリエ解析で緩増加超関数を用いる理由がよくわかる．

[9] 吉田洋一, “ルベグ積分入門”, 培風館 (1965).
ルベーグ積分の入門書．わかりやすく，積分についての深い理解が得られる．付録の「反例そのほか」がなかなか面白い．

[10] 金子晃, “線形代数講義”, サイエンス社 (2004).
私は主にこの本で線型代数を学んだ．他のがっつりした線型代数の本をあまり読んでいないので，分かりやすいかどうかは言えないが， 苦労して読んだ覚えはある． 誤植が多い．

[11] 師玉康成, 酒井雄二, “線形代数”, `http://schubert.cs.shinshu-u.ac.jp/~miyao/UD/Subjects/Linear/index.html`.
普通の線形代数のテキスト．最後の方に線形空間の例として動物を基底とした動物空間が書かれている．

[12] 斎藤毅, “線形代数の世界 - 抽象数学の入り口”, 東京大学出版会 (2007).
理学部数学科向けのより抽象的な線型代数の教科書．線型代数の教科書は有限次元空間に限定して記述していることが少なくないが，この本では無限次元の場合についても広く説明されている．双対空間について詳しく書いてあるので参考にした．誤植が多いらしいので著者のウェブサイトを見て訂正するべし．

[13] 砂田利一, “新版 バナッハ・タルスキーのパラドックス”, 岩波書店 (2009).
バナッハ・タルスキーの定理に始まって数理論理学や選択公理の背景がやさしく解説される．もちろんバナッハ・タルスキーの定理の証明も載っているが，ある程度の数学が必要になる．

[14] 朝永振一郎, “量子力学 I”, みすず書房, 第 2 版 (1969).
朝永振一郎による量子力学の第一巻． 量子力学誕生の経緯に沿って書かれており，教科書というよりかはその歴史の記述である．そのため，シュレーディンガーの方程式は第一巻では登場せず，第二巻 [34] に託されている．珍しくハイゼンベルクの行列力学が解説されている．量子力学にあまり時間をかけたくない人には向かない．

[15] 日合文雄, 柳研二郎, “ヒルベルト空間と線型作用素”, 牧野書店 (1995).
関数解析学の本．電気回路網のモデルとしての作用素結合の理論について言及されており，興味深い．

[16] L. シュワルツ, “超函数の理論 原書第 3 版”, 岩波書店 (1971).
distribution の発案者であるシュワルツ直々に著した本．超関数に関するおおよそのことはこれに書いてあるが，説明を端折っている部分もあり簡単ではない．

[17] L. Hörmander, “On the division of distributions by polynomials”, Arkiv för matematik, **3**, 6, pp. 555–568 (1958).
超関数の多項式による除算について． 英語なので読める．

[18] 垣田高夫, “シュワルツ超関数入門”, 日本評論社 (1985).
タイトルは入門だがかなり詳しく書いてあり， 参考になる．

[19] R. Shiraishi, "On the definition of convolutions for distributions", J. Sci. Hiroshima Univ. Ser. A, **1**, 23, pp. 19–32 (1959).
超関数同士の畳み込みについての論文はこれを引用しているのが多い．

[20] "ウィキペディア", `http://ja.wikipedia.org/`.
参考文献としては適切ではないらしい．便利だが，なるべく校正，校閲を受けている（はず）の本を 参照するべきである．

[21] E. M. Stein and G. L. Weiss, "Introduction to Fourier analysis on Euclidean spaces", Vol. 1, Princeton university press (1971).

[22] 中村尚五, "デジタルフィルタ (ビギナーズ)", 東京電機大学出版局 (1989).
わかりやすいとは思うが，誤記がすごいらしい．

[23] I. Richards and H. K. Youn, "Localization and multiplication of distributions.", J. Korean Math. Soc., **37**, 3, pp. 371–389 (2000).
完全に同じではないような気がするが，文献 [5] での積，畳み込みの定義は，[26] よりもこちらの方が近い．おそらくリチャーズ–ヨンの積，畳み込みは論文としてはこれで発表されたのだろう．ただ，文献 [5] は 1995 年に出版であるので時系列的に変な印象を受ける． 論文より教科書で発表するのが先などということはあるものなのだろうか．

[24] L. Schwartz, "Division par une fonction holomorphe sur une variété analytique complexe", Summa Brasil. Math, **3**, 181-209, p. 1955 (1955).
フランス語なのでよくわからないが超関数の除算について詳しく書かれている．

[25] M. Valkenburg, "アナログフィルタの設計", 秋葉出版 (1985).
遅延フィルタの章がある．

[26] Heekyung Kang Youn and I. Richards, "On the general definition of convolution for distributions.", J. Korean Math. Soc., **17**, pp. 13–37 (1980).
文献 [5] で参考文献として挙げているのがこれなのだが，[5] と積と畳み込みの定義が異なる．

[27] Heekyung Kang Youn and I. Richards, "On the general definition of convolution for several distributions.", J. Korean Math. Soc., **17**, pp. 161–168 (1981).

[28] E. クライツィグ, "フーリエ解析と偏微分方程式", 培風館, 第 8 版 (2003).
特にお勧めしません．

[29] 貴家仁志, "ディジタル信号処理", 昭晃堂 (1997).

[30] 吉田耕作, "復刊 超函数論", 共立出版 (2009).
超関数を物理で使用する人向けの入門書という感じか？

[31] 吉野邦生, 荒井隆行, "ディジタル信号と超関数", 海文堂出版 (1995).
信号処理の数学を超関数によって説明している文献を探しているときに見つけた本．タイトルを見たときにズバリこれだと感じたが基本は普通のディジタル信号処理の説明で，それに数学的背景として超関数の説明があるというもので，私が望んでいた超関数として信号処理の理論を組み立てるという本ではなかった．

[32] M.J. ライトヒル, “フーリエ解析と超関数”, ダイヤモンド社 (1975).
シュワルツとは異なり関数列の極限として超関数を定義している．

[33] 西村敏男, 難波完爾, “公理論的集合論”, 共立出版 (1985).
がっつりした集合論の本． 学部 3，4 年生から修士課程向きらしい（といっても数学科の話であろう）． 付章として記号論理学も解説されている．なぜか付章には注釈が多くしかも面白い．しばらく絶版で私は 12000 円で古本を購入したが，復刊されて現在は 5000 円ほどという 比較的手ごろ（笑）な値段で手に入る．日本語の公理論的集合論の本は少ないらしいので，みんな買えよ．

[34] 朝永振一郎, “量子力学 II”, みすず書房, 第 2 版 (1997).
[14] の続き． シュレーディンガーの方程式がやっと登場し，こちらの方が量子力学の教科書という感じがする．全部読んだはずやのに内容は忘れた．

桐島、研究やめるってよ

「将来は数学者ですか？」
「え？うーん…どうかな」
「リーマン予想を解決ですか？」
「えー!? いや…うーん…」
「フィールズ賞ですか？」
「うーん………
でも、それはないかな」
「うん？」
「数学者は、無理」
「え？じゃあ、なんでこんな高い本をたくさん買って、わざわざ数学…」
「それは…うーん…でも、時々ね、
数学者が今取り組んでる問題と今自分が考えてる問題が
つながってるんだなって思う時があって、
で…いやホントにたまになんだよ、たまになんだけど、
ふふふ…いやそれはこうなんか、へへへ…」